

An outlier-adaptive forecast method for realized volatilities

Ji Won Shin^a · Dong Wan Shin^{a,1}

^aDepartment of Statistics, Ewha Womans University

(Received November 28, 2016; Revised January 30, 2017; Accepted March 30, 2017)

Abstract

We note that the dynamics of realized volatilities (RVs) are near the boundary between stationarity and non-stationarity because RVs have persistent long-memory and are often subject to fairly large outlying values. To forecast realized volatility, we consider a new method that adaptively use models with and without unit root according to the abnormality of observed RV: heterogeneous autoregressive (HAR) model and the Integrated HAR (IHAR) model. The resulting method is called the IHAR-O-HAR method. In an out-of-sample forecast comparison for the realized volatility datasets of the 3 major indexes of the S&P 500, the NASDAQ, and the Nikkei 225, the new IHAR-O-HAR method is shown superior to the existing HAR and IHAR method.

Keywords: realized volatility, HAR model, additive outlier, volatility forecasting

1. 서론

실현변동성(realized volatility; RV)은 고빈도 자료를 이용한 금융지수의 리스크를 나타내는 추정치이며, 본 논문은 실현변동성의 예측을 목적으로 한다. 기존의 연구들에서는 실현변동성을 정상계열이라고 평가해왔으며 실현변동성의 예측모형으로 여러 가지 정상성 모형들을 개발해왔다. 실현변동성의 정상성 여부를 판단하는 단위근 검정결과는 Lin 등 (2011), Park과 Shin (2014), Szakmary 등 (2003) 등에서 확인할 수 있으며 모두 augmented Dickey Fuller (ADF) 검정결과 RV는 정상계열이라는 결과를 얻었음을 확인할 수 있다. 최근 Cho와 Shin (2016)은 RV가 비정상 계열이라 평가하고 RV 예측모형으로 비정상 계열 모형인 integrated heterogeneous autoregressive (IHAR) 모형을 제시하였다. 그들은 실현변동성의 모형으로 많이 사용되는 Corsi (2009)의 heterogeneous autoregressive (HAR) 모형보다 IHAR 모형의 실현변동성 예측력이 더 우수할 수 있음을 밝힌 바 있다.

따라서 실현변동성이 비정상계열과 정상계열의 중간영역에 위치한다고 볼 수 있다. 이는 장기기억성과 이상치가 실현변동성에 공존하기 때문이다. 실현변동성의 큰 특징으로 장기기억성을 들 수 있다. 실현변동성의 표본자기상관함수(sample auto correlation function; SACF)가 시차가 증가함에 따라 느리

This research was supported by a grant from the National Research Foundation of Korea (NRF) (2016R1A2B4008780).

¹Corresponding author: Department of Statistics, Ewha Womans University, 52, Ewhayodae-gil, Seodaemun-gu, Seoul 03760, Korea. E-mail: shindw@ewha.ac.kr

계 감소함은 Andersen 등 (2001), Ding과 Granger (1996) 등의 여러 논문에 보고되고 있으며 Lamoureux와 Lastrapes (1990)와 Lobato와 Velasco (2000)의 논문에서 비정상계열과 장기기억성이 관련이 있음을 확인할 수 있고, Mikosch와 Stáricá (2004)는 정상계열이면서 장기기억성을 지닌 것과 비정상계열인 것의 차이를 통계량으로 구분하기가 쉽지 않음을 언급하였다. 다수의 논문들로부터 실현변동성의 장기기억 특성 때문에 단위근 검정결과가 비정상 계열에 가까워짐을 확인할 수 있다. 반면, 실현변동성에 존재하는 이상치는 단위근 검정에서와 반대의 결과를 유도한다. Franses와 Haldrup (1994)는 이상치의 존재가 정상계열인 것처럼 보이게 하는 효과가 있어서 이상치가 존재하면 ADF 검정이 과각 현상을 보임을 밝혔다. 이상치와 관련된 부분이 실현변동성이 단위근 계열과 정상계열의 중간영역에 위치하는데 결정적인 요인이 될 수 있음에 주목하였다.

실현변동성에는 이상치라 할 수 있는 상당히 큰 값이 자주 관측된다. Franses와 Ghijsels (1999)는 금융 변동성에 이상치가 존재하며 이 이상치를 수정한 후 GARCH 모형을 적합하였을 때 이상치 수정 전 GARCH 모형을 적합한 것에 비해 예측력 개선이 따른다고 하였으며, Park (2002)의 논문에서도 금융 변동성에 존재하는 이상치 때문에 예측력이 떨어지는 사례가 있으며 따라서 이상치에 덜 영향을 받는 robust GARCH (RGARCH) 모형을 제안하였다. McAleer (2005)은 이상치가 있으면 금융 변동성 모형의 구조에 영향을 미치고 숨은 변동성(hidden volatility)이 나타남을 언급하였고 Poon과 Granger (2005)의 논문에서도 이상치는 변동성추정에 큰 영향을 미치기 때문에 제거하거나 더미 변수를 사용하거나 이상치에 덜 민감한 확률 변동성(stochastic volatility; SV) 모형을 사용하는 것이 좋다고 언급하였다. 이 논문들을 통해 실현변동성에는 이상치가 존재하며 이상치를 고려할 때 예측력 개선이 기대됨을 알 수 있다.

본 논문에서는 실현변동성의 장기기억특성과 이상치의 존재들로 인해 정상계열과 비정상계열의 경계에 위치한다는 특성을 이용하여 새로운 실현변동성 예측방법을 제안한다. 이상치들이 없는 데이터 구간에서는 단위근 부과모형을 바탕으로 하되 이상치의 관측 여부에 따라 단위근 부과하지 않은 모형을 선택적으로 사용하는 IHAR-O-HAR 방법을 제안하며 이 새로운 방법이 기존의 방법 보다 예측력이 우수함을 확인한다.

본 논문은 다음과 같이 구성된다. 2절에서 이상치에 관한 기본 분석을 다루고, 3절에서 실현변동성이 정상계열과 비정상 계열의 경계에 위치함을 보인다. 4절에서 HAR 모형과 IHAR 모형을 혼합하는 새로운 모형 IHAR-O-HAR 방법을 소개하며, 5절에서 새로 제안한 모형과 기존의 모형의 예측력을 비교하고 6절에서 요약 및 결론으로 마무리한다.

