韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學教育>
https://doi.org/10.7468/mathedu.2017.56.3.301
2017. 08. 제 56권, 제 3호, 301–318.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A:
The Mathematical Education
August. 2017, Vol. 56, No. 3, 301–318.

미래학교 수학교실의 교육 방법론에 대한 탐색 :비구조화된 문제에서 학생들의 질문 만들기를 중심으로

나미영(서울대학교 대학원)
조형미(서울대학교 대학원)†
권오남 (서울대학교)

Ⅰ. 서론

교육통계연구센터(http://kess.kedi.re.kr/)의 자료에 따르면, 학령인구의 감소가 학교와 학급의 소규모화로 이어져, 2000년에 초등학교 35.8명, 중학교 38명, 고등학교 42.7명이었던 학급 당 인원수가 2016년에는 초등학교 22.4명, 중학교 27.4명, 고등학교 29.3명으로 감소하였다고 한다. 이와 같이 한국 사회가 대면하고 있는 핵심적인 사회경제적 변화는 저출산에 의한 학령인구의 감소와 초연결사회로의 변화일 것이다. 교육 또한 이에 대비한 21세기형 교육으로의 변화가 필요함이 자명하다. 한국교육학회 교육 정책포럼에서는 이러한 미래의 교육을 위한 방안 중의 하나로 학습자 맞춤형 교육과정을 제시한다(정제영, 2016). 현재는 학교 현장에서 표준화된 교육과정에 따라 모두가 동일하게 성취해야 할 목표를 달성시키는 교육을 하고 있다면, 미래는 학습자 스스로 자신의 욕구와 동기에 따라 자신의 학습활동에 대한 전반적인 기획과 학습을 자기 주도적으로 수행할 수 있도록 교육해야 한다는 것이다. 한 교실에서 30명의 학생으로 수업이 이루어지고 있는 현재의 교육에서는 모든 학생이 중심이 되는 수업을 진행하기란 쉽지 않을 것이다. 그러나 저출산으로 인해 한 학급의 학생 수가 줄어들게 되면 이에 적합한 학생중심의 교육을 실행할 가능성이 높아지게 될 것이다. 따라서 현재의 교실 상황과는 다른 소규모 학급 교실 상황에서는 모든 학생이 의견을 공유하고 토론할 수 있는 학생 중심의 교육을 기대해 볼 수 있을 것이다. 이에 이 연구는 미래의 교육환경인 저출산으로 인한 소규모 자기 주도적 학습 활동을 권장하는 교실의 교육적 변화에 대한 연구의 필요성을 바탕으로 학생들이 질문에 기반하여 자신의 수학적 탐구 과정을 어떻게 발전시켜 나가는지 살펴보고자 한다.

Chevallard의 교수학의 인류학적 접근 이론(Anthropology Theory of Didactic, 이하 ATD)은 미래 수학교실에서 강조될 학습자 맞춤 교육과정의 실행에 대한 통찰을 제공한다. Chevallard(2006)는 교수학적 변환이론에서 출발하여 지식의 생태학적 성질의 이해를 확장시키고, 사회 문화적, 인류학적 입장에서 재조명한 ATD를 주창하였다. 교수학적 변환이론은 교수 학습과정을 관찰할 때, 지식과 그 지식이 다루어지는 일련의 과정에도 주의를 기울일 필요가 있음을 강조하고 있다. 특히 교육에서 다루어지는 ‘지식’의 본질을 확장하여 거시적인 관점에서 파악하고, 교사와 학생 그리고 지식이라는 교수학적 시스템을 통해 교육에 시사점을 얻고자 하였다. ATD는 제도와 제도 안의 지식에 대한 해석을 기반으로, 인간은 제도 속에서 살아가고 적응함으로써 제도 내 여러 실천적 방법과 지식을 습득한다고 본다. 인간은 개체적 존재로서 행동하거나 사고하는 것이 아니라 자신이 속한 제도 틀 안에서 행동하고 제도의 필터로 세상을 바라보는 관점을 가진다고 본다(김부윤, 정경미, 2009; 김혜진, 2015). 그는 그동안 사회와 학교에서 ‘공부 한다’는 것에 대해 일종의 작품에 방문하는 형태의 “기념비적 방

* 접수일(2017년 5월 26일), 수정일(2017년 7월 9일), 게재확정일(2017년 8월 6일)
* ZDM분류 : C73
* MSC2000분류 : 97D40
* 주제어 : 교수의 인류학적 접근, 학습과 연구의 변증법적 과정, 비구조화된 문제, 생산적 실패
* 이 논문은 2016년 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단의 지원(NRF-2016S1A3A2925401)을 받아 수행된 연구임.
† 교신저자

문"의 패러다임이 존재해 왔다고 비판한다. 그러나 그는 교수학습을 제도적 맥락에서 지식을 구성하고 산출하는 과정으로 보아야 하며, 학습에 대한 "세상으로 질문하기" 패러다임으로의 변환이 필요하다고 주장한다(Chevallard, 2012). 세상으로 질문하기 패러다임은 이러한 그의 논의의 정점에 있다고 볼 수 있다.

Chevallard는 세상으로 질문하기 패러다임을 적용해 문제에 대한 체계적인 질문에 기반한 세계로 질문하는 교수학적 구조로 학습과 연구의 변증법적 과정(Study and Research Course)을 제안하였다. 이는 학습의 자율성을 강조하며 학생들이 구성한 지식이 학습과 연구라는 변증법적 현상 안에서 분석되어야 함을 강조한 것이다.

이 연구에서는 학습과 연구의 변증법적 과정을 통한 지식의 구성을 비구조화된 문제의 해결과 연결한다. 비구조화된 문제는 학생들의 자율적인 탐구활동을 보장하고, 다양한 탐구가 가능한 환경을 제공할 수 있다(Kapur, 2008). 비구조화된 문제는 학생들이 그 해결과정에서 필요한 정보를 수집하고, 제공되지 않은 정보를 가정하는 등, 문제를 스스로 구조화하며 문제해결을 위한 전략을 사용할 기회를 제공한다는 점에서 학생들의 학습과 연구의 변증법적 과정을 탐색하기에 적합하다.

이에 이 연구는 다음과 같은 연구 질문을 갖는다.

소규모 교실 환경에서 비구조화된 문제를 제시하였을 때, 학생들이 형성하는 학습과 연구의 변증법적 과정의 특징은 어떠한가?

Ⅱ. 이론적 배경

1. 학습과 연구의 과정(Study and Research Course, SRC)

Chevallard(2006, 2012)는 그동안 사회와 학교에서 '공부 한다'는 것을 학습 내용을 그 자체 또는 그 자체를 위해 공부하는 것으로서 일종의 계약과 같은 형태로 기념비적 방문의 패러다임이 존재해 왔다고 비판한다. 기념비적 방문의 패러다임의 교실에서는 질문이 부재하며, 수학은 이미 끝난, 그리고 의미 없는 지식으로 가르쳐진다. 이러한 기념비적 수학은 학교에서의 수학의 목적을 상실하게 됨을 지적하며, 세상으로 질문하기 패러다임으로의 전환을 주장하였다.

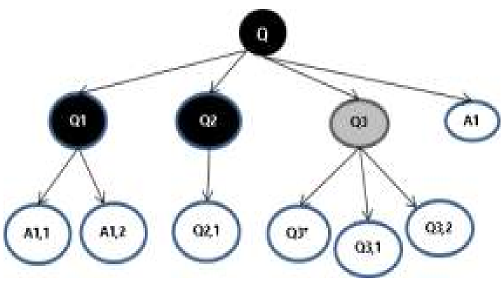
Chevallard(2006)는 학교에서 많은 질문이 일어나고, 학생들은 이에 대한 답을 찾으려고 하는데, 질문(Q_i)을 공부하면서 학생들은 그 질문에 의해 역동적으로 나타나는 파생된 질문(Q_{ij})를 조사해야 하는 교수학적 구조를 학습과 연구의 과정(이하, SRC) 또는 학습과 연구의 경로(Study and Research Path, SRP)로 제안하였다.[1] 학습을 연구를 포함하는 포괄적인 용어로 사용하기도 하지만, 학습에는 종종 연구의 개념을 배제하는 경우도 있어, 교수학적 구조로서 학습과 연구를 모두 넣으면서, 학생의 자율적인 탐구와 발견의 과정으로서의 연구를 강조한다.

SRC는 교실에서 '세상으로 연구하고 질문하는 패러다임'을 발달시키며, 이는 질문으로부터 시작하게 된다. 따라서 생성질문(Q_0)에서 시작하여 다른 파생질문을 만든다(Llanos & Otero, 2013). 이때, 교사가 제시하는 초기 생성질문은 열려있고 도전적이며, 다양한 방향으로 이끌 수 있는 것이어야 한다. 이러한 생성질문에서 시작하여, 학생들은 연속적인 하위질문들의 과정을 따라 학습해 나가며 지식을 습득할 수 있다. 따라서 SRC의 아이디어의 근원은 질문과 답 사이의 기본적인 변증법이고, 생성질문은 구조화되지 않은 열려 있는 문제 상황에서 출발한다. 또한, 학생들이 파생시킨 새로운 질문에 의해 연구와 학습 활동의 통합이 좀 더 풍부해질 수 있다. 어떠한 활동에 대한 연구가 동기를 유발할만한 질문에 대한 답을 주지 못할지라도, 학생들이 답하고 탐구하기 위해 파생시킨 질문, 연구하고자 하는 새로운 활동들을 형성하게 도와줄 수 있다.

Winsløw와 그의 동료들에 의하면, SRC는 학습 활동에 있어 존재하는 지식을 알아가는 "학습"과 질문과 문제해결을 통한 "연구"를 강조하며 그것의 변증법적 전개 "과정"을 포착하는 방법으로 분석되어야 하는 것을 강조한다(Winsløw, 2011; Winsløw, Matheron & Mercier, 2013). 즉, SRC는 교사에 의해 제기된 한 개 또는 그 이상의 질문에 기반한 학생들의 연구와 학습의 과정을 일컫는다. 또한, Winsløw et al.(2013)은 SRC를 [그림 1]과

[1] 각 연구자마다 학습(study)과 연구(research)의 위치를 바꾸거나 과정(course) 또는 경로(path)로 표현하고 있는데, 모두 같은 개념으로 여기서는 SRC로 통용하여 표현하도록 한다.

