韓國數學敎育學會誌 시리즈 E <數學敎育 論文集>
https://doi.org/10.7468/jksmee.2017.31.3.279
제 31집 제 3호, 2017. 9. 279-290

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 31, No. 3, Sep. 2017. 279-290

수학교사의 갈루아 이론 이해를 위한 자립연수자료 개발

신 현 용 (한국교원대학교)

본 연구는 교사양성 과정에서 갈루아 이론에 관련된 군, 체, 벡터공간 등 대수적 구조를 배운 바 있으나 그러한 구조가 다항식의 가해성, 더 나아가 학교수학과 어떻게 관련되는지를 명확하게 이해하지 못하는 경우 자립 연수를 통해 이를 극복할 수 있는 자료를 개발하여 제시한다. 여기서 말하는 자립 연수에서는 교사 스스로 연수를 주도하지만 연수 도중 적절한 방법을 통하여 한두 차례 전문가의 도움을 받는다. 이 글에서 두 표현 '다항식 $f(x)$의 풀이'와 '방정식 $f(x)=0$의 풀이'는 같은 의미이고 '교사'는 현직 수학교사를 뜻한다.

Ⅰ. 서론

다항식의 풀이는 대수학 역사의 주축이다. 일, 이, 삼, 사차 다항식의 풀이가 대수학의 내용이라면 오차 다항식의 가해성 문제는 추상대수학의 주제이다. 갈루아 이론은 추상대수학을 대수학과 나누는 기준이 된다. 한편, 다항식의 풀이는 학교 수학의 주요 내용이고 대수학이 학교수학에서 차지하는 비중이 크기 때문에 대수학에 관한 심도 있는 이해는 수학교사에게 필수적이라고 할 수 있다.

이러한 상황임에도 불구하고 교사가 갈루아 이론을 심도 있게 이해하는 데에는 몇 가지 어려움이 있다. 그 중에서 가장 중요한 것은 교사 임용 시험에서 갈루아 이론이 본격적인 수준에서 출제되지 않을 뿐더러 비록 출제된다고 하더라도 그 문제를 포기해도 불이익이 크지 않다는 것이다. 이는 문제의 개수나 거기에 배정된 점수가 크지 않기 때문이다. 따라서 교사 양성 과정에서는 갈루아 이론에 대한 이해가 중요함에도 불구하고 제대로 접근하기가 용이하지 않은 실정이다.

추상대수학의 기본 용어나 개념에 관해 어느 정도 이해하고 있는 교사는 연수를 받으며 갈루아 이론에 대한 이해 필요성을 느낀다. 예를 들어, 이차방정식의 근의 공식 유도나 분모의 유리화 또는 실수화 과정이 갈루아 이론에서 중요한 과정임을 알게 되면 수업을 좀 더 효율적으로 준비할 수 있음을 알게 되기 때문이다. 교사가 갈루아 이론에서 모든 정리를 증명하여 세밀하게 이해하지 못한다고 하더라도 갈루아 이론의 핵심과 그 과정에 얽힌 수학의 역사와 이론의 형성 과정을 알면 학교수학의 대수학 수업에서 많은 도움을 받을 수 있을 것으로 사료된다. 따라서 추상대수학 강의를 들은 적이 있는 수학교사가 갈루아이론의 핵심을 이해하도록 돕는 자료를 개발하는 것은 필요할 것이다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 갈루아 이론의 대수학적 의의

* 접수일(2017년 8월 14일), 심사(수정)일(2017년 9월 12일), 게재확정일(2017년 9월 19일)
* ZDM분류 : U15
* MSC2000분류 : 97U99
* 주제어 : 다항식의 가해성, 갈루아 이론, 자립연수