2. 이상치에 관한 기본 분석

실현변동성은 금융 시계열의 변동성 추정치이다. 일 중 고빈도 자료에 근거한 변동성 추정이므로 고빈도 자료를 사용하지 않은 추정치들에 비해 더 효율적이며 금융자산 리스크의 평가나 자산 포트폴리오 구성 또는 그 자산을 기반으로 파생한 상품의 가격을 결정하는 데에 유용하게 쓰인다. 실현변동성을 구하는 방법은 다음과 같다. 주식 등 어떤 금융자산의 t 일 증가를 P_t 라 하면 로그가격은 $p_t = \ln P_t$, 일일 로그수익률은 $r_t = p_t - p_{t-1}$ 로 나타낼 수 있고, 일 중 M 개 등간격의 로그수익률은

$$r_{t-j\Delta} = p_{t-j\Delta} - p_{t-(j-1)\Delta}, \quad j = 1, 2, \dots, M, \Delta = \frac{1}{M}$$

으로 나타낼 수 있다. 따라서 t 일의 실현변동성은 다음과 같다.

$$RV_t = \sqrt{\sum_{j=1}^M r_{t-j\Delta}^2}, \quad t = 1, 2, \dots$$

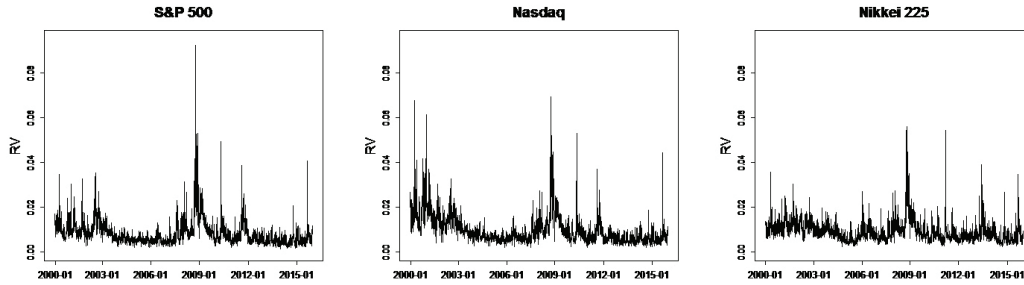


Figure 2.1. Realized volatilities (RVs).

Table 2.1. Basic statistics of RV

RV	<i>n</i>	Mean	se	sd	Min	Q1	Med	Q3	Max	Skew	Kurt
S&P 500	3984	84.64	0.89	56.33	13.49	50.40	70.57	100.23	924.37	3.51	24.22
Nasdaq	3988	98.23	1.00	62.94	21.12	56.81	78.61	120.15	693.09	2.48	10.50
Nikkei 225	3864	92.75	0.76	47.22	25.50	62.93	83.37	110.69	561.50	2.88	16.47

Unit = bp, 1 bp = 0.01%, The scale BP applies only for mean, se, sd, min, Q1, med, Q3 and max. RV = realized volatility.

실현변동성은 일반적으로 일 중 1분, 5분 또는 10분 간격의 고빈도 데이터를 사용한다. Andersen과 Bollerslev (1997)는 일일 변동성의 추정치로 5분 간격 실현변동성이 적절한 추정치라 밝혔으며 따라서 본 논문에서도 5분 간격 실현변동성을 사용한다. 실현변동성 데이터로는 Oxford-Man Realized Library(<http://realized.oxford-man.ox.ac.uk/>)에서 구한 미국 주가 지수 2개와 일본 주가지수(S&P 500, Nasdaq, Nikkei 225)를 2000년부터 2015년까지 분석한다.

Franses와 Ghijssels (1999)논문에서 변동성에 기존의 모형을 적합시키면 적합 후 잔차의 침도가 높고, 이러한 현상을 발생시키는 이유 중의 하나가 이상치(additive outliers; AO)이며 이에 따라 이상치를 고려하는 변동성 모형을 제시하였다. 실제로 변동성의 하나인 실현변동성(realized volatility; RV)에서 기존의 프로세스와 확연히 차이가 나는 이상치를 자주 관측 할 수 있었다. 다음 Figure 2.1은 2000년부터 2015년까지의 미국 주가 지수 2개와 일본 주가지수(S&P 500, Nasdaq, Nikkei 225) 세 가지 지수의 실현변동성 시도표이다.

Figure 2.1의 실현변동성을 보면 눈에 띄게 큰 값을 갖는 이상치들을 볼 수 있다. 금융위기와 같은 변동성 장세에서는 그 리스크가 반영되어 실현변동성이 커지는데 세계금융위기 시점을 보면 이 같은 현상을 확인할 수 있다. 2007년에서 2008년 구간이 미국의 서브프라임 모기지(subprime mortgage) 사태로 시작된 세계금융위기이며 이때 세 가지 지수 모두에서 큰 변동성을 관측 할 수 있다. 세계금융위기 이후에도 미국과 일본 공통적으로 2011년에 중간 규모의 변동성 장세가 있었음을 확인할 수 있다. 변동성 장세에서는 Figure1에서 확인한 바와 같이 실현변동성에 이상치가 자주 발생함을 볼 수 있다. 또한 이 지수들에 대해 한달(22일)간 시차데이터를 사용하는 AR(22)모형 적합 후 잔차의 침도가 S&P 500은 53.16, Nasdaq는 34.30, Nikkei 225는 20.47로 매우 큼을 확인 하였다. 따라서 실현변동성에는 이상치가 존재하고 금융 실현변동성 예측에는 이러한 이상치를 고려할 필요가 있음을 확인할 수 있다.

