Journal for History of Mathematics
Vol. 31 No. 6 (Dec. 2018), 315–337
http://dx.doi.org/10.14477/jhm.2018.31.6.315

Pythagorean Theorem I: In non-Hilbert Geometry

피타고라스의 정리 I: 비-힐베르트 기하에서

Jo Kyeonghee 조경희 Yang Seong-Deog* 양성덕

Pythagorean thoerem exists in several equivalent forms in the Euclidean plane, that is, the Hilbert plane which in addition satisfies the parallel axiom. In this article, we investigate the truthness and mutual relationships of those propositions in various non-Hilbert planes which satisfy the parallel axiom and all the Hilbert axioms except the SAS axiom.

Keywords: Pythagorean theorem, equicomplementable, equidecomposable, area; 피타고라스의 정리, 동일용량, 분해합동, 넓이.

MSC: 52A01, 52A55

1 서론

고대 바빌로니아 시대에도 알려진 것으로 추정되는([1] 참조) 가장 오래된 수학 정리 중의 하나인 피타고라스의 정리는 다음과 같이 직각삼각형의 세 변의 길이에 대한 내용이다.

정리A (길이에 대한 피타고라스의 정리): 직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이가 각각 a, b이고 빗변의 길이가 c일때 $a^2 + b^2 = c^2$이 성립한다.

'원론'에 나타난 유클리드의 피타고라스의 정리 (명제 I.47)는 삼각형의 세 변의 길이 사이의 관계 이상의 의미를 포함하고 있다. 그는 피타고라스의 정리를 다음과 같이 표현하였다 [3].

> The square on the hypotenuse is equal to the sum of the squares on the sides of a right triangle.

*Corresponding Author.

이 연구를 수행함에 있어 조경희는 2016년도 목포해양대학교 연구비, 양성덕은 한국연구재단 연구비 NRF 2017 R1E1A1A 03070929의 지원을 받았습니다.

여기에 등장하는 모든 그림들을 그려준 이채영에게 감사의 뜻을 표합니다.

Jo Kyeonghee: Division of Liberal Arts and Sciences, Mokpo National Maritime Univ. E-mail: khjo@mmu.ac.kr

Yang Seong-Deog: Dept. of Math., Korea Univ. E-mail: sdyang@korea.ac.kr

Received on Aug. 23, 2018, revised on Nov. 3, 2018, accepted on Nov. 10, 2018.

이 명제에 대한 유클리드의 증명을 보면 다음과 같이 넓이로 해석했음을 알 수 있다.

정리B (넓이에 대한 피타고라스의 정리): 직각삼각형에서 직각을 낀 두 변을 각각 한 변으로 하는 두 정사각형의 넓이의 합은 빗변을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이와 같다.

다음은 힐베르트가 유클리드 기하의 공리적 체계를 완성하기 위하여 도입한 개념인 '용량'과 '분해합동'을 사용하여 피타고라스의 정리를 표현한 것이다. 이 두 개념은 본론에서 자세히 보게 될 것이다.

정리C (용량에 대한 피타고라스의 정리): 직각삼각형에서 직각을 낀 두 변을 각각 한 변으로 하는 두 정사각형의 합집합은 빗변을 한 변으로 하는 정사각형과 동일용량이다.

정리D (분해합동에 대한 피타고라스의 정리): 직각삼각형에서 직각을 낀 두 변을 각각 한 변으로 하는 두 정사각형의 합집합은 빗변을 한 변으로 하는 정사각형과 분해합동이다.