방정식의 풀이는 수학 역사의 한 축이라고 할 수 있다. 피타고라스정리, 디오판토스방정식, 펠방정식, 페르마 마지막정리 등은 모두 방정식의 풀이와 관계가 있다. 이차방정식의 풀이는 기원전 20세기경에 이미 알려진 것으로 전해지고 유클리드는『원론』에서 이차방정식의 풀이 법을 눈금 없는 자와 컴퍼스를 사용하는 작도로 제시하였다. 삼차와 사차 방정식의 풀이는 16세기에 들어서 알려졌으나 오차방정식의 가해성 문제는 19세기 중반에 들어서야 풀렸다. 결국 방정식의 풀이는 2,000년 이상에 걸치는 역사를 가진다. 일, 이, 삼, 사차 방정식의 풀이는 대수학의 문제라면 오차방정식은 추상대수학(현대대수학)의 문제이다. 오차 방정식은 일반적으로 풀리지 않는다는 것을 논증해야하므로 방정식의 풀이에 관한 제반 개념과 문제가 군, 체, 벡터공간 등 대수적 구조로 추상화되어야하기 때문이다.

2. 갈루아 이론의 이해에 관한 어려움

갈루아 이론은 결코 간단히 이해할 수 없다는 것은 여러 정황으로 보아도 분명하다. 2,000년 이상의 미해결 문제였고 16세기 이후 수학사에 이름을 남긴 모든 수학자가 이 문제에 적지 않은 관심을 기울였다는 사실만으로도 그 난이도를 가늠할 수 있다. 실제로 갈루아 이론을 이해하기 위해서는 일단 일, 이, 삼, 사차 다항식의 풀이에 관한 분명한 이해가 있어야 한다. 더 나아가 오차다항식이 가지는 특수한 성질을 이해하기 위해서는 대수적 구조를 논하는 추상대수학의 모든 내용을 이해하여야 한다. 이러한 요구에 대해 교사양성대학 학부 과정에서 개설하는 추상대수학 강좌가 만족스러운 수준으로 부응하기는 용이하지 않다.

3. 수학교사의 추상대수학 내용지식에 대한 선행 연구

교사의 최근 갈루아 이론에 관한 이해를 돕기 위한 자립연수 자료가 제안된 바 있다(신현용 · 한인기, 2015). 학교수학에서 다루어지는 작도가능성도 다항식의 해법과 관련된 대수학적 이해를 요구하기 때문에 작도가능성에 관한 전반적인 이해를 돕기 위한 자료도 제안된 바 있다(신현용 · 한인기, 2016). 그러나 이 모든 내용을 함축하는 보다 효율적으로 요약된 자립 연수 자료가 필요한 실정이다.

Ⅲ. 연구문제

연구문제는 다음과 같다.

1. 추상대수학에 관한 강의를 들은 적이 있는 교사가 이틀 정도의 자립 연수를 통해 갈루아 이론을 효과적으로 이해할 수 있도록 돕기 위해 어떠한 자료를 제시할 수 있을까?
2. 제시된 자료를 통한 연수 결과는 어떠한가?

Ⅳ. 연구방법

이 연구는 다음과 같은 절차와 방법을 따랐다.

1. 교사로 하여금 이 논문에서 제안하는 접근 방식으로 갈루아 이론의 핵심을 이해할 수 있도록 돕기 위해, 연구자는 2017년 2월에『대칭: 갈루아 이론』을 발간하여 ㅎ대학교 도서관 등에 다수 비치하여 교사로 하여금 쉽

게 접할 수 있게 하였다.

2. 교사가 자립연수를 통해 갈루아 이론의 핵심을 이해할 수 있게 하는 자료를 6, 7쪽 분량으로 개발하였다.

3. ㅎ대학교 대학원의 여름 강좌를 수강하기 위해 출석한 중등학교 교사 12명은 학교수학에서 갈루아 이론의 중요성에 공감하고 2017년 8월 7일과 8일 이틀 동안 개발된 자료와『대칭: 갈루아 이론』을 참고하며 갈루아 이론의 핵심을 이해하기 위한 자립연수를 실시하였다. 참고 도서에서 읽어야 할 부분은 연구자가 미리 지정하여 제시하였다.

4. 2017년 8월 7일과 8일 이틀간 각각 2시간씩 전문가와 함께 연수 내용을 점검하였다.