Table 2.1은 세 가지 지수의 실현변동성에 대한 기초통계량이다. 연간 주식 개장일이 약 250일 정도로 2000년부터 2015년까지의 16년간의 데이터이므로 데이터 관측 수 *n*은 대략 4,000개이다. 평균(mean)은 80-90 bp(1 bp = 0.01%) 정도로 각 지수의 일일변동의 평균 표준편차는 0.8-0.9%임을

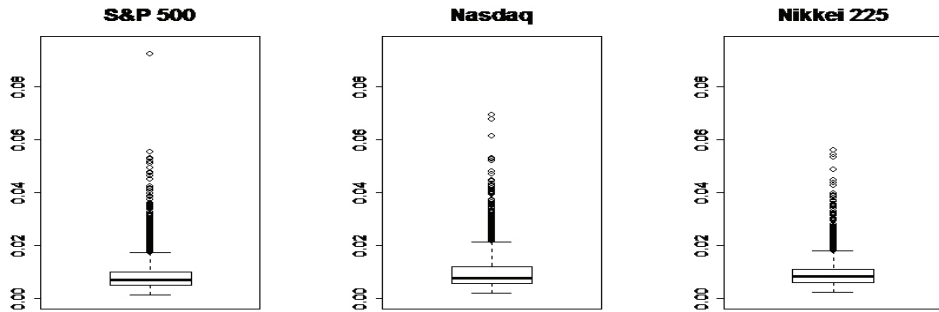


Figure 2.2. Box plots of realized volatilities.

알 수 있다. 기초통계량에서도 이상치의 존재를 확인 할 수 있는데 최솟값(min)과 제1사분위수(Q1)의 차이가 30–50 bp 정도인 것에 비해 제3사분위수(Q3)와 최댓값(max)의 차이는 400–800 bp 정도로 훨씬 크고 왜도(skewness) 또한 2–4 정도이므로 오른쪽으로 이상치가 상당히 많이 존재함을 확인 할 수 있다. 첨도(kurtosis)는 10–30 정도로 상당한 중심 집중 분포를 나타낸다. 실현변동성의 분포는 정규분포에 비해 오른쪽으로 상당히 긴 꼬리를 가지는 중심 집중 분포임을 알 수 있다.

Figure 2.2는 세 가지 지수의 실현변동성의 상자그림(box plot)이다. 상자그림에서 제3사분위수보다 사분위 범위(IQR)의 1.5를 넘어서는 다수의 이상점 위치를 확인 할 수 있다. 이상치가 포함된 데이터로 모형을 적합하게 되면 모수추정치가 이상치의 방향으로 편이 되는 문제가 발생한다. 또 이렇게 편이 된 모수 추정치로 예측한다면 예측력 또한 저하 될 수밖에 없다.

미국의 서브프라임 모기지 사태와 같이 갑작스럽게 불안정한 시장이 되면 리스크의 크기를 나타내는 실현 변동성은 이상치라고 볼 수 있을 만한 값이 발생한다. 보통 데이터 분석에서 이상치가 발견되면 분석 대상에서 제외시키는 경우가 많은데 실현변동성 예측의 경우 이 값은 타당성이 결여된 값이 아니고 실현 변동성 분석에서 매우 의미 있는 값이기 때문에 이상치를 제외하고 분석하는 것은 옳지 않다. 이상치를 제외하는 대신 이상치가 관측되었을 때 그 시점 이후의 실현변동성 예측에 다른 방법을 적용하는 것을 고려해 볼 수 있으며 이를 통해 예측력 개선을 기대할 수 있다.

3. 실현변동성의 정상 계열과 비정상 계열의 경계 특징

실현변동성 예측 모형으로 Corsi (2009)의 HAR 모형이 보편적으로 사용되어왔다. HAR 모형은 주간, 월간의 이동평균(moving average)을 넣은 단순 회귀분석 모형으로 계산이 용이하고 실현변동성의 주요 특성인 장기기억성을 적은 개수의 모수로 반영한 효율적인 모형이다. HAR 모형은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$RV_{t+1} = \beta_0 + \beta_1 RV_t^d + \beta_2 RV_t^w + \beta_3 RV_t^m + w_{t+1},$$

여기서 w_t 는 오차 항을 나타내며 RV_t^d 는 일일 실현 변동성 즉, RV_t 이고 RV_t^w , RV_t^m 는 다음과 같이 주간, 월간 이동평균이다.

$$RV_t^w = \frac{1}{5} (RV_t + RV_{t-1} + \dots + RV_{t-4}),$$

$$RV_t^m = \frac{1}{22} (RV_t + RV_{t-1} + \dots + RV_{t-21}).$$

Table 3.1. Estimation results of heterogeneous autoregressive model

	S&P 500	Nasdaq	Nikkei 225
Const, $\beta_0 \times 10^4$	4.158*** (0.925)	4.180*** (1.045)	6.901*** (1.222)
Day, β_1	0.451*** (0.019)	0.449*** (0.018)	0.470*** (0.019)
Week, β_2	0.339*** (0.028)	0.288*** (0.029)	0.272*** (0.029)
Month, β_3	0.161*** (0.022)	0.219*** (0.023)	0.185*** (0.024)
Sum of Coef	0.951	0.957	0.926

Significance code: *** for 0.1% levels. Numbers in parentheses are OLS standard errors.

Table 3.2. Unit root test results

	ADF (AIC order)	KPSS	\hat{d} (se)	GHP
S&P 500	-4.861** (25)	2.520**	0.596 (0.03)	3.233**
Nasdaq	-3.870** (33)	8.885**	0.546 (0.03)	1.545*
Nikkei 225	-6.536** (21)	3.423**	0.482 (0.03)	-0.588

Significance codes: ***, **, * for 0.1%, 1% and 10% levels.

Table 3.1는 세 가지 지수의 HAR 모형 적합 결과이다.

Table 3.1에서 HAR 모형의 모든 계수의 추정치들이 0.1%에서 유의함을 확인 할 수 있고, 이는 실현 변동성의 전기 일별, 주별, 월별의 값이 예측에 상당한 정보를 준다는 것을 의미한다. 이 표에서 일별, 주별, 월별의 계수의 합이 약 0.95로 1에 매우 근접함을 알 수 있는데, 이것은 실현변동성이 단위근을 가지는 비정상 계열에 가깝다는 것을 의미한다. Nikkei 225는 다른 지수에 비해 상대적으로 계수 합이 0.926으로 낮았다. 단위근 여부 판단을 위해 단위근 검정을 실시하였다. 단위근 검정으로는 Dickey와 Fuller (1979)의 ADF 검정, Kwiatkowski 등 (1992)의 KPSS 검정, Geweke와 Porter-Hudak (1983)의 GPH 검정을 사용하였고 검정결과를 Table 3.2에 요약하였다.