평행공리를 만족시키는 힐베르트 기하, 즉 유클리드 기하에서는 넓이가 잘 정의되며 위 네 정리가 동치이다.[1) 2)] 그렇다면 비-힐베르트 기하에서는 어떠할까? 평행공리를 만족시키는 평면기하에서는 위 피타고라스의 정리들이 성립할까? 넓이가 잘 정의되는 평면기하에서는 항상 위 네 정리가 동치일까?[3)] 택시 기하와 물톤 기하의 예로부터 그렇지 않음을 알 수 있다. 물톤 기하는 넓이가 잘 정의되는 기하이지만 위의 네 가지 피타고라스의 정리가 모두 성립하지 않으며, 택시 기하에서는 길이에 대한 피타고라스의 정리를 제외한 나머지 세 개의 피타고라스의 정리가 모두 성립한다.[4)]

넓이가 잘 정의되지 않는 기하에서는 어떠할까? 합동관계가 정의된 임의의 기하에서 동일용량이나 분해합동의 개념은 여전히 유효하므로 피타고라스의 정리의 네 가지 동치 명제에 대하여 비교하여 볼 수 있다. 실제로 길이와 넓이에 대한 피타고라스의 정리는 성립하지 않지만 용량과 분해합동에 관한 피타고라스의 정리가 성립하는 기하가 존재한다. 이 논문에서는 그러한 비-힐베르트 기하들의 구체적인 예를 통하여 피타고라스의 정리의 의미를 분석해 본다. 여기에서 소개하는 비-힐베르트 기하들은 힐베르트의 평면 공리들 중 결합공리군, 순서공리군, 그리고 변-각-변 공리를 제외한 모든 합동공리를 만족시키고, 또한 평행공리까지 만족시킨다는 점에서 유클리드 기하와 매우 유사한 기하이다. (힐베르트의 공리군에 대해서는 [2, 4] 참조.)

1) 유클리드 기하의 정의에 원-원 공리를 포함하기도 한다. 이 논문에서 힐베르트 공리에 평행공리만 추가하기로 한다.

2) 아르키메데스 공리가 성립하는 힐베르트 기하에서는 평행공리와 피타고라스의 정리가 동치이다. 그러므로 아르키메데스 공리가 성립하는 기하만 생각할 경우, 비-유클리드 기하, 즉 평행공리를 만족시키지 않는 힐베르트 기하에서는 피타고라스의 정리가 성립하지 않음을 알 수 있다. 참고로 아르키메데스 공리가 성립하지 않는 힐베르트 기하에서는 평행공리와 피타고라스의 정리가 동치 명제가 아니다. [2]의 Example 18.4.3은 피타고라스의 정리는 만족시키지만 평행공리가 성립하지 않는 힐베르트 기하의 예를 보여준다.

3) 넓이 함수가 존재하지 않는 비-힐베르트 기하가 존재한다.

4) 뒤에서 보겠지만 정사각형의 넓이가 변의 길이의 제곱으로 정의되지 않기 때문이다.

2 배경 이론

2.1 넓이 함수, 동일용량, 분해합동

피타고라스의 정리의 의미를 분석하기 위하여 다음 개념들을 먼저 살펴보자 [2, 4].

다각형의 합동: 두 다각형의 꼭지점들의 집합에 *1-1* 대응관계가 존재하고 대응되는 모든 선분과 각이 합동일 때 두 다각형이 합동이라 한다. 즉, 두 n각형 $A_1A_2\cdots A_n$과 $B_1B_2\cdots B_n$에 대하여

$$A_iA_j \equiv B_iB_j, \quad \angle A_iA_jA_k \equiv \angle B_iB_jB_k, \quad 1 \le i,j,k \le n$$

일 때 두 n각형은 합동이다.(여기에서 '$\equiv$'은 합동관계를 의미한다. 우리는 이 논문에서 모든 합동관계를 이렇게 표기하기로 한다.)[5)]

넓이 함수: 평면기하 Π의 임의의 다각형 T에 대하여 순서가환군(*ordered abelian group*) G의 원소 $\alpha(T)$를 대응하는 함수 α가 다음 *F1, F2, F3*을 만족시킬 때 α를 Π의 ***넓이 함수(measure of area function)***라 한다:

F1. 임의의 다각형 T에 대하여 $\alpha(T) > 0$이다.

F2. 합동인 두 다각형 T와 T'에 대하여 $\alpha(T) = \alpha(T')$이다.