5. 2017년 8월 9일에는 갈루아 이론에 대해 연수를 통해 이해하게 된 바를 각각의 교사가 보고서 형식으로 정리하게 함으로 이해 정도를 가늠하였다.

Ⅴ. 결과 및 논의

다음은 교사가 자립 연수를 통해 갈루아 이론의 핵심을 이해할 수 있도록 돕기 위한 자료이다. 이 자료는 본 연구를 통하여 교사에게 제시된 자료이다. 이 자료에서 모든 방정식은 유리수를 계수로 가지며 최고차항의 계수가 1이라고 전제한다.

1. 일, 이차 방정식의 풀이

$x+a=0$의 해는 $x=-a$로서 유리수이다. 일차방정식은 수 체계를 확장할 필요조차 없이 쉽게 풀린다.

이차방정식 $x^2+ax+b=0$을 풀기 위해 x 대신에 $X-\dfrac{a}{2}$를 대입하면 주어진 방정식은 $X^2=\dfrac{a^2-4b}{4}$가 되어 $x=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$를 얻는다. 이차방정식은 일차항을 소거하면 풀리므로 이차방정식의 풀이는 $X^2=A$ 꼴 하나를 푸는 것이다.

2. 삼차방정식의 풀이와 과정 분석

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$에서는 x 대신에 $X-\dfrac{a}{3}$를 대입하여 이차항이 없는 삼차방정식 $X^3+qX+r=0$의 형태를 푼다. 이러한 형태의 일반적인 삼차방정식의 예를 직접 풀어 봄으로써 삼차방정식은 왜 풀리는지 관찰한다.

(1) 삼차방정식 $X^3+qX+r=0$에서 X를 $Y+Z$로 치환한다.

(2) 근과 계수의 관계를 이용하여 다음을 얻는다.

$$\begin{cases} Y^3+Z^3=-r \\ 3YZ=-q \end{cases}$$

이를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{cases} Y^3+Z^3=-r \\ Y^3Z^3=-\dfrac{q^3}{27} \end{cases}$$

(3) $Y^3=U$, $Z^3=V$라고 생각하면 U와 V에 관한 이차방정식이 얻어진다. 앞에서 주목하였듯이 이는 $X^2=A$ 꼴 하나를 푸는 것이다.

(4) $Y^3=U$을 푼다. 이는 $X^3=B$ 꼴 하나를 푸는 것이다. Y를 구하면 $3YZ=-q$ 관계로부터 Z는 이차 이상의 방정식을 추가로 풀지 않고 얻어진다. 원래 주어진 삼차방정식 $X^3+qX+r=0$의 해 $X=Y+Z$를 구한 것이다.

(5) 이상으로부터 일반적인 삼차방정식의 풀이 과정은 $X^2=A$ 꼴 하나를 풀고 이어서 $X^3=B$ 꼴 하나를 푸는 것임을 주목한다.

(6) 삼차방정식 $X^3+qX+r=0$의 한 해 $X=Y+Z$를 구하면 나머지 두 개의 해는 추가 계산 없이 알 수 있다.

(7) 지금까지의 과정을 통하여 삼차방정식 $x^3-3x-4=0$의 세 개의 해를 구하면 다음과 같다.

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$$

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\,\omega+\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\,\omega^2$$

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\,\omega^2+\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\,\omega$$

여기서, $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ 이다.

(8) $x^3-3x-4=0$을 풀기위해 $X^2=3$을 풀고 이어서 $X^3=2+\sqrt{3}$ 을 푼 것이다.

3. 사차방정식의 풀이와 과정 분석

사차방정식 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$에서는 x 대신에 $X-\dfrac{a}{4}$를 대입하여 삼차항이 없는 사차방정식 $X^4+qX^2+rX+s=0$의 형태를 푼다. 이러한 형태의 일반적인 사차방정식의 예를 직접 풀어 봄으로써 사차방정식은 왜 풀리는지 관찰한다.

(1) $W^4+qW^2+rW+s=0$에서 $W=X+Y+Z$로 치환한다.