Table 3.2을 보면 최소 AIC 차수의 ADF 검정결과에서 모두 1% 유의수준에서 비정상 계열이라는 귀무가설을 기각하고 정상계열이라는 결과를 얻었다. 반면 KPSS 검정결과 세 가지 지수 모두 1% 유의수준에서 정상계열이라는 귀무가설을 기각하고 비정상계열이라는 상반된 결과를 얻었다. 미국 두 가지 지수에서 부분누적모수 \hat{d} 의 값은 대체로 0.5-0.6 정도의 값을 가짐을 확인할 수 있다. 이때, $d > 0.5$ 이상의 부분누적 계열은 비정상계열이므로 S&P 500과 Nasdaq는 비정상 계열에 더 가깝다는 것을 확인 할 수 있고, Nikkei 225는 $\hat{d} > 0.5$ 이므로 정상계열에 더 가깝다고 할 수 있다. GPH 검정은 추정된 부분누적모수 \hat{d} 의 유의성을 평가하는 검정으로 $((\hat{d} - 0.5)/se(\hat{d}))$ 와 같이 계산 할 수 있으며 그 결과 S&P 500과 Nasdaq의 비정상성이 유의함을 확인 할 수 있었다. Nikkei 225의 경우 부분누적모수 \hat{d} 가 0.482로 추정되기는 하였지만 GPH 검정결과가 유의하지 않으므로 정상성에 대한 약한 증거가 되었다.

이상의 분석은 실현변동성 계열이 단위근 계열과 정상 계열의 경계 영역에 위치함을 시사해 준다. 따라서 상황에 따라 실현변동성의 모형 적합에 단위근을 부과한 모형과 부과하지 않은 모형을 선택적으로 사용하는 것이 예측력을 높이는 하나의 방법이 될 수 있다.

4. IHAR-O-HAR 예측 방법

2절에서 실현변동성 데이터에 이상치가 자주 관측된다는 것을 확인 하였고 3절에서 실현변동성에 단위근 모형과 비단위근 모형을 선택적으로 사용하는 것이 예측력을 향상 시킬 수 있는 가능성을 확인 하였다. 이 절에서는 이상치에 따른 단위근 부과 모형과 부과하지 않은 모형의 선택적 사용에 의한 실현변동성을 예측하는 새로운 방법을 제시한다.

우선적으로 IHAR 모형은 HAR 모형에 단위근을 부과한 모형으로 계수합을 1로 고정된 모형이며 다음과 같이 나타낸다.

$$RV_{t+1} = \beta_0 + \beta_1 RV_t^d + \beta_2 RV_t^w + \beta_3 RV_t^m + w_{t+1}, \quad \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1.$$

IHAR 모형의 실현변동성 예측력은 HAR 모형보다도 예측력이 우수 할 수 있음은 Cho와 Shin (2016)의 논문에서 확인 할 수 있다. 따라서 실현변동성의 예측 모형으로 예측력이 높은 IHAR 모형을 실현변동성 예측 기본모형으로 채택하였다. 다만, IHAR 모형 사용 시 주의할 점은 IHAR 모형은 실현변동성이 비정상 계열임을 기본 가정으로 하고 있기 때문에 HAR 모형에 비해 전 시차의 값에 영향을 지속적으로 받는다는 점이다. 이 특성으로 인해 IHAR 모형은 이상치가 발생하면 그 다음 예측 값에 있어 HAR 모형보다 더 큰 편의를 가지게 된다. 따라서 예측력이 좋은 IHAR 모형으로 예측을 하다가 이상치가 발생했을 때 다른 조치를 취해준다면 전반적인 예측력이 더 개선 될 여지가 있다.

Figure 4.1은 대표적인 예로 큰 변동이 발생한 세계 금융 위기 시점 2008년 10월 10일을 기준으로 $h = 1, 2, \dots, 250$ 일 이후 실현변동성을 HAR 모형과 IHAR 모형으로 예측한 결과이다. HAR 모형에 의한 예측은 2008년 10월 10일 이후 250차시까지 부드럽게 지속적으로 감소하는 모습을 보이고 있으며, IHAR 모형은 2008년 10월 10일 이후 HAR 보다는 큰 값을 가지지만 HAR 모형의 예측 경향처럼 감소하는 경향을 살짝 보였다가 거의 비슷한 큰 값으로 유지되는 것을 확인할 수 있다. 이 그림에서 극단적인 실현변동성이 발생하면 IHAR 모형이 HAR 모형보다 h 차시 예측에서 큰 값을 가지는 사실을 확인할 수 있었으며 예측 시점에 발생한 극단 값의 영향에서 쉽게 벗어나지 못함을 확인하였다. HAR 모형은 AR(22) 모형의 다른 표현으로 정상계열 예측을 바탕으로 하고 있으므로 평균으로의 강한 회귀를 띤다. 따라서 이렇게 큰 값이 발생하였을 때는 HAR 모형이 이후 차츰 줄어드는 경향을 더 잘 반영할 수 있다. 반면 IHAR 모형은 비정상계열 예측을 바탕으로 하여 큰 관측 값에 예민하게 반응하여 지속적으로 큰 예측 값을 얻게 되고 예측 시점에 일시적인 큰 실현변동성이 발생 되었을 때 예측오차가 커지게 됨을 확인할 수 있었다.

따라서 예측 시점의 실현변동성이 이상치라고 판단되면 IHAR 모형대신 HAR 모형을 적합시키는 것이 더 적절하다. 이상점으로 판정하는 방법은 변수의 분포에서 극단 값을 찾는 방법과 모형적합 후 잔차의 분포에서 극단 값을 찾는 방법이 있다. 일반적으로 표준화 잔차의 분석에서 잔차의 평균으로부터 지나치게 멀리 떨어져 위치하는 값을 이상점으로 판단하며 본 연구에서도 잔차의 분포에서 극단 값을 찾는 방법을 이용하였다. 먼저 이상치로 판단하는 기준은 다음과 같다.

