Journal of the Korean Data & Information Science Society
2017, **28**(4), 783–796

http://dx.doi.org/10.7465/jkdi.2017.28.4.783
한국데이터정보과학회지

비김이 있는 연속적인 게임에 관한 연구†

조대현[1]

[1]인제대학교 사회과학대학 통계학과, 통계정보연구소

접수 2017년 6월 29일, 수정 2017년 7월 18일, 게재확정 2017년 7월 20일

요 약

Bernoulli 시행은 시행 결과가 성공 (success) 혹은 실패 (failure)처럼 매 번의 시행에서 두 가지만 나오는 독립시행을 말한다. 가위바위보 게임과 같이 두 사람이 벌이는 연속적인 경기인 경우 매번의 시합에서 둘 중 하나가 반드시 이기는 경우인 Bernoulli 시행이 아닌 게임도 존재한다. 각 종 게임의 경우 우리는 게임이 두 사람 중 한 사람이 게임을 이기고 끝날 때까지의 게임의 지속시간과 두 사람 중 특정한 사람이 최종 승리할 확률에 관심을 갖는다. 본 연구에서는 두 사람이 벌이는 연속적인 게임에서 k번을 먼저 이기면 최종 승리하는 시합인 경우 매 시합에서 비기는 경우가 있는 시합과 비김이 없는 시합에 대하여 참가한 두 사람의 각각 최종 승리할 확률과 시합이 끝날 때까지의 기대 게임수를 구하였다. 본 연구 결과를 이용하면 비김이 있거나 없는 연속적인 게임의 경우 각 사람이 최종 승리할 확률 및 시합이 끝날 때까지의 기대 게임수를 구할 수 있다.

주요용어: 기대게임 수, 독립시행, 베르누이시행, 우승확률.

1. 서론

오늘날 확률론의 시초가 된 파스칼과 페르마 사이에 오간 점수문제 (problem of points)는 기초 확률론 책에 소개 되곤 한다 (Ross, 2006; 신양우, 2004). 이 문제는 순열과 조합의 이론을 이용하면 해결되는 문제이다. 점수의 문제에 대한 해답을 생활 속의 문제에 활용한다면 합리적인 결정을 필요로 하는 많은 문제들의 해답을 명확히 제시해 줄 수 있다. 실제 경기에서도 다양한 가능성이 존재하지만 일어날 결과에 대한 가능성을 예측할 수 있다면 좀 더 느긋하게 결과를 관망하는 재미를 느낄 수도 있을 것이다.

Bernoulli 시행은 시행 결과가 성공 (success) 혹은 실패 (failure)처럼 매 번의 시행에서 두 가지 결과만 나오는 독립시행을 말한다. Bernoulli 시행은 이항분포, 기하분포 및 음 이항분포들을 만들어내는 시행이다. 점수문제 역시 두 사람이 매번의 시합에서 이기고 지는 경우만 있는 Bernoulli 시행으로 진행되는 게임에서 두 사람 모두 상금을 위해 필요한 정해진 점수에 못 미친 상태에서 상금을 배분하는 문제에 대한 답을 찾는 문제이다. 20점을 내는 문제에서 A는 15점 B는 17점을 획득한 상황에서 게임을 계속할 수 없는 경우 상금을 배분하는 문제가 전형적인 점수 문제이다. 결국 A의 경우 20점을 얻기 위해 5점이 더 필요하며 B의 경우는 3점이 더 필요하다. 이 경우 상대가 정해진 점수를 따기 전에 자신이 먼저 정해진 점수를 따면 게임이 끝나므로 시합이 계속 된다고 가정하고 최종 승리하는 확률의 비로 상금을 배분해야 된다는 것이다. 가위바위보 게임과 같이 두 사람이나 두 팀이 벌이는 연속적인 경기인 경우 매번의 시합에서 둘 중 하나가 반드시 이기는 경우인 Bernoulli 시행이 아닌 게임도 존재한다. 각 종

† 본 논문은 2016년도 인제대학교 학술연구비 보조에 의한 것임.
[1] (50834) 경남 김해시 어방동 607, 인제대학교 사회과학대학 통계학과, 통계정보연구소, 교수.
E-mail: statcho@inje.ac.kr

게임의 경우 우리는 게임이 끝날 때까지의 지속시간과 두 팀 중 특정한 팀이 최종 승리할 확률에 관심을 갖는다 (Cho, 2014; Cho, 2016). Cho (2016)는 한국 프로야구 경기에서 포스트 시즌에 진출한 팀들에 대한 최종 우승확률과 우승이 결정될 때까지의 게임 수에 대한 기댓값을 비김이 없다는 가정 하에 구하였다. 실제로 매 경기에서 두 팀이 비길 가능성은 존재하기 마련이다. 게임과 확률에 관한 다양한 연구들이 있으며 (Ku와 Kim,2117; Lee, 2016; Lee,2016) 두 사람이 벌이는 게임에 대한 연구 뿐 아니라 여러 사람이 벌이는 게임에 관한 다양한 연구도 있다 (Chang, 1995; Cho, 1996; Sandell, 1989).

본 연구에서는 두 사람 A와 B가 벌이는 시합을 가정한다. 매 번의 시합에서 A와 B가 이길 확률은 각각 p, q이며 두 사람 중 k번을 먼저 이기면 게임이 끝나는 경우 A가 최종 승리할 확률과 B가 최종 승리할 확률 및 게임이 끝날 때까지의 총 게임 수에 대한 기댓값을 구하고자 한다. 먼저 매번의 시합이 A가 이기는 경우와 B가 이기는 경우만 존재하는 경우 A가 최종 승리할 확률, B가 최종 승리할 확률 및 게임이 끝날 때까지의 총 게임 수에 대한 기댓값을 알아본다. 다음으로 매 시합에서 A가 이기는 경우와 B가 이기는 경우 및 비기는 경우가 존재하는 경우에 대하여 A가 최종 승리할 확률과 B가 최종 승리할 확률 및 게임이 끝날 때까지의 총 게임 수에 대한 기댓값을 구하고자한다.