같은 형태의 수형도로 제시하였다. 이때, 생성질문 Q에서 시작하여, 새로운 질문을 $Q_1, Q_2, \cdots$로, 대답을 $A_1, A_2, \cdots$로 보여주고 있으며, 다음에 진행되는 단계를 화살표를 사용하여 수형도로 나타내고 있다. 예를 들어, 하위질문 Q_3은 파생질문 1개와 2개의 부분질문으로 진행된다. 또한, 그림에서 나타난 검정색은 교사에 의해, 회색은 상호작용에 의해, 흰색은 한 학생에 의해 일어난 것을 보여준다.



[그림 1] SRC 다이어그램 예 (Winsløw et al., 2013, p.271)
[Fig. 1] Example of SRC diagram (Winsløw et al., 2013, p.271)

위의 다이어그램은 지식이 어떻게 구성되는지 구조적 표현을 제공해 준다. SRC의 실제적 단계는 시간, 이용 가능한 자원, 이와 비슷한 행동에 대한 학생들의 경험과 같은 수많은 국소적 조건에 의존한 반면, 다이어그램은 파생된 질문, 대답에 관한 생성질문에 대한 좀 더 안정적인 분석을 보여준다는 점에서 의미가 있다.

2. 비구조화된 문제해결

세상에 질문하는 수학교실에서의 교수학적 구조로 제안된 SRC는 문제해결 과정에서 일어나는 것으로 해석할 수 있다. 생성하는 질문은 문제가 되며 그것에 답해 가는 것이 문제의 해결이라 볼 수 있다.

그 동안 학생들이 수학교실에서 다루어 온 문제와 문제해결은 새로운 질문을 파생시킬 수 있는 가능성이 낮았다. 즉, 그동안 수학교실에서 다루어진 문제는 대부분 구조화된 문제로, 탐구의 자유도가 비교적 제한적이었다. 학생들은 구조화된 문제를 성공적으로 해결함으로서 학습의 효과를 증진시킨다고 보았고, 그동안 수학교육에서는 통상적으로 학습과 문제해결 활동을 구조화하는 방법에 초점을 두어 학습자의 수행을 성공적으로 마무리할 수 있도록 하려는 경향이 있었다(Kapur, 2009).

한편, English & Gainsburg(2016, pp. 325-326)는 21세기의 일과 삶에 대한 연구를 기반으로, 미래의 수학교육에서 문제해결과 학교교육의 역할에 대하여 다음과 같이 정리하였다.

- 일과 삶에서 문제해결은 현재의 사람들이 보유하고 있는 것보다 더 견고하고 유연한 기본적인 수학의 이해를 요구한다. 고등 수학 과정을 더 하는 것은 해결책이 아니다.
- 특정한 비인지적이고 일반적 기능(전형적으로 교육에서 과소평가된)이 일의 현장에서 문제해결의 핵심이다. 이것의 대부분은 고등 사고 수준을 요한다.
- 많은 직업에서 특히, IT가 강조되는 상황에서 과정과 체계(메커니즘을 이해하는)의 기저에 있는 개념적 모델을 이해해야 하고, 일의 맥락 안에서 복잡한 표현에 대한 이해가 요구되며, 일의 영역에서 깊은 이해가 요구된다.
- 대조적으로, 일상적 삶의 의사결정은 다양하고 복잡한 형태의(또한 다면적이고 익숙하지 않은 영역에서의) 양적 데이터를 이해할 것을 요구한다.
- 새롭고 생소한 문제에 대한 교육 또는 지식을 적용하는 능력은 고용주에게 큰 특권을 부여하며, 그 능력은 직장의 업무 기반 맥락에서 발생하거나 학교에서 재현될 때, 가장 효과적으로 촉진되는 것으로 간주된다.

이 논의는 미래의 수학교육에서 문제해결이 ‘수단’과 ‘목적’이라는 두 가지 목적을 동시에 추구해야 한다고 지적한다. 그들은 그동안 수학교육 연구자들이 문제해결을 수단으로 활용하여 수학 개념 학습에 도움을 주는 것에 더 많은 관심을 두었으며, 일반적 기능으로서 문제해결력 신장은 교육에서 과소평가 되어 왔다고 보았다. 일반적으로 문제해결력 신장이 과소평가 된 것은 그것이 교육과정 및 교실에서 발현될 때, 핵심적 수학적 아이디어나 이해 과정의 발달과는 분리되어 독립적으로 지도되어 왔기 때문으로 보았다. 학교에서 문제해결은 종종 배운

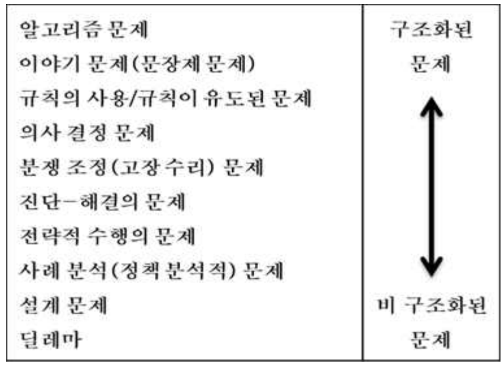
개념을 적용하는 것으로서 교과서 마지막 부분에 이야기 형태로 배치되어 추가 과제 정도로 등장하는데, Anderson(2014)은 이러한 형태로는 문제해결을 가르치려는 목적에도 또 그 내용과 관련되는 지식을 깊이 있게 이해시키는 수단으로도 실패한다고 보고하였다.

SRC에서 제안하는 초기 질문은 열려있고 도전적이며, 다양한 방향으로 이끌 수 있는 큰 문제이다. 즉, 초기 질문은 그동안 수학교실에서 다루는 구조화된 문제가 아닌 학생들의 탐구의 자율성을 보장하는 문제이며, SRC는 그 문제를 해결하기 위한 하위 탐구 질문의 생성과 해결 과정으로 이해 할 수 있다. 문제해결 과정 안에서 SRC는 문제해결을 위한 일반적인 방법으로서, 발견술과 그 문제를 해결하기 위해 존재하는 지식의 학습이라는 미래 수학교실에서 기대하는 문제해결의 역할을 구현하는 데에도 효과가 있다. 특히, SRC의 초기 질문은 학생들의 탐구 또는 연구를 최대한 보장한다.

학생들의 자율성을 보장하는 구조화되어 있지 않은 문제는 Simon(1973)의 논의에 따르면 비구조화된 문제로 볼 수 있다. Simon은 비구조화된 문제를 보충적 개념으로 정의할 수밖에 없다고 보았다. 구조화된 문제와 비구조화된 문제 사이의 실제 경계는 모호하고, 유동적이며, 형식화하기 어렵기 때문이다. Reed(2016)은 잘 구조화된 문제의 특징을 정리하며, 그를 통해 비구조화된 문제의 특징을 설명하였다. 잘 구조화되어 있는 문제는 합법적인 방법으로 연결되는 잘 정의된 초기 조건과 목표 상태로 구성된 문제 공간이라 할 수 있으며, 비구조화된 문제는 초기 상태나 목표 상태, 또는 중간 상태가 불완전하게 명시된 것으로 보았다.

또한, Jonassen(2000)과 Jonassen & Hung(2008)의 연구에서는 여러 가지 답을 가지고 있으면서 문제를 해결하는데 어떠한 개념이나 규칙 원리들의 사용이 불확실한 문제를 비구조화된 문제로 보았다. 특히 Jonassen은 문제의 구조화를 설명하는 네 가지 매개변수를 문제의 불투명성, 해석의 이질성, 역동성, 그리고 경쟁적인 대안의 적합성으로 들었다. 그는 더 나아가 일반적인 문제의 유형을 구조화된 정도에 따라 [그림 2]와 같이 분류하였다.

이러한 일반적인 문제의 구조화의 수준에 대한 논의는 수학교육의 상황에 적용하여 생각해 보면, 비구조화된 수학문제의 의미를 이해하는데 도움을 준다(권오남,



[그림 2] 문제의 유형 분류 (Jonassen, 2008, p.12)
[Fig. 2] Typology of problem types (Jonassen, 2008, p.12)

박정숙, 박지현, 조영미, 2005; 김민경, 허지연, 조미경, 박윤미, 2012). 비구조화된 문제는 맥락 안에서 상황을 진단하고 해결하는 도구로서 수학을 사용할 수 있게 하거나, 자신의 수학적 해결을 정당화하며, 가장 적합한 해결을 타인과의 합의와 논의를 통해서 찾아가는 딜레마의 상황을 제공하는 것으로 생각해 볼 수 있다.

Kapur(2008, 2010)은 수학적 문제에서 비구조화에 대하여 논의하였고, 비구조화된 문제해결을 통한 생산적 실패의 과정을 논의하였다. 그는 외부의 지원이나 제약을 최소화하는 문제를 비구조화된 문제라 하였고 비구조화된 문제의 설계원리를 다음과 같이 제안하였다. 복잡한 시나리오를 기반으로 다양한 해결 경로가 가능한 문제 설계하기 그리고 학생들에게 가정을 설정할 수 있는 상황을 제시하고 해결 과정을 정당화하도록 하기 등이다. 문제에 제약을 가하여 학생들로 하여 구조화된 문제를 성공적으로 해결하게 하는 것이 학습에 효과적이라 할 수 있을지 모르지만, Schwartz & Martin(2004)는 그러한 문제만으로는 새로운 상황에 직면했을 때, 장기적으로 적응력을 떨어뜨릴 수 있다고 보았다. 즉, 문제해결 과정에 자율적 탐구기회를 제공하는 것은 잠재적으로 좀 더 유연하고 적응력 있는 학습에 도움이 된다고 보았다. Kapur 역시 비구조화된 문제를 통한 학습의 효과를 탐색하였다. 그는 실패를 경험하도록 설계된 비구조화된 문제를 해결하는 과정에서 생산적인 학습이 가능함을 설명하였고, 이를 생산적 실패라 명명하였다. 생산적 실패

는 결국 그 문제는 해결하지 못해 실패를 할지라도 문제를 해결하기 위해 자신만의 기호적 표상을 사용한다던지, 탐구해야 할 것들이 무엇인지, 그리고 그것이 해결과정에서 어떤 역할을 하는지를 맥락 전체에서 파악하게 하는 경험 등을 통해 생산적인 학습이 일어남을 의미한다. 또한 그는 생산적 실패를 경험하도록 설계된 환경에서 학생들은 모둠별로, 개인별로 문제를 해결하기 위한 지속적인 노력과정이 생산적이었다고 보고한다.