시점 T 에서의 변동성이 그 시점까지의 자료를 사용하여 계산한 표준화 잔차가 일정 기준보다 크면, 즉 $|e_T| > \phi^{-1}(0.995)s_T$ 이면, 이상치라고 판단한다.

여기서 $\phi^{-1}(p)$ 는 표준 정규분포의 누적확률 p 의 분위수(quantile)이고 $e_t = RV_t - (\hat{\beta}_{0,t-1} + \hat{\beta}_{1,t-1}RV_t^d + \hat{\beta}_{2,t-1}RV_t^w + \hat{\beta}_{3,t-1}RV_t^m)$, $s_T^2 = 1/T \sum_{t=1}^T e_t^2$ 이고 $\hat{\beta}_{0,t}, \hat{\beta}_{1,t}, \hat{\beta}_{2,t}, \hat{\beta}_{3,t}$ 는 T 시점에서 $1, 2, \dots, T$ 시점에서의 데이터를 이용하여 구한 HAR 모형의 계수 $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 의 추정치이다. 즉, T 시점의 HAR 모형 RV 의 1차시 예측치와 실제 RV 의 차이의 절댓값이 $T - 1$ 시점까지의 HAR 모형 잔차 기준으로 상위 1%에 해당하는 극단 값일 때 이상치라고 판단하는 것이다. RV 의 예측력을 높이는 새로운 방법으로

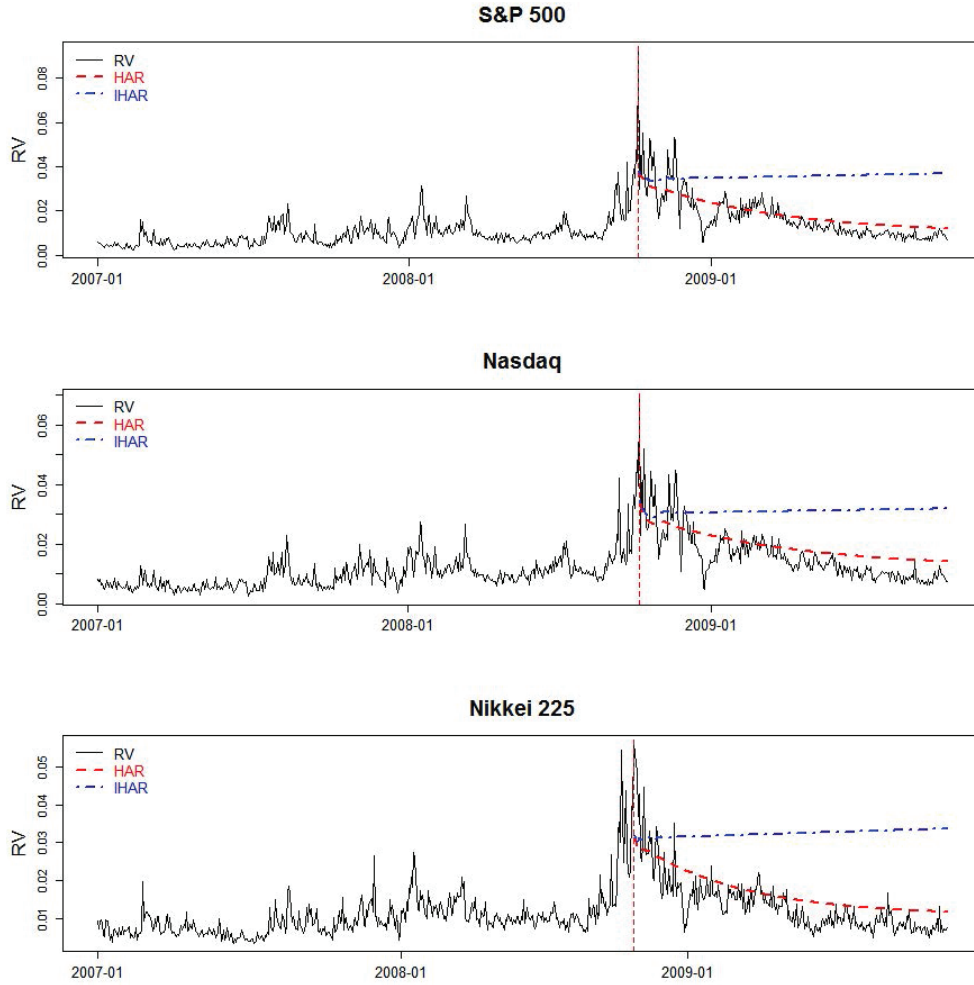


Figure 4.1. HAR and IHAR forecasts. HAR = heterogeneous autoregressive; IHAR = integrated heterogeneous autoregressive; RV = realized volatility.

IHAR 모형을 기본으로 하되 시점 T 에서의 실현변동성이 이상치라 판단되면 $T + h$ 시점을 예측하기 위해서 IHAR 모형 대신 HAR 모형을 사용하는 것을 고려할 수 있다. 이를 정리하면 다음과 같다.

모든 h 단계 예측에 대해 $|e_T| > \phi^{-1}(0.995)s_T$ 이면 HAR 모형을 사용하여 예측하고, $|e_T| \leq \phi^{-1}(0.995)s_T$ 이면 IHAR 모형을 사용하여 예측한다.

Figure 4.2는 HAR 모형의 잔차를 나타낸 것으로 전체 데이터를 이용하여 후반 50% 지점부터 매 시점 이상점이라고 판단된 잔차에는 동그라미 점을 찍어 표시하였다. 세계 금융 위기였던 2008년-2009년 부근은 잔차의 절댓값이 다른 기간에 비해서 크게 나타남을 확인할 수 있으며, 금융위기 기간에는 모형으로 실현변동성을 예측하는 것이 힘들고, 예측오차가 커질 수밖에 없음을 확인할 수 있다. 이상점이 2008년-2009년 부근에서 집중적으로 발견됨을 확인할 수 있다.