2. 최종 승리할 확률 및 기대게임 수

2.1. Bernoulli 시행인 경우

매번의 시합에서 A가 이길 확률이 p이고 질 (B가 이길) 확률이 $q = 1 - p$인 경우 이러한 시합은 Bernoulli 시행이라 할 수 있다. 주사위를 던지는 시합인 경우 1이나 2가 나오면 A가 이기고 나머지 숫자가 나오면 B가 이기는 시합인 경우 $p = \frac{1}{3}$ 이고 $q = \frac{1}{3}$인 셈이다. 이러한 Bernoulli 시행과 같은 서로 독립인 시합을 계속하여 k회 먼저 이기면 최종 승리하는 게임을 생각해 보자. A가 최종으로 승리할 확률 P_A와 B가 최종으로 승리할 확률 P_B 및 게임이 끝날 때까지의 게임 수 N에 대한 기댓값 $E(N)$은 경우의 수를 이용하여 다음과 같이 구해진다.

$k = 1$인 경우

매회 시합에서 A가 이기는 경우를 S라고 하고 지는 경우를 F라고 하면 한번을 먼저 이기면 이기는 게임인 경우에 해당하므로 A와 B가 이길 확률 P_A, P_B는 각각 p와 q임을 알 수 있다. 최종 이길 확률을 더하면 1이 됨을 알 수 있다. 또한 기대게임 수 $E(N)$은 1임을 알 수 있다.

$k = 2$인 경우

이 경우 A가 이기는 사건은 다음과 같이 주어진다. $\Omega_A = \{(SF(1))S\}$. 여기서 $(SF(1))$은 성공 1회와 실패 1회 이하를 의미한다. 그러므로 P_A는 $p^2 + 2p^2(1-p)$임을 알 수 있다. 또한 B가 이기는 사건은 각각 다음과 같이 주어진다. $\Omega_B = \{(FS(1))F\}$. 여기서 $S(1)$은 1회 이하의 성공을 의미한다. 그러므로 P_B는 $q^2 + 2q^2p$임을 알 수 있다. 이 경우 기대게임 수는 $2(1+pq)$임을 알 수 있다.

$k = 3$인 경우

이 경우 A가 이기는 사건은 각각 다음과 같이 주어진다. $\Omega_A = \{(S^2F(2))S\}$. 단, $(S^2F(2))$는 4번 이하의 시행 중에서 2회의 성공과 2회 이하의 실패를 의미한다. 그러므로 P_A는 $p^3(1+3q+6q^2)$임을 알 수 있다. 이 경우 B가 이기는 사건은 각각 다음과 같이 주어진다. $\Omega_B = \{(F^2S(2))F\}$. 단, $F^2S(2)$은 4번 이하의 시행 중에서 2회의 실패와 2회 이하의 성공을 의미한다. 그러므로 P_B는 $q^3(1+3p+6p^2)$이고 기대게임 수는 $3(p^3+q^3)+4(3p^3q+3pq^3)+5(6p^3q^2+6p^2q^3)$로서 $p+q=1$임을 이용하면 $3(1+pq+2p^2q^2)$임을 알 수 있다.

임의의 k인 경우

이 경우 A가 최종으로 승리하는 경우에 대한 사건은 다음과 같이 주어진다. $\Omega_A = \{(S^{(k-1)}F^n)S \,|n = 0, 1, \cdots, k-1\}$. 단 $(S^{(k-1)}F^n)$은 $(n+k-1)$번의 시합에서 $(k-1)$번의 성공과 n번의 실패가 있는 경우이다.

그러므로 최종으로 A가 승리할 확률은 다음과 같이 주어진다.

$$P_A = \sum_{n=0}^{k-1} \begin{pmatrix} n+k-1 \\ r-1 \end{pmatrix} p^k (1-p)^n.$$

B가 최종으로 승리하는 경우는 A가 이기는 경우에서 F와 S를 바꾼 경우가 된다. 즉 B가 최종 승리할 경우에 대한 사건은 다음과 같다.

$\Omega_B = \{(F^{(k-1)}S^n)F \mid n = 0, 1, \cdots, k-1\}$. 단 $(F^{(k-1)}S^n)$은 $(n+k-1)$번의 시합에서 $(k-1)$번의 B의 성공과 n번의 실패가 있는 경우이다.

그러므로 B가 최종으로 승리할 확률은 p와 q가 바뀐 행태로서 다음과 같이 주어진다.

$$P_B = \sum_{n=0}^{k-1} \binom{n+k-1}{k-1} (1-p)^k p^n.$$

경기가 끝날 때까지의 게임 수에 대한 기댓값은 다음과 같이 주어진다.

$$E(N) = \sum_{n=0}^{k-1} (n+k) \binom{n+k-1}{k-1} ((1-p)^k p^n + p^k (1-p)^n).$$

임의의 k인 경우에 대한 A와 B가 최종으로 이길 확률과 게임이 끝날 때까지의 기대게임 수는 확률변수를 통하여 다음과 같이 구해진다.