F3. 교집합이 없는 두 다각형 T_1과 T_2에 대하여 다음이 성립한다.

$$\alpha(T_1 \cup T_2) = \alpha(T_1) + \alpha(T_2)$$

분해합동: 두 다각형이 각각 유한 개의 삼각형으로 분해되며, 그 삼각형들이 일대일로 대응되고, 대응되는 삼각형들이 서로 합동일 때, 우리는 이 두 다각형이 ***분해합동(equidecomposable)***이라고 말한다.

동일용량: 두 다각형 각각에 분해합동인 두 다각형을 붙임으로써 분해합동인 다각형을 얻을 수 있을 때, 우리는 이 두 다각형이 ***동일용량(equicomplementable)***을 가진다고 말한다.

위 정의로부터 다음이 성립함을 바로 알 수 있다:[6)]

- 합동이면 분해합동이다.
- 분해합동이면 동일용량이다.

---

5) 이 정의에 의하면 임의의 평면기하에서 대응하는 세 변과 세 내각이 합동인 두 삼각형은 합동이다. 그러나 비-힐베르트 기하에서는 대응하는 네 변과 네 내각의 합동만으로 두 사각형이 합동이라고 할 수 없다. 택시 기하에서 변의 길이가 같지만 합동이 아닌 두 정사각형을 쉽게 찾을 수 있다. ([5, Figure 1] 참조.)

6) 분해합동이지만 합동이 아닌 다각형을 유클리드 기하에서 쉽게 찾을 수 있다. 동일용량이지만 분해합동이 아닌 다각형은 유클리드 기하에서는 존재하지 않는다. 그렇지만 힐베르트 기하 중에서 그러한 예가 존재한다.([2, 4, 5] 참조.)

그러므로 우리는 임의의 평면기하에서 다음이 성립함을 알 수 있다.

따름정리 2.1: 정리D가 성립하는 기하에서는 정리C가 성립한다.

따름정리 2.2: 넓이가 잘 정의되는 기하에서는 정리C가 성립하면 정리B가 성립한다.

2.2 변-각-변 공리 (SAS Axiom)

우리가 뒤에서 고려할 비-힐베르트 기하들은 다음 변-각-변 공리를 제외한 모든 힐베르트 평면 공리를 만족시킨다.

변-각-변-공리: 두 삼각형 ABC와 $A'B'C'$ 사이에 합동관계

$$AB \equiv A'B',\ AC \equiv A'C',\ \angle BAC \equiv \angle B'A'C'$$

이 성립하면,

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$$

이다.

변-각-변 공리를 제외한 힐베르트의 결합공리군, 순서공리군, 합동공리군을 모두 만족시키는 평면기하에서 변-각-변 공리는 합동변환이 다음을 만족시킬 만큼 충분히 많이 있다는 것과 동치임이 알려져 있다 ([2, Propositions 17.1과 17.4] 참조).

P1. 임의의 두 점 p와 p' 에 대하여 합동변환 T가 존재하여 $T(p) = p'$ 이다.

P2. 임의의 세 점 o, p, p' 에 대하여 합동변환 T가 존재하여 $T(o) = o$이고 T에 의하여 반직선 op는 반직선 op' 으로 보내진다.

P3. 임의의 직선 l에 대하여 합동변환 T가 존재하여 T는 l의 임의의 점을 보존하고 l에 의해 나눠지는 양쪽 반평면을 서로 교환한다.

즉, 변-각-변 공리를 만족시킨다는 것은, 이 기하가 균질하다 (homogeneous), 또는 어떤 점에서 보아도 동일하다는 것을 의미한다. 특히, P3은 임의의 직선에 대한 대칭변환이 존재하고 그 변환이 합동변환임을 말해주는 것이다.

2.3 유클리드 기하에서 피타고라스의 정리의 증명

유클리드 기하에서의 피타고라스의 정리에 대한 증명은 수백 여 개에 달한다 [11, 12]. 비-힐베르트 기하에서의 피타고라스의 정리의 의미 및 성립 여부를 살펴보기 위하여 다음 Thabit b. Qurra(826-901 A.D.)의 증명을 살펴보자.

