대한수학교육학회지 <학교수학> 제 19 권 제 3 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 19, No. 3, 571 ~ 591. Sep 2017

# 곡선의 길이 수업에서 길이 개념에 대한 담론 분석

오 택 근*

본 연구는 정적분으로 정의되는 곡선의 길이를 다루는 수업에서 나타나는 길이에 대한 수학적 담론의 특성을 파악하는 것을 목적으로 한다. 이를 위해 의사소통적 접근을 토대로 수업 참여자들이 길이라는 단어를 사용하는 용법에 주목하며 길이에 대한 담론을 조사하였다. 그 결과 담론 참여자들이 의사소통하는 과정에서 길이라는 단어를 세 가지―일상적, 조작적, 구조적―용법으로 사용하고 있음을 확인하였다. 특히 참여자들이 각자 서로 다른 용법의 단어를 사용하면서도 그 차이를 인식하지 못함으로써 효과적이지 못한 의사소통이 이루어짐을 확인할 수 있었다. 본 연구에서는 참여자들이 사용하는 단어의 용법 차이가 의사소통의 효과성을 떨어뜨린다는 사실을 강조하는 한편, 참여자들이 그러한 용법의 차이를 인식하고 주목한다면 의사소통적 단절을 극복하고 메타 수준의 학습이 가능할 수 있음을 제안하였다.

## I. 서론

길이는 시간, 무게, 들이, 각도, 넓이, 부피 등과 함께 생활 주변에 존재하는 다양한 속성 중에 하나이며, 길이의 측정 과정에서 경험하는 양의 비교, 측정, 어림 등은 수학 학습을 통해 길러야 할 중요한 기능이다(교육부, 2015:6~11). 길이 지도에 대한 선행 연구의 대부분은 측정 활동을 통해 학생들이 형성해야 할 어림과 양감 등에 주목하고 있다(고정화, 2010; 이경화, 강완, 2008; Kamii & Clark, 1997). 이러한 연구에서는 주로 학생들이 구체물의 길이를 직접 측정하고 말로 나타내는 활동 및 그 과정에서 발생하는 어림을 강조하는데, 이는 형식적인 교육을 받기 이전에 학생들이 이미 길이에 대한 직관과 경험을 갖고 있다는 점에 근거한다. 즉 학생들의 상상력을 자극할 수 있도록 풍부한 구조를 갖춘 현실적인 맥락에서 수학적인 탐구를 시작하여 직접적이고 구체적인 측정 활동을 수행하고, 그 결과를 서로 의사소통하는 과정에서 직접비교, 간접비교, 단위 도입의 필요성 등을 인식하게 함으로써 자연스럽게 길이 개념이 형성된다는 것이다(이경화, 강완, 2008; Freudenthal, 1991).

수학에서 다루는 단어나 개념의 용법이 일상적인 용법과 다르기 때문에 학생들은 수학 학습 과정에서 많은 어려움을 겪는다(Harel 외, 2006). 어린 학생 뿐 아니라 대학생들까지도 일상적 단어와 수학적 단어의 용법 차이로 인해 학습의 어려움을 겪는다는 연구 결과도 보고된다(Harel 외, 2006; McClure, 2000; Tall, 1997). 이러한 어려움은 특정 개념이나 용어 등의 수학적 대상에

* 한국교육과정평가원, tech0523@kice.re.kr

대한 정의가 일상적인 정의에서 구조적이고 형식적 정의로 변화하면서 발생한다(이지현, 최영기, 2011; Harel, Sowder, 2007). 특히 구조적인 수학으로 입문하는 과정에서 용어를 다룰 때 형식적인 개념 자체를 설명하는 것보다 그러한 형식화가 필요한 이유를 충분히 설명하는 것이 더 중요하며(Dorier, 1995), 형식화의 필요성을 충분히 설명하지 못한다면 학생들에게 그 용어는 외래어에 불과할 것이라는 지적도 있다(Luk, 2005). 학생들이 수학 학습에서 겪는 이러한 어려움에 대한 연구는 주로 인지적 관점에서 학생들이 획득하는 오개념, 인식론적 장애 등의 용어를 통해 다루어져 왔다(김부미, 2006; 이종희, 2002). 이에 비해 의사소통적 관점에서 학습을 설명하는 Sfard(2008)의 접근은 학습의 어려움에 대한 새로운 시각을 제공한다. Sfard(2008)는 기존의 지식에 새로운 지식을 관련시키며 정보를 개인의 인지 도식에 저장하는 획득의 은유에서 벗어나 담론 공동체의 참여자가 됨으로써 해당 담론의 구성원으로서 정체성을 형성함은 물론 그 담론을 변화시키는 것을 학습으로 바라보는 참여의 은유로 학습을 설명한다. 이러한 관점에서는 학생들의 정신도식, 오개념, 인지적 갈등 등을 분석단위로 설명하던 틀에서 벗어나 참여자의 활동, 상호작용패턴, 의사소통적 갈등 등과 같은 분석단위로 학습의 어려움을 설명한다. 본 연구는 곡선의 길이 수업에서 발생하는 길이 개념에 대한 담론에 참여하는 학생들의 활동, 상호작용 및 의사소통적 갈등 등을 통해 한 수업에서 서로 다른 담론이 공존하는 상황에서 발생하는 의사소통의 단절과 그 해소 방안을 설명하기 위해 의사소통적 접근을 따른다.

앞서 언급한 바와 같이 길이에 대한 연구는 주로 초등학생을 대상으로 학생들이 이미 형성하고 있다고 가정하는 직관과 경험에 근거하여 측정활동의 결과를 의사소통하는 과정에서 양감 및 어림의 개념을 통해 길이 개념이 자연스럽게 형성되도록 해야 한다는 내용이 주를 이룬다(고정화, 2010; 이경화, 강완, 2008). 이에 비해 직관적인 용법으로 사용하는 길이 개념 및 정의를 중등학교 이상의 수준에서 과정적인 용법 또는 구조적인 용법으로 사용하는 것과 관련된 연구는 거의 없다. 따라서 길이 개념을 학습하는 과정에서 형성되는 다양한 수학적 담론이 무엇인지 확인하는 연구가 필요하다. 특히 곡선의 길이를 정의하는 단계에서 학생들이 정적분을 이용하여 절차적 방식으로 정의되는 길이 개념을 어떻게 받아들이는지에 대해 자세한 분석이 필요하다. 본 연구에서는 일상적이고 직관적인 수준에서 다루어온 길이 개념을 보다 구조적이고 형식적인 단계로 나아가기 위한 중간 과정으로서 조작적 수준에서 정적분으로 정의되는 곡선의 길이 수업에서 발생하는 길이 개념에 대한 담론의 특징을 분석하는 것을 목적으로 한다. 이를 위해 곡선의 길이 수업에서 참여자들이 사용하는 길이 개념의 용법을 조사하고, 수업 중 발생하는 효과적이지 못한 의사소통의 원인이 무엇인지 확인한다. 이를 통해 곡선의 길이 개념을 다루는 수업에서 고려해야 할 새로운 통찰을 제공할 수 있을 것이다. 따라서 본 연구의 연구 문제는 다음과 같다: ⅰ) 곡선의 길이 수업에서 발생하는 길이에 대한 담론이 지닌 특징은 무엇인가? ⅱ) 참여자들이 길이를 서로 다른 용법으로 사용하면서 효과적인 의사소통이 이루어지는가?

## Ⅱ. 이론적 배경

### 1. 길이 개념 지도에 관한 연구

구체물의 모양에서 파생된 길이라는 대상을

수학적으로 분석하기 위해 요구되는 활동은 측정이다. 듀이는 측정을 모호한 전체에 대해 단위를 정하고 그 단위와의 상대적인 크기를 정함으로서 명확한 전체로 재인식하는 과정이라고 설명하였다(강흥규, 2005). 따라서 어떤 모호한 전체를 인식하고 그것이 모호하기 때문에 명확해지기 위해서는 특정한 단위가 필요하다는 것을 깨달아야 한다. 측정이란 일반적으로는 연속인 전체 양을 기준이 되는 특정한 양을 단위로 하여 비교한 후 수로 나타내는 활동이며, 양을 크기라는 수학적 표현으로 바꾸어 대소관계를 파악하는 것이 측정의 목적으로 강조되기도 한다(강완 외, 2013). 길이는 1차원적인 양으로 사물의 다양한 속성 중에서 다른 어떠한 물리량보다 쉽게 느낄 수 있으며 우선하는 개념이다. 예를 들어 넓이나 부피 등의 속성을 측정하는 경우 결국은 길이를 측정하는 문제로 귀결되므로 길이는 측정 영역에서 가장 중요한 속성이라고 할 수 있다(고정화, 2010). 또한 일상생활 속에서 여러 사물들의 길이에 대한 직관적 비교 및 언어표현을 확인할 수 있다. 예를 들어 “기차는 길고 자동차는 짧다는 것은 설명 없이도 이미 판단할 수 있다(이경화, 강완, 2008).” 따라서 초등학교 수학에서 학생들은 이미 소유하고 있는 직관적인 길이 비교능력을 이용하여 “더 길다, 더 짧다, 가장 길다, 가장 짧다.” 등의 표현을 다룰 수 있으며, 이를 기반으로 직접비교, 간접비교, 임의단위를 활용한 길이측정, 보편단위를 활용한 길이 측정으로 이어지는 활동을 통해 자연스럽게 길이 개념을 형성할 수 있다.

