韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
https://doi.org/10.7468/mathedu.2018.57.4.477
2018. 11. 제 57권, 제 4호, 477-491.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A:
The Mathematical Education
November. 2018, Vol. 57, No. 4, 477-491.

함수의 연속을 판단하는 문제에서 현직교사와 예비교사의 정의역 인식 조사

이세형(경북대학교 대학원 학생)
장현석(경북대학교 대학원 학생)
이동원(경북대학교 교수)†

Ⅰ. 서론

함수의 연속은 수열의 극한과 미분 및 적분과 더불어 해석학의 기본적인 주제이다. 이런 점에서 교육부도 중등교육에서 함수의 연속에 대한 개념을 소개하도록 하고 있다. 실제로 교육과정 해설서에서는 다음과 같이 함수의 연속을 지도하도록 명시하고 있다.

> 한 점에서 끊어진 함수의 그래프의 예를 통해, 그 그래프가 이어지려면 어떤 조건이 필요한지 생각해 보게 함으로써 함수의 연속의 조건에 대한 직관적인 이해를 돕고, 함수의 연속에 대한 수학적 정의를 유도하도록 한다(교육과학기술부, 2008, p. 178).

함수의 연속에 대한 정의는 역사적으로 많은 변화를 거치면서 오랜 시간에 걸쳐 정립된 개념으로, 중등교육에서 짧은 시간에 이해시키기에는 어려운 점이 있다. 더구나 시공간적 제약이 있는 학교수학에서 교육과정 해설서에 따라 직관적으로 지도한 경우에 학생들에게 잘못된 개념과 이미지가 생길 수 있다. 선행연구에서도 함수의 연속에 대한 개념을 직관적으로 이해시키는 학교수학에서 생길 수 있는 학생들의 인식을 조사하고, 이를 보완하기 위한 교수학적 방안을 주로 제시하고 있다. 예를 들어 이경화, 신보미(2005)는 연속함수에 대한 개념 이미지 연구를 통해 학생들은 함수 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$가 $x=1$에서 함숫값이 없기 때문에 불연속이고, 이를 통해 불연속함수로 판정한다고 하였고, 김남희 외(2006)는 문헌연구를 통해 7차 교육과정에서 각 교과서에 제시된 연속함수 정의의 선택에 따라 연속함수 판정기준과 판정결과가 다르게 될 수 있다고 하였다. 이진영(2011)은 이경화, 신보미(2005)와 김남희 외(2006)의 연구 결과를 바탕으로 2007 개정 교과서에 ‘한 점에서의 함수의 연속’에 대한 부정으로 소개된 ‘한 점에서의 함수의 불연속’에 대한 정의에서 정의역의 표현이 교과서간 차이가 있음을 보였다. 이때 ‘불연속점’이란 ‘연속이 아닌 점’으로, 학문적인 수학에서의 ‘불연속점’은 정의역의 원소로 제한되지만, 교과서에서 소개한 연속의 정의에 대한 부정으로 ‘함숫값이 정의 되지 않은 점’도 불연속점으로 분류될 수도 있다. 더불어 교수학적 변환 과정에서 연속함수에 대한 정의가 교과서간 일관되지 않음을 확인하였다. 이를 토대로 학생들을 대상으로 설문을 실시하여 학생들이 연속함수를 어떻게 판정하는지 분석하고, 함수의 연속에 대한 교수학적 변환에서 유의사항과 보완점을 제시하고 있다. 박달원, 홍순상, 신민영(2012)은 고등학생들이 갖는 연속함수에 대한 오개념 이미지의 원인을 분석하고 이를 바로 잡기 위해 학문수학에서의 정의를 학교수학에 도입할 것을 제안하였다. 또한 백승주, 최영기(2017)는 함수의 연속에 대한 학문수학의 개념과 고등학생들의 인식 차이를 탐구하기 위하여 해석학의 산술화 과정을 분석하였고, 정연준, 김재홍(2013)도 함수의 연속에 대한 역사적 발달 과정을 분석하여 학교수학에서의 직관적 지도를 보완하기 위한 방안을 제시하였다. 한편 김준환(2013)은 현직교사들을 대상으로 불연속 함수에 관한 내용적, 교

* 접수일(2018년 11월 1일), 수정일(2018년 11월 22일), 게재확정일(2018년 11월 23일)
* ZDM분류 : U24
* MSC2000분류 : 97U20
* 주제어 : 함수의 연속, 연속함수, 학교수학, 학문수학
† 교신저자

수학적 지식의 차이에 관하여 연구를 실시하였고, 교사들을 대상으로 불연속 함수의 내용적 지식에 관한 연수 및 재교육을 제안하였다. 김윤경(2013)은 함수의 연속에 대한 현직교사와 예비교사의 MKT 수준을 비교하여 교사들에 대한 재교육의 필요성을 주장하였다.

Chevallard(1988)의 주장처럼 교수체계는 '지식', '학생', '교사'의 세 가지 요소로 구성된다. 이 중에서 '지식'은 '학문적 지식'과 '교수학적 지식'으로 분류할 수 있는데, 수학적 지식인 경우에 전자는 학문수학, 후자는 학교수학이라 한다. 교수학적 변환론의 관점에서 교사의 '교수학적 지식'은 학교수학에서 중요한 역할을 한다. 그러므로 함수의 연속에 대하여 교사가 올바르게 이해하고 가르칠 지식의 내용을 정확하게 인식하는 것은 교수학적으로 매우 중요하다.

학생의 학습심리와 수학수준을 고려하여 함수의 연속에 대한 정의를 직관적인 내용으로 교수학적 변환을 하더라도, 교과서의 설계와 교사의 수학적 지식 이해에 문제가 있어서는 안 된다. 교과서는 계획된 교수학적 변환에 따라 내용체계가 정교하게 설계되어야 하며, 교사는 그에 대한 정확한 교수학적 지식을 가지고 있어야 한다. 또한 교사는 교수학적 변환의 배경에 대한 이해가 있어야 하며 지식을 단순히 전달하는 역할에 그쳐서는 안 된다.

함수를 형식적으로 정의하기 위해서는 곱집합의 부분집합인 관계의 일종으로 정의해야 한다. 그러므로 정의역과 함수는 동시에 정의되어야 하고 어느 하나가 선행하여 정의될 수는 없다. 중등교육과정에서는 집합론적인 형식성에 기초하여 함수를 소개하기 어려워 함수의 관계식을 먼저 소개한 후 그 정의역을 찾게 하고 있다. 그래서 정의역을 특정하지 않으면 암묵적으로 실수 전체의 집합 또는 함수의 관계식이 정의되는 최대의 구간을 정의역으로 보도록 하고 있다.

함수의 연속을 정의할 때 '함수의 정의'를 묻는 조건을 함께 둠으로써, 함수의 정의가 함수의 연속을 위한 전제가 아니라 하나의 조건으로 읽히게 되고, 그 부정에서 문제가 생긴다. 다시 말해서 함수의 연속을 판정하기 위해 먼저 함수가 정의되어 있는지를 체크하도록 함으로써 '정의되지 않은 함수 또는 함숫값'으로부터 '연속이 아닌 함수'로 분류하게 하는 문제가 생긴다.

또한 중등교육에서는 함수의 연속을 극한으로 정의하고, 극한을 다루는 점이 정의역의 집적점으로 정의역의 원소가 아닐 수도 있기 때문에, 함수의 연속을 다루는 점도 극한의 연장선상에서 정의역의 원소가 아니어도 되는 것으로 생각하는데 영향을 준다. 예를 들어 함수 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 의 $x=1$ 에서의 연속을 다루는 문제에서 $x=1$ 에서 함수의 극한은 정의되므로 함수의 연속을 판정할 수 있는 점으로 인식하게 하기도 한다. 이는 엄밀한 정의에서는 잘못된 판정이지만 함수 $f(x)$ 를 $(-\infty,1)\cup(1,\infty)$ 에서 일차함수로 이해하고 $x=1$ 로 연속확장하는 자연스런 사고방식으로 나름대로의 의미를 지닌다. 그러므로 함수 $f(x)$ 는 $(-\infty,1)\cup(1,\infty)$ 에서 연속이고 R 에서는 불연속함수라고 상기시켜 줌으로써 모호하게 넘어갔던 정의역으로 인한 문제를 피해 갈 수 있고, 연속확장문제를 생각할 수 있는 기회를 제공하기도 한다.