두 경기자를 A와 B라 하고 경기자 A가 최종으로 이기고 게임이 끝났을 때까지의 총 게임 수를 확률변수 X라 하자. 이 경우 k번 먼저 이기면 승리하는 경기이므로 최소 시합 수는 k, 최대 시합 수는 $2k-1$이다. 사건 $\{X = i\}$는 i번의 게임 중 마지막은 A가 이기고 나머지 $(i-1)$번의 시합 중 $(k-1)$번은 A가 이기고 나머지 $(i-k)$번은 B가 이기는 사건과 같다. 그러므로 A가 최종 승리할 확률 P_A는 다음과 같이 주어진다.

$$P_A = \sum_{i=k}^{2k-1} P(X = i) = \sum_{i=k}^{2k-1} \begin{pmatrix} i-1 \\ k-1 \end{pmatrix} p^k (1-p)^{i-k} = \sum_{i=0}^{k-1} \begin{pmatrix} k+i-1 \\ i \end{pmatrix} p^k (1-p)^i.$$

경기자 B가 최종 승리할 확률 P_B는 p와 q가 바뀐 경우에 해당하므로

$$P_B = \sum_{i=k}^{2k-1} P(X = i) = \sum_{i=k}^{2k-1} \begin{pmatrix} i-1 \\ k-1 \end{pmatrix} (1-p)^k p^{i-k} = \sum_{i=0}^{k-1} \begin{pmatrix} k+i-1 \\ i \end{pmatrix} (1-p)^k p^i.$$

최종 경기가 끝날 때까지의 게임 수 N에 대한 기댓값도 다음가 같이 주어진다.

$$E(N) = \sum_{i=r}^{2k-1} i(P(X = i) + P(Y = i)).$$

이들의 결과를 이용하여 매 시합에서 A의 이길 확률 p가 $0.1 \sim 0.9$에서 0.1씩 증가함에 따라 $k = 1$인 경우와 $k = 2$, $k = 3$인 경우에 대한 최종으로 A가 이길 확률과 B가 이길 확률 및 게임이 끝날 때까지의 게임 수에 대한 기댓값은 Table 2.1과 같다.

Table 2.1 The winning probability and expected number of games

k	p	P_A	P_B	$E(N)$
1	0.1	0.1	0.9	1
	0.2	0.2	0.8	1
	0.3	0.3	0.7	1
	0.4	0.4	0.6	1
	0.5	0.5	0.5	1
	0.6	0.6	0.4	1
	0.7	0.7	0.3	1
	0.8	0.8	0.2	1
	0.9	0.9	0.1	1
2	0.1	0.03	0.97	2.18
	0.2	0.10	0.90	2.32
	0.3	0.22	0.78	2.42
	0.4	0.35	0.65	2.48
	0.5	0.50	0.50	2.50
	0.6	0.65	0.35	2.48
	0.7	0.78	0.22	2.42
	0.8	0.90	0.10	2.32
	0.9	0.97	0.03	2.18
3	0.1	0.01	0.99	3.32
	0.2	0.06	0.94	3.63
	0.3	0.16	0.84	3.89
	0.4	0.32	0.68	4.07
	0.5	0.50	0.50	4.13
	0.6	0.68	0.32	4.07
	0.7	0.84	0.16	3.90
	0.8	0.94	0.06	3.63
	0.9	0.99	0.01	3.32

Table 2.1을 보면 두 팀의 승률이 비슷할 경우 게임수의 기댓값이 다소 높아지며 승률의 차이가 많을수록 기대 게임수가 작아짐을 알 수 있다.

2.2. 비길 경우가 있는 경우

매번의 시합에서 A가 이길 확률이 p, B가 이길 확률이 q이고 비길 확률이 $(1-p-q)$인 경우 이러한 시합은 Bernoulli 시행이라 할 수 없다. 주사위를 던지는 시합인 경우 1이 나오면 A가 이기고 2가 나오면 B가 이기고 그 이외의 눈이 나오면 비기는 시합인 경우 $p = \frac{1}{6}$이고 $q = \frac{1}{6}$이고 비길 확률이 $(1-p-q) = \frac{4}{6}$인 셈이다. 비김이 있는 다양한 p, q에 따른 게임의 경우 상대보다 먼저 k회 이기면 최종으로 승리하는 시합의 경우 A와 B가 승리할 확률과 게임이 끝날 때까지의 기대게임수를 구하고자 한다.

$k = 1$인 경우

A가 이기는 경우에 대한 사건은 다음과 같이 주어진다.

$$\Omega_A = \{D^n S \mid n = 0, 1, 2, 3, \cdots, \text{단}, \ D = \text{비김}, \ S = \text{이김}\}.$$

그러므로 A가 최종 승리할 확률은 다음과 같다.

$$P_A = \sum_{n=0}^{\infty} p(1-(p+q))^n = \frac{p}{p+q}.$$

B가 최종 승리하는 경우에 대한 사건은 다음과 같이 주어진다.

$$\Omega_B = \{D^n F \mid n = 0, 1, 2, 3, \cdots,\ \text{단},\ D = \text{비김},\ F = B\text{가 이김}\}.$$

그러므로 B가 최종 승리할 확률은 다음과 같다.

$$P_B = \sum_{n=0}^{\infty} q(1-(p+q))^n = \frac{q}{p+q}.$$

A가 최종으로 승리할 확률과 B가 최종으로 승리할 확률의 합은 1임을 알 수 있다.

최종 게임이 끝날 때 까지 게임의 수 N에 대한 기댓값은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} E(N) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)((1-(p+q))^n(p+q) = (p+q)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dr}r^n + 1,\ \text{단},\ r = 1-(p+q). \\ &= (p+q)\frac{d}{dr}\left(\sum_{n=0}^{\infty} r^{n+1}\right) = (p+q)\frac{d}{dr}\left(\frac{r}{1-r}\right) = (p+q)\frac{1}{(1-r)^2} = \frac{1}{p+q}. \end{aligned}$$

$k = 2$인 경우

두 번 이겨야 최종으로 승리할 경우 A가 최종 승리할 확률을 구하고자 한다. 이 경우에 대한 사건은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \Omega_A &= \{(D^n S)S \mid n = 0, 1, 2, 3, \cdots,\ \text{단},\ (D^n S) = n\text{회 비김},\ \text{성공 1회},\ \text{실패 1회}\} \\ &\quad \cup\{(D^n FS)S \mid n = 0, 1, 2, 3, \cdots,\ \text{단},\ (D^n FS) = n\text{회 비김},\ \text{성공 1회},\ \text{실패 1회}\}. \end{aligned}$$