강완 외(2013)는 학생들로 하여금 직접비교나 간접비교를 통해 사물들을 크기를 비교하는 활동이 효율적이지 않음을 인식하게 하고, 보다

<표 II-1> 2015개정 수학과 교육과정의 길이 개념과 관련된 성취기준

| 학년 군 (과목) | 영역 | 핵심 개념 | 성취기준 |
|---|---|---|---|
| 초등학교 1~2학년 | 측정 | 길이 | [2수03-05] 길이를 나타내는 표준 단위의 필요성을 인식하고, 1cm와 1m의 단위를 알며, 상황에 따라 적절한 단위를 사용하여 길이를 측정할 수 있다.<br>[2수03-06] 1m가 100cm임을 알고, 길이를 단명수와 복명수로 표현할 수 있다.<br>[2수03-07] 여러 가지 물건의 길이를 어림하여 보고, 길이에 대한 양감을 기른다.<br>[2수03-08] 구체물의 길이를 재는 과정에서 자의 눈금과 일치하지 않는 길이의 측정값을 ‘약’으로 표현할 수 있다.<br>[2수03-09] 실생활 문제 상황을 통하여 길이의 덧셈과 뺄셈을 이해한다. |
| 초등학교 3~4학년 | | | [4수03-09] 길이를 나타내는 새로운 단위(mm, km)의 필요성을 인식하여, 1mm와 1km의 단위를 알고, 이를 이용하여 길이를 측정하고 어림할 수 있다.<br>[4수03-09] 1cm와 1mm, 1km와 1m의 관계를 이해하고, 길이를 단명수와 복명수로 표현할 수 있다. |
| 초등학교 5~6학년 | | | [6수03-03] 평면도형의 둘레를 재어보는 활동을 통하여 둘레를 이해하고, 기본적인 평면도형의 둘레의 길이를 구할 수 있다.<br>[6수03-07] 여러 가지 둥근 물체의 원주와 지름을 측정하는 활동을 통하여 원주율을 이해한다.<br>[6수03-08] 원주와 원의 넓이를 구하는 방법을 이해하고, 이를 구할 수 있다. |
| 중학교 1~3학년 | 기하 | 평면 도형 | [9수04-06] 부채꼴의 중심각과 호의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 부채꼴의 넓이와 호의 길이를 구할 수 있다.<br>[9수04-15] 평행선 사이의 선분의 길이의 비를 구할 수 있다. |
| 고급수학 Ⅱ | 해석 | 미적분의 활용 | [12고수Ⅱ01-08] 극방정식으로 주어진 곡선의 길이와 영역의 넓이를 구할 수 있다. |

효율적인 방법을 찾는 과정에서 임의의 사물의 양을 단위로 하는 측정(임의단위측정)활동에 참여하며, 나아가 서로 다른 임의단위에 의한 측정 결과에서 발생하는 의사소통의 불일치를 줄이기 위하여 표준적인 보편단위의 필요성을 인식하는 방향으로 길이 개념에 대한 지도가 이루어져야 한다고 권고한다. 특히 보편단위에 의한 측정결과를 표현하는 활동에 익숙해지도록 하는 것이 측정을 통한 길이 개념 지도의 목표가 되어야 한다고 주장한다. 이와 유사하게 Cobb과 그 동료들은 초등학교 교실의 토론 수업을 분석하면서 교실의 학생들이 측정 개념과 관련하여 수행하는 집단적 활동이 발자국을 이용한 측정에서 시작하여 자를 이용한 측정에 이르기까지 5단계에 걸쳐 발달하고 있다는 것을 교실의 수학적 관행이라는 개념을 이용하여 설명하였다(Cobb 외, 2011). 이들이 제시한 측정과 관련된 관행의 진화과정은 임의 단위의 측정에서 시작하여 보다 효율적인 측정 단위를 찾고, 서로 의사소통하는 과정에서 불일치를 줄이기 위해서 보편적인 단위의 필요성을 인식하고 그것을 확립하는 과정으로 요약할 수 있다. 이와 같이 길이 개념은 초등학교에서부터 다양한 측정 활동을 거치며 어렵지 않게 확립된 것처럼 보인다.

한편 2015 개정 수학과 교육과정(교육부, 2015)에서 길이 개념과 관련된 성취기준은 <표 II-1>과 같이 ‘초등학교 1~2학년’, ‘초등학교 3~4학년’, ‘초등학교 5~6학년’, ‘중학교 1~3학년’에 걸쳐서 반복적으로 나타나고 있다. 이에 비해 고등학교에서는 성취기준에 명시적으로 제시하고 있지 않으며 전문과목인 ‘고급수학 II’에서 곡선의 길이를 정적분으로 정의하는 과정을 다루도록 제시하고 있다.

2015 개정 수학과 교육과정에서는 “표준단위(m, cm)를 도입하기 전에 여러 가지 임의단위를 사용하여 구체물의 길이를 재어보게 한다.”, “실제로 재거나 어림하는 측정활동을 통하여 시간, 길이, 들이, 무게, 각도에 대한 양감을 기르게 한다.”는 유의사항을 제시하고 있다(교육부, 2015:12). 즉 임의단위를 사용하여 구체적인 측정 활동을 수행하고, 그 결과를 의사소통하는 과정에서 보편단위의 필요성을 자연스럽게 인식하도록 요구하고 있다. 이와 같이 우리나라 학교수학에서는 초등학교 단계에서 어림 및 단위를 사용한 측정활동으로서의 길이재기를 다루고 있으며 이 과정에서 이미 경험했던 일상적이고 직관적인 인식을 토대로 길이 개념과 측정활동과 연결하는 것을 강조하고 있다. 이에 비해 중학교 단계에서는 초등학교에서 이미 형성된 길이 개념을 토대로 부채꼴의 중심각과 호의 길이 사이의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 호의 길이를 구하거나, 평행선의 성질을 이용하여 평행선 사이의 선분의 길이의 비를 구하는 것과 같이 직접적인 측정활동보다는 수학적인 대상 사이의 관계를 통해 길이를 구하는 방법을 제시하고 있다. 한편 고등학교에서는 미적분의 응용 단원에서 속도와 거리의 관계를 다루는 과정에서 정적분을 이용하여 곡선의 길이를 정의한다. 이러한 정의는 “폐구간에서 정의된 매끄러운 곡선(Weir 외, 2010)”이라는 조건을 가정하고 있다. 즉 속도 벡터의 크기로 표현되는 속력을 일정한 폐구간에서 적분하여 얻는 값으로 곡선의 길이를 다루고 있다. 한편 대학 수학인 고급 해석학에서는 구조적이고 추상화된 방식으로 유계변동이라는 개념을 도입하여 곡선의 길이를 정의한다(김성기 외, 1998:132).

이상의 교육과정 성취기준 분석을 통해 초등학교 단계에서는 임의단위를 사용하여 구체물에 대한 측정활동을 통해 얻어진 결과를 의사소통하면서 길이 개념을 형성하는 과정을 중요하게 강조하고 있음을 알 수 있다. 그러나 중등

학교 이상의 단계에서는 길이의 정의 자체보다는 길이를 구하는 과정이나 다른 요소들과의 관계에 주목하고 있으며, 특히 곡선의 길이의 정의와 관련된 성취기준은 드러나지 않고 있다.

## 2. 곡선의 길이에 대한 역사적 분석

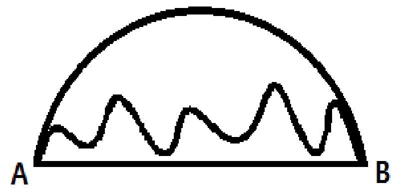
반듯한 선분의 길이에 비해 구부러진 곡선의 길이를 측정하는 것은 매우 어려운 일이다. 수학의 역사에서도 곡선의 길이를 다루는 것은 매우 힘든 일이거나 불가능한 것으로 인식되어 왔다. 예를 들어 데카르트는 직선이나 원이 운동하는 과정에서 만드는 곡선을 기하학적 곡선과 기계적 곡선으로 분류하였는데, 특히 기계적 곡선을 상호관계가 정확하게 정의되지 않은 독립된 두 운동에 의해 그려지는 곡선으로 규정하고, 이를 수학적 대상으로 간주할 수 없다고 말하며 다음과 같이 주장하였다.

> 기하학은 곧다가 휘어지기도 하는 실과 같은 선을 포함하지 않는다. 왜냐하면 직선과 곡선의 비는 모르고 또 그런 비는 인간의 지적 능력으로는 알 수 없기 때문이다. 따라서 그런 비에 바탕을 둔 결론은 엄밀하고 정확한 것으로 받아들일 수 없다(Boyer & Merzbach, 2000:556).

위와 같은 인식에도 불구하고 곡선의 길이 자체를 측정하거나 탐구하려는 노력은 오래전부터 있어 왔다. Toeplitz에 따르면 아르키메데스는 다음과 같은 두 가지 공준을 제시하며 원의 호, 포물선의 호 등과 같은 곡선의 길이를 형식적으로 정의하려고 시도하였다.

> <곡선의 길이에 대한 아르키메데스의 공준>
> ⅰ. 호의 길이는 현의 길이보다 길다.
> ⅱ. 어떤 호가 다른 호를 포함한다면 앞의 호가 뒤의 호보다 길다(Toeplitz; 우정호 외 옮김, 2006:116).

위의 두 번째 공준에서 한 호(A)가 다른 호(B)를 포함한다는 것의 의미는 A의 양 끝점을 잇는 현과 A로 이루어진 영역에 B가 포함된다는 것을 의미한다. 그러나 이 공준은 일반적인 곡선에 대해서 성립하지 않는다. 왜냐하면 [그림 II-1]과 같이 A에 B가 포함되더라도 B를 A의 영역 안에서 충분히 꼬아서 A보다 더 길게 만들 수 있기 때문이다.



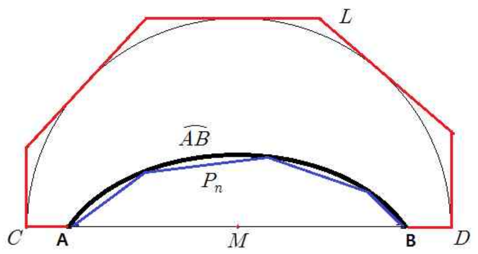

[그림 II-1] 아르키메데스 공준 ⅱ의 반례
(볼록이 아닌 곡선)

이 문제를 극복하기 위해 아르키메데스는 일반적인 경우의 곡선이 아니라 볼록한 곡선에 대해서만 위 공리를 상정하였다. Toeplitz는 볼록하지 않은 곡선의 경우 양 끝이 유한한 길이의 선분의 끝점과 일치하는 곡선임에도 불구하고 그 길이가 무한대로 발산하는 사례가 있음을 제시하며 아르키메데스가 이 문제를 해결하기 위해서 볼록한 곡선이라는 조건을 포함하였을 것이라고 설명하였다. 아르키메데스는 다음과 같이 볼록한 영역을 정의하고, 볼록한 영역을 이루는 곡선을 볼록인 곡선이라고 정의하였다.