선행연구에서 함수의 연속을 도입할 때, 극한으로부터 오는 집합론적 한계, 함수의 연속에 대한 정의의 불명확성과 비일관성 등을 지적하였고, 이를 개선하기 위한 여러 안을 제시하였다. 특히 함수의 연속을 판정하는 문제에서 다루는 대상이 정의역의 원소로 제한됨을 분명히 해줄 것을 제시한 연구가 많다. 하지만 이 문제는 '함수'의 정의에서 정의역을 명시하지 못하는 중등교육의 근원적인 한계로부터 비롯되었음을 알 수 있다. 실제로 선행연구에서 나타나는 학생들의 오개념은 논리적인 오류라기보다는 함수의 정의역을 구체적으로 언급하지 않아 생기는 현상이다. 그러므로 정의역이 명시되지 않은 함수의 연속을 판정할 때, 현직교사나 예비교사들이 함수의 정의역을 어떻게 인식하는가를 살펴보는 것은 의미가 있다. 이는 교수학적 변환 과정에서 생길 수 있는 오개념과 한계를 교사들이 인식하도록 하여 함수의 연속에 대한 교수학적 처방을 마련하기 위한 기초 자료를 제공해주기 때문이다. 이에 본 연구에서는 함수의 연속을 판단하는 문제에서 현직교사와 예비교사가 정의역을 어떻게 인식하는가를 조사하고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 함수의 연속에 대한 역사

함수의 연속에 대한 논의는 18세기 중반 D′Alembert나 Euler로부터 시작되었다. Euler는 연속곡선(함수)을 하나의 공식 또는 방정식으로 표현할 수 있는 것으로 보았는데, 이 정의는 초월함수와 그 역함수의 대수적 연산과 합성으로 구성된 함수들만을 주로 다루었던 당시에는 충분하였으나 Fourier 급수의 등장으로 연속함수의 개념을 적절하게 설명할 수 없게 되었다. 이후 Dirichlet가 제시한 Fourier 급수의 수렴에 대한 명확한 이해를 위해서 함수의 극한과 연속에 대한 엄밀한 정의가 요구되었다. 연속에 대한 현대적인 형태의 정의는 Bolzano와 Cauchy에 의해 정립되었다. Bolzano와 Cauchy는 모두 함수의 연속에 대한 정의가 명확해야 사잇값 정리를 증명할 수 있음을 인지하고, 연속함수가 공통적으로 가지는 필수적인 속성을 추출하여 엄밀한 이론적 토대 위에 연속의 정의를 세웠다(Grabiner, 1983; Stoll, 2001). 연속에 대한 Bolzano와 Cauchy의 정의는 각각 다음과 같다.

> 어떤 범위의 모든 x값에 대하여, w를 원하는 만큼 작게 잡아 $f(x+w)-f(x)$의 차이를 임의의 주어진 크기보다 작게 만들 수 있다면 함수 $f(x)$는 연속의 법칙에 따라 변한다(Grabiner, 2005, p. 87, 재인용).

> 주어진 두 값의 범위에 있는 x의 각 값에 대하여 $f(x+\alpha)-f(x)$의 값이 α와 함께 한없이 작아진다면, 함수 $f(x)$는 주어진 범위의 x에 대하여 연속이다(Cauchy, 2009, p. 26).

Cauchy가 함수의 연속을 역동적인 방식으로 정의하고 해석학의 형식화에 기초를 놓는데 크게 기여하였지만 연속을 직관적으로 이해한 수준을 완전히 벗어나지는 못하였다. 현재의 수학적 정의로 볼 때, 극한을 정의하는데 직관적 표현을 사용하였기 때문에 형식화된 엄밀성이 부족한 한계가 있다. 실제로 ‘α와 함께 $f(x+\alpha)-f(x)$가 한없이 작아진다’고 진술한 것은 연속 운동에 대한 모호한 직관을 담고 있다. Cauchy의 업적을 면밀히 연구한 Weierstrass는 Bolzano와 Cauchy의 정의보다 더 명확하게 다음과 같이 표현하였다(Boyer, 1949; Burton, 2011).

> 변수 x의 어떤 구간에서, 그 구간에 있는 임의의 값 x_0와 임의의 작은 양수 ϵ에 대하여, x_0주위의 어떤 구간의 모든 x에 대해서 차 $f(x)-f(x_0)$의 절댓값이 ϵ보다 작게 되는 x_0 주위의 어떤 구간을 찾을 수 있으면 $f(x)$는 그 구간에서 연속이다(Boyer, 1949, p. 287, 재인용).

Weierstrass는 당시에 기하학적 추론과 직관적인 이해로 다루었던 해석학을 산술화하여 크게 발전시켰다. Weierstrass가 제시한 정의는 극한을 ‘한없이 작아진다’, ‘가까이 간다’, 혹은 ‘무한소만큼 감소한다’라는 동적 개념으로 나타내지 않고 정적 상태만을 고려하면 되기 때문에 연속에 대한 더 엄밀한 접근이 가능해졌다. 나아가 Weierstrass의 후계자들에 의해서 체계화되어 모호하게 사용되던 함수의 극한과 연속의 개념이 엄격하게 정의되었다(Burton, 2011; 유윤재, 2012). 그 후 연속과 관련된 개념들은 더욱 추상적인 면모를 갖추게 되었다. 예를 들어 19세기 후반 Cantor는 근방, 집적점, 도집합 등의 개념을 확립하게 된다(Boyer, 1949; 유윤재, 2012; 정연준, 김재홍, 2013).

2. 교과서와 교육과정에서의 연속

다음의 [표 1]과 [표 2]는 함수의 연속과 관련하여 2007개정 교육과정부터 2015개정 교육과정까지의 학습내용 성취기준과 교수・학습상(방법)의 유의점을 각각 나타낸 것이다. 2007개정 교육과정의 내용 제시 방식은 2009개정 교육과정 및 2015개정 교육과정에서도 유사하게 나타난다. 함수의 연속은 2007개정 교육과정의 ‘미적분과 통계기본’과 ‘수학Ⅱ’, 2009개정 교육과정의 ‘미적분Ⅰ’, 2015개정 교육과정의 ‘수학Ⅱ’에 포함되어 있다.

[표 1] 성취기준(교육인적자원부, 2007; 교육과학기술부, 2011; 교육부, 2015)
[Table 1] Achievement Standards(Ministry of Education and Human Resources Development, 2007; Ministry of Education, Science and Technology, 2011; Ministry of Education, 2015)

구분	학습내용 성취기준
2007개정 교육과정 (미적분과 통계 기본, 수학Ⅱ)	① 함수의 연속의 뜻을 안다. ② 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
2009개정 교육과정 (미적분Ⅰ)	상동
2015개정 교육과정 (수학Ⅱ)	상동

2007개정 교육과정에서 제시한 교수・학습상(방법)의 유의점이 이후 교육과정에서 일부 변화되기는 하였지만, 이는 내용 영역의 이동으로 인한 것으로서 학습내용의 성취기준은 동일하다.

[표 2] 교수・학습상(방법)의 유의점(교육인적자원부, 2007; 교육과학기술부, 2011; 교육부, 2015)
[Table 2] Guidelines for teaching and learning(Ministry of Education and Human Resources Development, 2007; Ministry of Education, Science and Technology, 2011; Ministry of Education, 2015)

구분	교수・학습상(방법)의 유의점
2007개정 교육과정 (미적분과 통계 기본)	① 함수의 극한에 관한 정의와 성질은 수열의 극한과 관련지어 이해하게 한다.
2007개정 교육과정 (수학Ⅱ)	① 함수의 극한에 관한 정의와 성질은 수열의 극한과 관련지어 이해하게 한다. ② e의 값은 무리수임을 직관적으로 이해하게 한다. ③ 함수의 연속에서는 지나치게 복잡한 함수는 다루지 않는다.
2009개정 교육과정 (미적분Ⅰ)	① 함수의 극한에 대한 정의와 성질은 직관적으로 이해하게 하고, 이때 공학적 도구를 활용할 수 있다. ② 함수의 극한과 연속은 이후에 학습하게 될 미분법과 적분법의 원리를 이해하는 데 필요한 수준으로 다룬다.
2015개정 교육과정 (수학Ⅱ)	① 함수의 극한에 대한 뜻과 성질은 그래프를 통해 직관적으로 이해하게 하고, 이때 공학적 도구를 이용할 수 있다. ② 함수의 극한과 연속은 미분을 이해하는 데 필요한 정도로 간단히 다룬다.

(1) 한 점에서의 연속

현재 학교수학에서 함수의 연속을 소개하는 방식은 Cauchy가 제시한 연속함수의 정의를 근간으로 하고 있다. 실제로 2007개정 수학과 교육과정 해설서에서는 함수의 연속을 다음과 같이 지도하도록 안내하고 있다.