(2) 근과 계수의 관계를 이용하여 다음을 얻는다.

$$\begin{cases} X^2+Y^2+Z^2=-\dfrac{q}{2} \\ X^2Y^2+Y^2Z^2+X^2Z^2=\dfrac{q^2}{16}-\dfrac{s}{4} \\ X^2Y^2Z^2=\dfrac{r^2}{64} \end{cases}$$

(3) 근과 계수의 관계로부터 X^2, Y^2, Z^2은 다음 삼차방정식의 해이다.

$$t^3+\frac{q}{2}t^2+\left(\frac{q^2}{16}-\frac{s}{4}\right)t-\frac{r^2}{64}=0$$

이 삼차방정식을 푸는 것은 앞에서 주목하였듯이 $\Gamma^2=A$ 꼴과 $\Gamma^3=B$ 꼴을 푸는 과정이다.

(4) 앞의 단계에서 $X^2=C$, $Y^2=D$, $Z^2=E$를 구했다. 이제 $X^2=C$와 $Y^2=D$를 푼다. 이는 $\Gamma^2=A$ 꼴 두 개를 푸는 것이다. X와 Y가 구해지면 $X^2Y^2Z^2=\dfrac{r^2}{64}$ 관계로부터 Z가 구해진다. 즉 $Z^2=E$를 추가로 풀 필요가 없다. 사실, $X^2Y^2Z^2=\dfrac{r^2}{64}$이라는 관계는 $XYZ=-\dfrac{r}{8}$에서 얻은 것이므로 X와 Y로부터 Z를 구할 때에는 관계식 $XYZ=-\dfrac{r}{8}$를 이용한다. 결국 $W^4+qW^2+rW+s=0$의 해 $W=X+Y+Z$를 구한 것이다.

(5) 이상으로부터 일반적인 사차방정식의 풀이 과정은 $X^2=A$ 꼴, $X^3=B$ 꼴, $X^2=A$ 꼴, $X^2=A$ 꼴의 방정식을 차례로 푸는 것임을 알 수 있다.

(6) $W^4+qW^2+rW+s=0$의 한 해 $W=X+Y+Z$를 구하면 나머지 세 개의 해는 추가 계산 없이 알 수 있다.

(7) 지금까지의 과정을 통하여 사차방정식 $x^4+2x+\dfrac{3}{4}=0$의 네 개의 해를 구하면 다음과 같다.

$$-\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}}+\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\,\omega+\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\,\omega^2}+\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\,\omega^2+\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\,\omega}$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}}-\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\,\omega+\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\,\omega^2}-\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\,\omega^2+\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\,\omega}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}}+\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\,\omega+\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\,\omega^2}-\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\,\omega^2+\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\,\omega}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}}-\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\,\omega+\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\,\omega^2}+\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\,\omega^2+\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\,\omega}$$

여기서, $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$이다.

(8) $x^4+2x+\dfrac{3}{4}=0$을 풀기위해 다음을 차례대로 푼 것이다.

$X^2=3$

$X^3=2+\sqrt{3}$

$X^2=\dfrac{1}{4}(\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{3}})$

$X^2=\dfrac{1}{4}(\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\,\omega+\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\,\omega^2)$

4. 방정식의 풀이와 대수적 구조

오차다항식의 가해성에 관한 갈루아 이론의 내용은 다음과 같다.

(1) 유리수 체 $\mathbb{Q}$의 확대체로서 주어진 다항식 $f(x)$의 모든 근을 가지고 있으며 가장 작은 것을 생각한다. 그 확대체 K를 $f(x)$의 갈루아 확대체(분해체)라고 한다. 다항식의 가해성 문제를 체(field)에 관한 문제로 바꾸는 것이다. 다시 말하면 다항식의 가해성 문제를 대수적 구조에 관한 언어로 표현하는 것이다.

(2) 다항식 $f(x)$의 분해체 K로부터 군의 구조를 추출한다. 이 과정을 통해 얻는 군을 $f(x)$의 갈루아 군이

라고 한다. 다음 사실이 중요한 역할을 한다.