이러한 생산적 실패는 학습과 연구의 변증법적 과정, 즉 SRC에서도 나타난다. SRC는 학생들의 연구가 질문에 대한 답을 주지 못할지라도, 학생들이 하는 연구 자체가 의미가 있고 연구와 학습을 풍부하게 할 수 있다고 보았다. 또한, 비구조화된 문제에서 제시하는 질문은 다양한 방향으로 이끌 수 있는 열린 문제이며, 이는 SRC의 생성질문과 일치한다. 따라서 비구조화된 문제가 문제해결과정에서 일어나는 SRC를 탐구하는 데 적합하다고 볼 수 있다.

Ⅲ. 연구방법

이 연구는 Chevallard가 제시한 세상으로 질문하기 패러다임을 적용해 수학교실에서 가능한 한 가지 교육 방법으로 비구조화된 문제를 해결하는 과정에서 학생들의 SRC를 탐색하고자 한다. 특히, 비구조화된 문제는 그것을 해결하기 위해 필요한 정보를 수집하고, 제공되지 않은 정보를 가정하는 등, 문제를 스스로 구조화시키면서 문제해결을 위한 전략을 사용 할 기회를 제공하기 때문에 학생들의 SRC를 탐색하는데 적합할 것으로 판단하였다.

1. 연구 참여자 및 데이터 수집

이 연구에 참여한 교사는 경기도 소재의 중학교에서 수업 방법 개선을 위한 많은 노력을 하며 다양한 활동을 시도해보는 적극적인 교사로서, 비구조화된 문제는 처음 접하였으나 연구자와의 몇 번의 회의를 통해 비구조화된 문제에 대해 이해한 상태에서 수업을 진행하였다. 또한, 이 연구에 참여한 학생은 방과 후 수업에 참여한 중학교 2학년 학생으로 중학교 2학년 과정을 마치고 중학교 3학년으로 올라갈 7명의 학생들이었다. 이 학생들은 수학보다는 영어, 토론, 기타, 드럼 등과 같은 다른 영역에 더 부각을 드러내는 학생으로 수학을 특기로 하고 있는 학생이 아닌 보통의 학생들이며, 학업성취도는 중~상 정도에 위치하는 학생들이다.

이 연구에서는 Kapur(2010)가 제시한 비구조화된 문제를 우리나라 맥락에 맞게 변형하여 수업 시간에 제시하였으며, 활용한 비구조화된 문제는 부록으로 첨부하였다. 이 문제를 해결하기 위해서는 다양한 해결 방법을 고려해 볼 수 있는 복잡한 시나리오를 기반으로 하고 있다. 시간, 속도, 거리의 개념과 연립방정식의 풀이를 포함하고 있다. 학생들은 이를 활용하여 문제를 해결하기 위해 다양한 전략을 세울 수 있으나 궁극적으로 문제가 주어진 맥락 안에서 해결이 되지 않는다.

거리와 속력 개념은 중학교 1학년, 연립방정식은 2학년 과정으로서 2017년 2월 초에 연구에 참여한 학생들은 이 문제를 해결하기 위해 필요한 개념을 모두 학습한 상황이다. 그러나 이 문제는 학생들에게 바로 해결 방법을 떠올리게 할 수 없는 실생활 맥락의 문제로, 학생들은 그 문제를 해결하기 위해 주어진 정보를 취사선택해야 하며, 또 제공하지 않은 정보를 문제에서 제시한 사실을 바탕으로 가정해야 하는 상황도 포함하고 있다.

7명의 학생들은 임의로 4명과 3명으로 나뉘어 소그룹 활동을 하였으며, 앞으로 각각을 1조와 2조라 하고, 1조부터 학생1~학생7로 명명하고자 한다. 약 2시간 동안 진행된 수업은 [그림 3]과 같은 순서로 진행하였다.

이때 교사는 학생들이 탐구할 수 있도록 지속적인 독려는 하되, 학생들에게 문제해결의 실마리가 될 수 있는 비계는 제공하지 않았다. 즉, Brousseau가 제시한 비교수학적 상황(adidactic situation)[2]을 구성하여, 학생들이 중심이 되어 질문을 생성하고 답을 찾는 과정에서 형식화, 타당화를 해보도록 하였다. 다만, 교사는 연립방정식의 풀이(가감법, 대입법)등과 같은 기본적인 풀이를 하지 못하는 경우에는 방법을 설명해주는 정도로 안내만 해주었다.

---

[2] 비교수학적 상황은 교사는 중립적인 입장에 있고, 학생이 중심이 되어 스스로 문제를 이해하고 답하게 되는 상황에 있는 것을 말한다(윤나미, 이종희, 임재훈(1999). 즉, 교수 의도가 있지만 학생에게 감추어져 있는 상황이 비교수학적 상황인 것이다.

문제의 맥락 이해
↓
조별로 문제해결을 위한 질문 생성
↓
조별 생성질문 공유
↓
조별 문제해결
↓
조별 문제해결 과정 발표

등장인물: 재석, 준하, 명수 문제의 맥락: 재석과 명수가 준하의 집에서 오디션을 보기 위해, 자전거를 타고 출발했는데, 가는 도중 명수의 자전거가 고장이 난다. 재석이과 명수가 오디션 장까지 가기 위해 재석의 자전거를 번갈아 타고 가기로 한다. 이때, 두 사람이 오디션 장에 함께 도착하기 위해 각각 자전거를 얼마나 타야할까?

[그림 3] 수업 진행과 문제의 맥락
[Fig. 3] Process of lesson and Context of problem

2. 분석 방법

교사와 각 학생들의 조별 활동 내용은 촬영되었으며, 수업 내용은 모두 전사되었다. 학생들이 문제를 해결하면서 개인적으로 기록한 내용물과 발표를 위해 학생들이 전지에 조별로 정리한 것들도 모두 수집하였다.

비구조화된 문제를 소그룹 활동으로 해결하면서, 학생들이 생성질문으로부터 어떠한 질문을 만들고, 각 질문에 답해가는 지, 그 교수학적 과정에 대하여 질문 만들기 과정을 탐색했다. 비록 두 그룹 모두 정답을 도출하지는 못하였지만, 답을 이끌어가는 과정에 있어 다양한 질문 탐색을 통한 변화 과정을 분석하였다. 그룹 활동으로 만들어내는 질문들이 어떻게 파생되고 답과 어떻게 연결되는 지를 Winsløw et al.(2013)이 제시한 SRC 다이어그램을 이용하여 학생들의 SRC의 과정을 해석하였다. 교사에 의해 문제에서 제시된 질문은 Q로 표시하고, 학생들이 만든 질문은 그 순서에 따라 번호를 부여하여 Q_i, 그 질문에 대한 답은 A_i로 표시하였으며, 답이 여러 개인 경우는 발생 순서에 따라 $A_{i,1}$, $A_{i,2}$로 표시하였다. Q_i의 질문에 대한 파생질문은 Q_i*로 표시로 표시하였다. 답을 구하기 위해 사용되는 여러 질문들이 있을 경우에는 화살표를 사용하여 수형도로 표현하였다. 또한 질문과 답이 개별학생에 의해서 발생했을 때는 흰색, 학생들 간 논의를 통해 협력적으로 발생했을 때에는 회색으로 표시하였다. 연구자들은 각 조의 SRC 수형도를 구성하고, 논의를 통해 일치되는 SRC 수형도를 도출하였다.

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

1. 필요한 정보의 취사선택 및 초기 질문 생성

학생들이 문제의 맥락에서 문제해결을 위해 필요한 정보를 표시하게 하였고, 그것을 바탕으로 궁극적인 문제를 해결하기 위해 해결되어야 할 질문을 만들어 보는 활동을 하였다.

학생들이 필요하다고 표시한 정보는 다음과 같다.

정보1. 보통 차로 90km/h 속도로 가면, 올림픽대로는 약 3분이면 건너가.
정보2. 평균 75km/h 속도로 간다고 보면, 집에서 거기까지 (올림픽 공원까지)는 7분 정도 걸릴 거야.
정보3. 재석과 명수는 0.15km/m속력으로 자전거를 탔다.
정보4. 재석: 집에서 학교까지 250m쯤 되는데, 걸어서 약 5분 정도 걸리거든.
정보5. 명수: 집에서 450m쯤 되는데, 15분 정도 걸려.
정보6. 재석: 자전거를 좀 더 빨리 몰 수 있으니까 평균 속력 0.2km/m정도로 갈 수 있을 거야.

맥락에서 주어진 각자 가지고 있는 돈에 대해서는 필요한 조건으로 표시하지 않았다. 위에서 제시된 정보1은 문제를 풀기 위해 필요한 조건이 아님에도 표시되었다. 이러한 결과는 학생들이 활용하기로 한 정보를 선택함에 있어서, 숫자가 있는 부분에 집중하여 정보를 선택하는 경향이 있음을 살펴볼 수 있었다. 정보1에 표시한 학생은 맥락과 상관없이 실제로 정보1을 이용하여 문제를 풀려고 시도하는 모습을 보였다.