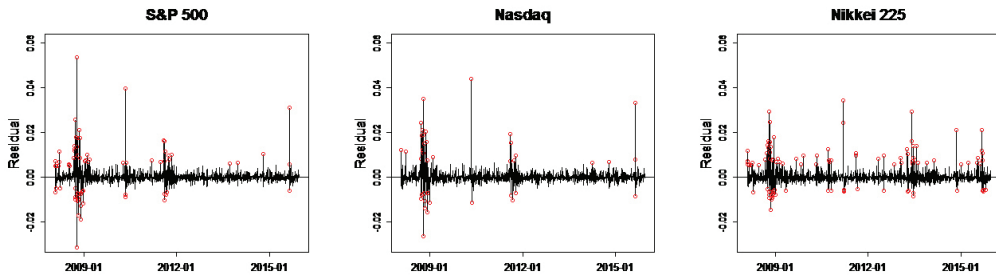


Figure 4.2. Outliers in terms of residuals.

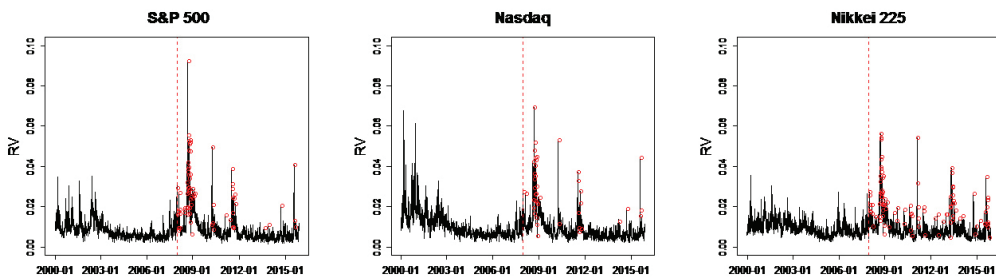


Figure 4.3. Outliers in RVs. RV = realized volatility.

Figure 4.3은 HAR 모형의 잔차에서 이상점으로 평가된 시점의 실현변동성은 어떤 특성을 가졌는지 알아보기 위해 실현변동성의 시도표에 이상점으로 판단된 지점을 동그라미로 표시한 것이다. 실현변동성이 급격하게 커진 지점에서는 전부 이상점으로 판단됨을 시각적으로 확인할 수 있으며, 큰 실현변동성이후 이상점으로 판단이 지속되는 경향을 확인할 수 있었다. 이 그림에서 실현변동성에 일시적인 극단값들이 빈번하게 발생함을 확인할 수 있다.

이렇게 예측시점 T 에서의 실현변동성 관측 값이 크면 $T+h$ 시점의 예측에 HAR 모형을 이용하여 다시 작은 값으로 회귀할 수 있도록 하고 예측시점 T 에서의 실현변동성 관측 값이 크지 않으면 IHAR 모형으로 예측하도록 하면 예측력의 개선이 가능하다. 이 방법을 IHAR-O-HAR라고 칭하며 이 방법의 예측 결과는 다음 장에서 제시한다.

5. 예측력 비교

IHAR-O-HAR 방법의 예측력이 임의보행모형인 random walk (RW) 모형과 앞서 소개한 HAR 모형과 IHAR 모형에 비해 얼마나 개선되는지 확인해 보기위해 예측력 비교분석을 실시하였다. 데이터로는 2000년부터 2015년까지의 3개의 금융지수의 85%부터 사용하여 적합 시켰으며, 시점 T 가 증가함에 따라 순차적으로 적합 데이터 수를 늘려나갔다. 표본 외(out-of-sample) 예측력 비교척도로는 mean absolute errors (MAE), root mean squared errors (RMSE), mean absolute percentage error (MAPE)

3가지를 사용하였으며 $h = 1$ 단계 예측을 예로 들면 각 수식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{MAE} &= m^{-1} \sum_{T=n-m}^{n-1} \left| \widehat{RV}_{T+1|T} - RV_{T+1} \right|, \\ \text{RMSE} &= \sqrt{m^{-1} \sum_{T=n-m}^{n-1} \left(\widehat{RV}_{T+1|T} - RV_{T+1} \right)^2}, \\ \text{MAPE} &= m^{-1} \sum_{T=n-m}^{n-1} \frac{\left| \widehat{RV}_{T+1|T} - RV_{T+1} \right|}{RV_{T+1}}, \end{aligned}$$

여기서 $\widehat{RV}_{T+1|T}$ 는 시점 T 에서 예측한 1일 후 실현 변동성이며 n 은 데이터의 크기로 약 4,000, m 은 전체 데이터의 최근 15%에 해당하는 $m = 0.15n$ 으로 약 600을 값으로 가진다. T 는 전체 데이터의 앞부분 85% $T = 0.85n$ 으로 약 3,400부터 시작되는 시점을 나타낸다. HAR 방법과 IHAR 방법에 대한 IHAR-O-HAR 방법의 $h = 1, 5, 22, 66, 132, 264$ 단계 표본 외 상대효율(out-of-sample relative efficiencies)을 Figure 5.1에 나타내었다.

RW 방법에 대한 IHAR-O-HAR 방법의 MAE 상대효율은 다음과 같다

$$\text{MAE 상대효율} = \frac{\text{RW의 예측 MAE}}{\text{IHAR-O-HAR의 예측 MAE}}.$$

HAR 방법에 대한 IHAR-O-HAR 방법의 MAE 상대효율은 분자만 HAR의 예측 MAE로 바꾼 것으로 다음과 같다.

$$\text{MAE 상대효율} = \frac{\text{HAR의 예측 MAE}}{\text{IHAR-O-HAR의 예측 MAE}}.$$

IHAR 방법에 대한 IHAR-O-HAR 방법의 상대효율 또한 분자만 IHAR의 예측 MAE로 바뀌면 되고, RMSE와 MAPE의 상대효율은 MAE 상대효율 식에서 MAE값 대신 RMSE와 MAPE를 이용하여 구할 수 있다. 상대효율이 1이상이면 IHAR-O-HAR 방법의 예측력이 각각 RW 방법이나 HAR 방법, IHAR 방법보다 더 좋다는 것을 의미한다.