> K가 F의 확대체이고 $f(x)$가 F의 원소들을 계수로 가지는 다항식이라고 하자. $u \in K$가 $f(x)$의 근이고 $\sigma \in G(K/F)$이면, $\sigma(u)$도 $f(x)$의 근이다. 여기서 $G(K/F)$는 F의 모든 원소를 고정(fix)시키는 K의 자기동형사상(automorphism) 전체의 집합으로서 군의 구조를 가진다.

실제로, n차 다항식의 갈루아군은 S_n의 부분군과 동형이다. 예를 들어, 3, 4, 5차 다항식의 갈루아군은 각각 S_3, S_4, S_5와 관련된다.

(3) 일차 · 이차방정식의 풀이와 대수적 구조

일차방정식에 관계되는 군 S_1은 위수가 1인 자명한 군(trivial group)이다. 일차방정식이 쉽게 풀리는 이유라고 할 수 있다.

이차방정식에 관계되는 군 S_2은 위수가 2인 $\mathbb{Z}_2$이다. 이 군은 순환군으로서 가환군이고 소수 위수를 가지는 단순군이다. 이차방정식이 $X^2 = A$ 꼴 하나를 푸는 것으로 귀착된다는 것을 뜻한다.

(4) 삼차방정식의 풀이와 대수적 구조

일반적인 삼차다항식을 푸는 과정은 $X^2 = A$ 꼴 하나를 풀고 이어서 $X^3 = B$ 꼴 하나를 푸는 것이다. 이때 두 방정식의 차수는 각각 2와 3으로서 소수(prime number)이다. 삼차다항식과 관련되는 대칭군은 S_3인데 S_3로부터 두 개의 상군을 얻을 수 있다. S_3의 위수는 $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$이고 6은 2와 3의 곱이다. S_3로부터 얻어지는 두 개의 상군은 위수가 각각 2와 3인 가환단순군 $\mathbb{Z}_2$와 $\mathbb{Z}_3$이다. 가환단순군 $\mathbb{Z}_2$은 $X^2 = A$ 꼴 하나를 푸는 것을 뜻하고, 가환단순군 $\mathbb{Z}_3$은 $X^3 = B$ 꼴 하나를 푸는 것을 뜻한다. '$X^2 = A$ 꼴 하나를 풀고 이어서 $X^3 = B$ 꼴 하나를 푸는' 순서는 대칭군 S_3의 다음 구조(그림 Ⅴ-1)에 의한다.

$$\begin{array}{cl} S_3 & \\ \big| & 2 \\ A_3 & \\ \big| & 3 \\ 1 & \end{array}$$

[그림 Ⅴ-1]

여기서 $S_3 = \{1,(12),(13),(23),(123),(132)\}$이고 $A_3 = \{1,(123),(132)\}$이다. 이 격자도에 있는 수 2와 3은 지수(index)를 나타낸다.

S_3에서 두 개의 상군이 얻어지는 이유는 S_3가 정규부분군(normal subgroup) A_3를 가지기 때문이다. 정규부분군은 갈루아 이론의 핵심 개념이다.

(5) 사차방정식의 풀이와 대수적 구조

일반적인 사차다항식을 푸는 과정은 $X^2 = A$ 꼴, $X^3 = B$ 꼴, $X^2 = A$ 꼴, $X^2 = A$ 꼴의 방정식을 차례로

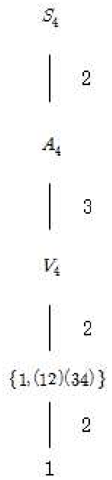
푸는 것이다. 이때 등장하는 네 방정식의 차수는 각각 2, 3, 2, 2로서 모두 소수이다. 사차다항식과 관련되는 대칭군은 S_4인데 S_4로부터 네 개의 상군을 얻을 수 있다. S_4의 위수는 $4! = 4\times 3\times 2\times 1 = 24$이고 24는 2, 3, 2, 2의 곱이다. S_4로부터 얻어지는 네 개의 상군은 위수가 각각 2, 3, 2, 2인 단순군 $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2$이다.

다음 그림(그림 Ⅴ-2)에서 A_4와 V_4는 다음과 같다.