문제의 맥락에서 필요한 조건을 표시하면서 맥락을 이해한 후에, 조별로 주어진 비구조화된 문제를 해결하기 위해 필요한 질문을 만들었으며, 그 결과는 [표 1]과 같다. 본격적인 문제 풀이에 들어가면서 1조는 2조의 질

문을 참고하여 이 질문을 바탕으로 답을 찾고, 다른 하위질문을 만들어 나감을 볼 수 있었다.

[표 1] 조별로 공유한 초기 질문
[Table 1] Generative questions in groups

	1조	2조
질문	1. 얼마나 머뭇거렸을까? 2. 언제 출발했을까? 3. 얼마나 쉬었을까?	1. 준하의 집에서부터 올림픽공원까지의 거리는? 2. 재석이와 명수가 준하의 집에서 자전거를 타고 25분 동안 이동한 거리는?

조별로 학생들이 만들어낸 질문에는 상이한 특징이 발견된다. 1조가 만들어낸 질문은 이 문제에서 제시한 정보로는 정확한 값을 구할 수 없는 문제로, 이 질문에 답하기 위해서는 학생들이 맥락 안에서 가정해야만 하는 질문이었던 반면, 2조는 제시한 맥락 안에서 해결할 수 있는 수준의 질문을 만들었다.

특히, 1조가 제시한 질문 중 1번의 "머뭇거렸을까"와 3번의 "쉬었을까"는 그 표현 자체로는 차이를 해석하는 데에 애매한 부분이 있으나, 학생들은 그것을 각각 자전거가 고장 난 시점에서 두 사람이 논의를 위해 얼마나 머뭇거렸는지, 그 후 다시 출발했을 때 신호등이나 기타 상황 때문에 두 사람이 쉬어야만 했던 시간이 얼마나 될지를 고려한 질문이다. 실제 질문을 만드는 과정에서 한 학생이 머뭇거리는 것과 쉬는 것을 불분명하게 사용하였을 때, 다른 학생이 "머뭇거림"과 "쉼"의 정의를 하면서 의미를 명확히 해 나가는 것을 확인할 수 있었다.

2. 조별 질문과 대답 구성 과정

1) 1조의 질문과 대답 구성 과정

1조의 학생들 중 학생4는 가장 활발하게 자신의 의견을 제시하였으며, 전체적인 토론의 방향을 끌어나갔다. 학생1~3은 중상 수준으로, 학생1과 학생3은 조별 활동에 적극 참여하였으나 학생2는 소극적으로 참여하는 모습을 보였다. [그림 4]는 1조의 SRC 과정을 수형도로 나타낸 것이다. 1조는 SRC 과정에서 총 9개의 질문을 만들었다. 각각은 발생 순서에 따라 번호를 부여하였다. 다음은 1조 학생들의 SRC 논의에서 나타난 특징을 중심으로 서술한다.

(1) 초기 질문의 소멸과 후기 질문의 지속적 탐구

질문 Q_1과 Q_2는 문제 상황에서 부가적으로 제시된 정보에 집중하면서 만들어졌으며, 더 이상 논의의 대상이 되지 않고 소멸 되었다. 1조에서 만든 질문 중에 앞서 조별로 공유한 초기질문인 Q_4, Q_5*, Q_8은 문제에서 직접 해결할 수 없고, 가정을 해야 하는 질문임을 언급한 바 있다. 이 질문을 통한 학생들의 탐구 과정이 SRC 다이어그램에서 비교적 짧게 나타나고 있으며, 학생들이 문제를 해결하는데 활용되지 못하고 더 이상 탐구의 대상이 되지 않음을 확인할 수 있었다.

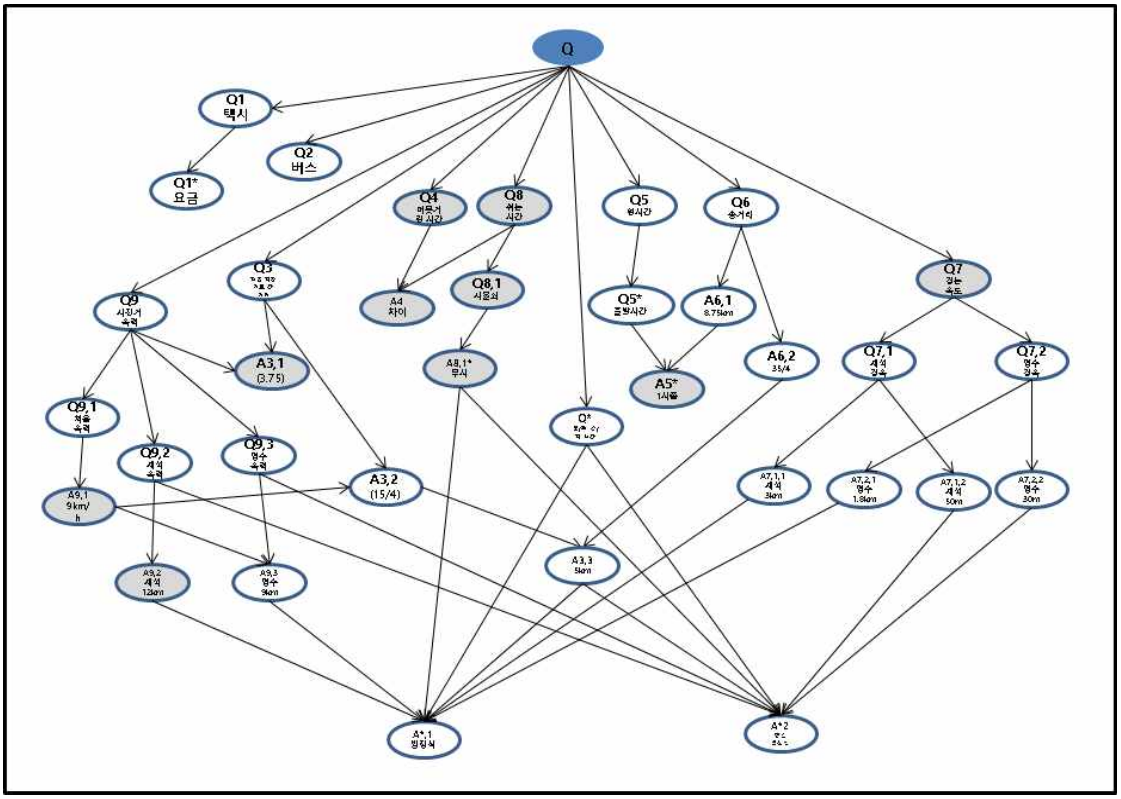
초반 학생들이 관심을 가지게 되는 정보는 추가적인 계산이나 복잡한 논의가 필요한 정보가 아닌 직관적으로 판단할 수 있는 정보에 집중되었다. 그러다가 점진적으로 학생들은 주어진 정보에서 문제해결에 직접적으로 필요한 정보를 바탕으로 질문을 만들고 탐색해 나갔다.

(2) 자신의 경험을 바탕으로 한 가설 생성

학생들은 총 가야하는 거리 $A_{6,1}$: $75\text{km/h} \times 7/60 = 8.75\text{km}$를 구하고, 이를 근거로 출발 시간($A_5^*$)을 추론하였다. 주어진 문제에서는 출발 시간이 제시되어 있지는 않았지만, 문제 개발 과정에서 제시된 자전거의 속력과 도착 시간을 고려하여, 학생들이 출발시간을 추측해 볼 수 있을 것이라 기대했다. 그러나 학생들은 자전거의 속력이나 기타 정보를 활용하지 않고, 자신의 경험을 바탕으로 출발 시간을 추측하였다. 이때, 학생들의 논의는 다음과 같이 진행되었다.

학생1: 1시간이라고 하기엔 너무 빨리 나온 거 같기도 하고.
학생2: 한 25분? 1시 25분?
학생4: 8.75km인데. 8km가려면 1시간쯤은 전에 출발해야 하지 않아? 자전거니까

학생들이 출발시간(A_5^*)을 추측하는 과정에서 추론의 근거를 자신의 경험에 두고 있음을 확인할 수 있었다. 그리고 출발한 시간에 대한 결과를 문제해결 과정에서는 더 이상 활용하지 못하였다.



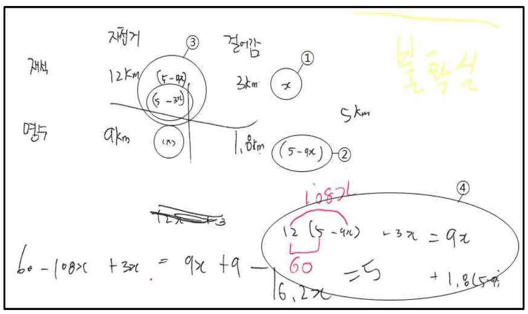
[그림 4] 1조의 SRC 다이어그램
[Fig. 4] SRC diagram of group 1

Q_1: 택시로 가기 Q_1^*: 택시 기본요금 Q_2: 버스로 가기
Q_3: 처음 자전거로 간 거리, $A_{3,1}$: $0.15 \times 25 = 3.75$, $A_{3,2}$: $9\text{km/h} \times 25/60(\text{h}) = 15/4\text{km}$
Q_4: 자전거가 망가지고 머뭇거린 시간
Q_5: 현재시간 Q_5^*: 재석과 명수가 출발한 시간 A_5^*: (추정) 1시
Q_6: 준하의 집에서 오디션 장까지 거리 $A_{6,1}$: $(75\text{km/h} \times 7/60 =)8.75\text{km}$ $A_{6,2}$: $35/4\text{km}$
$A_{3,3}$: $35/4\text{km} - 15/4\text{km} = 5\text{km}$
Q_7: 걷는 속력 $Q_{7,1}$: 재석이가 걷는 속력 $A_{7,1,1}$: 5분:250m로 비율 추론 시속 3km $A_{7,1,2}$: 1분에 50m
$Q_{7,2}$: 명수가 걷는 속력 $A_{7,2,1}$: 시속 1.8km $A_{7,2,2}$: 1분에 30m
Q_8: 다시 자전거를 타고 가면서 각자 쉬게 되는 시간, A_4: Q_4과 Q_8의 의미 차이
$Q_{8,1}$: 자물쇠 잠그는데 걸리는 시간 $A_{8,1}^*$: 무시하기로 함
Q_9: 자전거 속력
$Q_{9,1}$: 처음 재석과 명수가 타고 가는 자전거 속력(0.15km/m로 주어짐)의 시속 $A_{9,1}$: $0.15\text{km/m} \times 60\text{m} = 9\text{km}$
$Q_{9,2}$: 재석이 혼자 갈 때 자전거 속력(0.2km/m로 주어짐) $A_{9,2}$: $0.2\text{km/m} \times 60\text{m} = 12\text{km}$
$Q_{9,3}$: 명수가 혼자 갈 때 자전거 속력 $A_{9,3}$: $0.15\text{km/m} \times 60\text{m} = 9\text{km}$
Q^*: 재석과 명수가 각각 자전거와 걸어간 시간
A_1^*: 명수가 걸어간 시간=재석이가 자전거 탄 시간을 x로 두고 방정식
A_2^*: 명수가 걸어간 시간$=x$, 재석이가 걸어간 시간$=y$로 연립 방정식