Figure 5.1 상단의 그림 3개는 RW 방법에 대한 IHAR-O-HAR 방법의 MAE, RMSE, MAPE 상대효율이다. 마찬가지로 중간의 그림은 HAR방법에 대한 IHAR-O-HAR 방법의 상대효율이며 하단의 그림은 IHAR방법에 대한 IHAR-O-HAR 방법의 상대효율이다. 그림에서 꺾은 선으로 나타난 상대효율은 모든 그림에서 거의 수평선 1위에 위치하고 있다. 이것은 IHAR-O-HAR 방법이 RW 방법, HAR 방법과 IHAR 방법보다 예측력이 전반적으로 우수한 모형을 나타낸다. 또 예측 차시 h 가 1, 5, 22, 66으로 점점 커짐에 따라서 상대효율이 커지는 경향을 확인할 수 있는데 이것은 단기 예측보다 장기 예측에서 IHAR-O-HAR 방법의 예측력 개선 효과가 뛰어나다고 볼 수 있다.

Nikkei 225같은 경우에는 HAR 방법에 대한 IHAR-O-HAR 방법의 상대효율에서 다른 미국 지수 S&P 500과 Nasdaq에 비해서 예측력 개선이 덜 된 것을 확인할 수 있는데, 이는 Nikkei 225가 앞선 기초 분석에서 다른 지수들에 비해서 HAR계수의 합이 1에 덜 가깝고 단위근 검정 결과 및 부분누적 모수의 추정치 결과가 정상계열에 좀 더 가깝게 나온 것과 관련이 있다. 정상계열에 가깝기 때문에 HAR 모형이 잘 맞는 편이며 따라서 IHAR 모형을 바탕으로 한 IHAR-O-HAR 방법의 결과가 상대적으로 다른 두 지수에 비해 덜 우수한 것이다. 비정상에 더 가까운 계열일수록 IHAR-O-HAR 방법의 개선효과가 크지만 Nikkei 225와 같이 정상에 가까운 계열도 정상성에 바탕을 둔 HAR 모형 보다 IHAR-O-HAR 방법의 결과에서 예측력이 개선됨을 확인할 수 있었으므로, 비정상계열에 가까운 실현변동성과 정상계열

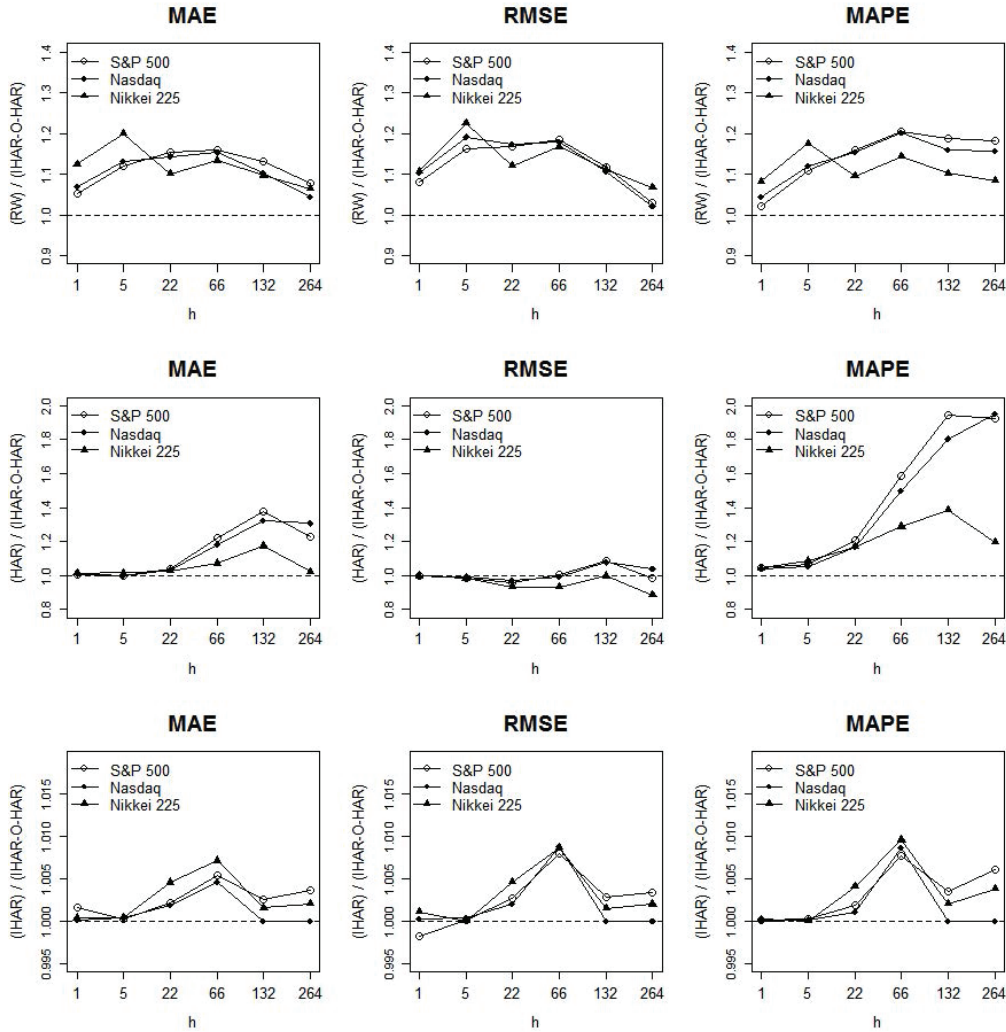


Figure 5.1. Efficiencies of IHAR-O-HAR forecasts relative to RW, HAR and IHAR forecasts. RW = random walk; HAR = heterogeneous autoregressive; IHAR = integrated heterogeneous autoregressive; IHAR-O-HAR = IHAR-Outlier-HAR.

에 가까운 실현변동성 모두 이상치를 고려한 IHAR-O-HAR 방법의 예측력이 우수함을 확인할 수 있었다.