그러므로 A가 최종 승리할 확률은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} P_A &= \sum_{n=0}^{\infty} p^2 \begin{pmatrix} n+1 \\ 1 \end{pmatrix}(1-(p+q))^n + \sum_{n=0}^{\infty} p^2 q(n+2)(n+1)(1-(p+q))^n \\ &= p^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dr}r^{n+1} + p^2 q\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^2}{dr^2}r^{n+2} = p^2\frac{d}{dr}\left(\sum_{n=0}^{\infty} r^{n+1}\right) + p^2 q\frac{d^2}{dr^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} r^{n+2}\right) \\ &= p^2\frac{d}{dr}\left(\frac{r}{1-r}\right) + p^2 q\frac{d^2}{dr^2}\left(\frac{r^2}{1-r}\right) = p^2\left(\frac{1}{(1-r)^2}\right) + p^2 q\frac{2}{(1-r)^3} \\ &= \frac{p^2}{(p+q)^2} + \frac{2p^2 q}{(p+q)^3} = \frac{p^3+3p^2 q}{(p+q)^3}. \end{aligned}$$

B가 최종으로 승리할 경우에 대한 확률도 A가 최종 승리할 확률을 구하는 방법과 동일하게 구할 수 있다. 즉, B가 최종으로 승리할 경우에 대한 사건은 다음과 같이 주어진다.
B가 최종 승리하는 경우에 대한 사건은 다음과 같이 주어진다.

$$\Omega_B = \{(D^nF)F \mid n = 0, 1, 2, 3, \cdots, \} \cup \{(D^nSF)F \mid n = 0, 1, 2, 3, \cdots, \}.$$

단, $(D^nF) = \{n$회 비김 성공 1회$\}$ 이며, $(D^nSF) = \{n$회 비김, 성공 1회, 실패 1회$\}$를 의미한다. 이를 이용하면 B가 최종 승리할 확률은 다음과 같다.

$$P_B = \frac{q^3 + 3q^2p}{(p+q)^3}.$$

두 번을 먼저 이기는 사람이 최종 승리하는 경우 두 사람이 최종 승리할 확률의 합은 1임을 알 수 있다. 즉, $P_A + P_B = 1$이다.

최종 게임이 끝날 때까지 게임의 수 N에 대한 기댓값은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}
E(N) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)((1-(p+q))^n(p^2+q^2) \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty}(n+3)(n+2)(n+1)p^2((1-(p+q))^n(p^2q+pq^2)) \\
&= (p^2+q^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^2}{dr^2}(r^{n+2}) + (p^2q+pq^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^3}{dr^3}(r^{n+3}) \\
&= (p^2+q^2)\frac{d^2}{dr^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}r^{n+2}\right) + (p^2q+pq^2)\frac{d^3}{dr^3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}r^{n+3}\right) \\
&= (p^2+q^2)\frac{d^2}{dr^2}\left(\frac{r^2}{1-r}\right) + (p^2q+pq^2)\frac{d^3}{dr^3}\left(\frac{r^3}{1-r}\right) \\
&= (p^2+q^2)\frac{2}{(1-r)^3} + (p^2q+pq^2)\frac{6}{(1-r)^4} \\
&= \frac{2p^3+8p^2q+8pq^2+2q^3}{(p+q)^4} = \frac{2(p^2+3pq+q^2)}{(p+q)^3}.
\end{aligned}$$

단, $r = 1-(p+q)$.

$k = 3$인 경우

세 번 이겨야 최종으로 승리할 경우 A가 최종 승리할 확률을 구하고자 한다. 이 경우에 대한 사건은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}
\Omega_A &= \{(D^nS^2)S \mid n = 0, 1, 2, 3, \cdots, \text{ 단, } (D^nS^2) = n\text{회 비김, 성공 1회}\} \\
&\quad \cup \{(D^nFS^2)S \mid n = 0, 1, 2, 3, \cdots, \text{ 단, } (D^nFS^2) = n\text{회 비김, 성공 2회, 실패 1회}\} \\
&\quad \cup \{(D^nF^2S^2)S \mid n = 0, 1, 2, 3, \cdots, \text{ 단, } (D^nF^2S^2) = n\text{회 비김, 성공 2회, 실패 2회}\}.
\end{aligned}$$

그러므로 A가 최종 승리할 확률은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
P_A &= \sum_{n=0}^{\infty} p^3 \frac{(n+2)(n+1)}{2}(1-(p+q))^n + \sum_{n=0}^{\infty} p^3 q \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{2}(1-(p+q))^n \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} p^3 q^2 \frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{4}(1-(p+q))^n \\
&= \frac{p^3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^2}{dr^2}(r^{n+2}) + \frac{p^3 q}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^3}{dr^3}(r^{n+3}) + \frac{p^3 q^2}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^3}{dr^4}(r^{n+4}) \\
&= \frac{p^3}{2}\frac{d^2}{dr^2}\left(\frac{r^2}{1-r}\right) + \frac{p^3 q}{2}\frac{d^3}{dr^3}\left(\frac{r^3}{1-r}\right) + \frac{p^3 q^2}{4}\frac{d^3}{dr^4}\left(\frac{r^4}{1-r}\right) \\
&= \frac{p^3}{2}\frac{d^2}{dr^2}\left(\frac{1}{1-r}\right) + \frac{p^3 q}{2}\frac{d^3}{dr^3}\left(\frac{1}{1-r}\right) + \frac{p^3 q^2}{4}\frac{d^4}{dr^4}\left(\frac{1}{1-r}\right) \\
&= \frac{p^3}{2}\frac{2}{(1-r)^3} + \frac{p^3 q}{2}\frac{6}{(1-r)^4} + \frac{p^3 q^2}{4}\frac{(2\cdot 3\cdot 4)}{(1-r)^5} \\
&= \frac{p^3}{(p+q)^3} + \frac{3p^3 q}{(p+q)^4} + \frac{6p^3 q^2}{(p+q)^5} \\
&= \frac{p^5 + 5p^4 q + 10p^3 q^2}{(p+q)^5}.
\end{aligned}
$$