(3) 속력을 표현하기 위한 두 가지 방법의 사용

두 사람의 걷는 속력(Q_7)과 자전거 속력(Q_9)이 얼마인지에 대한 질문을 만들었고, 1조의 학생들은 제시된 모든 속력을 시속으로 변경하여 해결하기를 선호하였다. 따라서 각 속력에 대한 답은 시속을 구한 답($A_{7,1,1}$, $A_{7,2,1}$, $A_{9,2}$, $A_{9,3}$)이 먼저 등장하고, 분속에 대한 관심은 나중에 등장한다. 특히, 명수의 자전거 속력($A_{9,3}$: $0.15\mathrm{km/m} \times 60\mathrm{m} = 9\mathrm{km}$)에 대한 답은 이미 문제 상황에서 분속 $0.15\mathrm{km/m}$으로 주어져 있는 것을 의도적으로 시속으로 변경하여 계산해 낸 결과이다.

필요한 속력을 모두 시속으로 표현한 후, 학생들은 방정식을 이용하여 이 문제를 해결하려고 했다. 그 시도는 수형도에서 A_1^*로 표현되었으며, 학생들의 문제해결 과정은 [그림 5]와 같이 나타났다.



[그림 5] A_1^*: 방정식을 활용한 문제해결 과정

[Fig. 5] A_1^*: Problem solving process using equations

학생들은 A_1^*으로 답을 구할 수 없게 되었는데, 그것은 학생들이 방정식을 만들기 위해서 사용한 추론에는 거리와 시간을 혼동하고 있었기 때문이다. 구체적인 오류는 다음 절에서 설명하기로 하고, 여기서는 답을 구하지 못한 뒤 학생들이 취한 전략에 대해서 설명하고자 한다. 학생들은 A_1^*가 성공적이지 못한 근거를 자신들이 만들었던 속력의 표에 두면서, 시속으로 정리했던 것을 모두 분속으로 바꾸었다. 그리고 변수 x, y를 각각 명수가 걸어간 시간(=재석이가 자전거 탄 시간), 재석이가 걸어간 시간(=명수가 자전거 탄 시간)으로 두고, 연립방정식을 활용하여 그 값을 구하였다. 이 방법이 SRC 다이어그램에서 A_2^*로 표현되었다.

결국 학생들은 A_1^*의 방법에서 궁극적으로 오류가 되었던 시간과 거리를 혼동한 문제는 해결하지 못하였으며, 정보를 표현하는 다른 방법에 관심을 두면서 문제해결 전략을 수정했다.

(4) 거리와 시간의 혼동

학생들은 방정식을 만드는 추론 과정에서 거리와 시간을 혼동하고 있었다. 구체적으로 명수가 자전거로 간 거리와 재석이 걸어간 거리를 같은 변수로 두어야 하는데, 명수가 자전거로 간 시간과 재석이가 걸어간 시간을 같은 변수로 두는 오류를 범하고 있다.

A_1^*의 방법으로 해결 과정을 보여주는 위의 [그림 5]에서 학생들의 오류를 살펴보자. 다음은 학생들의 논의의 순서를 간단히 한 것이다.

① 학생들이 사용한 변수 x는 재석이가 걸어간 시간이다. 그리고 그것은 명수가 자전거를 타고 간 시간과 같다고 판단하였다.

② 재석이가 걸어간 거리는 $3x$이고, $(5-3x)$는 재석이가 자전거를 타고 간 거리를 계산한 것이나, 이를 재석이가 자전거를 타고 간 시간으로 기록하면서, 시간과 거리에서 혼동하고 있음을 보여준다. 명수가 걸어간 시간 역시 $(5-9x)$로 기록한다.

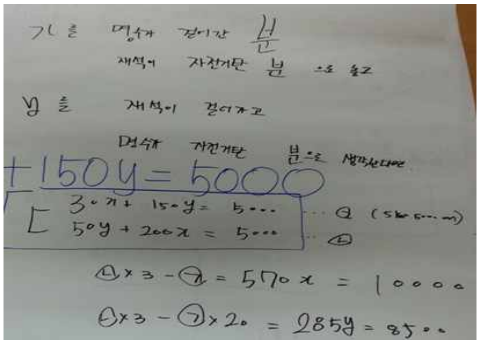
③ 재석이가 자전거 타고 간 시간과 명수가 걸어간 시간이 같다고 생각했기 때문에, $(5-3x)$와 $(5-9x)$가 같다고 생각한다.

④ 그리고 다음과 같은 방정식을 세운다.

- 재석이가 자전거를 타고간 거리+걸어간 거리
  $= 12(5-9x)+3x = 5\mathrm{km}$
- 명수가 자전거를 타고간 거리 +걸어간 거리
  $= 9x+1.8(5-9x) = 5\mathrm{km}$

A_2^*의 방법에서는 각각 명수가 걸어간 시간(=재석이가 자전거 탄 시간), 재석이가 걸어간 시간(=명수가 자전거 탄 시간)을 각각 x, y로 두면서 [그림 6]과 같이 연립방정식을 세워 x, y의 값을 구하였다.

앞서 설명한 바와 같이 학생들은 시속($\mathrm{km/h}$)을 모두



[그림 6] A_2^*: 연립방정식을 활용한 문제해결 과정
[Fig. 6] A_2^*: Problem solving process using system of equations

분속(m/m)으로 수정하였고($A_{7,1,2}$, $A_{7,2,2}$), 미지수를 두 개 사용하면서 A_1^*를 구하는 과정에서 발생한 오류 ②~④는 극복할 수 있게 되었으나, 여전히 동일한 변수로 두어야 할 거리를 시간으로 두는 오류는 극복하지 못한 것을 확인할 수 있었다.

2) 2조의 질문과 대답 구성 과정

2조의 학생들 중에 학생5는 자신의 주장이 강한 성향을 가지고 있었으며, 전체적인 토론의 방향을 이끌어 나갔다. 학생6, 7은 학업 성취도가 중간 수준으로 학생6은 연립방정식의 기본적인 풀이가 되지 않았으나 스스로 문제를 해결해보고자 하는 적극성을 보여주었고, 학생7은 자신이 스스로 문제를 풀기보다는 학생6의 풀이를 함께 살펴보는 모습을 보이면서 학생5, 6의 풀이에 대해 의견을 제시하거나 동조를 해주었다. [그림 7]은 2조의 SRC 과정을 수형도로 표시한 것이다. 2조는 SRC 과정에서 총 8개의 질문을 만들었다. 각각은 발생 순서에 따라 번호를 부여하였다. 다음은 2조 학생들의 SRC 논의에서 나타난 특징을 중심으로 서술한다.

(1) 초기 질문을 사용하여 연결 질문 파생시키기

학생6이 올림픽대로의 길이를 구하는 질문(Q_1)을 하고, 주어진 속력과 시간을 이용하여 올림픽대로의 길이(A_1)를 구하자, 올림픽대로의 길이를 구하는 것은 의미가 없으므로 학생5는 준하의 집에서 올림픽 공원까지의 거리를 먼저 구하자고 제안했다. 이에 문제를 풀기 위해 필요하지 않은 질문은 소멸되고, 학생들이 문제의 맥락을 이해하여 만든 초기 질문인 총거리(Q_2)와 이동한 거리(Q_3)를 바탕으로 남은 거리(Q_4*)에 대한 질문을 추가적으로 파생시켜 남은 거리를 구하였다.