> 평면 위의 어떤 영역이 볼록이라는 것은 그 영역에 속한 임의의 서로 다른 두 점 A, B에 대하여 그 두 점을 연결한 선분이 그 영역에 완전히 포함되는 경우를 가리킨다(Toeplitz; 우정호 외 옮김, 2006:117).

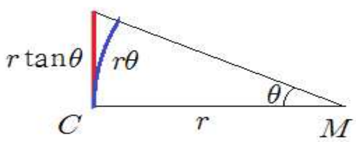
볼록인 곡선의 길이의 존재성에 대해 살펴보자. 우선 볼록인 곡선의 정의에 의해 호 $\overset{\frown}{AB}$가

볼록이면 $\widehat{AB}$는 현 $\overline{AB}$에 의하여 분할되는 평면 중에서 한 쪽에 놓인다. 이 때 $\widehat{AB}$가 그 평면에서 무한하게 확장되지 않는다는 것을 가정해야 하는데, 이 가정은 볼록이라는 조건과 상충되는 것은 아니다.




[그림 II-2] 볼록인 곡선의 길이의 존재성

따라서 [그림 II-2]와 같이 볼록인 곡선 $\widehat{AB}$를 포함시킬 수 있도록 현 $AB$를 확장한 선분 $CD$를 지름으로 하는 원을 크게 잡을 수 있다. 이 때 $\widehat{AB}$를 포함하고 있는 반원 $\widehat{CD}$의 길이는 $\widehat{AB}$의 길이보다 크다. 한편 $\widehat{AB}$에 내접하는 다각형 $P_n$을 잡고, 반원 $\widehat{CD}$에 외접하는 다각형 $L$을 잡으면, 다각형 $L$의 길이는 반원 $\widehat{CD}$의 길이보다 크다. 이는 다음의 [그림 II-3]과 같이 $r\tan\theta > r\theta$임을 보이는 방법으로 설명할 수 있다.




[그림 II-3] 외접다각형과 반원 길이비교

[그림 II-3]에서 외접다각형의 일부인 $r\tan\theta$와 반원의 일부인 $r\theta$의 길이를 비교해보자.

$f(\theta) = r\tan\theta - r\theta$라 두면

$f'(\theta) = r(\sec^2\theta - 1) = r\tan^2\theta > 0$

이므로 $f(\theta)$는 증가함수이고 $f(0) = 0$이므로 $\theta > 0$일 때 $f(\theta) > 0$, 즉 $r\tan\theta > r\theta$가 성립한다.

위의 결과 및 아르키메데스의 두 번째 공준에 의해 $P_n$의 길이는 $L$의 길이보다 작다는 것을 알 수 있다. 이 성질은 모든 자연수 $n$에 대해서 성립한다. 한편 $P_n$에서 $\widehat{AB}$에 꼭짓점 하나를 추가하여 다각형 $P_{n+1}$이 얻어지므로 $P_n$은 증가하는 수열이다. 이를 종합하면 $P_n$은 단조증가하며 유계인 수열이 되어 극한값이 존재한다. 이 $P_n$의 극한값이 곡선의 길이로 정의되는 것이다.

이상에서 살펴본 바와 같이 아르키메데스는 곡선의 길이를 정의하기 위해서 볼록인 곡선이라는 조건을 가정함으로써 자신이 제시한 공리를 만족하는 특정한 곡선에 대해서 길이를 정의하는 방식을 취하였다.

한편 일반적인 곡선의 길이를 구하기 시작한 것은 17세기 후반부터이다. 대표적으로 페르마는 곡선을 잘게 분할하여 작은 호를 잡고, 그 호의 끝 점에서의 접선들로 만들어지는 외접도형을 이용하여 곡선의 길이를 추측하였으며, 호라이트, 닐, 렌 등은 작은 호의 길이를 그 호의 한 끝점에서의 접선에 포함되는 선분의 길이 $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$로 간주하여 곡선의 길이를 구하였다(Boyer & Merzbach, 2000).

이와 같이 곡선의 길이를 수학적 대상으로 간주하지 않으려 했던 생각은 미적분학의 발달과 함께 극복되어왔다. 직선이나 원이 아닌 일반적인 곡선의 길이를 구하는 아이디어는 주어진 곡선을 많은 조각의 곡선으로 분할하여, 이웃하는 분할 점들을 선분으로 연결한 꺾인 선분들의 길이를 측정하고 그 값을 더한 결과를 통해 구하는 것으로 넓이나 부피를 구하기 위한 구분구적법의 아이디어를 길이를 구하는 데에 적용하는 방법이다. 이 방법은 가장 긴 선분 조각의 길이가 0이 되도록 분할하면 꺾인 선들의 길이의 합이 처음 주어진 곡선의 길이에 가

까워질 것이라는 직관에 근거한다. 아르키메데스가 곡선의 길이를 구하기 위해 공리를 형식화하고 내접하는 다각형의 둘레의 길이가 점점 호의 길이에 가까이 간다고 가정함으로써 다각형의 둘레의 길이를 이용하여 호의 길이를 구한 것도 이러한 직관에 근거한 것이다(Weir 외, 2010).

## 3. 현대 수학에서 곡선의 길이

미적분학이 발달하면서 곡선을 분할하여 얻은 짧은 곡선을 선분으로 간주하고 그 길이의 합을 이용하여 곡선의 길이를 구하는 아이디어는 보다 정교화 되어 현대에는 정적분을 통해 곡선의 길이를 구할 수 있게 되었다. 물론 정적분을 통해 곡선의 길이를 정의할 때, 모든 곡선이 길이를 갖는 것은 아니다. 정적분을 통해 곡선의 길이를 정의하기 위해서는 다음과 같이 주어진 곡선이 매끄러운 곡선이라는 조건이 필요하다.

<정의> 매끄러운 곡선의 길이
$t$가 $t=a$에서 $t=b$까지 증가할 때, 정확히 한 번 그려지는 매끄러운 곡선
$\mathrm{r}(t)=x(t)\mathrm{i}+y(t)\mathrm{j}+z(t)\mathbf{k},\ a \le t \le b$
의 길이(length)는

$$L=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$$

이다(Weir 외, 2010:742).

곡선의 길이를 정의하는 과정에서 매끄러운 곡선이라는 조건이 필요한 이유는 곡선 $\mathrm{r}(t)$의 속도벡터의 크기가 적분 가능해야하기 때문이다. 한편, 현대 수학에서는 곡선의 길이를 정의하기 위해서 유계변동함수라는 개념을 사용한다. 유계변동함수란 함수의 증감을 모두 더하였을 때 유한값이 되는 함수로 다음과 같이 엄밀하게 정의된다.

<정의> 변동, 유계변동함수
함수 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$과 구간 $[a,b]$의 분할 $P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$에 대하여, 분할 $P$에 의한 함수 $f$의 변동 $V_a^b(f,P)$를

$$V_a^b(f,P)=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$$

로 정의한다. 집합 $\{V_a^b(f,P)|P\in\wp[a,b]\}$가 위로 유계일 때, 함수 $f$를 유계변동함수라고 하고, 이 경우 전변동 $V_a^b(f)$를
$V_a^b(f)=\sup\{V_a^b(f,P)|P\in\wp[a,b]\}$
로 정의한다.(김성기 외, 1998:128)

위와 같이 전변동을 정의하기 위해서는 구간 $[a,b]$에 대한 임의의 분할에 대하여 함수 $f$의 변동 $V_a^b(f,P)$가 유계라는 조건이 필요하다. 이 조건은 함수가 단조증가나 단조감소가 아니더라도 $y$값의 차이의 합이 무한대로 발산하지 않아야 함을 뜻한다. 이렇게 정의된 전변동을 벡터함수에 확장하면 곡선의 길이를 다음과 같이 정의할 수 있다.

<정의> 곡선의 길이
곡선 $\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}^m$과 구간 $[a,b]$의 분할 $P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$이 주어지면

$$\Lambda(\alpha,P)=\sum_{i=1}^{n}\|\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})\|,$$

$$\Lambda(\alpha)=\sup\{\Lambda(\alpha,P)|P\in\wp[a,b]\}$$

로 정의하자. 만일 $\Lambda(\alpha)$가 유한값이면 이를 곡선 $\alpha$의 길이라 한다(김성기 외, 1998:132).

김성기 외(1998)는 곡선 $\alpha$의 성분함수가 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$로 주어질 때, 곡선 $\alpha$의 길이가 유한값이라는 사실과 각 성분함수 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$가 모두 유계변동함수라는 것이 서로 동치라는 사실을 보여주었다.

이상에서 살펴본 바와 같이 곡선의 길이에

대한 수학의 역사를 통해 점차적으로 길이를 정의할 수 있는 곡선의 범위가 확장되어 가고 있으며, 이전에는 길이를 구하거나 정의하는 것이 불가능하다고 여겨졌던 다양한 곡선들이 새로운 관점에서 정의되면서 그 길이를 구하거나 정의하는 방법이 발견되고 발전되어 왔다는 것을 확인할 수 있다.