B가 최종 승리하는 경우에 대한 사건도 다음과 같이 주어짐을 알 수 있다.

$$
\begin{aligned}
\Omega_B &= \{(D^n F^2)F \mid n = 0,1,2,3,\cdots,\ \text{단},\ (D^n F^2) = n\text{회 비김, 실패 2회}\} \\
&\quad \cup \{(D^n F^2 S)F \mid n = 0,1,2,3,\cdots,\ \text{단},\ (D^n SF^2) = n\text{회 비김, ,실패 2회, 성공 1회}\} \\
&\quad \cup \{(D^n F^2 S^2)F \mid n = 0,1,2,3,\cdots,\ \text{단},\ (D^n F^2 S^2) = n\text{회 비김, 실패 2회, 성공 2회}\}.
\end{aligned}
$$

그러므로 B가 최종 승리할 확률은 다음과 같다.

$$P_B = \frac{q^5 + 5pq^4 + 10p^2 q^3}{(p+q)^5}.$$

세 번 이기면 승리하는 게임의 경우 두 사람인 A, B가 최종 승리할 확률을 더하면 1이 됨을 알 수 있다. 즉, $P_A + P_B = 1$이다.

최종 게임이 끝날 때 까지 게임의 수 $E(N)$에 대한 기댓값은 다음과 같이 주어진다.

$$
\begin{aligned}
E(N) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+3)\frac{(n+2)!}{n!2!}((1-(p+q))^n(p^3+q^3) \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty}(n+4)\frac{(n+2)!}{n!2!}((1-(p+q))^n(p^3 q + pq^3)) \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty}(n+5)\frac{(n+4)!}{n!2!2!}((1-(p+q))^n(p^3 q^2 + p^2 q^3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{p^3+q^3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)(n+2)(n+1)((1-(p+q))^n \\
&\quad + \frac{(p^3q+pq^3)}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)(1-(p+q))^n \\
&\quad + \frac{(p^3q^2+p^2q^3)}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)((1-(p+q))^n \\
&= \frac{p^3+q^3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^3}{dr^3}(r^{n+3}) + \frac{(p^3q+pq^3)}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^4}{dr^4}(r^{n+4}) \\
&\quad + \frac{(p^3q^2+p^2q^3)}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^5}{dr^5}(r^{n+5}) \\
&= \frac{p^3+q^3}{2}\frac{d^3}{dr^3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}r^{n+3}\right) + \frac{(p^3q+pq^3)}{2}\frac{d^4}{dr^4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}r^{n+4}\right) \\
&\quad + \frac{(p^3q^2+pq^3)}{4}\frac{d^5}{dr^5}\left(\sum_{n=0}^{\infty}r^{n+5}\right) \\
&= \frac{p^3+q^3}{2}\frac{d^3}{dr^3}\left(\frac{r^3}{1-r}\right) + \frac{(p^3q+pq^3)}{2}\frac{d^4}{dr^4}\left(\frac{r^4}{1-r}\right) + \frac{(p^3q^2+p^2q^3)}{4}\frac{d^5}{dr^5}\left(\frac{r^5}{1-r}\right) \\
&= \frac{p^3+q^3}{2}\frac{d^3}{dr^3}\left(\frac{1}{1-r}\right) + \frac{(p^3q+pq^3)}{2}\frac{d^4}{dr^4}\left(\frac{1}{1-r}\right) + \frac{(p^3q^2+p^2q^3)}{4}\frac{d^5}{dr^5}\left(\frac{1}{1-r}\right) \\
&= \frac{p^3+q^3}{2}\frac{3!}{(1-r)^4} + \frac{(p^3q+pq^3)}{2}\frac{4!}{(1-r)^5} + \frac{(p^3q^2+pq^3)}{4}\frac{5!}{(1-r)^6} \\
&= \frac{3(p^3+q^3)}{(p+q)^4} + \frac{12(p^3q+pq^3)}{(p+q)^5} + \frac{30(p^3q^2+p^2q^3)}{(p+q)^6} \\
&= \frac{3(p^5+6p^4q+15p^3q^2+15p^2q^3+6pq^4+q^5)}{(p+q)^5}.
\end{aligned}
$$

임의의 k인 경우

k번 이겨야 최종으로 승리할 경우 A가 최종 승리할 확률을 구하고자 한다. 이 경우에 대한 사건은 다음과 같이 주어진다.

$\Omega_A = \cup_{i=0}^{k-1} A_i$. 단, $A_i = \{(D^nF^iS^{(k-1)}S \mid n = 0, 1, 2, 3, \cdots\}$, $(D^nF^iS^{(k-1)}$은 $(n+i+k-1)$회 중 비김 n회, 실패 i회, 성공 $(k-1)$회인 경우를 나타낸다.