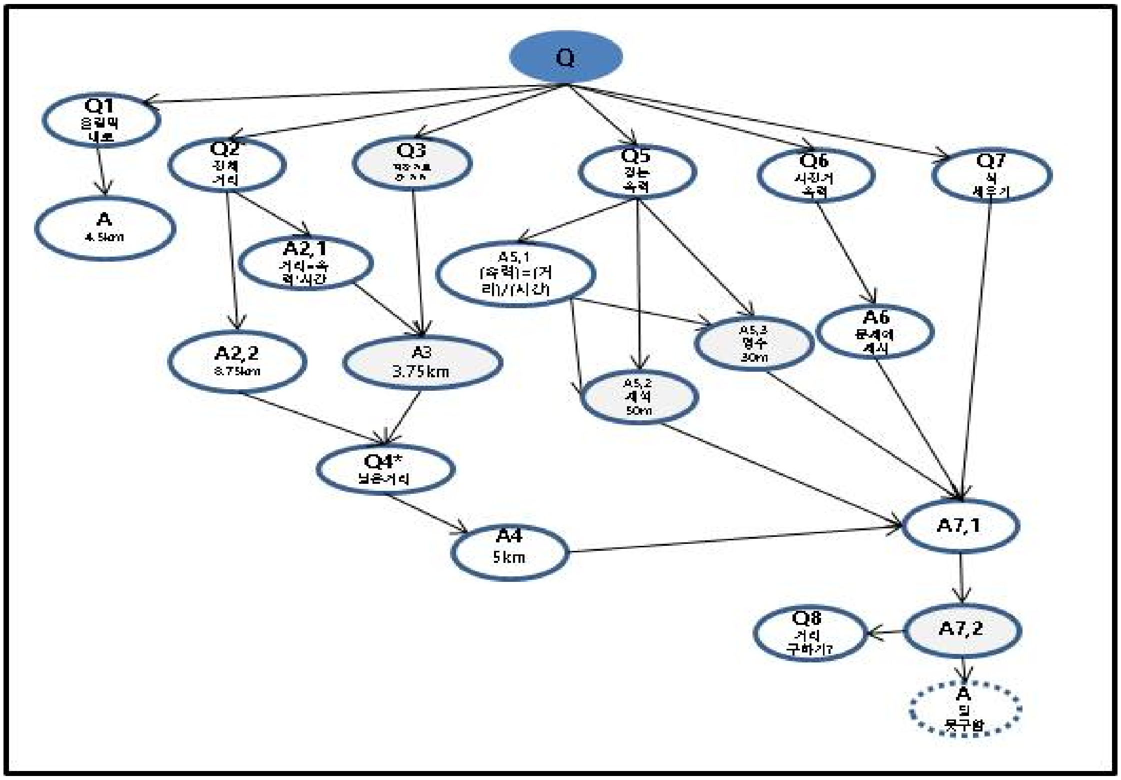
Q_2에 대한 대답으로 학생7이 $A_{2,1}$: (거리)=(속력)×(시간)을 제시하였다. 이 대답을 의미 있게 받아들여 적용하면, 1시간에 75km가는 것을 1분에 $\frac{75}{60}\text{km}$로 가는 것으로 분당 속도로 바꾸어 $\frac{75}{60}\times 7=\frac{35}{4}(\text{km})$로 구할 수 있다. 그러나 학생5는 비례식을 세워 거리를 구하였다. $A_{2,1}$는 $A_{2,2}$: $60\text{분}:75\text{km}=7\text{분}:x\,\text{km}$를 구하는데 영향을 미치지 못하고, 각각의 답이 별개의 것으로 나타났음을 보여준다.

Q_3에 대해서는 $A_{2,1}$을 이용하여 학생들이 함께 논의하여 0.15km/m의 속력으로 25분 동안 자전거를 타고 갔으므로 $0.15\times 25=3.75\text{km}$임을 구하였다.

Q_2에 대해서는 학생5가 주도적으로 해결한 반면, Q_3에 대해서는 전체 학생들이 참여를 하였다. 이는 속력은 '분속'으로 주어지고 시간은 같은 단위인 '분'으로 주어졌을 때 서로 다른 단위인 '시속'과 '분'이 주어졌을 때보다 비교적 쉽게 거리를 구할 수 있음을 보여준다. Q_2, Q_3에 대한 답을 찾은 후에, 파생시킨 남은 거리(Q_4*)에 대한 질문에 대한 답(A_4)은 다음과 같다.

> 준하의 집에서 올림픽 공원까지의 거리는 8.75km이고, 25분 동안 자전거를 타고 간 거리는 3.75km이므로 남은 거리는 5km이다.

Q_4에 대한 하위질문으로 Q_2와 Q_3가 나오는 것이 교사가 주도하는 수업 교실에서 좀 더 자연스러운 흐름일 것이다. 그러나 어떠한 방향을 제시해주지 않고 조별로 해결해야 하는 상황에서 자신들이 처음에 필요하다고 생각했던 질문인 Q_2, Q_3을 해결한 후에 Q_4*가 파생되어 나왔다는 점을 눈여겨볼 필요가 있다. 이러한 결과는 학생들이 문제를 해결하기 위해서 직접적으로 필요한 질문을 바로 만들지 못할 수도 있으나, 점진적인 질문 만들기 과정을 통해 궁극적으로 필요한 질문을 만들어 낼 수 있음을 보여주는 것이기도 하다.

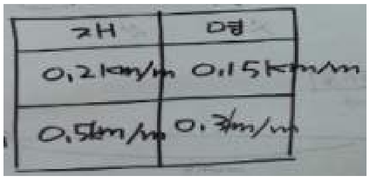


[그림 7] 2조의 SRC 다이어그램
[Fig. 7] SRC diagram of group 2

Q_1: 올림픽 대로의 길이
A$_1$: 시속 90km로 가면 3분이면 갈 수 있으므로, 4.5km
Q_2: 준하의 집에서 올림픽 공원까지의 거리
A$_{2,1}$: (거리)=(속력)×(시간)
A$_{2,2}$: (60분 : 75km = 7분 : x) 8.75km
Q_3: 준하의 집에서 자전거를 타고 25분 동안 이동한 거리
A$_3$: 0.15km/m 의 속력으로 25분 동안 자전거를 타고 갔으므로 $0.15 \times 25 = 3.75$km
Q_4*: 올림픽 공원까지 남은 거리 A_4: 8.75km − 3.75km = 5km
Q_5: 재석이와 명수의 걷는 속력
A$_{5,1}$: 속력=거리/시간
A$_{5,2}$: 재석이가 250m를 5분 동안 걸어가므로 (1분에) 50m
$A_{5,3}$: 명수는 450m의 거리를 15분에 걸어가므로 (1분에) 30m
Q_6: 자전거 속력 A$_6$: 문제에 나와 있음
Q_7: 식 세우기
$A_{7,1}$: $\begin{cases} 0.05x + 0.2y = 3.75 \\ 0.03x + 0.15y = 3.75 \end{cases}$ $A_{7,2}$: $\begin{cases} 0.05x + 0.2y = 5 \\ 0.03 + 0.15y = 5 \end{cases}$
Q_8: 거리를 구해야 하는 것이 아닌지?

(2) 속력의 단위를 고치는 과정에서의 오류발생

거리를 구한 후에, 학생5가 재석이와 명수가 걸은 속력에 대해 질문을 던지면서 자연스럽게 속력을 구하는 것으로 상황이 전환된다. 재석과 명수의 걷는 속력(Q_5)과 재석과 명수의 자전거 속력(Q_6)을 해결한 후 주어진 속력에 대한 조건을 학생6이 표로 [그림 8]과 같이 정리하였다.



[그림 8] 2조의 속력을 나타낸 표
[Fig. 8] Table of velocity in group 2

이에 대해 학생5가 경험에 기반하여 질문을 제기하면서 잘못된 부분을 고쳐나간다.

학생5: 야, 이거 말이 안 되잖아. 걸음이 0.5인데, 이게(자전거를 탄 속력이) 어떻게 0.2야?

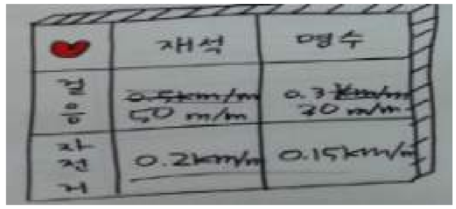
……

학생7: 이건 맞아. 재석 걸음이 50m고, 명수 걸음이 30m고. 단위를 고치니까 틀린 거야.

……

학생6: 차근차근 풀어보자.
학생5: 250나누기 12해봐.
학생6: 왜 12야?
학생5: 5분이 60분 중에 1/12이잖아.
학생7: 20.83333...
학생6: 엥? 야, 12가 아닌 것 같아. 그냥 5아냐? 250÷5
학생5: (종이에 풀어보며) 재석이가 1분에 50m 걷는다고.
학생7: 맞네. 50
학생5: 킬로미터로 왜 바꿔? (킬로미터로 바꾸면) 0.05 잖아.
학생6: 그럼 50(m/m), 30(m/m)이야.

학생5는 속력을 시속으로 구해보려고 시도하면서, 5분이 1시간에 1/12이므로 12로 나누는 오류를 범하고 있다. 이에 학생6과 학생7은 학생5의 말을 이해하지 못하고, 5분으로 나누어야 함을 이야기하여 제대로 된 속력을 구하게 된다. 이에 학생들은 단위를 굳이 'km/m'로 나타낼 필요가 없다는 데에 동의하며, 학생6은 속력을 'm/m'로 두면서 재석이와 명수의 걷는 속력과 자전거를 타고 간 속력을 [그림 9]와 같이 수정한다.

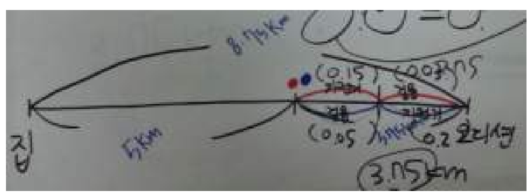


[그림 9] 수정된 속력을 나타낸 표
[Fig. 9] Table of velocity revised in group 2

학생들은 주어진 거리와 시간으로 재석이와 명수의 걷는 속력을 구하는 과정에서, 자전거의 속력과 비교한 경험에 근거하여 오류를 발견하여 한 학생이 의문을 제기한다. 이에 대해 다함께 속력을 구한 후에 꼭 단위를 일치시킬 필요가 없다고 합의하며 제대로 된 결과에 이르게 됨을 볼 수 있다.

(3) 조건을 이용하여 식 세워 풀기

남은 거리와 속력의 조건을 구한 후에 수직선을 이용하여 움직인 거리와 남은 거리를 표시하고, 남은 거리에 x, y를 표시하였다. 그러나 x, y가 무엇을 의미하는지는 정확히 나타내지 않았다.



[그림 10] 문제 상황을 나타내는 그림
[Fig. 10] Diagram for the situation of problem

학생6은 [그림 10]과 같이 표시하면서 재석이가 걸은 시간과 명수가 자전거를 탄 시간이 같고, 재석이가 자전거를 탄 시간과 명수가 걸은 시간이 같다고 두고 식을

세우려 하였다. 이러한 오류는 1조에서 나타난 것과 동일한 것이다. 또한 이 그림은 이동거리 3.75㎞와 남은 거리 5㎞를 혼동하여 잘못 기록한 것을 보여준다.