함수의 연속에 대한 정의는 여러 가지가 있지만 고등학교 단계에서는 코시(Cauchy)에 의한 정의, 즉 '$x=a$에서 함수 $f(x)$가 연속 $\Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)=f(a)$'를 사용하도록 한다. 여기서, $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$가 성립하기 위해서는 다음 사항이 성립해야만 한다.

㉠ $f(a)$가 존재한다.
㉡ $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재한다.
㉢ $\lim_{x\to a} f(x)$와 $f(a)$가 일치한다.

$x=a$에서 함수 $f(x)$가 연속이라는 것은 위의 ㉢ $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$이고, 이는 ㉠과 ㉡을 내포하고 있지만, 학생들에게 지도할 때는 위의 세 단계로 나누어서 이해시키도록 한다. $x=a$에서 함수 $f(x)$가 연속이 아닐 때, 이 함수는 $x=a$에서 불연속이라고 함을 알게 한다. 이때, 불연속인 점에서는 함숫값이 정의되지 않거나 극한값이 존재하지 않을 때 또는 함숫값과 극한값이 존재하지만 극한값과 함숫값이 다름을 알게 한다. 함수의 연속 조건을 이용하여 여러 가지 함수의 연속을 판정해 보고, 주어진 함수가 연속이 되도록 하기 위해서 성립해야 할 조건 등에 대해서도 알아보도록 한다. 함수의 연속과 불연속을 조사할 때에는 지나치게 복잡한 함수는 다루지 않는다(교육과학기술부, 2008, p. 185).

위의 정의에서 ㉠은 $x=a$에서 함수가 정의되기 위한 조건이므로 함수의 연속을 판단하기 이전의 기본 전제에 속한다. ㉠이 성립하지 않을 경우에 함수가 $x=a$에서 정의되어 있지 않으므로 연속을 따지는 것은 무의미하다. 하지만 교육과정 해설서에 제시된 서술 방식은 ㉠을 ㉡, ㉢과 함께 함수의 연속의 필요조건으로 인식하게 할 소지가 있다.

교육과정의 지도방식을 구현한 2009개정 교과서는(김원경 외, 2014; 김창동 외, 2014; 류희찬 외, 2014; 신항균 외, 2014; 우정호 외, 2014; 이강섭 외, 2014; 이준열 외, 2014; 정상권 외, 2014; 황선욱 외, 2014) 모두 조건 ㉠, ㉡, ㉢을 제시하고 연속을 정의한다. 그러나 연속의 부정에 대한 함수의 불연속의 정의는 모두 일치하지는 않는다. 정상권 외(2014)를 제외한 8종의 교과서는 세 조건 중에서 어느 하나라도 만족시키지 않으면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이라고 서술하지만, 정상권 외(2014)

는 다음과 같이 불연속을 정의한다.

> 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이 아니면 불연속이라고 한다. 특히 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있을 때, 다음의 각 경우에 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 불연속이다.
> - 극한 $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재하지 않는다.
> - 극한 $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재하지만 그 값이 $f(a)$와 다르다
>
> (정상권 외, 2014, p. 67).

위의 정의는 ㉠을 전제로 하고 ㉡, ㉢의 충족여부를 따져 불연속을 판정하고 있다. 여기서 ㉠을 만족하지 않는 경우 $x=a$에서 불연속으로 판단하는 것은 논란이 될 수 있다. 그러므로 ㉠을 함수의 연속을 판단하기 이전에 '함수에 대한 기본 전제'로 보느냐, 아니면 '함수의 연속을 정의하는 하나의 조건'으로 보느냐에 따라 함수의 연속에 대한 정의는 바뀌게 된다. 이는 직관적으로 가르치는 학교수학에서 학생들이 잘못된 개념을 가질 수 있도록 하는 원인이 될 수 있다. 예를 들어 학교수학에서는 ㉠을 함수의 연속에 대한 하나의 조건으로 보고 $f_1(x)=\frac{1}{x}$이나 $f_2(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$과 같은 분수함수의 형태에 대하여 불연속함수로 판단하도록 가르친다. 함수 $f_1(x)$는 Euler의 기준으로 본다면 연속함수이지만(Youschkevitch, 1976; 백승주, 최영기, 2017), Cauchy(1899)에 의하면 $x=0$에서 변화를 관찰할 수 없기 때문에 불연속함수가 된다.

김진환, 박교식(2017)은 $f_1(x)$나 $f_2(x)$를 각각 제2종 불연속점을 가지는 함수와 제1종 불연속점을 가지는 함수로 분류하고, 어떤 점이 정의역에 속하지 않더라도 불연속점을 활용하여 제시할 수 있는 수학적 활동의 중요성이 있으므로, 정의되지 않은 점에서의 불연속을 판정하는 현재 교과서의 서술 방식이 유용하다고 주장하였다. 하지만 불연속점을 이용하여 연속 개념을 지도하는 것은 정의되지 않은 점을 단순히 불연속점으로 간주하는 오개념을 낳을 우려가 있다. 이에 대한 한 가지 대안으로 정상권 외(2014)는 ㉠을 전제로 한 뒤, ㉡, ㉢의 충족여부를 따지며, 교과서의 예제와 문제에서도 $f_1(x)$와 같은 분수함수를 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$로 제시하여 $x=0$이 정의역의 원소임을 명시하고 있다. 또한 $f_2(x)$와 같이 $x=1$에서 극한이 존재하지만 함숫값이 존재하지 않는 경우는 $f(1)$을 적절히 정의하여, 정의되지 않는 점에 대한 불연속을 고려하지 않게끔 제시하고 있다.

(2) 연속함수의 정의

교과서의 함수의 연속 단원에서는 일반적으로 다음에 해당하는 예제 혹은 문제를 단계별로 제시한다.

① 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속인지 불연속인지를 판정하는 문제
② 함수의 정의역 구간을 나타내는 문제
③ 함수가 연속인 구간을 구하는 문제

단계 ①은 한 점에서의 연속을 판단하는 문제로 대부분의 교과서에서 연속함수는 실수 전체의 집합에서 연속이어야 함을 내포한다. 단계 ②에서는 분수함수나 무리함수의 정의역을 구하는데, 정의역을 구간의 기호를 이용하여 나타낸다. 단계 ③에서는 주어진 함수가 연속인 구간을 찾게 하는데, 대개 '다음 함수의 연속을 조사하여라' 혹은 '다음 함수가 연속인 구간을 구하여라' 등의 지시문을 통하여 연속인 구간을 찾게 한다. 함수가 불연속인 점을 제외하고 연속이 되도록 하는 구간을 찾게 하는데, 그 구간이 실제로 함수의 정의역과 일치하게 된다. 결국 단계 ②에서와 같이 분수함수나 무리함수의 정의역을 구하는 것과 같다. 이러한 진술 방식은 한 점에서의 함수의 연속을 진술한 방식과 마찬가지로 ㉠을 함수의 연속의 필요조건으로 인식하게 만들어, 함수의 정의역과 연속인 구간을 동일시하는 오개념을 심어줄 수 있다.

2009개정 교육과정의 교과서에서 제시된 연속함수의 정의는 다음의 [표 3]과 같다.

2009개정 교육과정의 9종의 미적분Ⅰ 교과서를 분석해보면 연속함수에 대한 정의의 표현방식이 교과서마다 조금씩 다름을 확인할 수 있다. 김창동 외(2014), 류희찬 외(2014), 신항균 외(2014)는 연속함수를 정의역 전체에서 연속일 때로 정의하고 있지만, 그 외의 교과서는 어떤 구간에서 연속함수를 정의하고 있다. 연속함수의 정의는 위의 단계 ②와 단계 ③ 사이에 제시된다. 함수를 제시하고 그에 대한 정의역 구간을 구하게 하지만 정의