## III. 연구 방법

### 1. 담론 분석을 위한 이론적 틀

본 연구는 사고를 의사소통의 개별화된 형태로 간주하며 인지에 대한 의사소통적 접근을 통해 교실에서 공동체의 수학적 담론에 참여하며 그 속에서 개인의 정체성을 확립하는 것으로 학습을 설명하는 Sfard(2008)의 관점을 따른다. Sfard(2008)는 담론 공동체가 사용하는 단어의 용법(word use), 시각적 매개체(visual mediator), 루틴(routine), 그리고 내러티브(narrative)에 의해 서로 구별되는 담론을 확인할 수 있다고 보았다. 이때 공동체가 사용하는 단어의 용법이란 담론 참여자들이 해당 담론에서 특정한 단어를 사용하고 이해하는 방식을 말하며, 시각적 매개체는 효과적인 의사소통을 위해 고안되어 사용하는 기호나 그림 등의 시각적인 대상을 의미한다. 한편 루틴은 특정한 담론 공동체에 참여하는 사람들의 반복적인 의사소통 양식이나 대화, 행동패턴 등을 확인할 수 있는 메타 수준의 규칙이며, 내러티브는 담론에 참여하는 사람들이 암묵적으로 혹은 자연스럽게 받아들이며 승인하거나 혹은 거부하는 담론의 대상에 대한 발언 및 대상 사이의 관계를 의미한다. 예를 들어 수학적인 담론에서 승인되는 내러티브는 정의, 정리, 공리 등이 있다(Güçler, 2013; Sfard, 2008). Güçler(2013)는 미적분학 수업에서 극한에 대한 담론 분석을 시도하며 담론 참여자들이 사용하는 단어의 용법을 구어적 사용, 조작적 사용, 대상화된 사용이라는 세 가지 범주로 구분하였다. 구어적 사용이란 해당 단어를 일상적인 용법으로 사용하면서 수학적 대상에 대해서 말하는 것이며, 조작적 사용이란 해당 단어와 관련된 절차 및 과정, 행동 등을 통해서 수학적 대상에 대해 말하는 것이며, 대상화된 사용이란 그 단어 자체를 물화된 대상과 같은 실체로서 수학적 대상에 대해 말하는 것을 의미한다. 한편 Sfard(1991)는 대상화의 정도와 관련하여 조작적 방식의 사고에서 구조적 방식의 사고로 이행하는 것이 수학적 대상에 대한 대상화가 진전하는 단계로 보았다. 따라서 Güçler(2013)가 구분한 세 번째 단계인 대상화된 사용이라는 범주는 수학적 단어를 구조적인 용법으로 사용하는 것으로 보는 것이 합당할 것이다. 따라서 본 연구에서는 Güçler(2013)가 구분한 세 가지 용법과 Sfard(1991)의 대상화의 진전 단계를 참고하여 담론 참여자들이 사용하는 단어의 용법을 일상적 사용, 조작적 사용, 구조적 사용이라는 세 범주로 구분하였다. 이러한 용법의 차이는 길이 개념에 대한 서로 다른 담론을 구별하는 기준이 되며, 나아가 참여자들의 의사소통이 효과적이지 못한 이유를 설명할 수 있는 근거가 된다.

한편 수업에서 길이라는 단어를 서로 다른 용법으로 사용하면서 의사소통이 효과적으로 이루어지고 있는지 여부를 확인하기 위해서 본 연구에서는 <표 III-1>과 같이 Sfard(2001)가 제시한 표명된 초점, 수반된 초점, 의도된 초점이라는 삼면적 초점 분석 틀을 사용하였다. 여기서 표명된 초점이란 직접 언급되는 단어를 말하며, 수반된 초점이란 참여자들이 발언하면서 행하는 행동이나 몸짓 또는 시각적 매개체 등

<표 III-1> 의사소통의 효과성 분석을 위한 초점분석틀

| 표명된 초점 | 수반된 초점 | 의도된 초점 |
|---|---|---|
| 화자가 직접 언급하며 사용하는 단어 | 화자가 발언하며 주목하는 대상 및 행동 | 화자의 말과 행동이 의도하는 대상(단어의 의도된 용법) |

을 가리키는 행동을 말한다. 그리고 의도된 초점이란 표명된 초점과 수반된 초점 및 일련의 의사소통 과정에서 파악되는 의도된 무형의 대상을 말한다. 이 분석 틀은 비록 같은 단어를 말하더라도 수반된 초점이나 의도된 초점 등의 차이로 인해 의사소통이 효과적으로 진행되지 못하는 상황을 설명할 때 유용하다.

## 2. 자료의 수집 및 분석 방법

본 연구에서는 정적분으로 곡선의 길이를 정의하는 수업에서 발생하는 학생들의 담론의 유형을 분석하는 사례연구이다. 이를 위해 학생들의 질문을 토대로 수업 중에 적극적인 논의가 이루어지고 있는 수도권의 과학영재학교 3학년 미적분학 교실을 선정하였다. 이러한 자료의 선정은 담론 분석과 같은 질적인 연구에서 연구의 목적에 따라 특정한 사례에 주목하여 연구 현장을 선정하여 참여 관찰을 수행하는 것이 필요하다는 권고를 따른 것이다(우정호 외, 2006). 본 연구에서 분석을 위해 수집한 자료는 곡선의 길이를 정의하는 단계에서 교사 T와 학생 12명이 진행한 3시간 분량의 수업을 관찰하며 녹화한 비디오, 해당 수업을 위해 학생들이 사전에 작성하여 기록한 질문 과제, 그리고 수업을 진행한 교사와 학생의 면담 자료이다.

연구 참여자인 교사 T는 관찰 당시 학생들의 질문을 이용하여 토론을 장려하는 수업을 실시하고 있었다. 또한 본 연구에 참여한 12명의 학생들은 심화선택과목인 ‘미적분학Ⅱ’과목을 수강하는 학생들로 높은 수학 성취도를 보이고 있었으며, 수학에 대한 흥미와 자신감도 높은 편이었다. 특히 영재학교 3학년 학생들로 발표와 토론식 수업 문화에 익숙한 상태였다. 연구자는 해당 학기의 모든 수업[1]을 관찰하였으며, 본 연구에서는 3시간 분량을 분석하여 그 중 4개의 일화를 중심으로 결과를 제시하였다. 이 4개의 일화는 시간에 따른 순서인 동시에 정적분을 이용하여 곡선의 길이를 정의하는 과정의 정당화, 정적분 표현이 정의인지 공식인지에 대한 공론화, 길이 개념에 대한 다양한 용법의 출현, 길이의 정의에 대한 구조적 담론의 형성 가능성 등과 같이 서로 구분되는 담론의 특징을 나타내고 있다.

수업 녹화 비디오는 모두 전사하여 참여자들이 곡선의 길이와 관련하여 나눈 대화를 주제에 따라 분류하였으며, 특히 길이라는 단어를 사용할 때 구어적, 조작적, 구조적 용법 중 어느 용법에 따라 사용하고 있는지를 중심으로 분석하였다. 그리고 참여자들의 의사소통이 효과적으로 이루어지는지를 파악하기 위해 Sfard (2001)가 제시한 분석 틀에 따라 삼면적 초점 분석을 실시하였다. 본 연구에서는 수업 녹화자료를 통해 이루어진 코딩 결과와 학생들이 제출한 과제 기록, 그리고 수업 후 교사와의 면담을 통해 확인한 사실 등을 토대로 지속적인 비교를 통해 분석 결과의 타당성을 확보하기 위하여 노력하였다. 특히 교사 면담은 매 수업 후 30분간 총 22회 진행되었으며, 본 연구와 관련한 면담은 해당 수업 후 2회, 그리고 연구 결과

1) 이 수업은 3학점 16주 수업이며, 지필평가 기간을 제외하고 14주 동안 진행되었다.

에 대한 참여자 검토는 학기가 끝난 후 2회 진행되었다. 이와 같이 분석 단계에서 본 연구에 참여했던 교사의 참여자 검토를 통해 동의 여부를 확인하는 기회를 가짐으로써 본 연구 결과에 대한 연구자의 주관적 해석을 최소화하기 위해 노력하였다.

# IV. 연구 결과

## 1. 정적분으로 정의되는 곡선의 길이

<일화1>은 곡선의 길이에 대한 토론을 시작하기 위해 교사의 요청을 받고 정적분으로 표현되는 곡선의 길이를 제시하는 학생 S1의 발표 상황이다. S1은 곡선을 분할하여 각 분할의 끝 점을 잇는 선분들의 합

$$L_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2 + (\Delta z_k)^2} \quad \text{--- (1d)}$$

의 극한으로부터 정적분표현

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt \quad \text{--- (1a)}$$

을 이끌어낼 수 있으며, 그 과정은 $L_n$의 우변을 $\Delta t$로 나누고 다시 $\Delta t$를 곱한 후 극한을 취하는 방법(1e)으로 설명할 수 있다는 아이디어를 제시하였다.

S1은 발표과정에서 $L_n$의 극한이 $L$이 됨을 유도할 때, $\frac{\Delta x_k}{\Delta t}$, $\frac{\Delta y_k}{\Delta t}$, $\frac{\Delta z_k}{\Delta t}$가 $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$로 변화하는 과정을 자세히 설명하지 않았다. 이로 인해 일부 학생들이 (1d)의 극한이 (1a)로 수렴하는지 여부를 확인하는 질문을 제기하였다. 이 질문에 답하기 위해서는 주어진 곡선이 매끄러운 곡선이라는 가정이 필요하다. 왜냐 하면 $x=f(t)$, $y=g(t)$, $z=h(t)$로 정의된 벡터함수 $\mathrm{r}(t)=f(t)\mathrm{i}+g(t)\mathrm{j}+h(t)\mathrm{k}$가 매끄러운 곡선이어야 각 성분함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$, $z=h(t)$가 각각 $t_k$를 포함하는 적당한 개구간 $(t_k-\delta, t_k+\delta)$에서 미분가능하고, 폐구간 $[t_k-\delta, t_k+\delta]$에서 연속이 되어 평균값 정리를 적용할 수 있기 때문이다.