학생6과 학생7은 위의 [그림 10]과 수정한 속력을 나타낸 표 [그림 9]를 바탕으로 다음과 같은 연립방정식 ($A_{7,1}$)을 세웠다. 이때 표에서는 걷는 속력을 'm/m'로 나타냈으나, 식을 세울 때는 속력의 단위를 'km/m'로 일치시켜 나타내었다. 그러나 남은 거리는 잘못 표시하였음을 인지하지 못하였다.

$$A_{7,1}:\begin{cases}0.05x+0.2y=3.75\\0.03x+0.15y=3.75\end{cases}$$

또한, 학생6과 7은 자신들이 세운 연립방정식을 풀지 못해 연립방정식을 푸는 법에 대해 교사의 도움을 받았다. 이 식에 대해 학생5가 남은 거리를 5로 수정하면서 $A_{7,2}$로 바꾸기는 하였지만, 2조에서 생각한 (재석이가 걸은 시간)=(명수가 자전거 탄 시간), (재석이가 자전거 탄 시간)=(명수가 걸은 시간)을 바탕으로 하면 두 번째 식에서 x, y의 위치를 바꾸어야 하는데 세 학생 모두 이것을 인지하지 못하였다.

$$A_{7,2}:\begin{cases}0.05x+0.2y=5\\0.03x+0.15y=5\end{cases}$$

학생5의 주도하에 연립방정식을 이끌어내고 나서, 학생6은 거리를 구해야 하는 것이 아닌지에 대한 질문 Q_8을 만들었다.

학생6: 거리를 구하는 거 아냐?
학생5: (수직선에 적으면서) 이 시간이 x고 이 시간이 y지.
학생6: 시간만 같으면 되는 거잖아. 거리를 구해야 하는 거 아냐?
학생5: 시간을 구해야지.

그러나 학생6의 의견은 자신의 주장에 대한 근거를 제시하지 못하면서 학생5에 의해 무시당한다. 학생5는 시간이 같다는 자신의 생각을 유지하면서, 연립방정식 ($A_{7,2}$)를 풀면, x의 값이 음수 값이 나오자 방정식의 풀이를 잘못했다고 생각하며 풀이만 바꾸어 봤을 뿐 미지수의 문제에 대해서는 생각하지 못하고 Q에 대한 답을 구하지 못한 상태로 마쳤다. 미지수를 어떻게 놓아야 할지 충분히 고민하지 못한 상태에서 걸은 시간과 자전거를 탄 시간이 같다고 놓고 식을 세운 것은 1, 2조 모두 같은 오류를 보여주었다. 게다가 2조에서는 미지수가 무엇을 의미하는 지에 대한 명확한 정의를 하지 않은 상태에서 그림에 x, y를 표시하였다. 그것이 거리인지, 시간인지 모호한 상태로 식을 세웠다는 점에서 연립방정식을 세우는 첫 번째 조건으로 미지수가 무엇을 의미하는지 정하는 과정이 부족하다고 살펴볼 수 있다.

V. 결론 및 제언

이 연구는 Chevallard가 제시한 "세상으로 질문하기 패러다임"을 적용해 수학교실에서 가능한 한 가지 교육 방법으로 비구조화된 문제를 해결과정에서 학생들이 만들어 내는 질문과 답의 구성 과정을 SRC 다이어그램을 통해서 확인하였다. 1조와 2조 학생들 모두 정답을 도출하지 못했다는 점에서는 실패였지만, 문제해결 과정을 학생들 스스로 탐색하였다는 점에서 생산적 학습이 있었다고 본다. 또한, 이 수업에서 교사는 학생들의 활동에 개입하지 않았지만, 교사의 개입을 어느 정도 해야 할 것인지에 대해서는 추후 논의가 필요할 것으로 생각된다. 사례를 통해 드러난 학생들의 비구조화된 문제해결 과정에서 보여준 질문과 답의 구성 과정은 다음과 같은 특징을 보였다.

첫째, 학생들은 점진적으로 문제해결을 위해 탐구해야 할 가치 있는 정보에 집중하여 수학적 탐구를 할 수 있다. 특히, 1조 학생들은 초기에 만든 질문보다는 비교적 나중에 만든 질문에 대한 탐구를 확장하면서 문제를 해결하려 노력하였으며, 2조 학생들은 불필요한 정보를 탐구에 활용하려는 시도를 보였지만, 이 질문은 바로 소멸되고 궁극적으로는 문제해결을 위한 정보로 질문과 파생질문을 생성해 가면서 수학적 탐구를 하였음을 확인할 수 있다. 학생들이 보통 학교에서 다루는 문제는 사용해야 할 모든 조건들을 포함하고 있으며, 불필요한 조건이나 정보들은 문제에서 의도적으로 포함시키지 않는다.

따라서 학생들은 해결하는 문제의 맥락과 의미를 고려하지 않고 제시된 모든 정보를 활용해야만 한다고 생각하기도 한다. 그러나 실제 실생활에서 문제를 해결하기 위해서는 어떤 정보를 취사선택해야 할 것인지 어떤 것을 탐구해야 할 것인지를 결정하는 것부터 시작된다. 비구조화된 문제는 학생들에게 탐구해야할 대상에 집중할 수 있도록 하는 학습의 기회를 제공하였으며, 학생들이 질문과 답의 생성과정은 의미 있는 탐구가 되었음을 보여준다. 이는 학생들의 진정한 학습의 기회를 제공 할 수 있으므로 학습자 중심의 미래 수학교실에서 적합한 환경이라 생각한다. 또한 21세기 복잡한 문제해결 능력의 강조되는 때, 비구조화된 문제를 통한 학습과 그 활용 방법에 대해 논의할 필요가 있을 것이다.

둘째, 학생들의 질문은 전체보다 부분에 집중하고 있음을 볼 수 있었다. 이러한 결과는 두 조 모두 나타났는데, 1조의 활동에서는 버스나 택시를 타는 것, 머뭇거리는 시간과 같은 것을 질문으로 보여주었다는 점에서 문제를 풀기 위해 꼭 필요하지 않은 질문을 만들었다. 이는 문제풀이와 상관없는 맥락의 한 부분에 집중하고 있지만, 그들의 경험에 기반 한 실제 상황에서 가능한 상황들을 생각해보았다는 점에서 의미가 있다. 2조의 활동에서 학생들이 만든 질문 Q_2, Q_3, Q_4*를 살펴보면, 궁극적으로 문제를 해결하기 위해서는 남은 거리가 얼마나 되는지(Q_4*)를 먼저 생각해야 하고, 그것을 해결하기 위해 부분질문으로 총거리(Q_2)와, 지금까지 온 거리(Q_3)를 구해야 하지만 SRC 다이어그램은 학생들이 만들어낸 질문 Q_4*는 이전에 만든 질문(Q_2, Q_3)을 활용하였을 뿐이다. 이는 학생들이 생성한 전체를 바라보는 파생질문(Q_4*)이 부분질문을 먼저 해결한 후에 나중에 나타났음을 보여주고 있다. 학생들이 처음부터 전체의 맥락을 이해해서 만들 수 있는 파생질문을 생성하지는 못하였으나, 질문 생성활동을 통해 부분질문으로부터 전체 맥락을 이해하는 질문을 만들 수 있었던 것이며, 이는 질문을 생성하는 활동 자체가 수학적 탐구를 위해 중요함을 보여주는 것이다.

셋째, 미래 수학교실에 도래할 소규모 학급에서의 소규모 그룹 토론의 전체적 학습 양태를 제공해 줄 수 있는 도구로서 SRC의 가능성을 확인하였다. 특히 각조의 학생들의 SRC 과정에서 보였던 활동은 일반적 소그룹 형태의 토론에서 발생 가능한 양태를 보여준다. 이 사례에서 보여준 SRC 다이어그램은 소그룹 학생들의 탐구에서 질문은 비교적 개인적으로 발생함을 보여준다. 1조와 2조 모두 학생들이 생성한 질문은 주로 각 조의 개인에 의해서 발생하였다. 그리고 그 질문에 대한 답을 구성 할 때는 협력적으로 해결하려는 경향을 확인할 수 있었다. 이러한 특징이 학생들의 성취도와 관련되어 나타난 것인지는 추후 연구가 필요할 것이다. 즉, 성취도가 높은 학생이 주로 질문을 생성하고, 다른 조원들이 그 질문에 대한 답을 함께 탐색하는 양상이라면, 성취 수준이 비슷한 학생으로 구성된 집단과 이질집단으로 구성된 집단에서의 SRC 양상의 차이를 비교할 필요도 있을 것으로 보인다.

현재의 수학교실에서의 수업은 제한된 시간동안 주어진 교육과정을 배워야 하는 ‘학습’에 좀 더 치중이 되어 있다. 따라서 학생 개개인의 ‘연구’에 대해서는 충분한 관심을 두고 있지 못하기 때문에, 현재의 수학교실에서는 학습과 연구의 통합 활동이 풍부하게 구현되는데 한계가 있다. 그러나 이 연구는 시간과 교육과정의 제약을 벗어나, 복합적인 수학 개념을 포함한 비구조화된 문제를 학생들에게 시간적 제약 없이 제시함으로서 그들의 ‘학습’과 ‘연구’가 동시에 구현 가능함을 확인할 수 있었다. 따라서 학습자 중심의 미래의 수학 교실에 대한 방향성을 살펴본 SRC의 과정이 미래의 수학 교실에 대한 교수학적 구조로서 적합하다. 한국사회는 인구 절벽현상이라는 급격한 저출산 사회로의 변화에 직면하고 있다. 학령인구 감소로 소규모 학급으로의 구성은 다인수 학급에서 효율적인 교수법으로 여겨졌던 강의식 및 전달식 교수방법과 일방적 교실소통 구조에 본질적인 변화를 요구한다. 따라서 미래 수학교실에서 학생의 자기 주도적인 학습과 학습자 맞춤의 교육과정이 강조되는 때, 그동안 학습과 교육에 대한 기념비적인 방문의 패러다임에서 세상에 질문하기 패러다임으로 전환이 필요한 시점이다. 이러한 점에서, 질문 만들기 활동이 수반되는 비구조화된 문제해결 과정을 분석하여, 자기 주도적 학습 활동을 권장하는 소규모 교실에서 학생들이 자신의 수학적 탐구 과정을 어떻게 발전시켜 나가는지 살펴보고자 한 이 연구는 의미가 있다.