그림 1의 직각삼각형 ABC에서 빗변 AC 위에 정사각형을 세운 것이 사각형 $ACGF$, 직각을 이루는 한 변 AB 위에 정사각형을 세운 것이 사각형 $ABED$이고, 사각형 $GHEK$는

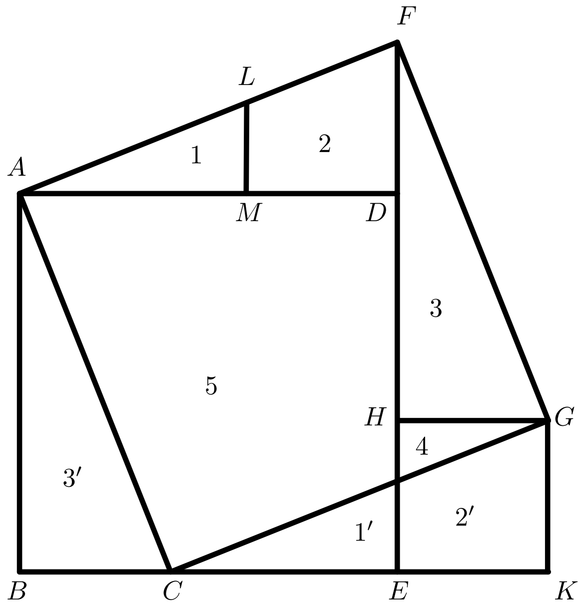


Figure 1. Proof of Pythagorean Theorem; 피타고라스 정리의 증명

밑변 BC 위에 세운 정사각형과 합동이다. 세 직각삼각형 $\triangle ADF$, $\triangle FHG$, $\triangle CKG$은 모두 직각삼각형 ABC와 합동이다.

그런데 $\square ACGF$는 삼각형 $1, 3, 4$와 사각형 $2, 5$로 분해되고, $\square ABED$는 삼각형 $1', 3'$과 사각형 5, $\square GHEK$는 사각형 $2'$과 삼각형 4로 분해된다. 그런데 삼각형 1과 $1'$, 3과 $3'$, 그리고 사각형 2와 $2'$이 각각 합동이므로, AB 위에 세운 정사각형과 BC 위에 세운 정사각형의 합은 빗변 AC 위에 세운 정사각형과 분해합동이다.

위 증명에서 우리는 여러 합동 관계를 이용하였다. 이 증명은 평행공리를 만족시키는 힐베르트 기하에서는 항상 유효하다. 비-힐베르트 기하에서는 어떠할까? 힐베르트의 평면 공리를 만족하지 않는 기하에서는 위와 같은 그림을 작도할 수 있을지부터 확실하지 않으며, 또한 작도할 수 있다고 하더라도 삼각형 1과 $1'$, 3과 $3'$, 그리고 사각형 2와 $2'$이 합동이라는 보장이 없다. 그렇지만 고려하는 기하의 점과 직선, 그리고 각이 어떤 수체로부터 정의된 좌표기하와 동일하고, 그 기하의 임의의 선분을 한 변으로 하는 정사각형을 그릴 수 있으며, 평행이동이 그 기하의 합동변환이 된다면 위 증명은 여전히 유효함을 알 수 있다. 우리는 뒤에서 이러한 성질을 갖는 비-힐베르트 기하를 보게 될 것이다.

3 택시 기하 (Taxicab Geometry)

택시 기하는 비-힐베르트 기하 중에서 가장 잘 알려진 기하로, 학부 수학 교재에서부터 일반 대중을 상대로 한 책까지 많은 자료를 찾을 수 있다. 이 절에서는 택시 기하의 합동변환과 넓이 함수의 분석을 통하여 피타고라스의 정리를 살펴본다.

3.1 택시 기하의 정의

택시 기하의 점과 선분, 그리고 각은 실수 위에서 정의된 좌표기하, 즉 유클리드 기하와 동일하나 두 점 $A = (a_1, a_2)$와 $B = (b_1, b_2)$ 사이의 거리가

$$\mathrm{d}_T(A, B) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$$

로 정의되어 있다.