[표 3] 연속함수의 정의
[Table 3] Definition of a continuous function

<table>
<tr><th>교과서</th><th>연속함수의 정의</th></tr>
<tr><td>김원경 외(2014, p. 65)</td><td>함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 모든 실수 x에서 연속일 때, $f(x)$는 그 구간에서 연속이라고 한다. 또 그 구간에서의 연속함수라고 한다.</td></tr>
<tr><td>김창동 외(2014, p. 71)</td><td>일반적으로 함수 $f(x)$가 정의역의 모든 점에서 연속일 때, 이 함수를 연속함수라고 한다.</td></tr>
<tr><td>류희찬 외(2014, p. 76)</td><td rowspan="2">함수 $f(x)$가 어떤 열린 구간의 모든 점에서 연속일 때, 함수 $f(x)$는 그 구간에서 연속이라고 한다. 일반적으로 함수 $f(x)$가 정의역 전체에서 연속일 때, 함수 $f(x)$를 연속함수라고 한다.</td></tr>
<tr><td>신항균 외(2014, p. 69)</td></tr>
<tr><td>우정호 외(2014, p. 85)</td><td>함수 $f(x)$가 어떤 구간의 모든 실수에서 연속일 때, $f(x)$는 그 구간에서 연속 또는 그 구간에서 연속함수라고 한다.</td></tr>
<tr><td>이강섭 외(2014, p. 73)</td><td>함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 모든 점에서 연속일 때, $f(x)$는 그 구간에서 연속 또는 그 구간에서 연속함수라고 한다.</td></tr>
<tr><td>이준열 외(2014, p. 81)</td><td>함수 $f(x)$가 어떤 열린 구간의 모든 점에서 연속일 때, 함수 $f(x)$는 그 구간에서 연속 또는 연속함수라고 한다.</td></tr>
<tr><td>정상권 외(2014, p. 70)</td><td>함수 $f(x)$가 어떤 구간의 모든 x에서 연속일 때, $f(x)$는 그 구간에서 연속 또는 그 구간에서 연속함수라고 한다.</td></tr>
<tr><td>황선욱 외(2014, p. 71)</td><td>함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 모든 실수에 대하여 연속일 때, $f(x)$는 그 구간에서 연속이라고 한다. 또 어떤 구간에서 연속인 함수를 연속함수라고 한다.</td></tr>
</table>

역에 대한 언급 없이 다시 연속함수를 정의하고 있다. 이는 단계 ②의 제시 목적을 살리지 못할 뿐만 아니라, 학습자에게 연속함수를 어느 구간에서 생각해야 하는지에 대한 혼란을 줄 가능성이 있다. 실제로 학문수학에서 연속함수의 정의는 '~에서 연속함수'라는 식으로 다음과 같이 정의역이 명시되어 있다.

> E는 R의 공집합이 아닌 부분집합이고 $f: E \to R$인 함수라 하자. f가 E의 모든 점에서 연속이면 f가 E에서 연속이라고 한다(Wade, 2003, p. 72).

> $A \subset R$이고 $f: A \to R$이고 B가 A의 부분집합일 때, f가 B의 모든 점에서 연속이면, f는 집합 B에서 연속이라고 한다(Bartle & Sherbert, 1999, p. 121).

예를 들어, $f_1(x) = \dfrac{1}{x}$은 R에서는 불연속함수이고 $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$에서는 연속함수이다. 함수를 엄밀하게 정의하기 위해서는 함수와 정의역이 동시에 정의되어야 하지만 학교수학에서는 집합론적인 접근이 어려워 함수 관계를 먼저 소개하고 그 정의역을 정의한다. 명확한 정의역의 언급 없이 함수를 정의하고 연속을 판단하는 이런 접근은, 정의역의 범위에 따라 연속함수가 될 수도 있고 안 될 수도 있기 때문에, 함수의 연속을 판단할 때 혼란을 줄 수 있다. 함수의 연속에 대한 교수·학습 상황에서 함수의 정의역이 언급되지 않는 한, 교사와 학생은 항상 함수가 어떤 맥락에서 주어져 있는가를 파악해야 한다. 올바른 교수학적 지식을 가지고 있는 교사는 이와 같은 문제가 생길 경우 적절하게 상황을 파악하여 대처할 수 있지만, 그렇지 않은 교사와 학생은 연속을 판단하는 것이 쉽지 않다. 본 논문에서는 이러한 문제를 현직교사와 예비교사들이 얼마나 인식하고 있는지를 조사하고자 한다.

III. 연구 방법

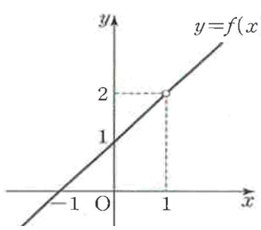
본 연구에서는 현직교사와 예비교사가 함수의 연속을 판단할 때 정의역을 어떻게 인식하는지를 분석하고자 한다. 먼저, 현직교사와 예비교사가 학교수학에서 함수의 정의역을 어떻게 인식하여 한 점에서의 연속을 판정하는지 살펴보고, 학교수학에서 자주 다루는 연속확장문제로 인하여 어떠한 개념을 가지고 있는지도 확인하고자 한다. 또한 동적인 극한의 개념을 적용하기 어려운 종류의 함수를 제시하여 연속함수의 정의에 대한 인식을 살펴보

고자 한다. 이는 현직교사가 교수학적 변환에 대한 지식을 가지고 극한 과정을 이용하여 가르치는 배경을 이해하고 있는지를 확인하기 위함이다. 즉, 함수의 연속에 대하여 학교수학의 정의로는 판단할 수 없는 문항을 제시하였을 때, 함수의 연속을 어떻게 판단하는지를 알아보고자 한다.

1. 설문 문항

본 연구는 현직교사와 예비교사를 대상으로 한 점에서의 연속 판정, 연속함수 판정 등의 내용을 소재로 3문항을 개발하고 설문을 진행하였다. 예비교사와 현직교사의 인식을 조사하기 위한 설문문항은 다음의 문항 1부터 문항 3까지이다. 설문의 내용이 오개념이나 오류를 찾는 형식의 문항이 아니라 정의역을 인식하는 방식을 알기 위함이므로 문항 1은 대화형식을 취하였으며, 문항 1-1은 함수의 연속에 대한 정의를 고려한 대화로 학생을 대화자로 하였고, 문항 1-2는 함수의 정의를 바탕으로 둔 대화로 교사를 대화자로 두었다.

문항 1. 함수 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 의 그래프는 아래의 그림과 같습니다. 함수의 식과 그래프를 참고하여 아래의 문항 1-1과 문항 1-2에 답하여 주시기 바랍니다.



문항 1-1. 다음은 '함수 $f(x)$가 연속함수인가?'에 대한 두 학생의 응답이다. 아래의 보기 ① ~ ④ 중 옳다고 생각하는 것을 고르시오.

> 학생 A: 함수 $f(x)$의 정의역은 $R\setminus\{1\}$이고 정의역 내 모든 점에서 연속이므로 $f(x)$는 연속함수이다.
>
> 학생 B: 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 아래의 ㉠, ㉡, ㉢ 조건을 만족시키지 않으므로 R에서 불연속함수이다.
> ㉠ 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있다.
> ㉡ 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재한다.
> ㉢ $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

① 학생 A의 주장이 옳다.
② 학생 B의 주장이 옳다.
③ 두 주장 모두 옳다.
④ 두 주장 모두 옳지 않다.

※ 해당 보기를 선택한 이유는 무엇입니까?

문항 1-1은 정의역의 원소인지 아닌지 언급되지 않는 점에서 함수의 연속을 어떻게 인식하는지 파악하기 위하여 제시하였다. 학생 A는 함수가 정의된 구간에서 연속을 판단하고 있으며, 학생 B는 함숫값이 정해지지 않는 점에서의 연속은 조건 ㉠을 만족시키지 않는 것으로 보아 불연속으로 판단한 후, $f(x)$가 R에서 불연속함수임을 말하고 있다.

문항 1-2. 다음은 함수 $f(x)$의 연속에 대한 두 교사의 주장이다. 아래의 보기 ① ~ ④ 중 옳다고 생각하는 것을 고르시오.

> 교사 A: 함수 $f(x)$가 $x=1$에서의 함숫값 $f(1)$에 따라 R에서 연속일 수도 불연속일 수도 있으므로 함수 $f(x)$는 연속함수인지 불연속함수인지 판단할 수 없다.
>
> 교사 B: $x=1$은 정의역의 원소가 아니므로 $f(x)$가 $x=1$에서 연속인지 불연속인지 말할 수 없다. 따라서 함수 $f(x)$는 연속함수인지 불연속함수인지 판단할 수 없다.

① 교사 A의 주장이 옳다.
② 교사 B의 주장이 옳다.
③ 두 주장 모두 옳다.
④ 두 주장 모두 옳지 않다.

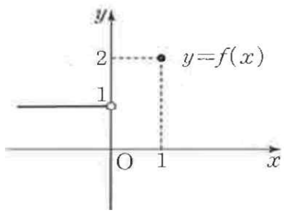
※ 해당 보기를 선택한 이유는 무엇입니까?

문항 1-2는 함수의 연속과 관련하여 함숫값이 없는 점에 대하여 연속확장문제로 파악하는지 정의역 내에서만 연속을 고려하는지를 알아보기 위하여 제시하였다.

교사 A는 문항 1-2를 연속확장문제로 인식하여 $f(1)$이 어떠한 값으로 주어지느냐에 따라 조건 ㉢의 만족 여부가 달라지므로 함수의 연속 또는 불연속을 판단

할 수 없다고 주장한다. 교사 B는 $x=1$이 정의역의 원소가 아니므로 연속과 불연속을 논하는 것 자체가 불가하여 연속을 판단할 수 없다고 주장한다. 즉 $x=1$에서 연속을 판단할 수 없기 때문에 $f(x)$가 연속함수인지 불연속함수인지 판정하지 못한다고 보고 있다.