참 고 문 헌

권오남, 박정숙, 박지현, 조영미 (2005). 개방형 문제 중심의 프로그램이 수학적 창의력에 미치는 효과, 수학교육 44(2), 307-323.

Kwon, O. N., Park, J. S., Park, J. H., & Cho, Y. M. (2005). Cultivating mathematical creativity through open-ended appoaches: Development of a program and effectiveness analysis, *Mathematical Education 44*(2), 307-323.

김민형, 허지연, 조미경, 박윤미 (2012). 초등학교 4학년 학생들의 비구조화된 문제에서 나타난 해결 과정 및 추론 분석, 수학교육 51(2), 95-114.

Kim, M. K., Heo, J. Y., Cho, M. K., & Park, Y. M (2012). An analysis on the 4th graders' ill-structured problem solving and reasoning, *Mathematical Education 51*(2), 95-114.

김부윤, 정경미 (2009). ATD에 근거한 유리수의 대수학적 completion에 관한 연구, 수학교육 50(2), 135-148.

Kimm B. Y. & Chung, G. M. (2011). The algebraic completion of the rational numbers based on ATD, *The Mathematical Education 50*(2), 135-148.

김혜진 (2015). 교수학의 인류학적 접근 이론(ATD)의 이해, 사회과교육 25(4), 115-128.

Kim, H-J. (2015). Understanding of anthropological theory of didactics(ATD), *Social Studies Education 54*(4), 115-128.

윤나미, 이종희, 임재훈 (1999). 교수학적 상황론의 이해와 측정 지도에의 적용, 수학교육학연구 9(2), 473-491.

Youn, N. M., Lee, C. H., & Yim, J. H. (1999). An understanding of Brousseau's theory about the didactical situations and application to measurement teaching, *Journal of Educational Research in Mathematics 9*(2), 473-491.

정제영 (2016). 지능정보사회 대비 미래 교육정책 방향과 과제, 한국교육학회 교육정책포럼 자료집. 서울

Chyng, J. Y. (2016). Agenda and direction of future educational policy for intelligence information society, *Educational Policy Forum of Korean Educational Research Association*. Seoul.

Anderson, J. (2014). Forging new opportunities for problem solving in Australian mathematics classroom throught the firs national mathematics curriculum. In Y, Li & G. Lappan (Eds.), *Mathematics curriculum in school education* (209-230). Dordrecht: Springer.

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. In Bosch, M. (Ed.), *Proceedings of the 4th conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (21-30). Barcelona: FUNDEMI IQS.

Chevallard, Y. (2012). Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counter paradigm, *12th International Congress on Mathematical Education*, 173-187.

English, L. D. & Gainsburg, J. (2016). Problem solving in a 21st-century mathematics curriculum. In L. D. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International research in mathematics education 3rd edition* (313-335). New York: Routledge.

Jonassen, D. H. (2000). Toward a design theory of problem solving, *Educational Technology Research and Development 48*(4), 63-85.

Jonassen, D. H. & Hung, W. (2008). All problems are not equal: Implications for problem-based learning. *Interdisciplinary Journal of Problem-Based Learning 2*(2), Available at: https://doi.org/10.7771/1541-5015.1080

Kapur, M. (2008). Productive failure. *Cognition and Instruction 26*(3), 379-424.

Kapur, M. (2009). Learning through productive failure in mathematical problem solving. In B. Kaur, Y. B. Har, & M. Kapur (Eds.), *Mathematical Problem Solving* (43-68). Singapore: World Scientific.

Kapur, M. (2010). Productive failure in mathematical problem solving. *Instructional Science 38*(6), 523-550.

Llanos, V. C. & Otero, M. R. (2013). The research and study paths in the secondary school: The case of the polynomial functions of the second degree. *Problems of education in the 21st century 52,* 60-71.

Reed, S. K. (2016). The structure of ill-structured (and well-structured) problems revisited, *Educational Psychology Review 28*(4), 691-716.

Schwartz, D. L. & Martin, T. (2004). Inventing to prepare for future learning: the hidden efficiency of encouraging original student production in statistic instruction, *Cognition and Instruction 22*(2), 129-184.

Simon, H. A. (1973). The structure of ill-structured problems, *Artificial Intelligence 4*, 181-201.

Winsløw C. (2011). Anthropological theory of didactic phenomena : some examples and principles of its use in the study of mathematics education. In M. Bosch et al. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (117-140). Barcelona: Centre de Recerca Mathemàtica.

Winsløw, C., Matheron, Y., & Mercier, A. (2013). Study and research courses as an epistemological model for didactics, *Educational Study Mathematics* 83, 267-284.

Teaching Methodology for Future Mathematics Classroom :Focusing on Students′ Generative Question in Ill-Structured Problem

Na, Miyeong
Graduate School of Seoul National University
E-mail : na282@snu.ac.kr

Cho, Hyungmi†
Graduate School of Seoul National University
E-mail : earthan1@snu.ac.kr

Kwon, Oh Nam
Department of Mathematics Education, Seoul National University
E-mail : onkwon@snu.ac.kr

This paper explores students′ question generation process and their study in small group discussion. The research is based on Anthropological Theory of the Didactic developed by Chevallard. He argues that the savior (knowledge) we are dealing with at school is based on a paradigm that we prevail over whether we 'learn' or 'study' socially. In other words, we haven't provided students with autonomous research and learning opportunities under 'the dominant paradigm of visiting works'. As an alternative, he suggests that we should move on to a new didactic paradigm for 'questioning the world a question', and proposes the Study and Research Courses (SRC) as its pedagogical structure.

This study explores the SRC structure of small group activities in solving ill-structured problems. In order to explore the SRC structure generated in the small group discussion, one middle school teacher and 7 middle school students participated in this study. The students were divided into two groups with 4 students and 3 students. The teacher conducted the lesson with ill-structured problems provided by researchers. We collected students' presentation materials and classroom video records, and then analyzed based on SRC structure.

As a result, we have identified that students were able to focus on the valuable information they needed to explore. We found that the nature of the questions generated by students focused on details more than the whole of the problem. In the SRC course, we also found pattern of a small group discussion. In other words, they generated questions relatively personally, but sought answer cooperatively.

This study identified the possibility of SRC as a tool to provide a holistic learning mode of small group discussions in small class, which bring about future mathematics classrooms. This study is meaningful to investigate how students develop their own mathematical inquiry process through self-directed learning, learner-specific curriculum are emphasized and the paradigm shift is required.

* ZDM Classification : C73
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D40
* Key words : anthropology theory of didactic, study and research course, ill-structured problem, productive failure

† Corresponding author

부록

재석과 명수는 팀으로 쇼미더머니 오디션에 참석하기로 했다.
재석과 명수는 준하의 집에서 연습을 하고, 올림픽 공원에서 열리는 오디션에
자전거를 타고 가기로 했다. 오디션은 오후 2시에 시작될 예정이다.
재석과 명수는 정시에 도착할 수 있을 것이라 기대했다.

재석: 준하 형, 여기서 올림픽 공원까지 얼마나 걸려?

준하: 이 길을 따라(지도를 짚어주며), 올림픽 대로로 건너가면 돼, 보통 차로 90km/h 속도로 가면,
올림픽대로는 약 3분이면 건너 가. 다리 건너면, 올림픽 공원에 어떻게 가는지 표지판이 나와.

명수: 그래서 올림픽 공원까지 가는데 얼마나 걸리는데?

준하: 평균 75km/h 속도로 간다고 보면, 집에서 거기까지 7분 정도 걸릴 거야.

재석과 명수는 준하의 집에서 출발해서, 자전거를 타고 올림픽 공원까지 가기로 했다.
재석과 명수는 0.15km/m 속력으로 자전거를 탔다.
25분쯤 자전거를 타고 가는데, 명수의 자전거 바퀴에 유리가 박혀서 바람이 빠지기 시작했다.

명수: 이게 뭐야. 바퀴에 바람 빠졌어. 재석아 나 네 자전거에 태워가라. 아니다. 우리 버스 타고 갈래?

재석: 내 자전거는 낡아서 형 못 태워. 여기서 올림픽 공원 까지 바로 가는 버스가 없어서 갈아타야 돼.
버스 기다렸다 타고 가면 분명 늦을 거야. 형, 돈 얼마 있어?

명수: (호주머니를 뒤지며) 오늘 돈 뽑아 오는 걸 잊어 버렸네. 2000원 밖에 없는데.

재석: 나도 오늘 지갑 안 가지고 나왔는데, 음료수 하나 사먹을까 하고 1000원 한 장 들고 나왔는데.

명수: 택시 탈 돈도 없네, 여기다 자전거 두고 걸어갈래?

재석: 집에서 학교까지 250m쯤 되는데, 걸어서 약 5분 정도 걸리거든. 형은 학교까지 오는데 얼마나 걸려?

명수: 집에서 450m쯤 되는데, 15분 정도 걸려.

재석: 안돼! 걸어가면 너무 오래 걸려, 오디션에 늦을 거야. 먼저 형, 자전거 자물쇠부터 잠궈 두고,
내 자전거 타고 먼저가. 그 다음에 적당히 가서, 자전거 두고 형은 오디션 장까지 걸어가.
나는 여기서 형이 자전거 둔 곳까지는 걸어갔다가 거기서 부터는 자전거 타고 오디션 장 까지 갈게.
나는 자전거를 좀 더 빨리 몰수 있으니까 평균 속력 0.2km/m 정도로 갈 수 있을 거야.

명수: 오 좋은데~ 근데 내가 자전거를 얼마나 타고 갔다가 세워둬야 하나?
우린 팀이니까 오디션 장에 꼭 함께 도착해야 해.

질문: 명수와 재석이가 오디션 장에 함께 도착하기 위해서,
각각 자전거를 얼마나 타야 할까요?