$A_4 = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (123), (132), (142), (124), (134), (143), (234), (243)\}$

$V_4 = \{1,(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$

여기에서도 정규부분군과 상군의 역할을 주목한다. 즉, A_4는 S_4의 정규부분군이고, V_4는 A_4의 정규부분군이며, $\{1, (12)(34)\}$는 V_4의 정규부분군이다.



[그림 Ⅴ-2]

5. 오차방정식의 경우

일반적인 오차방정식의 불가해성이 갈루아 이론의 핵심이다. 일, 이, 삼, 사차 방정식의 경우에는 가능하지만 오차방정식의 경우에는 가능하지 않은 과정이 무엇인지 설명하는 것이다.

(1) 오차방정식과 관련되는 대칭군 S_5의 위수는 $5! = 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 2^3\times 3\times 5$이다. 오차방정식이 풀리면 $X^2 = A$ 꼴 세 개, $X^3 = B$ 꼴 하나, $X^5 = C$ 꼴 하나를 적절한 순서에 따라 푸는 것으로 귀착된다.

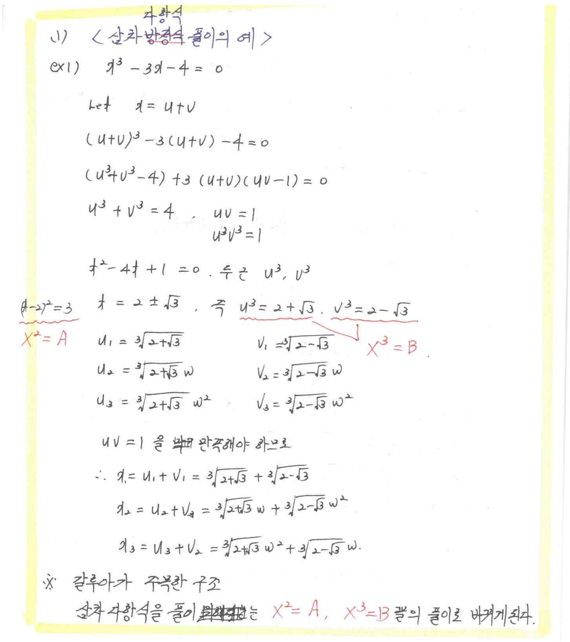
(2) S_5는 오직 한 개의 정규부분군 A_5를 가지며 A_5는 자명하지 않은(non-trivial) 정규부분군을 하나도 가지지 아니한다. A_5가 자명하지 않은 정규부분군을 가지지 않는 다는 사실은 갈루아가 발견한 가장 중요한 것 중 하나이다. 따라서 S_5의 경우에는 다음과 같은 그림(그림 Ⅴ-3) 외의 어떠한 상황도 가능하지 않다.

[그림 Ⅴ-3]

따라서 $X^3 = B$ 꼴이나 $X^5 = C$ 꼴의 방정식을 푸는 것을 뜻하는 상군 $\mathbb{Z}_3$과 $\mathbb{Z}_5$를 구성할 수가 없다. 결국 일반적인 오차방정식은 풀리지 않는다.

6. 연수 결과

연수에 참가한 12명의 모든 교사가 만족스러운 반응을 보였다. 몇 가지 예를 본다. 다음의 예(그림 Ⅴ-4)는 교사가 삼차방정식을 직접 풀고 근의 형태를 통하여 갈루아 이론의 내용을 정확히 이해하고 있음을 보여 준다.



1) < 삼차 ~~방정식~~ 다항식 풀이의 예 >

ex1) $x^3 - 3x - 4 = 0$

Let $x = u + v$

$(u+v)^3 - 3(u+v) - 4 = 0$

$(u^3+v^3-4) + 3(u+v)(uv-1) = 0$

$u^3 + v^3 = 4$, $uv = 1$

$u^3v^3 = 1$

$t^2 - 4t + 1 = 0$. 두 근 u^3, v^3

$(t-2)^2 = 3$ $t = 2 \pm \sqrt{3}$, 즉 $u^3 = 2 + \sqrt{3}$. $v^3 = 2 - \sqrt{3}$

$X^2 = A$ $X^3 = B$.