<일화 1 : 곡선의 길이의 정적분 표현>

| 행 | 화자 | 발언 | 행동 및 기록 |
|---|---|---|---|
| 1a | S1 | 이 식의 직관적인 의미를 살펴보자면, | $L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$ 라고 쓴다. |
| 1b | | 이렇게 어떤 곡선이 있으면 이 곡선 위에 이렇게 점을 잡은 다음에 위에 각각의 이 점들을 잇는 선분들을 생각할 수 있겠죠? | 칠판에 곡선을 그린 후 그 곡선 위에 몇 개의 점을 찍고, 그 점들을 선분으로 연결한다. |
| 1c | | 여기서 이 점을 매우 촘촘하게 잡은 다음에 이 각 선분들의 길이를 모두 다 더하면 이 L 값에 가까워지게 되고 실제로 이 식이 그 의미를 대략 포함하고 있는데요. | |
| 1d | | 그래서 이 어떤 곡선 r(t)를 a에서 b까지 길이를 재는 데 이것을 t에 대해서 등 간격 n등분을 하게 된다면, 곡선의 길이는 다음과 같은 식으로 유추할 수 있게 되고 | $L_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2 + (\Delta z_k)^2}$ 라고 쓴다. |
| 1e | | 여기서 우변을 $\Delta(t)$로 나눈 다음에 다시 $\Delta(t)$를 곱하고 이게 n이 무한 극한으로 가기 때문에 결론적으로 이 정적분의 식으로 나타나게 됩니다. | $= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{\Delta x_k}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z_k}{\Delta t}\right)^2} \cdot \Delta t$ 라고 쓰고 (1)을 가리킨다. |

즉

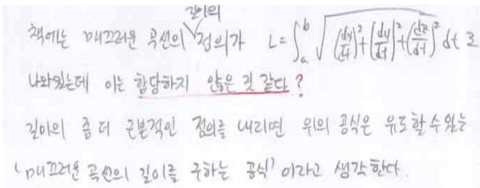
$$\Delta x_k = f'(t_k^*)\Delta t_k,$$
$$\Delta y_k = g'(t_k^{**})\Delta t_k,$$
$$\Delta z_k = h'(t_k^{***})\Delta t_k$$

을 만족하는 적당한 실수 $t_k^*, t_k^{**}, t_k^{***}$가 $(t_k-\delta, t_k+\delta)$에 존재하고, 매끄러운 곡선의 경우 각 성분함수의 도함수 $f', g', h'$도 모두 연속이므로 $\Delta t_k \to 0$일 때, 즉 $\delta \to 0$일 때,

$$f'(t_k^*) \to f'(t_k),$$
$$g'(t_k^{**}) \to g'(t_k),$$
$$h'(t_k^{***}) \to h'(t_k)$$

이 성립한다. 따라서 (*)의 극한이 (**)으로 표현됨을 보일 수 있다. 이와 같이 곡선의 길이를 적분으로 표현하기 위해서는 각 성분함수의 도함수가 연속이라는 조건이 필요하다.

위와 같은 설명은 수업 중 사용하는 주 교재(Weir 외, 2010)에 제시되어 있다. 교재에서는 $a \le t \le b$인 범위에서 매개화된 곡선 $\mathrm{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$가 매끄러운 곡선일 때, 그 길이를 다음과 같이 정적분을 이용하여 (1a)와 같이 정의하고 있다. 이 수업에 참여한 학생들은 미리 예습을 통해서 곡선의 길이를 정적분으로 유도하며 정의하는 과정을 접하였다. 특히 평면에서 곡선의 길이를 정적분으로 표현할 때 각 성분함수에 대하여 평균값 정리를 사용하는 아이디어 및 도함수가 연속이어야 한다는 조건의 필요성에 대해서 이전 학기에서 학습하였고, 그 과정을 정기고사 문제로도 접한 바 있었다. 그러므로 곡선의 길이를 정적분으로 표현하여 구하는 방법은 이 수업에 참여하는 학생들에게 승인되고 있는 내러티브 중 하나이다. 이때 곡선의 길이를 정적분으로 나타내는 내러티브는 교재에 제시되어 있는 바와 같이 '정의'로 인식되기 보다는 곡선의 길이를 구하는 한 가지 공식, 즉 '정리'와 유사한 내러티브로 받아들여지고 있다. 예를 들어 S2는 '질문 만들기' 과제에서 [그림 IV-1]과 같이 분명하게 주어진 식이 길이의 정의가 아니라 길이를 구하는 공식이라고 생각한다고 밝히며 "길이의 근본적인 정의"가 필요하다고 기록하였다.


책에는 매끄러운 곡선의 길이의 정의가 $L=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$ 로 나와있는데 이는 합당하지 않은 것 같다?
길이의 좀 더 근본적인 정의를 내리면 위의 공식은 유도할 수 있는 '매끄러운 곡선의 길이를 구하는 공식'이라고 생각한다.

[그림 IV-1] S2의 과제 기록

학생들이 제출한 과제 기록에 대한 검토를 토대로 많은 학생들이 곡선의 길이를 정적분으로 나타내는 것이 '정의'가 아닌 '공식'으로 인

<일화 2 : 곡선의 길이에 대한 정적분 표현 : 공식인가? 정의인가?>

| 행 | 화자 | 발언 | 행동 및 기록 |
|---|---|---|---|
| 2 | T | 과연 이게 길이를 구하는 어떤 하나의 공식으로 쓰이는 건지? 아니면 정의인지? 만약에 정의가 되려면 정의로서 충분한지 한 번 생각을 해보자는 거죠.<br>여러분이 그런 질문을 많이 했어요! S1이 보기에는 어때요? 정의가 되기에 충분한가요? | $L=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$ 을 가리킨다.<br>S1을 바라본다. |
| 3 | S1 | 저도 이게, 정의라기보다는 공식의 성격이 강하다고 생각(...합니다.) | $L=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$ 을 가리킨다. |

<표 IV-1> <일화3> 4~8행의 T, S3, S4사이의 의사소통에 대한 초점 분석

| 화자(행) | 표명된 초점 | 수반된 초점 | 의도된 초점 |
|---|---|---|---|
| T(4,8) | 길이의 정의 | S1의 발언(3행) 및<br>S2의 기록(그림Ⅳ-1) | 길이의 본질적 정의<br>(구조적 사용) |
| S3(5) | $dx$의 제곱 더하기 $dy$의<br>제곱의 루트? | T의 발언(4행) 및<br>$\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$ | 정적분으로 표현된 길이<br>(조작적 사용) |
| S4(6) | 그것으로 할 때,<br>그 정의 | $\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$<br>T의 발언(4행) | 길이의 본질적 정의<br>(구조적 사용) |

식하고 있음을 확인한 T는 이 주제에 대해 교실 전체의 논의가 이루어질 수 있도록 <일화2>에서와 같이 질문을 제기하였다.

매끄러운 곡선의 길이에 대한 정의로 제시된 적분 표현

$$L=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$$

이 하나의 공식인지, 아니면 정의로서 충분한지에 대한 질문에 대한 S1의 대답(3)은 그가 이 표현을 정의로 받아들이기보다는 공식으로 인식하고 있음을 보여준다. 곡선의 길이를 정적분으로 나타내는 것에 대한 T의 공론화를 통해 학생들은 '길이의 정의'에 대해 되돌아 볼 수 있는 기회를 갖게 되었다.

## 2. 길이의 서로 다른 담론 출현

앞 절에서 언급한 바와 같이 본 연구에 참여한 일부 학생들(S1, S2)은 정적분으로 길이를 표현하는 것은 일종의 계산 방법 또는 절차적인 수단으로 인식하고 있었다. 이들에게 수학적 대상의 정의는 어떤 조작이나 절차라기보다는 그 대상의 속성을 명확히 할 수 있는 진술이어야 하는 것이 승인된 내러티브인 것이다. 따라서 곡선의 길이를 정적분으로 '정의'한다는 내러티브가 받아들여지지 않고 있는 것이다. S1의 대답과 S2가 제기한 과제 기록 및 T의 공론화로 인해 교실 공동체는 본격적으로 길이의 정의에 초점을 맞추어 수학적 담론을 형성하기 시작하였다. 이는 <일화 3>에서 잘 드러난다.

'길이의 정의'가 무엇인지 묻는 T의 질문(4)은 앞선 두 일화에서 정적분으로 표현된 곡선의 길이가 정의라기보다는 공식의 성격이 강하다는 S1과 S2의 문제제기에 대한 공론화이며, 특히 S2가 제기했던 '길이에 대한 근본적인 정의'를 의도한 발언으로 볼 수 있다. 따라서 T가 이 발언에서 사용한 길이라는 단어의 용법은 구조적 용법이다. 한편 이러한 T의 질문에 대해 $ds$를 표현하는 식 $\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$을 제시하며 정적분으로 표현되는 곡선의 길이 공식을 다시 언급하는 S3의 발언(5)은 여전히 조작적 용법에서 길이라는 단어를 사용하고 있음을 알 수 있다. 특히 S3은 이 식을 의문형으로 언급하면서 다소 자신감이 없는 모습을 보여주고 있다. 이에 S4는 S3이 언급한 $\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$을 가리키며, 그러한 조작적 방식으로 곡선의 길이를 구하는 것을 정당화하는 본질적인 정의가 있을 것이라고 생각하고, 그 정의가 무엇인지를 묻고 있다(6). 따라서 S4가 언급한 '그(길이의) 정의'란 T의 질문과 유사하게 구조적 용법을 의미한다고 해석할 수 있다. <일화3>의 4행부터 8행까지의 의사소통은 자연스럽게 이루어지고 있는 것처럼 보이지만 위의 분석에서와 같이 참여자들이 길이라는 단어에 대해 서로 다른 용법—조작적 용법과 구조적 용법—을 사용함으로 인해 의도된 초점이 서로 다르다는 것을 확