사건 A_i에 관한 확률은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
P(A_i) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k+i-1)!}{n!i!(k-1)!} p^k q^i (1-p-q)^n = \frac{p^k q^i}{i!(k-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} (n+k+i-1)\cdots(n+1) r^n \\
&= \frac{p^k q^i}{i!(k-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^{k+i-1}}{dr^{k+i-1}} (r^{n+k+i-1}) = \frac{p^k q^i}{i!(k-1)!} \frac{d^{k+i-1}}{dr^{k+i-1}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} r^{n+k+i-1} \right) \\
&= \frac{p^k q^i}{i!(k-1)!} \frac{d^{k+i-1}}{dr^{k+i-1}} \left(\frac{r^{k+i-1}}{1-r} \right) = \frac{p^k q^i}{i!(k-1)!} \frac{d^{k+i-1}}{dr^{k+i-1}} \left(\frac{1}{1-r} \right) \\
&= \frac{p^k q^i}{i!(k-1)!} \frac{(k+i-1)!}{(1-r)^{k+i}}, \text{ 단, } \quad r = 1-p-q.
\end{aligned}$$

그러므로 k번 이겨야 최종으로 승리할 경우 A가 최종 승리할 확률은 다음과 같이 주어진다.

$$P_A = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{p^k q^i}{i!(k-1)!} \frac{(k+i-1)!}{(p+q)^{k+i}}.$$

유사한 방법으로 B가 최종으로 승리할 확률 P_B도 B가 최종 승리할 경우에 대한 다음의 사건을 이용하여 구할 수 있다.

$\Omega_B = \cup_{i=0}^{k-1} B_i$. 단, $B_i = \{(D^n F^{(k-1)} S^i) S \mid n = 0, 1, 2, 3, \cdots\}$, $(D^n F^{(k-1)} S^i)$은 $(n+i+k-1)$회 중 비김 n회, 실패 $(k-1)$회, 성공 i회인 경우를 나타낸다. B가 최종으로 승리할 확률 P_B는 다음과 같이 주어진다.

$$P_B = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{q^k p^i}{i!(k-1)!} \frac{(k+i-1)!}{(p+q)^{k+i}}.$$

최종 게임이 끝날 때 까지 게임의 수 (N)에 대한 기댓값은 다음과 같이 주어진다.
$(n+k+i-1)$게임 중 $(k-1)$회 성공하고 실패가 i회 비김이 n회 있은 후 마지막으로 성공하여 최종으로 A가 $(n+k+i)$회 만에 성공하는 경우와 $(n+k+i-1)$회 중 $(k-1)$회 실패하고 성공이 i회, 비김이 n회 있은 후 마지막으로 실패하여 최종으로 B가 $(n+k+i)$회 만에 성공하는 경우를 묶어 기대 게임 수를 E_i로 나타내면 E_i는 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned}
E_i &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+k+i) \frac{(n+k+i-1)!}{n!i!(k-1)!} (p^k q^i + q^k p^i)(1-p-q)^n \\
&= \frac{(p^k q^i + q^k p^i)}{i!(k-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} (n+k+i)(n+k+i-1)\cdots(n+1)(1-p-q)^n \\
&= \frac{(p^k q^i + q^k p^i)}{i!(k-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^{k+i}}{dr^{k+i}} (r^{n+k+i}) = \frac{(p^k q^i + q^k p^i)}{i!(k-1)!} \frac{d^{k+i}}{dr^{k+i}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} r^{n+k+i} \right) \\
&= \frac{(p^k q^i + q^k p^i)}{i!(k-1)!} \frac{d^{k+i}}{dr^{k+i}} \left(\frac{r^{n+k}}{1-r} \right) = \frac{(p^k q^i + q^k p^i)}{i!(k-1)!} \frac{d^{k+i}}{dr^{k+i}} \left(\frac{1}{1-r} \right) \\
&= \frac{(p^k q^i + q^k p^i)}{i!(k-1)!} \frac{(k+i)!}{(1-r)^{k+i+1}}.
\end{aligned}$$

그러므로

$$E(N) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(p^k q^i + q^k p^i)}{i!(k-1)!} \frac{(k+i)!}{(1-r)^{k+i+1}}.$$

비김이 존재하는 경우 A와 B가 최종 승리할 확률 및 기대게임 수는 다음과 같이 구할 수 있다. 매 시합에서 A와 B가 이길 확률이 p, 질 확률이 q, 비길 확률이 $r = 1 - p - q$라 하면 A가 먼저 k번 이겨서 최종 승리할 확률은 비김이 없는 경우 A가 이길 확률이 $p' = \frac{p}{p+q}$, B가 이길 확률이 $1 - p' = \frac{q}{p+q}$인 경우에 해당하므로 각각 A나 B가 최종 승리할 확률에서 p대신 $\frac{p}{p+q}$, q대신 $\frac{q}{p+q}$를 대체를 통하여 구해진다. 또한 비김이 있는 연속적인 시합에서 최종 게임이 끝날 때까지의 기대게임 수는 각각 이길 확률이 p', $(1-p')$인 비김이 없는 두 사람의 연속적인 시합에서 최종 게임이 끝날 때까지 게임의 수는 게임이 끝날 때까지의 추가로 비기는 경우가 각각 $0 \sim \infty$이 추가될 확률의 합인 $\frac{1}{1-r} = \frac{1}{p+q}$를 곱한 것과 같다. 예를 들어 비김이 없는 경우 먼저 한 번을 이기면 승리하는 경우 기대게임 수는 1이므로 비김이 있는 경우의 총 기대게임 수는 비김이 있는 경우의 기대게임 수인 1에 $\frac{1}{p+q}$를 곱한 값이 된다. 2번을 먼저 이겨야 승리하는 경우 비기는 경우가 없는 경우의 기대게임 수는 $2(1+pq)$에 p대신 $\frac{q}{p+q}$, q대신 $\frac{q}{p+q}$를 대체한 후 $\frac{1}{p+q}$를 곱하면 모든 경우를 고려하여 구한 기대게임수와 동일한 식을 얻는다.