문항 2. 함수 $f(x)=\begin{cases}1 & (x<0)\\ 2 & (x=1)\end{cases}$의 그래프는 아래의 그림과 같습니다. 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속인지 불연속인지 판정하고 그에 대한 이유를 서술하시오.

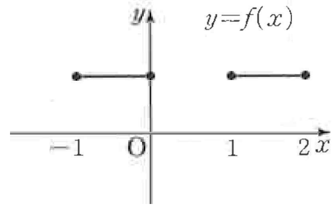


문항 2에서는 극한을 이용하여 연속을 설명하기 어려운 함수로 제시하였다. 극한을 이용하여 $x=1$에서 함수의 연속을 논하려면 정의역은 $x=1$을 집적점으로 갖는 무한집합임을 기본 전제로 해야 한다.[1] 그러므로 고립점에서의 연속은 극한을 이용하여 설명하기가 어렵다. 하지만 $\epsilon-\delta$ 방식을 이용한 연속의 정의는 $x=a$가 정의역의 고립점이라도 적용할 수 있다(이동원, 2016). $\epsilon-\delta$ 방식을 이용한 연속의 정의는 다음과 같다.

E를 실수의 집합 R의 부분집합이라 하고, 실수 c를 $c\in E$라고 하자. 함수 $f:E\to R$에 있어서 명제 『임의의 $\epsilon>0$에 대하여 이에 대응하는 적당한 $\delta=\delta(\epsilon)>0$이 존재하여 $|x-c|<\delta$이고, $x\in E$이면 $|f(x)-f(c)|<\epsilon$이다』를 만족하면, 함수 f는 점 $x=c$에서 연속이라고 한다(정동명, 조승제, 2004, p. 195).

이 정의에 따라 c가 E의 고립점이면 어떤 $\delta>0$에 대하여 $|x-c|<\delta$이고 $x\in E$인 x는 c밖에 없으므로 $f(x)$는 $x=c$에서 연속이 된다.

문항 3. 함수 $f(x)=\begin{cases}1 & (-1\le x\le 0)\\ 1 & (1\le x\le 2)\end{cases}$의 그래프는 아래의 그림과 같습니다. 함수 $f(x)$가 연속함수인지 불연속함수인지 판정하고 그에 대한 이유를 서술하시오.



문항 3은 문항 2의 의도와 같이 극한 과정을 어떻게 적용하는지를 확인하고 연속함수를 어느 구간에서 판단하는지를 확인하기 위하여 제시한다.

2. 연구대상

본 연구에서는 D지역 고등학교에 재직 중인 현직교사 14명과 K대학교 수학교육과 재학생인 예비교사 60명을 대상으로 설문조사를 실시하였다. 예비교사는 현재 사범대학 수학교육과에 재학 중인 대학생으로서 함수의 연속에 대한 학교수학의 정의와 학문수학의 정의를 모두 배운 상태이었다.

1) 현직교사

현직교사 집단의 인원과 교직경력은 [표 4]와 같다. 전체 14명 중 경력이 6년 미만인 교사는 5명(35.7%), 6년 이상 11년 미만인 교사는 4명(28.6%), 11년 이상인 교사는 5명(35.7%)이었다. 대상자들의 평균 교직경력은 약 11년이었으며, 가장 짧은 경력은 2년, 가장 긴 경력은 28년이었다.

[표 4] 현직교사의 교직경력
[Table 4] Teaching career of in-service teachers

구 분		인원(%)
현직교사	6년 미만	5(35.7)
	6년 이상 11년 미만	4(28.6)
	11년 이상	5(35.7)
계		14(100.0)

현직교사의 학력은 [표 5]와 같다. 전체 14명 중 학사 3명(21.4%), 석사과정 3명(21.4%), 석사 6명(42.9%), 박사

[1] $x=1$이 고립점일 때, '$x\to1$이면 $f(x)\to L$'이라는 명제에서, $x\to1$인 x가 없어 위 명제가 참이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=L$이 성립한다는 논리에 의하면 모든 고립점에서 함수는 연속이 됨을 설명할 수 있다. 하지만 이런 논리에 따라 고립점을 포함하여 함수의 극한을 정의하면, L이 임의의 값에 대하여 논리가 성립하므로, 극한이 유일하다는 통상적인 해석학의 극한은 아니게 된다.

과정 1명(7.1%), 박사 1명(7.1%)이었다. 담당 학년은 1학년 3명(21.4%), 2학년 8명(57.2%), 3학년 3명(21.4%)으로 [표 6]과 같다.

[표 5] 현직교사의 학력
[Table 5] Academic background of in-service teachers

구 분		인원(%)
학력	학사	3(21.4)
	석사과정	3(21.4)
	석사	6(42.9)
	박사과정	1(7.1)
	박사	1(7.1)
	계	14(100.0)

[표 6] 현직교사의 담당학년
[Table 6] School years in charge of in-service teachers

구 분		인원(%)
담당 학년	1학년	3(21.4)
	2학년	8(57.2)
	3학년	3(21.4)
	계	14(100.0)

2) 예비교사

예비교사의 학년별 인원은 [표 7]과 같다. 전체 60명 중 2학년 14명(23.3%), 3학년 25명(41.7%), 4학년 21명(35.0%)이었다.

[표 7] 예비교사의 학년
[Table 7] Pre-service teachers' school years

구 분		인원(%)
예비교사	2학년	14(23.3)
	3학년	25(41.7)
	4학년	21(35.0)
	계	60(100.0)

IV. 결과 분석 및 논의

문항 1-1에 대한 현직교사와 예비교사의 응답결과는 [표 8]과 같다. 현직교사 14명 중 11명(78.6%)과 예비교사 60명 중 27명(45.0%)이 '② 학생 B의 주장이 옳다(함수 $f(x)$는 $x=1$에서 아래의 ㉠, ㉡, ㉢ 조건을 만족시키지 않으므로 R에서 불연속함수이다)'를 선택하였다. 즉 학교수학의 정의에 입각하여 $x=1$에서 불연속으로 판정하였으므로 $x=1$을 정의역의 원소로 인식하였다.

[표 8] 문항 1-1에 대한 현직교사와 예비교사의 응답
[Table 8] Response of in-service teachers and pre-service teachers to question 1-1

응 답 구 분	현직교사	예비교사
	인원(%)	인원(%)
① 학생 A의 주장이 옳다.	2(14.3)	15(25.0)
② 학생 B의 주장이 옳다.	11(78.6)	27(45.0)
③ 두 주장 모두 옳다.	1(7.1)	13(21.7)
④ 두 주장 모두 옳지 않다.	0(0.0)	5(8.3)
계	14(100.0)	60(100.0)

문항 1-1의 설문 결과는 예비교사와 현직교사의 주된 인식('② 학생 B의 주장이 옳다')이 유사하다는 것을 보여주며, 예비교사 시기에 가졌던 인식이 현직교사가 되어도 유지되거나 더욱 강화될 가능성이 있음을 시사한다. 이는 함숫값의 존재 유무를 연속의 판정 조건으로 두는 학교수학의 정의에 기인한 결과라 할 수 있다.

[표 9]는 예비교사의 응답을 학년별로 분류한 것이다. 2학년 집단에서는 '② 학생 B의 주장이 옳다'를 선택한 비율(8명, 57.1%)이 가장 높았으며, 3학년 집단에서도 가장 높게 나타났다(11명, 44.0%). 하지만 4학년 집단에서는 '① 학생 A의 주장이 옳다(함수 $f(x)$의 정의역은 $R\setminus\{1\}$이고 정의역 내 모든 점에서 연속이므로 $f(x)$는 연속함수이다)'를 선택한 비율이 가장 높았고(9명, 42.9%), 그 다음으로 '② 학생 B의 주장이 옳다'를 선택한 비율(7명, 33.3%)이 높게 나타났다. 이는 학년이 올라갈수록 $\epsilon-\delta$ 방식의 정의를 접하는 경우가 늘어나 정의역에서 연속을 판정하는 응답이 많아지는 것으로 볼 수 있다.