<일화 3 : 길이의 정의에 대한 논의>

| 행 | 화자 | 발언 | 행동 및 기록 |
|---|---|---|---|
| 4 | T | 길이의 정의가 뭘까요? | |
| 5 | S3 | $dx$의 제곱 더하기 $dy$의 제곱의 루트? | 주저하며 의문형으로 말한다. |
| 6 | S4 | 어, 그것으로 구할 때, 그 정의가 뭐였죠? | 목소리 톤이 조금 올라간다. |
| 7 | SS | | 웅성거리며 서로 이야기한다. |
| 8 | T | 길이의 정의가 뭐였죠? | |
| 9 | S4 | 기억이 안나요. 아니 배운 적이 없어요! | 항의하듯 말한다. |
| 10 | S5 | 저것대로 하면 안 돼? | $L=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$을 가리킨다. |
| 11 | S4 | 우리가 배운 적이 있어? | 동료들을 바라보며 격한 표정을 짓는다. |
| 12 | S6 | 자로 잰 거지 뭐! | |
| 13 | T | 하하하 | 웃으며 한 발 물러선다. |
| 14 | S4 | 곡선에서 우리가 길이의 정의를 배운 적이 있나? 2차원에서? | 동료들을 바라보며 동의를 구하듯 말한다. |
| 15 | S6 | 자로 잰 거지 뭐, 그냥 쫙 펴서! | |
| 16 | S3 | 그냥 저것을 잘라서 합치면 길이가 된다고 배우지 않았나? 정확한 정의가 뭐였지? | $L_n=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(\Delta x_k)^2+(\Delta y_k)^2+(\Delta z_k)^2}$ 을 가리킨다. |
| 17 | S1 | 그럼, 길이의 정의를 무수히 많은 점들로 선분을 이루는 것을 등분을 많이 한 것의 그 극한으로 정의한다고 하면 되지 않을까요? | 자신이 발표할 때 기록했던 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\left(\frac{\Delta x_k}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y_k}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta z_k}{\Delta t}\right)^2}\cdot\Delta t$ 을 가리킨다. |
| 18 | T | 어, 그렇게 정의하자고 S1이 말했는데. 어때요? 정의로 좋은가요? 그게? | S1이 가리킨 것을 바라보며 다시 전체 학생들에게 말한다. |
| 19 | S3 | 그니까, 그게, 안 배운 것 같아요. 정의를 안 배운 것 같아요! | |
| 20 | S4 | 네. 맞아요, 정의를 안 배운 것 같은데……. | |
| 21 | S3 | 그냥 배울 때는 잘라서 합치는 게 길이가 된다고만 배웠어요. | |
| 22 | T | 길이가 뭔지는 안 배웠다는 거지? | |
| 23 | S3 | 네, 길이의 그 정확한 원론적인 것에 대해서는 안 배운 것 같아요! | |
| 24 | T | 지금까지 길이가 뭔지 배워본 사람 손들어 봐요? | |
| 25 | SS | | 고개를 가로 젓는다. |
| 26 | T | 허허, 선생님 생각에는 여러분이 길이의 정의를 배운 적이 없을 듯해요. 아마 배운 적 없을 겁니다. | 고개를 끄덕인다. |

인할 수 있다. 이 세 행의 대화를 삼면적 초점 분석틀로 나타내면 <표 IV-1>과 같다. 6행에서 조작적 방식으로 곡선의 길이를 정의할 때, 그 것을 가능하게 해 주는 길이의 정의가 무엇인지에 대한 S4의 질문은 수업에 참여한 모든 학생들에게 동요를 일으켰다(7). 길이의 정의가

<표 IV-2> <일화3> 9~15행의 T, S3, S4사이의 의사소통에 대한 초점 분석

| 화자(행) | 표명된 초점 | 수반된 초점 | 의도된 초점 |
|---|---|---|---|
| S4(9,11,14) | 배운 적이 없어요.<br>우리가 배운 적이 있어? | T의 질문(4행,8행) | 길이의 본질적 정의<br>(구조적 사용) |
| S5(10) | 저것대로 하면 안 돼? | $\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$ | 정적분으로 표현된 길이<br>(조작적 사용) |
| S6(12,15) | 자로 잰 것<br>그냥 쫙 펴서 자로 잰 것 | 곡선을 펼치는 행동 | 곡선을 펼쳐서 자로 측정<br>(일상적 사용) |

무엇인지에 대한 T와 S4의 질문으로 인해 학생들은 길이의 근본적인 정의에 대하여 생각해볼 수 있는 기회를 갖기 시작하였다. 특히 S4는 길이의 (근본적인) 정의를 배운 기억이 없다고 지속적으로 주장하며, 정의를 제대로 배우지 않은 채 길이를 구하고 그와 관련된 공식을 증명하는 것이 문제가 있다는 주장을 하듯 지속적인 행동을 보여주고 있다(6, 9, 11, 14, 20). 여기서 S4가 지속적으로 주장하며 배운 적이 없다고 말하는 정의란 길이에 대한 구조적 용법의 정의를 의도한다고 해석할 수 있다. S4의 문제제기에 대해 S5는 여전히 조작적 용법으로 정의되는 길이, 즉 정적분으로 표현되는 곡선의 길이($L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$)를 가리키며 “저것대로 하면 안 돼?(10)”라고 발언하였으며, 특히 S6은 초등학교 단계에서 측정 활동의 결과를 수로 나타냈던 행동을 떠올리며 ‘자로 잰 것(12)’이 선분의 길이이고, 곡선의 길이는 ‘(곡선을) 쫙 펴서 (선분으로 만들어) 자로 잰 것(15)’이라고 주장하였다. S6의 이 표현은 휘어진 곡선을 반듯한 직선으로 펴는 물리적인 행위를 포함하고 있는 진술이다. 길이라는 용어를 S6과 같이 일상적이고 물리적인 용법으로 사용하는 이러한 진술은 S1이 수업 후 실시했던 면담에서 언급한 다음 발언과도 유사하다.

> 공간에 있는 곡선은 길이를 갖고 있을 것 같아요. 그것은 마치 그 공간에서 똑같은 모양을 갖고 있는 그 실이 이렇게 있다고 생각을 하면, 나중에 그 실을 팽팽하게 잡아당겨 그 길이를 직선으로 생각해서 잴 수 있잖아요. (S1의 면담 중)

곡선을 펼쳐서 자로 잰 것이라는 S6의 발언(12, 15)과 곡선 모양의 실을 팽팽히 잡아당겨 선분으로 만들어 잴 수 있다는 S1의 발언은 구체적인 대상을 자로 재는 물리적인 측정 활동을 통해 형성된 길이개념으로 일상적인 용법에서 길이라는 단어를 사용하는 방식으로 해석할 수 있다. <일화 3>의 9행부터 15행까지의 의사소통에 대한 초점 분석의 결과는 <표 IV-2>와 같이 정리할 수 있다.

곡선의 길이를 언급할 때 일상적인 수준에서 언급할 수 있는 개념은 S6과 S1이 언급한 것처럼 곡선 모양의 실을 팽팽하게 잡아당겨서 직선으로 만들고 그 길이를 자로 재는 측정활동의 결과라는 것이다. 이러한 인식은 곡선을 하나의 구체적 실체로 간주하고, 그 길이를 재기 위해 곡선이라는 구체적 대상을 길이를 잴 수 있는 상태인 직선으로 변형하는 과정을 필요로 한다. 이러한 수준에서 좀 더 발전하면 S3이 언급한 “곡선을 잘라서 (생긴 작은 부분을 선분으로 간주하고) 그 길이를 합친 것(16)”이라는 생각이다. 이는 곡선을 작은 부분으로 나누고, 각각의 조각을 반듯한 선분으로 간주하여 자로 재서 측정한 다음 그 결과들을 더하는 조작적이며 절차적인 과정을 의미한다. 물론 이러한

과정도 각각의 조작을 측정하는 활동을 포함하고 있으나 곡선을 직접 물리적으로 펼쳐서 직선으로 만드는 변형과는 다르다. 즉 곡선이라는 수학적 대상을 분할하고 미소 호의 길이를 구할 때 이를 선분으로 간주하고 측정한 후 그것들을 더한 결과가 원래 곡선의 길이와 비슷한 값을 가질 것이며, 특히 이 곡선을 분할하는 과정을 무한히 반복한다면 처음 주어진 곡선의 길이에 수렴할 것이라는 아이디어를 반영한 것이다. S3의 발언을 보다 수학적으로 발전시키면 S1이 언급한 것처럼 무한급수를 이용하여 매끄러운 곡선에 대한 길이를 정적분으로 구하는 방법을 정당화할 수 있다(17). 결과적으로 정적분으로 정의되는 곡선의 길이는 미소 호의 길이를 선분으로 간주하여 측정한 값들을 더한 과정이라는 아이디어가 압축적으로 포함되어 있다.

그러나 S4가 지속적으로 제기하고 있는 문제는 측정값들을 더하여 극한을 취하는 과정보다는 그러한 방식으로 곡선을 반듯한 직선으로 간주할 수 있는지에 대한 근본적인 질문으로 연결된다. 다시 말하면 곡선을 무한히 잘게 나누어 얻은 작은 호의 길이, 즉 아주 가까운 두 점 사이의 거리를 어떻게 정의할 것인가 하는 문제에 대한 질문인 것이다. 곡선을 잘라서 합치는 것으로 그 길이를 구해왔다고 말하는 S3도 결국 길이의 정의를 배운 적이 없다는 S4의 발언에 동의하며(19, 21), 물리적인 측정활동 및 조작적 계산 활동을 넘어서는 보다 근본적이고 추상적인 길이의 정의가 있을 것이라는 기대를 표현하였다(23).

이와 같이 길이의 근본적인 정의가 무엇인지를 지속적으로 묻는 S4의 발언으로 인해 곡선의 길이 수업에 참여한 학생들은 길이 개념에 대한 추상적이고 구조적인 담론을 형성할 수 있는 기회를 갖게 되었다.

### 3. 길이의 구조적 담론 형성

길이에 정의에 대하여 교실 공동체가 ‘자로 잰 것’이라는 측정활동의 결과로 파악하고 있다는 것을 토대로, 교사는 그것을 길이의 정의로 제시하면 충분한지 다시 물었다. 이 질문의 의도는 미소 선분의 길이 혹은 거리를 어떻게 정의해야 하는지에 대한 해석이 나타나길 바라는 것이었다.