이들의 결과를 이용하여 매 시합에서 비길 확률 d가 $0.1 \sim 0.9$에서 0.1씩 증가하고 A의 이길 확률 p가 $0.1 \sim 0.9$에서 0.2씩 증가함에 따라 $k = 1$인 경우와 $k = 2$, $k = 3$인 경우에 대한 A가 최종 승리할 확률과 B가 최종 승리할 확률 및 게임이 끝날 때까지의 게임 수에 대한 기댓값은 Table 2.2 $\sim$ Table 2.4와 같다.

이들의 결과를 보면 비김이 없는 경우와 마찬가지로 최종으로 이기기 위한 승리횟수 k가 커질수록 A나 B중에서 상대적으로 이길 확률이 높은 사람이 최종으로 이길 확률이 매 시합에서의 이길 확률보다 높아짐을 알 수 있다. 게임이 끝날 때까지의 기대게임 수 $E(N)$는 비길 확률이 커질수록 A와 B가 이길 확률의 차이가 적을수록 많아짐을 알 수 있다.

Table 2.2 The winning probability and expected number of games when $k = 1$

d	p	q	P_A	P_B	$E(N)$
0.1	0.1	0.8	0.11	0.89	1.11
0.1	0.3	0.6	0.33	0.67	1.11
0.1	0.5	0.4	0.56	0.44	1.11
0.1	0.7	0.2	0.78	0.22	1.11
0.2	0.1	0.7	0.13	0.87	1.25
0.2	0.3	0.5	0.38	0.62	1.25
0.2	0.5	0.3	0.63	0.37	1.25
0.2	0.7	0.1	0.88	0.12	1.25
0.3	0.1	0.6	0.14	0.86	1.43
0.3	0.3	0.4	0.43	0.57	1.43
0.3	0.5	0.2	0.71	0.29	1.43
0.4	0.1	0.5	0.17	0.83	1.67
0.4	0.3	0.3	0.50	0.50	1.67
0.4	0.5	0.1	0.83	0.17	1.67
0.5	0.1	0.4	0.20	0.80	2.00
0.5	0.3	0.2	0.60	0.40	2.00
0.6	0.1	0.3	0.25	0.75	2.50
0.6	0.3	0.1	0.75	0.25	2.50
0.7	0.1	0.2	0.33	0.67	3.33
0.8	0.1	0.1	0.50	0.50	5.00

Table 2.3 The winning probability and expected number of games when $k = 2$

d	p	q	P_A	P_B	$E(N)$
0.1	0.1	0.8	0.03	0.97	2.44
0.1	0.3	0.6	0.26	0.74	2.72
0.1	0.5	0.4	0.58	0.42	2.77
0.1	0.7	0.2	0.87	0.13	2.61
0.2	0.1	0.7	0.04	0.96	2.77
0.2	0.3	0.5	0.32	0.68	3.09
0.2	0.5	0.3	0.68	0.32	3.09
0.2	0.7	0.1	0.96	0.04	2.77
0.3	0.1	0.6	0.05	0.95	3.21
0.3	0.3	0.4	0.39	0.61	3.56
0.3	0.5	0.2	0.80	0.20	3.44
0.4	0.1	0.5	0.07	0.93	3.80
0.4	0.3	0.3	0.50	0.50	4.17
0.4	0.5	0.1	0.93	0.07	3.80
0.5	0.1	0.4	0.10	0.90	4.64
0.5	0.3	0.2	0.65	0.35	4.96
0.6	0.1	0.3	0.16	0.84	5.94
0.6	0.3	0.1	0.84	0.16	5.94
0.7	0.1	0.2	0.26	0.74	8.15
0.8	0.1	0.1	0.50	0.50	12.50

Table 2.4 The winning probability and expected number of games when $k = 3$

d	p	q	P_A	P_B	$E(N)$
0.1	0.1	0.8	0.01	0.99	3.73
0.1	0.3	0.6	0.21	0.79	4.40
0.1	0.5	0.4	0.60	0.40	4.56
0.1	0.7	0.2	0.92	0.08	4.12
0.2	0.1	0.7	0.02	0.98	4.25
0.2	0.3	0.5	0.28	0.72	5.04
0.2	0.5	0.3	0.73	0.27	5.04
0.2	0.7	0.1	0.98	0.02	4.25
0.3	0.1	0.6	0.02	0.98	4.94
0.3	0.3	0.4	0.37	0.63	5.85
0.3	0.5	0.2	0.86	0.14	5.52
0.4	0.1	0.5	0.04	0.96	5.89
0.4	0.3	0.3	0.50	0.50	6.88
0.4	0.5	0.1	0.97	0.03	5.88
0.5	0.1	0.4	0.06	0.94	7.27
0.5	0.3	0.2	0.68	0.32	8.13
0.6	0.1	0.3	0.10	0.90	9.43
0.6	0.3	0.1	0.90	0.10	9.43
0.7	0.1	0.2	0.21	0.79	13.21
0.8	0.1	0.1	0.50	0.50	20.63

위의 결과들을 아래와 같은 주사위 던지기 게임과 가위바위보 게임에 적용해 보자. 먼저 주사위 던지기 게임을 생각해보자. 주사위 던지기에서 짝수가 나오면 A가 이기고 홀수가 나오면 B가 이기는 게임을 생각해 보자. 세 번 먼저 이기는 사람이 최종 승리하는 경우 게임이 끝날 때까지의 A와 B가 이길 확률과 게임이 끝날 때까지의 시행횟수는 $p = q = \frac{1}{2}$인 경우에 해당한다. 베르누이 시행 시합인 경우 중 $k = 3$인 경우의 A와 B가 이길 확률은 각각 $\frac{1}{2}$이며 기대게임 수는 4.125 이다. 즉 세 번을 먼저 이기는 사람이 이기는 게임을 하는 경우 게임 수는 평균 4회를 넘음을 알 수 있다.