[표 9] 문항 1-1에 대한 예비교사의 응답
[Table 9] Response of pre-service teachers to question 1-1

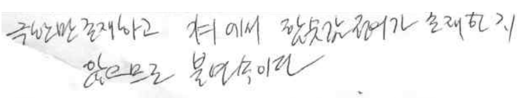
응 답 구 분		인원(%)
2학년	① 학생 A의 주장이 옳다.	2(14.3)
	② 학생 B의 주장이 옳다.	8(57.1)
	③ 두 주장 모두 옳다.	3(21.4)
	④ 두 주장 모두 옳지 않다.	1(7.1)
	소 계	14(100.0)
3학년	① 학생 A의 주장이 옳다.	4(16.0)
	② 학생 B의 주장이 옳다.	11(44.0)
	③ 두 주장 모두 옳다.	7(28.0)
	④ 두 주장 모두 옳지 않다.	3(12.0)
	소 계	25(100.0)
4학년	① 학생 A의 주장이 옳다.	9(42.9)
	② 학생 B의 주장이 옳다.	7(33.3)
	③ 두 주장 모두 옳다.	3(14.3)
	④ 두 주장 모두 옳지 않다.	2(9.5)
	소 계	21(100.0)
계		60

‘문항 1-2’에 대한 현직교사와 예비교사의 응답결과는 [표 10]과 같다. 두 집단 모두 ‘④ 두 주장 모두 옳지 않다’의 비율이(현직교사 8명(57.1%), 예비교사 29명(48.3%)) 가장 높았다.

[표 10] 문항 1-2에 대한 현직교사와 예비교사의 응답
[Table 10] Response of in-service teachers and pre-service teachers to question 1-2

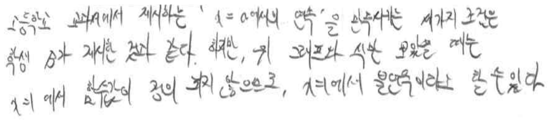
응답 구분	현직교사	예비교사
	인원(%)	인원(%)
① 교사 A의 주장이 옳다.	2(14.3)	16(26.7)
② 교사 B의 주장이 옳다.	0(0.0)	7(11.7)
③ 두 주장 모두 옳다.	4(28.6)	6(10.0)
④ 두 주장 모두 옳지 않다.	8(57.1)	29(48.3)
⑤ 무응답	0(0.0)	2(3.3)
계	14(100.0)	60(100.0)

문항 1-1의 결과에서 보듯이 ‘③ 두 주장 모두 옳다’와 ‘④ 두 주장 모두 옳지 않다’고 답한 인원이 현직교사는 1명, 예비교사는 18명으로 상대적으로 적은 편인데, 문항 1-2에서 ‘④ 두 주장 모두 옳지 않다’고 답한 인원이 가장 많은 것은 교사들이 함수는 한 점에서 연속이거나 불연속이거나 둘 중에 하나라고 인식하고 있어 나타난 현상으로 해석할 수 있다. 문항 1-2에서 ‘④ 두 주장 모두 옳지 않다’를 선택한 현직교사의 대표적인 응답 이유를 살펴보면 [그림 1]-[그림 3]의 서술과 같아 그 해석이 타당함을 확인할 수 있다.

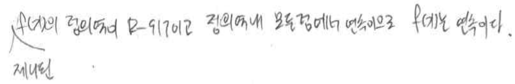


[그림 1] 문항 1-2에 대한 현직교사의 응답 이유
[Fig. 1] Reason for in-service teacher's response to questions 1-2

[그림 1]의 현직교사는 주어진 함수가 $x=1$에서 함숫값이 정의되지 않아 불연속이기 때문에 ‘④ 두 주장 모두 옳지 않다’로 응답한 것을 볼 수 있다. 마찬가지로, 문항 1-2에서 ‘④ 두 주장 모두 옳지 않다’를 선택한 예비교사의 대표적인 응답 이유를 살펴보면 다음 [그림 2], [그림 3]의 서술과 같다.



[그림 2] 문항 1-2에 대한 예비교사의 응답 이유(유형1)
[Fig. 2] Reason for pre-service teacher's response to questions 1-2 (Type 1)



[그림 3] 문항 1-2에 대한 예비교사의 응답 이유(유형 2)
[Fig. 3] Reason for pre-service teacher's response to questions 1-2 (Type 2)

[그림 2]의 예비교사는 주어진 함수가 $x=1$에서 함숫값이 정의되지 않아 불연속이기 때문에 ‘④ 두 주장 모두 옳지 않다’로 응답한 반면, [그림 3]의 예비교사는 주어진 함수가 정의역에서 연속함수이므로 ‘④ 두 주장 모두 옳지 않다’로 응답하였다. 이처럼 현직교사와 예비교사는 문항 1-1에서 했던 것처럼 연속 또는 불연속을 판단할 수 있는 것으로 인식하여 문항 1-2에서 $f(x)$가 연속함수인지 불연속함수인지 판단할 수 없다는 명제가 틀렸다고 응답한 것으로 해석할 수 있다.

한편, 현직교사 14명 중 4명(28.6%)이 ‘③ 두 주장 모두 옳다’를 선택하였는데, 해당 보기를 선택한 이유로는 ‘실수 전체의 집합에서 연속인지 정의역 범위에서 연속인지 조건이 더 필요하다’, ‘정확한 구간이 주어져 있지 않기 때문이다’, ‘함수의 정의역 범위를 어떻게 보느냐에 따라 다르다’를 들었다. ‘③ 두 주장 모두 옳다’를 선택하면 ‘① 교사 A의 주장이 옳다’도 옳다고 판단한 것이므로, 함숫값 $f(1)$에 따라 연속함수인지 불연속인지 판단할 수 없다고 생각하는 인원은 실제로 14명 중 6명(42.9%)이 된다. 이는 연속확장문제의 영향으로 인하여 함숫값이 정해지지 않아 연속과 불연속을 판정하지 못하는 것으로 볼 수 있다. 또한 ‘③ 두 주장 모두 옳다’를 선택한다는 것은 ‘② 교사 B의 주장이 옳다’도 역시 옳다고 판단한 것이므로 $x=1$이 정의역의 원소가 아님을 인식하고 있는 것으로 해석할 수 있다.

예비교사 또한 60명 중 16명(26.7%)이 ‘① 교사 A의 주장이 옳다’를 두 번째로 많이 선택하였다. 이 역시 연

속확장문제의 영향이 나타난 것으로 볼 수 있다. 이어 7명(11.7%)이 '② 교사 B의 주장이 옳다'를 선택하였고, 6명(10.0%)이 '③ 두 주장 모두 옳다'를 선택하였다. $x=1$이 정의역의 원소가 아님을 인식하고 있지만 연속을 판단함에 있어서는 어려움을 느끼는 것으로 볼 수 있다.

[표 11]은 '문항 2'에 대한 현직교사와 예비교사의 응답을 나타낸 것이다.

[표 11] 문항 2에 대한 현직교사와 예비교사의 응답
[Table 11] Response of in-service teachers and pre-service teachers to question 2

응 답 구 분	현직교사	예비교사
	인원(%)	인원(%)
① 연속이다.	1(7.1)	27(45.0)
② 불연속이다.	12(85.7)	27(45.0)
③ 판정불가	1(7.1)	2(3.3)
④ 무응답	0(0.0)	4(6.7)
계	14(100.0)	60(100.0)

[표 11]에서와 같이 대다수의 현직교사가 '② 불연속이다'라고 응답한(12명, 85.7%) 반면 예비교사는 '① 연속이다'라고 응답한 인원과 '② 불연속이다'라고 응답한 인원이 27명(45%)으로 같다. 이는 문항 2에서 제시한 고립점에서의 연속을 학교수학에서 사용하는 극한 개념으로는 설명하기 어렵기 때문에 대부분의 현직교사는 주어진 함수를 불연속으로 판정한 것으로 보인다. 반면 예비교사들은 $\epsilon-\delta$ 방식의 정의를 이용하여 주어진 함수를 연속이라 판정한 인원이 다수 있음을 보인다. 이를 종합하여 볼 때, 현직교사는 고립점에서의 함수의 연속에 대한 이해도가 매우 낮고, 극한 개념으로 함수의 연속을 이해하고, 대학에서 학습한 학문수학의 연속의 개념과 지식을 거의 상기하지 못함을 알 수 있다.

[표 11]의 예비교사의 응답을 다시 학년별로 분류하면 [표 12]와 같다. 2학년 집단과 3학년 집단에서는 '② 불연속이다'라고 응답한 비율이 가장 높게 나타났으나, 4학년 집단에서는 '① 연속이다'라고 응답한 비율이(15명, 71%) 가장 높게 나타났다. 문항 1-2의 응답 결과와 같이 극한 개념에 구애받지 않고 고립점에서의 연속을 판단할 수 있는 $\epsilon-\delta$ 방식의 정의를 4학년 집단이 가장 많이 사용하고 있는 것으로 해석할 수 있다.