<일화 4>는 보다 추상적인 수준에서 길이라는 단어를 사용하며 구조적 담론이 형성될 가능성을 보이는 상황이다. 자로 잰 것을 길이로 정의하면 충분한가에 대한 T의 질문에 S7은 두 점 사이의 길이(거리)가 피타고라스의 정리로 정의되는 것이라는 해석과 함께 피타고라스의 정리로 거리를 정의할 수 없는 공간도 있음을 언급하였다(28, 32). 즉 어떤 공간에서 길이를 이야기하느냐에 따라서 다양한 길이의 정의가 가능하다는 해석을 제시한 것이다. S7은 우리가 사는 공간을 피타고라스의 정리로 거리를 정의할 수 있는 3차원 공간으로 해석하였으며, 피타고라스의 정리로부터 길이 개념이 유도된다고 말하고 있다(32). S7의 이 진술은 짧은 호의 길이를 구하기 위해 호의 양 끝점 사이의 거리를 피타고라스의 정리로 정의하는 용법을 제시하고 있는 것이다. 또한 피타고라스의 정리로 길이를 정의할 수 없는 공간이 있을 수 있음을 언급한 것은 보다 일반적인 길이의 정의가 있을 수 있다는 가능성도 포함하고 있다.

T는 길이 개념이 측정활동에서 시작하였음을 강조하면서, 측정활동을 통해 길이를 재고 표현할 때에는 굳이 길이가 무엇인지 정의할 필요가 없었을 것이라고 말한다(35, 37). 왜냐하면 임의단위 혹은 표준단위 등을 사용하여 거리를 재고 그 결과를 소통하는 데에 문제가 없었기 때문이다. 그러나 현재 교실 공동체에서 쟁점이

<일화 4 : 길이의 구조적 용법>

| 행 | 화자 | 발언 |
|---|---|---|
| 27 | T | 그러면 다시 질문을 돌려서 여러분들처럼 이것에 대해서 의문을 갖고 있는 친구들한테 길이가 뭐냐고 그러면, "자로 잰 것이 길이다."라고 하면 충분한가요? |
| 28 | S7 | 두 점 사이의 길이가 그걸로 정의되는 것 아니에요? 피타고라스 정리로? |
| 29 | T | 오우! 그건 어디서 배웠지? 알고 있는 거야? 아니면? |
| 30 | S7 | 어디서 들었는데……. |
| 31 | S4 | 어디서 봤지? |
| 32 | S7 | 그냥 이것으로……. 이것이 성립하지 않는 공간이 또 있잖아요. 그러니까 저희가 사는 이 공간 자체에서는 그걸로 정의되는 거고, 그래서 거기에서 다 나오는 것 아니에요? |
| 33 | T | 어! S7은 많은 것을 알고 있군요. 하하하 |
| 34 | SS | 오우! |
| 35 | T | 한 천 년 전에, 측량하는 사람들이나 이제 뭐 그 당시 수학하는 사람도 있었겠지? 그 사람들이 거리가 뭔지 정의하고 거리를 쟀을까? |
| 36 | S5 | 그냥 쟀죠. |
| 37 | T | 그치? 그냥 쟀겠지? 그냥 다 이해가 되니까, 통용이 되니까. 근데, 거리, 길이 이런 정의를 왜 하려고 했을까? 최근에 몇 백 년, 한 이백 년 사이에? |
| 38 | S5 | 음, 보이는 세상 뿐 아니라 다차원, n차원으로 확장해서도 길이를 구하려고! |
| 39 | S2 | 오우! |
| 40 | S5 | 그니까 가시적인 것보다는 탄탄한 정의가 없으면 갈 수 없는 세상으로 갈려고 정의를 하는 거죠. |
| 41 | SS | 오우~ |
| 42 | T | 아주 멋지네요. 네. 우리가 기존에 쓰던 직교좌표계에서는 충분했지만 그게 안 되는 경우가 종종 나오기 시작한 거죠. 그러다보니까 이제 정말로 길이가 뭐냐, 거리가 뭐냐는 것을 정의해야 할 필요가 생기는 거죠. 정의!<br>S7의 말처럼 거리가 무엇인지를 정의하기 시작합니다. 이것은 약간 더 나아간 이야기인데, 거리를 정의하려면 공리가 몇 개 필요해요. 0이상이어야 하고, 삼각부등식을 만족해야 하는 등, 몇 가지 정해진 게 있습니다. 이러한 공리를 만족하는 것은 다 거리입니다! 우리가 무엇으로든 정의할 수 있어요. 거리함수라는 것이 따로 있습니다. 거리함수라는 것을 만족하면 그게 바로 거리가 되는 거야. |

되고 있는 바와 같이 길이나 거리 개념에 대하여 보다 근본적인 정의가 왜 필요한지에 대한 질문(37)에 S5는 가시적인 공간이 아니라 보다 추상적인 공간에서도 길이를 사용하기 위해서는 보다 탄탄하고 근본적인 정의가 필요했기 때문일 것이라고 발언하였다(38, 40). 이러한 학생들의 반응까지 확인한 후 T는 보다 추상적인 수준에서 길이 혹은 거리 개념이 정의된다는 사실을 언급하며, 추상화된 거리 개념에 대해 간단히 언급하였다(42).

길이의 정의에 대한 논의를 마무리하는 과정에서 T는 S7이 언급했던 피타고라스의 정리에 의해 제시되는 거리를 다른 거리함수보다 많이 쓰는 이유를 물었으며, 길이의 정의를 배운 적이 없다고 줄곧 주장하였던 S4는 피타고라스의 정리로 정의되는 거리가 그동안 측정활동의 결과를 수로 나타내면서 사용해왔던 일상적인 용법과 일치하기 때문이라고 말하였다. 이러한 해석은 수학적인 개념이 보다 넓은 시스템으로 확장되고 추상화되는 과정에서 기존 시스템에서 만족하던 규칙들을 유지한다는 형식 불역의 원리를 표현하고 있는 것이다. 즉 하위 시스템에서 길이나 거리로 간주되면서 표현하고 사용했던 방식이 보다 추상적인 정의를 하는 과정

에서 그 본질적인 부분이 유지해야 한다는 것이다. 그런 점에서 대표적인 거리함수는 학생들에게 이미 익숙한 체계에서 길이나 거리를 구할 때 사용하는 함수이며, 보다 확장된 거리의 개념은 이 거리함수가 갖고 있는 성질들을 포함하고 있어야 한다. 실제로 추상적인 수준에서 정의되는 거리함수는 다음과 같은 성질을 만족하는 것으로 정의된다.

> <정의> 거리공간(Metric Spaces)
> 집합 $X$에 대하여 다음 조건을 만족하는 함수 $\rho: X\times X \to [0,\infty)$를 집합 $X$에서의 거리(metric)라고 한다.
> $\rho(x,y)=0 \quad iff \quad x=y$
> $\rho(x,y)=\rho(y,x) \quad for\ all \quad x,y\in X$
> $\rho(x,z)\le \rho(x,y)+\rho(y,z) \quad for\ all\ x,y,z\in X$
> 거리 $\rho$가 정의된 집합 $X$에 대해서 $(X,\rho)$을 거리 공간이라고 부른다(Folland, 1999).

따라서 S4가 지속적으로 문제제기하고, S5가 발언한 바와 같이 보다 일반적인 공간에서 길이를 재기 위한 탄탄한 근거로 사용할 수 있는 거리의 본질적인 정의(40)를 위해서는 거리를 재고자하는 공간이 필요하며, 그 공간에서의 두 원소에 대해서 위 세 가지 공리를 만족하는 함수가 바로 거리의 정의로 제시되는 것이다.

곡선의 길이를 정적분으로 표현하는 것이 길이의 정의인지 아니면 길이를 구하는 하나의 공식인지에 대한 질문에서 시작한 논의는 길이의 본질적인 정의가 무엇인지에 대한 담론으로 확장되었으며, 결과적으로 길이나 거리 개념에 대한 보다 근본적이고 구조적인 정의가 필요하다는 것을 인식하게 해 주는 계기가 되었다. 이러한 논의를 통해 학생들은 일반화와 추상화가 수학적인 토대를 구축하는 과정에서 필요한 것이라는 경험을 하게 되었고, 이는 교실에서 특정 수학적 대상에 대해서 논의할 때 그 대상에 대한 활동을 넘어서는 대상에 대한 담론을 반성하는 메타 수준의 활동이 의미가 있음을 깨닫게 해 준다.

실제로 이전까지 학생들은 길이를 구하거나 길이에 대하여 논의할 때 의사소통에서 특별히 곤란함을 겪지 않았었다. 그러나 공간에서 곡선의 길이가 정적분 표현으로 정의되면서, 본 수업에 참여한 학생들은 길이 개념의 본질에 대해서 질문하기 시작하였다. 질문의 시작은 길이에 대한 적분표현이 공식인지 아니면 정의인지에 대한 것이었다. 이 질문으로부터 길이에 대한 일상적 용법, 조작적 용법, 구조적 용법이 모두 의사소통과정에서 나타나기 시작하였다. 그 결과 학생들은 기존에 익숙하게 사용해왔던 미소 호의 길이를 사용하여 나타낸 적분표현이 거리에 대한 특수한 정의, 즉 피타고라스의 정리를 기반으로 정의되는 거리 개념으로부터 설명되는 길이의 정의라는 추상적인 수준의 담론으로 나아갈 수 있는 가능성을 보여주었다. 특히 보다 일반화된 $n$차원에서 길이나 거리를 논의할 필요성이 생기면서 기존 길이의 관념을 유지하면서도 보다 추상화된 거리 개념이 필요하고, 이를 위해 길이를 정의할 필요성이 생겨났을 것이라는 S5의 진술은 뛰어난 통찰력을 제공한다.