6. 결론

S&P 500, Nasdaq과 Nikkei 225 지수의 실현변동성 데이터 분석을 통해 실현변동성에 상당히 값이 큰 이상치가 다수 존재함을 확인하고 그 이상치가 실현변동성 예측에 영향을 미칠 수 있음을 확인하였다. 또한 다양한 단위근 검정을 통해 실현변동성이 정상계열과 비정상계열의 경계에 위치한다는 것을 확인하였다. ADF 검정의 결과는 모두 정상계열이었으며, KPSS 검정의 결과는 모두 비정상계열이었고,

GPH 검정 결과는 S&P 500, Nasdaq은 비정상 계열에 가까운 것으로 Nikkei 225는 정상계열에 가깝지만 크게 유의하지 않은 결과를 얻었다. 이상치가 관측될 때 비정상성을 가정한 모형인 IHAR 모형은 정상성을 바탕으로 한 HAR 모형에 비해 이상치에 큰 영향을 받아 비정상적인 장기 예측 결과를 초래함을 확인하였다. 이를 바탕으로 이상치 관측 여부에 따라 단위근이 있는 모형과 없는 모형을 선택적으로 사용하는 새로운 IHAR-O-HAR 방법을 제안하였다. 전반적으로 예측력이 더 우수한 단위근이 부과된 IHAR 모형을 기본으로 사용하되 이상치가 관측되면 단위근이 부과되지 않은 HAR 모형을 사용하는 방법이다. 세 가지 지수의 표본 외 예측력 비교에서 IHAR-O-HAR 방법의 예측력이 기존의 RW방법, HAR 방법이나 IHAR 방법의 예측력보다 우수함을 확인하였다.

References

- Andersen, T. G., Bollerslev, T., Diebold, F. X., and Ebens, H. (2001). The distribution of realized stock return volatility, *Journal of Financial Economics*, **61**, 43–76.
- Andersen, T. G. and Bollerslev, T. (1997). Heterogeneous information arrivals and return volatility dynamics: uncovering the long-run in high frequency returns, *The Journal of Finance*, **52**, 975–1005.
- Cho, S. and Shin, D. W. (2016). An integrated heteroscedastic autoregressive model for forecasting realized volatilities, *Journal of the Korean Statistical Society*, **45**, 371–380.
- Corsi, F. (2009). A simple approximate long-memory model of realized volatility, *Journal of Financial Econometrics*, **7**, 174–196.
- Dickey, D. A. and Fuller, W. A. (1979). Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root, *Journal of the American Statistical Association*, **74**, 427–431.
- Ding, Z. and Granger, C. W. (1996). Modeling volatility persistence of speculative returns: a new approach, *Journal of Econometrics*, **73**, 185–215.
- Franses, P. H. and Ghijssels, H. (1999). Additive outliers, GARCH and forecasting volatility, *International Journal of Forecasting*, **15**, 1–9.
- Franses, P. H. and Haldrup, N. (1994). The effects of additive outliers on tests for unit roots and cointegration, *Journal of Business & Economic Statistics*, **12**, 471–478.
- Geweke, J. and Porter-Hudak, S. (1983). The estimation and application of long memory time series models, *Journal of Time Series Analysis*, **4**, 221–238.
- Kwiatkowski, D., Phillips, P. C., Schmidt, P., and Shin, Y. (1992). Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root: how sure are we that economic time series have a unit root?, *Journal of Econometrics*, **54**, 159–178.
- Lamoureux, C. G. and Lastrapes, W. D. (1990). Persistence in variance, structural change and the GARCH model, *Journal of Business and Economic Statistics*, **8**, 225–234.
- Lin, X., Fei, F., and Wang, Y. (2011). Analysis of the efficiency of the Shanghai stock market: a volatility perspective, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **390**, 3486–3495.
- Lobato, I. N. and Velasco, C. (2000). Long memory in stock-market trading volume, *Journal of Business & Economic Statistics*, **18**, 410–427.
- McAleer, M. (2005). Automated inference and learning in modeling financial volatility, *Econometric Theory*, **21**, 232–261.
- Mikosch, T. and Střarič, C. (2004). Nonstationarities in financial time series, the long-range dependence, and the IGARCH effects, *The Review of Economics and Statistics*, **86**, 378–390.
- Park, B. J. (2002). An outlier robust GARCH model and forecasting volatility of exchange rate returns, *Journal of Forecasting*, **21**, 381–393.
- Park, S. and Shin, D. W. (2014). Modeling and forecasting realized volatilities of Korean financial assets featuring long memory and asymmetry, *Asia-Pacific Journal of Financial Studies*, **43**, 31–58.
- Poon, S. H. and Granger, C. (2005). Practical issues in forecasting volatility, *Financial Analysts Journal*, **61**, 45–56.
- Szakmary, A., Ors, E., Kim, J. K., and Davidson, W. N. (2003). The predictive power of implied volatility: evidence from 35 futures markets, *Journal of Banking & Finance*, **27**, 2151–2175.

이상치에 근거한 선택적 실현변동성 예측 방법

신지원^a, 신동완^{a,1}

^a이화여자대학교 통계학과

(2016년 11월 28일 접수, 2017년 1월 30일 수정, 2017년 3월 30일 채택)

요약

실현변동성(RVs)이 지속적인 장기기억성과 상당히 큰 이상치의 존재로 인해 정상계열과 비정상계열의 경계에 위치한다는 것에 주목하였다. 실현변동성을 예측하기 위해 실현변동성 이상치 관측 유무에 따라 heterogeneous autoregressive (HAR) 모형과 integrated HAR (IHAR) 모형을 번갈아 사용하는 새로운 방법을 제안하였고, 이 방법을 IHAR-O-HAR라 칭하였다. 예측력 비교는 주요 지수인 S&P 500, Nasdaq과 Nikkei 225의 실현변동성 데이터를 이용하였으며 표본 외 예측력 비교에서 새로운 IHAR-O-HAR 방법은 RW 방법, HAR 방법이나 IHAR 방법의 예측력보다 우수함을 확인하였다.

주요용어: 실현변동성, HAR 모형, 이상치, 변동성 예측

이 논문은 한국연구재단(NRF)의 지원을 받아 수행된 연구임 (2016R1A2B4008780).

¹교신저자: (03760) 서울특별시 서대문구 이화여대길 52, 이화여자대학교 통계학과.

E-mail: shindw@ewha.ac.kr