$u_1 = \sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$ $v_1 = \sqrt[3]{2-\sqrt{3}}$

$u_2 = \sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\,w$ $v_2 = \sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\,w$

$u_3 = \sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\,w^2$ $v_3 = \sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\,w^2$

$uv = 1$ 을 ~~꼭~~ 만족해야 하므로

$\therefore x_1 = u_1 + v_1 = \sqrt[3]{2+\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{3}}$

$x_2 = u_2 + v_3 = \sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\,w + \sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\,w^2$

$x_3 = u_3 + v_2 = \sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\,w^2 + \sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\,w$.

※ 갈루아가 주목한 구조

삼차 다항식을 풀이 ~~하는데~~는 $X^2 = A$, $X^3 = B$ 꼴의 풀이로 바뀌게된다.

[그림 Ⅴ-4]

다음(그림 Ⅴ-5)은 사차방정식에 관한 같은 예시이다. 해당 교사는 보고서에서 이 부분 앞에서 사차방정식 $x^4+2x+\frac{3}{4}=0$을 풀고 그 네 개의 해를 관찰하였다.

방정식의 해를 구하는 과정에서 상군의 위수의 순
즉 2, 3, 2, 2, 으로 $X^2=A$. $X^3=B$. $X^2=A$, $X^2=A$
순으로 해를 구함을 알 수 있다.

5차방정식 $f(x)=0$을 S_5와 연관지어
생각해보면 S_5의 정규부분군을 찾아 위수가 소수인
상군이 될 수 있는 다리 역할의 군을 찾아야 하는데
이를 찾을 수 없다. (S_5의 정규부분군은 1. A_5. S_5 뿐이다)

S_5
| 2
A_5 (비가환 단순군)
| 60
1

S_4의 구조

S_4
| 2
A_4
| 3
V_4
| 2
N
| 2
1

[그림 Ⅴ-5]

다음(그림 Ⅴ-6)은 갈루아 이론을 중학교에서 가르치는 이차방정식의 근의 공식의 경우에 적용한 것이다. 고등수학과 학교수학의 연계를 시도하고 설명하는 예라고 할 수 있다.

[redacted] <이차방정식의 해법>

$ax^2+bx+c=0$

$x=X-\frac{b}{2a}$를 대입하면 → (일차항 소거)

$aX^2+\frac{4ac-b^2}{4a}=0$

$X^2=\frac{b^2-4ac}{4a}$ $X^2=A$

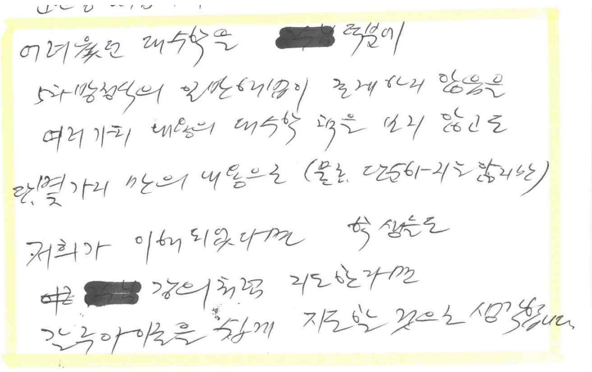
$X=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{2a}}$

따라서 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

◈ 갈루아 이론: 이차 다항식의 두개의 근 α, β로 이루어진 집합 {α, β}의 대칭군은 S_2이다
대칭군 S_2는 그 자체로 가환군(아벨군)이다. $|S_2|=2$

[그림 Ⅴ-6]

다음의 예(그림 V-7)는 갈루아 이론의 핵심 내용은 고등학교 수업에서도 다뤄볼 수 있다고 주장한다.


어려웠던 대수학을 [redacted] 덕분에
5차 방정식의 일반해법이 존재하지 않음을
여러가지 내용의 대수학 책은 보지 않고도
단 몇가지 만의 내용으로 (물론 [illegible])
저희가 이해되었다면 학생들도
~~며~~ [redacted] 강의처럼 지도한다면
갈루아 이론을 쉽게 지도할 것으로 생각됩니다.