다음으로 다음과 같은 가위바위보 게임을 생각해 보자. 두 사람이 가위 바위 보를 통하여 승부를 결정짓는 경우 세 번을 먼저 이기는 사람이 최종 승리하는 경우 게임이 끝날 때까지의 A와 B가 이길 확률과 게임이 끝날 때까지의 기대게임 수는 $p = q = \frac{1}{3}$, $r = \frac{1}{3}$ 인 경우에 해당한다. 각각 A와 B가 최종 승리할 확률은 $\frac{1}{2}$이며 승부가 결정될 때까지의 시합의 수는 비기는 경우가 있는 경우 $k = 3$인 경우를 활용하면 $\frac{99}{16} \simeq 6.18$회임을 알 수 있다. 또한 승률이 동일한 경우 비길 확률 (d)이 $0.1 \sim 0.9$ 까지 변함에 따른 세 번 먼저 이기면 승부가 결정되는 경우 승부가 결정될 때까지의 게임수의 기댓값은 다음의 Table 2.5와 같다. 비길 확률이 높아짐에 따라 기대게임수가 빠른 속도로 증가함을 알 수 있다.

Table 2.5 The expected number of the games

d	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$E(N)$	4.58	5.16	5.89	6.87	8.25	10.31	13.75	20.62	41.25

3. 결론

Bernoulli 시행은 시행 결과가 성공 (success) 혹은 실패 (failure)처럼 매 번의 시행에서 두 가지만 나오는 시행을 말한다. Bernoulli 시행은 이항분포 기하분포 초기하 분포들을 만들어내는 시행이다. 점수의 문제 역시 두 사람의 게임에서 매번의 시합에서 이기고 지는 경우인 Bernoulli 시행에서 두 사람 모두 상금을 위해 필요한 정해진 점수에 못 미친 상태에서 상금을 배분하는 문제에 대한 답을 찾는 문제이다. 20점을 내는 문제에서 A는 15점 B는 17점을 획득한 상황에서 게임을 계속할 수 없는 경우 상금을 배분하는 문제가 전형적인 점수 문제이다. 결국 A의 경우 20점을 얻기 위해 5점이 더 필요하며 B의 경우는 3점이 더 필요하다. 이 경우 상대가 정해진 점수를 따기 전에 자신이 먼저 정해진 점수를 따면 게임이 끝나므로 시합이 계속 된다고 가정하고 최종 승리하는 확률의 비로 상금을 배분해야 된다는 것이다. 이처럼 확률을 이용하면 좀 더 이성적이고 과학적인 합리적인 의사결정을 내릴 수 있게 된다. 가위바위보 게임과 같이 두 사람이나 두 팀이 벌이는 연속적인 경기인 경우 매번의 시합에서 둘 중 하나가 반드시 이기는 경우인 Bernoulli 시행이 아닌 시합도 존재한다. 각 종 게임의 경우 우리는 게임이 끝날 때까지 지속시간과 두 팀 중 특정한 팀이 최종 승리할 확률에 관심을 갖는다. 본 연구에서는 두 팀의 연속적인 시합에서 k번의 성공을 먼저 하는 팀이 최종 승리하는 게임의 경우 비김이 없는 경우와 비김이 있는 경우에 대한 최종 승리할 확률과 게임이 끝날 때까지의 기대게임수를 구하는 방법에 대해 알아보았다. 본 연구에서와 같이 경우의 수를 이용하면 다양한 확률 문제들을 해결할 수 있다. 본 연구 결과를 활용하면 비김이 있는 다양한 게임의 경우에도 기대게임 수를 통하여 합리적인 시간 계획을 수립하여 게임의 재미를 더할 수 있을 것이다.

References

Chang, D. K. (1995). A game with four players. *Statistics and Probability Letters*, **23**, 111-115

Cho, D. H. (1996). A game with n players. *Journal of Korean Statistical Society*, **25**, 185-193.

Cho, D. H. (2014). Course probability in the game of Yut. *The Korean Journal of Applied Statistics*, **27**, 407-417

Cho, D. H. (2016). The winning probability in Korean series of Korean professional baseball. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **27**, 663-676.

Ku, J. and Kim, J. (2017). Development od game indicators and winning forecasting models with game data. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **28**, 237-250.

Lee, J. (2016). A redistribution model for spatially dependent Parrondo games. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **27**, 121-130.

Lee, S. W. (2016). A study on the improvement of academic achievement of probability and statistics in the hardware curriculum. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **27**, 887-898.
Ross, S. (2006). *A first course in probability, fourth ed.*, Prentice Hall, New Jersey.
Sandell, D. (1989). A game with three players. *Statistical and Probability Letters*, **7**, 61-63.
Shin, Y. W. (2004). *Basic probability theory*, Kyeongmunsa.

Journal of the Korean Data & Information Science Society
2017, **28**(4), 783–796

http://dx.doi.org/10.7465/jkdi.2017.28.4.783
한국데이터정보과학회지

A study on a sequences of games with draw†

Daehyeon Cho[1]

[1]Department of Statistics/Institute of Statistical Information, Inje University

Received 29 June 2017, revised 18 July 2017, accepted 20 July 2017

Abstract

In the theory of probability, a Bernoulli trial is a random experiment with exactly two possible outcomes, "success" and "failure", in which the probability of success is the same every time the experiment is conducted. In the successive games of scissors paper stone there exists the case of draw in each game. In this paper we are interested in the ultimate success probability of each participant and the expected number of the game till any one of the two has the ultimate victory. Using our results, we can calculate the ultimate winning probability of each player of the two players and the expected number of the game till any one of the two has the ultimate victory in any case whether there is draw or not in each game.

Keywords: Bernoulli trial, expected number of the game, independent trial, winning probability.

† This was supported by the Inje Research and Scholarship Foundation in 2016.

[1] Professor, Department of Statistics/Institute of Statistical Information, Inje University, Kimhae 621-749, Korea.
Email: E-mail: statcho@inje.ac.kr