## V. 결론 및 논의

본 연구에서는 곡선의 길이를 정적분으로 정의하는 수업의 길이에 대한 논의 과정에서 발생한 담론의 특징을 단어의 용법에 초점을 두고 분석하였다. 분석 결과 수업에 참여한 학생들은 길이를 일상적, 조작적, 구조적 용법 등 세 가지 서로 다른 방식으로 사용하며 서로 다른 담론을 형성하였다. 일상적 담론은 구체물을 물리적으로 측정하는 활동과 관련하여 길이를

사용하는 방식으로 초등학교 수학에서 직접적인 길이재기 활동을 통해 표준단위의 필요성을 인식하도록 하는 지도 방식과 관련이 있다. 조작적 담론은 주어진 곡선을 분할한 후, 작은 조각을 선분으로 간주하여 길이를 재고, 그 값들을 더하여 극한을 취하는 절차에 따라 곡선의 길이를 정의하는 방식과 관련이 있다. 본 연구에 참여한 학생들은 이러한 조작적 절차를 받아들이고 곡선의 길이를 구하면서도 그 결과로 나타난 정적분 표현이 곡선의 길이의 본질적 정의와 다르다고 주장하며 길이에 대한 구조적 담론을 형성하려고 하였다. 이와 같이 길이의 정의에 대한 구조적 담론은 정적분을 이용하여 조작적으로 곡선의 길이를 구하는 과정에서 근본적인 정의를 요구하면서 발생하였다. 즉, 작은 조각을 선분으로 간주하기 위해서는 주어진 곡선이 매끄러운 곡선이라는 조건이 필요하며, 더 나아가 순간적인 두 점 사이의 거리를 피타고라스의 정리로 정의하는 추상적인 거리 개념이 필요하다는 논의로 이어졌다. 이와 같이 길이라는 단어를 서로 다른 용법으로 사용하는 상황에서 다른 사람의 용법이 자신의 용법과 다름을 인식하지 못할 때 의사소통을 효과적이지 못하게 만들었다. 그러나 역설적으로 참여자들이 서로 다른 용법으로 단어를 사용한다는 것을 인식하고, 상대방의 발언의 의도가 무엇인지를 이해하려는 노력으로 인해 의사소통적 갈등을 극복하고 길이 개념에 대하여 보다 구조적이고 발전적인 담론으로 나아갈 가능성이 있음을 확인하였다. 이러한 분석 결과를 바탕으로 다음과 같은 두 가지 시사점을 제시할 수 있다.

첫째, 길이에 대한 서로 다른 세 가지 담론은 서로 독립적으로 존재하기 보다는 각각의 담론이 형성되는 과정에서 서로 영향을 주고받으며 발달한다는 것이다. 특히 일상적 담론은 조작적 또는 구조적 담론 형성 과정에서 기초적인 토대로 작용한다. 즉 일상적 담론에 익숙해지지 않은 상태에서 조작적 또는 구조적 담론으로 발달하는 것은 생각하기 어렵다. 마찬가지로 조작적 담론에 충분히 익숙해지지 않은 상태에서 구조적 담론으로 나아가는 것도 쉽지 않다. 이는 Sierpinska(2000)가 대학 수준의 추상적인 수학적 개념을 이해하기 위해서는 물리적이고 직관적인 인식을 토대로 하는 기하학적 접근에서 시작하여, 산술적이고 조작적인 수준을 거쳐 점진적으로 구조적인 수준으로 나아갈 수 있도록 유념해야 한다는 주장과 일맥상통한다. 그러나 일상적, 조작적, 구조적 담론이 반드시 선형적인 순서대로 나타난다고만 보기는 어렵다. 본 연구에서 확인한 바와 같이 조작적 담론이 충분히 발달하기 전이라도 근본적이고 추상적인 수준의 정의에 대한 필요성을 제기하며 구조적 담론을 형성할 수 있다. 즉 구조적 담론의 출현이 조작적 담론의 발달에 기여할 수 있다. 따라서 어느 한 가지 담론에만 머무르지 않고 참여자들이 스스로 만들어내는 다양한 담론이 형성되도록 조성할 필요가 있다.

둘째, 특정한 수학적 대상이나 개념에 대한 논의 과정에서 참여자들 사이의 의사소통이 효과적이지 못한 경우, 이들이 동일한 단어를 서로 다른 용법으로 사용하고 있는 것은 아닌지 주목할 필요가 있다는 것이다. 본 연구에서는 길이의 정의에 대하여 논의하는 과정에서 참여자들이 사용하는 길이의 용법이 다름으로 인해 의사소통의 효과성을 떨어뜨리게 된다는 것을 확인할 수 있었다. 그러나 역설적으로 이러한 의사소통적 갈등이 참여자들 사이에서 인식되고, 상대방이 사용하는 단어의 용법이 무엇인지 이해하려고 노력하는 과정에서 구조적인 담론이 형성되는 기회가 나타남을 확인할 수 있었다. 특히 Sfard(2008)가 강조한 메타수준의 학습이 발생하기 위해서 같은 단어를 서로 다르게

사용하는 상황을 적극적으로 활용하는 방안을 고려할 필요가 있다.

본 연구에서와 같이 익숙한 수학적 대상을 새로운 상황이나 보다 높은 수준에서 확장하여 다루는 경우, 참여자들이 이미 형성하고 있는 담론과 새롭게 형성해야 할 담론의 차이를 인식할 수 있는 기회를 만들어 줄 필요가 있다. 학교수학 뿐 아니라 대학수준의 수학 학습을 하는 과정에서 수업에 참여하는 학생들이 경험하는 많은 의사소통의 어려움을 생각해볼 때, 보다 다양한 수학적 대상에 대하여 어떤 다양한 용법들이 있으며, 그러한 용법이 어떻게 서로 다른 수학적 담론을 형성하는지에 대하여 더욱 많은 연구가 필요하다고 할 것이다.

## 참고문헌


강완 · 나귀수 · 백석윤 · 이경화(2013). **초등수학 교수 단위 사전**. 서울: 경문사.

강흥규(2005). **Dewey의 경험주의 수학교육론 연구**. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

고정화(2010). 길이 어림과 관련된 교과서 분석 및 대안 모색. **E-수학교육 논문집, 24**(3), 587-610.

교육부(2015). **수학과 교육과정**. 교육부 고시 제 2015-74호 [별책8].

김부미(2006). **수학적 오개념과 오류에 대한 인지심리학적 고찰**. 이화여자대학교 박사학위 논문.

김성기 · 김도한 · 계승혁(1998). **해석개론**. 서울: 서울대학교 출판부.

우정호 · 정영옥 · 박경미 · 이경화 · 김남희 · 나귀수 · 임재훈(2006), **수학교육학 연구방법론**. 서울:경문사.

이경화 · 강완(2008). 길이재기 단원의 여정: 수학 교과서 개발과정. **수학교육학연구, 18**(2), 157-177.

이종희(2002). 수학적 개념의 역사적 발달과 인식론적 장애. **교과교육학연구, 6**, 23-36.

이지현 · 최영기(2011). 학교수학과 대학수학에서 정의와 증명 개념 변화에 대한 수학사적 분석. **수학교육학연구, 21**(1), 57-65.

Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (2000). **수학의 역사 · 하**. 양영오 · 조윤동 (공역). 서울: 경문사.(영어 원작은 1991년에 출판).

Cobb, P., Stephan, M., McClain, K., & Gravemeijer, K. (2011). Participating in Classroom Mathematical Practices. *A Journey in Mathematics Education Research*, 117-163.

Dorier, J. L. (1995). Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in mathematics. *Educational studies in mathematics, 29*(2), 175-197.

Folland, G. B. (1999). Real Analysis : *Mordern Techniques and Their Applications*, (2nd Edition). NY: John Wiley & Sons.

Freudenthal, H. (2006). *Revisiting mathematics education: China lectures* (Vol. 9). Springer Science & Business Media.

Güçler, B. (2013). Examining the discourse on the limit concept in a beginning-level calculus classroom. *Educational Studies in Mathematics, 82*(3), 439-453.

Harel, G. Selden, A., & Selden, J. (2006). Advanced mathematical thinking. *Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future*, 147-172.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning, 2*, 805-842.

Kamii, C., & Clark, F. B. (1997). Measurement of length: The need for a better approach to teaching. *School Science and Mathematics, 97*(3), 116-121.

Luk, H. S. (2005). The gap between secondary school and university mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 36*(2-3), 161-174.

McClure, J. E. (2000). Start where they are: Geometry as an introduction to proof. *The American Mathematical Monthly, 107*(1), 44-52.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics, 22*(1), 1-36.

Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational studies in mathematics, 46*(1-3), 13-57.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. In *On the teaching of linear algebra* (pp. 209-246). Springer Netherlands.

Tall, D. (1997). From school to university: The transition from elementary to advanced mathematical thinking. In *Proceedings of the 7th Conference of the Australasian Bridging Mathematics Network* (pp. 1-20). Auckland, New Zealand.

Toeplitz, O. (2006). **퇴플리츠의 미분적분학**. 우정호 · 임재훈 · 박경미 · 이경화 (공역). 서울: 경문사.(영어 원작은 1963년에 출판).

Weir, M. D., Hass, J., & Thomas, G. B. (2010). Thomas\'calculus.

# An Analysis of the Discourse on the Length Concept in a Classroom for the Length of Space Curve

Oh, Taek-Keun (Korea Institute for Curriculum and Evaluation)

The purpose of this study is to understand the characteristics of mathematical discourse about the length in the class that learns the length of the curve defined by definite integral. For this purpose, this study examined the discourse about length by paying attention to the usage of the word 'length' in the class participants based on the communicative approach. As a result of the research, it was confirmed that the word 'length' is used in three usages - colloquial, operational, and structural usage - in the process of communicating with the discourse participants. Particularly, each participant did not recognize the difference even though they used different usage words, and this resulted in ineffective communication. This study emphasizes the fact that the difference in usage of words used by participants reduces the effectiveness of communication. However, if discourse participants pay attention to the differences of these usages and recognize that there are different discourses, this study suggests that meta - level learning can be possible by overcoming communication discontinuities and resolving conflicts.

* Key Words : length(길이), discourse(담론), word use(단어의 용법)

논문접수 : 2017. 8. 16
논문수정 : 2017. 9. 7
심사완료 : 2017. 9. 11