[표 12] 문항 2에 대한 예비교사의 응답(학년별)
[Table 12] Response of pre-service teachers to question 2(By grade)

응 답 구 분		인원(%)
2학년	① 연속이다.	5(35.7)
	② 불연속이다.	7(50.0)
	③ 판정불가	1(7.1)
	④ 무응답	1(7.1)
	소 계	14(100.0)
3학년	① 연속이다.	7(28.0)
	② 불연속이다.	16(64.0)
	③ 무응답	2(8.0)
	소 계	25(100.0)
4학년	① 연속이다.	15(71.4)
	② 불연속이다.	4(19.0)
	③ 판정불가	1(4.8)
	④ 무응답	1(4.8)
	소 계	21(100.0)
계		60

[표 13]은 문항 3에 대한 현직교사와 예비교사의 응답을 나타낸 것이다. 문항 2와는 다르게 '판정불가'의 응답을 근거에 따라 2가지 유형으로 분류하였다. '판정불가A'는 정의역에서는 연속이고, 실수 전체의 집합에서는 불연속이므로 판정할 수 없다고 응답한 유형이며, '판정불가B'는 정의역에 대한 언급 없이 판정이 불가하다고 응답한 유형이다.

[표 13] 문항 3에 대한 현직교사와 예비교사의 응답
[Table 13] Response of in-service teachers and pre-service teachers to question 3

응 답 구 분	현직교사	예비교사
	인원(%)	인원(%)
① (정의역에서) 연속이다.	3(21.4)	38(63.3)
② 불연속이다.	4(28.6)	12(20.0)
③ 판정불가A	4(28.6)	4(6.7)
④ 판정불가B	2(14.3)	2(3.3)
⑤ 무응답	1(7.1)	4(6.7)
계	14(100.0)	60(100.0)

[표 13]에서와 같이 현직교사 14명 중 '① (정의역에서) 연속이다'라고 응답한 인원이 3명(21.4%), '② 불연속이다'라고 응답한 인원이 4명(28.6%), '③ 판정불가A'라고 응답한 인원이 4명(28.6%)으로 나타나, 현직교사들이 문항 3에 제시된 함수의 연속 판정에 상당히 어려움을 겪는 것을 확인할 수 있다. '② 불연속이다'를 선택한 현직교사는 '실수 전체에서 볼 때, 불연속이기 때문에 해당 함수는 불연속이다'라고 판단하거나, '구간이 끊어져 있

으므로 끝점으로 가는 극한을 생각할 수 없다' 등을 근거로 들었다.

예비교사의 경우 전체 60명 중 '① (정의역에서)연속이다'라고 응답한 인원이 38명(63.3%)으로 가장 높은 비율로 나타났으며, '② 불연속이다'라고 응답한 인원이 12명(20.0%)으로 그 뒤를 이었다.

예비교사는 문항 2의 고립점에서의 연속 판단 문제보다 조금 더 수월하게 연속을 판단하였으며, 문항 3에서는 현직교사보다 정확하게 연속을 판단하였다. 이러한 응답 차이는 예비교사에 비해 현직교사가 함수의 정의역을 고려하여 함수의 연속을 판단하는 데 익숙하지 않음을 보여준다.

V. 결론 및 제언

함수의 연속에 대한 현직교사와 예비교사의 인식을 비교・분석한 결론은 다음과 같다.

첫째, 현직교사와 예비교사는 대부분 '한 점에서의 연속'의 정의를 학교수학의 정의를 바탕으로 이해하고 있으며 이로 인해 연속함수의 판단에서 정의역을 고려하지 않는 문제점을 드러냈다.

둘째, 현직교사와 예비교사는 연속을 동적인 극한 개념으로 이해함으로써 고립점에서 연속을 판단하지 못하였다. 문항 2의 응답에서 보듯이 고립점에서 연속을 판단하는 데 현직교사와 예비교사 모두 어려움을 겪었지만, 현직교사보다 예비교사가 상대적으로 옳게 판단하였다. 이는 고립점에서의 함수의 연속은 학교수학의 정의로 판단하기 어렵고 $\epsilon-\delta$ 방법으로 판단하여야 하는데, 예비교사는 이 정의를 상대적으로 많이 상기할 수 있기 때문으로 해석된다.

함수의 연속에 대한 올바른 교수・학습 상황을 구현하기 위해서 다음과 같이 제언하고자 한다.

첫째, 한 점에서의 연속에 대한 정의는 정의역의 원소를 기본 전제로 하고 함수의 극한과 함숫값이 일치하는지를 판단하게 하는 서술 방식을 따를 것을 제안한다. 또 극한을 취할 수 없는 고립점에서도 함수의 연속에 대하여 교사와 학생에게 사고할 수 있는 기회를 제공해 주기를 권한다.

둘째, 현재 교과서의 서술 방식에 대하여 유용한 점이 있다는 김진환, 박교식(2017)의 주장이 일부 타당한 면이 있더라도 차후 연속함수와 관련된 내용을 학습하는 데에 있어 학생뿐만 아니라 교사에게도 오개념을 형성시킬 소지가 있다. 그러므로 단순히 수학적 활동을 유발하기 위해 직관적으로 지도하는 현재의 교과서 설계방식과 지도방식이 개선될 필요가 있다. 이에 함수의 연속과 불연속은 정의역에 의존함을 명시하는 서술 방식을 따를 것을 제안한다. 학교수학에서 함수와 정의역을 동시에 정의할 수 없더라도 '~에서 연속'이라는 용어를 사용하게 함으로써 함수가 연속인 영역을 상기시킬 필요가 있다. 이는 함수의 연속 또는 불연속이 고려하는 영역에 따라 달라질 수 있음을 학습시키는 효과가 있다. 이를 확장하여 한 점에서 정의되어 있지 않거나 함숫값이 주어지지 않을 때, 연속이 되도록 함숫값을 취하는 연속확장문제로 나아가기를 제언한다.

셋째, 제 Ⅳ장에서 살펴본 바와 같이, 현직교사는 교직 경력에 상관없이 학교수학의 정의로 연속을 판단하는 경향이 있었고, 예비교사는 고학년이 될수록 학문수학의 정의에 입각하여 함수의 연속을 판단하는 경향이 있었다. 이는 대학의 미적분학과 해석학을 학습함에 따라 함수의 연속에 대한 학문적 정의를 이해하더라도 중등학교 현장으로 가면 다시 학교수학의 이해 수준으로 회귀할 가능성이 높음을 의미한다. 따라서 함수의 연속에 대한 현재 학교수학의 교과서에 서술된 방식이 교사에게 부정확한 개념을 갖게 하고, 이는 학생에게 부정적인 영향을 끼칠 수 있음을 시사한다. 그러므로 현직교사가 현재 교수학습에서 사용되는 함수의 연속에 대한 학문수학의 정확한 수학적 내용과 교수학적 변환의 배경을 이해할 수 있도록 함수의 연속의 내용을 포함한 교육・연수를 제공하기를 제안한다.

참 고 문 헌

교육인적자원부 (2007). 수학과 교육과정. 교육인적자원부 고시 제2007-79호 [별책 8]. 서울: 저자.

Ministry of Education and Human Resources Development (2007). *Mathematics curriculum*. Ministry of Education and Human Resources Development Notification No. 2007-791, Volume 8. Seoul: Author.

교육과학기술부 (2008). 고등학교 교육과정 해설 5 수학.

Ministry of Education, Science and Technology (2008). *High school curriculum description 5 mathematics.*

교육과학기술부 (2011). 수학과 교육과정. 교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책 8].

Ministry of Education, Science and Technology(2011). *Mathematics curriculum.* Ministry of Education. Science and Technology Notification No. 2011-361, Volume 8.

교육부 (2015). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제2015-74호 [별책 8].

Ministry of Education (2015). *Mathematics curriculum.* Ministry of Education Notification No. 2015-74, Volume 8.

김남희, 나귀수, 박경미, 이경화, 정영옥, 홍진곤 (2006). 수학교육과정과 교재연구. 경문사.

Kim, N., Na, G., Park, K., Lee, K., Chong, Y., & Hong, J. (2006). A study on the mathematics education curriculum and textbook. Kyungmoon Publishers.

김원경, 조민식, 방금성, 윤종국, 조정길, 이근주, …, 정상일 (2014). 미적분Ⅰ, 서울: 비상교육.

Kim, W., Cho, M., Bang, G., Yoon, J., Joe, J., Lee, G., …, Jung, S. (2014). *High school calculus I.* Seoul: Visang Education.

김윤경 (2013). 함수의 극한 및 연속성에 관한 예비교사와 현직교사의 MKT 분석. 석사학위논문, 동국대학교.

Kim, Y. (2013). *An analysis on the pre-service teachers and in-service teachers's MKT in limit and continuity of a function.* Master's Thesis, Dongguk University.