[그림 V-7]

Ⅵ. 결론

대부분의 교사는 교사로 양성되는 과정에서 추상대수학 강의를 들은 적이 있지만 여러 가지 여건으로 인하여 그 내용을 충분히 숙지하지 못하고 있는 게 사실이다. 추상대수학의 핵심 주제인 갈루아 이론은 대수학 더 나아가 수학 전체를 통틀어 매우 중요한 내용이고, 따라서 학교 수학과 적지 않게 연계된다.

그러나 연수 과정을 통하여 갈루아 이론을 자세히 이해하는 것은 쉬운 일이 아니다. 따라서 교사들의 여러 여건과 상황을 고려한 연수 자료 개발은 필요한 요구이다.

여기에 제시된 자료는 갈루아 이론에 대해 만족스러운 수준까지 교사 스스로 연수할 수 있도록 도움이 된다는 것이 확인되었다.

연수 자료 적절한 곳에 다음을 유념하는 것도 유의미할 것이다.

> 다음 다항식은 모두 근의 공식을 가지지 아니한다.
>
> $2x^5-5x^4+5,\ x^5-4x+2,\ x^5-10x+2$
>
> 다음 다항식은 모두 근의 공식을 가진다.
>
> $2x^5-5x^4+3,\ x^5-4x+3,\ x^5-10x+9$
>
> 이들 두 무리의 차이는 무엇인가? 갈루아 이론은 이 두 무리의 다항식들 사이에는 어떠한 차이가 있는지 섬세하게 볼 수 있는 정밀한 ‘현미경’을 제공한다.

본 자료는 교사로 하여금 학교 수학과 갈루아 이론의 긴밀한 연계를 인식할 수 있도록 함인데 보고서에서 ‘분모의 유리화’나 ‘분모의 실수화’가 중요한 대수적 구조인 체(field)의 구조를 확인하는 과정임을 적시한 교사는

없었다. 추후 이 점도 감안하여 자료를 보완하면 더욱 유용한 자료가 될 것으로 사료된다.

참 고 문 헌

신현용 · 신기철 (2017). 대칭: 갈루아 이론, 매디자인.

Shin, H., & Shin, G. (2017). *Symmetry: Galois Theory,* Cheongju: mathesign.

신현용 · 한인기 (2015). 다항식의 해법에 대한 수학교사의 대수 내용 지식과 자립연수 가능성 탐색, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 29(4), 661-685.

Shin, H., & Han, I. (2015). A Study on Algebraic Knowledge of Mathematics Teachers on Solving Polynomials and Searching Possibility of Self Learning the Knowledge, *Journal of The Korean Society of Mathematical Education Series E: Communications of Mathematical Education*, 29(4), 661-685.

신현용 · 한인기 (2016). 삼차방정식 해의 작도(불)가능성에 대한 학습 자료 개발, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 30(4), 469-497.

Shin, H., & Han, I. (2016). Development of Learning Materials for (Non)-Solvability of Roots of Cubic Polynomials, *Journal of The Korean Society of Mathematical Education Series E: Communications of Mathematical Education*, 30(4), 469-497.

A Development of Self Learning Material for Mathematics Teachers' Understanding Galois Theory

Hyunyong Shin
Department of Mathematics Education, Korea National University of Education, Cheongju, Chungbuk, Korea
E-mail : shin@knue.ac.kr

This study proposes a self learning material for understanding the key contents of Galois theory. This material is for teachers who have learned algebraic structures like group, field, and vector space which are related with Galois theory but do not clearly understand how algebraic structures are related with the solvability of polynomials and school mathematics. This material is likely to help them to overcome such difficulties. Even though proposed material is used mainly for self learning, the teachers may be helped once or twice by some professionals. In this article, two expressions 'solvability of polynomial' and 'solvability of equation' have the same meaning and 'teacher' means in-service mathematics teacher.

* ZDM Classification : U15
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U99
* Key words : Solvability of Polynomials, Galois Theory, Self Learning