김진환, 박교식 (2017). 학교수학과 학문수학에서의 연속성 개념 정의의 분석. 수학교육학연구 27(3), 375-389.

Kim, J. & Park, K. (2014). Analysis on definitions of continuity conveyed by school mathematics and academic mathematic. *Journal of Educational Research in Mathematics 27*(3), 375-389.

김준환 (2013). 현직교사의 함수의 불연속에 관한 내용적 지식과 교수학적 지식에 대한 연구. 석사학위논문, 전남대학교.

Kim, J. (2013). *A study of subject matter knowledge and pedagogical content knowledge about the discontinuity of function of teachers,* Master's Thesis, Chonnam National University.

김창동, 장경윤, 김응환, 문광호, 이병헌, 이채형, …, 장인선 (2014). 미적분Ⅰ. 서울: 교학사.

Kim, C., Chang, K., Kim, Y., Mun, K., Lee, B., Lee, C., …, Jang, I. (2014). *High school calculus I.* Seoul: Kyohak sa.

류희찬, 조완영, 이정례, 선우하식, 이진호, 손홍찬, …, 정성윤 (2014). 미적분Ⅰ. 서울: 천재교과서.

Ryu, H., Cho, W., Lee, J., Sunwoo, H., Lee, J., Son, H., …, Jung, S. (2014). *High school calculus I.* Seoul: Chunjae Textbook.

박달원, 홍순상, 신민영 (2012). 연속함수에 대한 고등학교 교과서의 정의와 고등학생들의 이해. 한국학교수학회논문집 15(3), 453-465.

Park, D., Hong, S. & Shin, M. (2012). High school textbook definition and students' understanding of continuity of function. *Journal of the Korean School Mathematics Society 15*(3), 453-465.

백승주, 최영기 (2017). 함수의 연속성에 대한 역사적 고찰 - 아리스토텔레스의 연속 개념과 해석학의 산술화 과정을 중심으로. 수학교육학연구 27(4), 727-745.

Baek, S. & Choi, Y. (2017). A historical study on the continuity of function -focusing on Aristotle's concept of continuity and the arithmetization of analysis. *Journal of Educational Research in Mathematics 27*(4), 727-745.

신항균, 이광연, 박세원, 신범영, 이계세, 김정화, …, 이동흔 (2014). 미적분Ⅰ, 서울: 지학사.

Shin, H., Lee, G., Park, S., Shin, B., Lee, G., Kim, J., …, Lee, D. (2014). *High school calculus I.* Seoul: Jihaksa Publishing Co. Ltd.

우정호, 박교식, 이종희, 박경미, 김남희, 임재훈, …, 천화정 (2014). 미적분Ⅰ, 서울: 동아출판.

Woo, J., Park, K., Lee, J., Park, K., Kim, N., Im, J. …, Chun, H. (2014). *High school calculus I.* Seoul: Donga Pub. Co.

유윤재 (2012). 중등수학 교재연구, 서울: 경문사.

Yoo, Y. (2012). *Research on Secondary Mathematics Textbooks.* Seoul: Kyungmoon Publishers.

이강섭, 황석근, 김부윤, 심성아, 왕규채, 송교식, …, 김원중 (2014). 미적분Ⅰ, 서울: 미래엔.

Lee, K., Hwang, S., Kim, B., Shim, S., Wang, K., Song, K., …, Kim, W. (2014). *High school calculus I,* Seoul: Mirae-N.

이경화, 신보미 (2005). 상위 집단 학생들의 함수의 연속 개념 이해. 수학교육학연구 15(1), 39-56.

Lee, K. and Shin, B. (2005). High achieving students' understanding of continuity of function. *Journal of*

Educational Research in Mathematics 15(1), 39-56.
이동원 (2016). 질문하며 배우는 해석학. 서울: 경문사.
Lee, D. W. (2016). *Analysis.* Seoul: Kyungmoon Publishers.
이준열, 최부림, 김동재, 한대희, 전용주, 장희숙, …, 박성훈 (2014). 미적분 I. 서울: 천재교육.
Lee, J., Choi, B., Kim, D., Han, D., Jeon, Y., Chang, H., …, Park, S. (2014). *High school calculus I.* Seoul: Chunjae Education.
이진영 (2011). 교수학적 변환의 관점에서 한 점에서 함수의 연속·불연속, 연속함수 정의의 검토, 석사학위논문, 이화여자대학교.
Lee, J. (2011). A r*eview on the definition of 'the continuity and discontinuity of function at a single point' and 'continuous function' from the veiw of didactic transposition.* Master's Thesis, Ewha Womans University.
정동명, 조승제 (2004). 실해석학개론, 서울: 경문사.
Jeong, D. & Cho, S. (2004). *Introduction to real analysis.* Seoul: Kyungmoon Publishers.
정상권, 이재학, 박혜숙, 홍진곤, 박부성, 최홍원, …, 김호경 (2014). 미적분 I, 서울: 금성출판사.
Jeong, S., Lee, J., Park, H., Hong, J. Park, P., Choi, H., …, Kim, H. (2014). *High school calculus I.* Seoul: Kumsung.
정연준, 김재홍 (2013). 함수의 연속성 개념의 역사적 발달 과정 분석 -직관적 지도의 보완을 중심으로. 수학교육학연구 23(4), 567-584.
Jeong, Y. & Kim, J. (2013). An historical investigation of the historical developments of the concept of continuous functions. *Journal of Educational Research in Mathematics 23*(4), 567-584.
황선욱, 강병개, 김영록, 윤갑진, 김수영, 송미현, …, 박진호 (2014). 미적분 I, 서울: 좋은책신사고.
Hwang, S., Kang, B., Kim, Y., Yun, G., Kim, S., Song, M., …, Park, J. (2014). *High school calculus I.* Seoul: Sinsago. Corp.
Bartle, R. G. & Sherbert, D. R. (1999). *Introduction to real analysis.* New York: Wiley.
Boyer, C. B. (1949). *The history of the calculus and its conceptual development,* New York: Dover Publications.
Burton, D. M. (2011). *The history of mathematics: An Introduction.* New York: McGraw-Hill.
Cauchy, A. (1899). *Résumé des leçons données à l'École royale polytechnique sur le calcul infinitésimal,* Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy, publiés sous la direction scientifique de l'Académie des Sciences (IIe série, tome IV, pp. 5-261). Paris: Gauthier-Villars. (The original edition was published in 1823).
Cauchy, A. (2009). *Cauchy's cours d'analyse,* (Translated by Bradley, Robert E. & Sandifer, C. Edward). New York: Springer. (The original edition was published in 1821).
Chevallard, Y. (1988). *On didactic transposition theory: some introductory notes.* Paper presented at the International Symposium on Research and Development in Mathematics Education. Bratislava, Czechoslovakia.
Grabiner, J. V. (1983). Who gave you the epsilon? Cauchy and the origins of rigorous calculus. *American Mathematical Monthly* 90(3), 185-19.
Grabiner, J. V. (2005). *The origins of Cauchy's rigorous calculus.* New York: Dover Publications.
Stoll, M. (2001). *Introduction to real analysis.* Boston: Addison-Wesley Longman.
Youschkevitch, A. P. (1976). The concept of function up to the middle of the 19th century. *Archive for History of Exact Sciences 16*(1), 37-85.
Wade, W. R. (2003). *An introduction to analysis.* New York: Pearson Education.

A study of the in-service teachers' and pre-service teachers' recognition the domain in the problem of the continuity of a function

Lee, Se Hyung
Department of Mathematics Education, Graduate School of Kyungpook National University
E-mail : beama@knu.ac.kr

Chang, Hyun Suk
Department of Mathematics Education, Graduate School of Kyungpook National University
E-mail : genichang@hanmail.net

Lee, Dong Won†
Department of Mathematics Education, Kyungpook National University
E-mail : dongwon@knu.ac.kr

In this paper we study in-service teachers' and pre-service teachers' recognition the domain in the problem concerning the continuity of a function. By a questionnaire survey we find out that most of in-service teachers and pre-service teachers are understanding the continuity of a function as explained in high school mathematics textbook, in which the continuity was defined by and focused on comparing the limit with the value of the function. We also notice that this kind of definition for the continuity of a function makes them trouble to figure out whether a function is continuous at an isolated point, and to determine that a given function is continuous on a region by not considering its domain explicitly. Based on these results we made several suggestions to improve for in-service teachers and pre-service teachers to understand the continuity of a function more exactly, including an introduction of a more formal words usage such as 'continuous on a region' in high school classroom.

* ZDM Classification : U24
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U20
* Key words : continuity of a function, continuous function, school mathematics, academic mathematics.
† Corresponding author