3.2 택시 기하의 성질

택시 기하의 임의의 다각형에 대한 넓이가 다음과 같이 정의됨을 [8, 15, 16] 등에서 찾아볼 수 있다.

택시 기하의 넓이 함수: 택시 기하에서 임의의 다각형의 넓이는 그 다각형의 통상적인 유클리드 넓이로 한다.

택시 기하에서 정의된 길이에 의해서는 넓이가 잘 정의되지 않음을 확인할 수 있다. 예를 들어, 그림 2의 삼각형에서 선분 OB를 밑변으로 했을 때와 선분 OA를 밑변으로 했을 때 밑변의 길이와 높이의 길이의 곱이 다르다. 즉,

$$2 = \frac{1}{2}\overline{OA}\ \overline{AB} \neq \frac{1}{2}\overline{OB}\ \overline{AB'} = 1$$

이다. 오른쪽 값이 삼각형 OAB의 유클리드 넓이인데 택시 기하에서도 이 값을 넓이로 정의한다. 이러한 넓이의 정의는 앞절에서 정의한 넓이 함수의 성질 F1과 F3을 만족시킴은 쉽게 알 수 있다. 성질 F2를 증명하기 위해서는 택시 기하에서 합동인 두 다각형의 넓이가 같음을 보여야 한다. 그런데 택시 기하에서 합동인 임의의 두 삼각형은 유클리드 기하에서도 합동임을 다음 정리로부터 알 수 있다. 그러므로 택시 기하에서 합동인 두 삼각형의 넓이가 동일하며, 또한 임의의 다각형은 삼각형으로 분해가능하므로 성질 F3을 사용하면 성질 F2가 성립함을 알 수 있다.

정리 3.1: 택시 기하에서 합동인 임의의 두 삼각형은 유클리드 기하에서 합동이다.

증명. 택시 기하에서 합동인 임의의 두 삼각형 Δ_1, Δ_2는 세 내각이 모두 같으므로 유클리드 기하에서 서로 닮은 삼각형이다. 임의의 평행이동이 택시 기하에서 합동이므로 대응하는 꼭

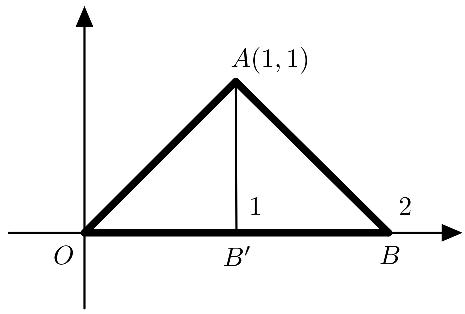


Figure 2. Right triangle in Taxicab geometry; 택시 기하의 직각삼각형

지점 한 쌍이 원점에 있다고 가정할 수 있다. 그러므로 두 삼각형은 적당한 실수 r과 직교변환 A에 의하여 $rA(\Delta_1) = \Delta_2$이다. 그런데 2차원 직교변환 중 삼각형의 세 변의 택시거리가 보존되는 것은 직선 $y = x,\ y = -x,\ x = 0,\ y = 0$에 대한 대칭변환이나 $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$-회전변환 밖에 없음을 알 수 있다. 이들은 모두 유클리드 변환이므로 두 삼각형 Δ_1, Δ_2는 유클리드 합동이다. □

3.3 택시 기하와 피타고라스의 정리

이제 피타고라스의 정리를 택시 기하에서 살펴보자.

정리 3.2: 택시 기하에서는 정리A가 성립하지 않는다.

그림 2의 삼각형은 택시 기하에서 세 변의 길이가 모두 2인 직각삼각형으로 피타고라스의 정리가 성립하지 않는 예이다.

실제로 택시 기하에서는 다음이 성립한다.

정리 3.3 (Kaya-Colakoglu [9])**:** 택시 기하에서 각 $\angle A$가 직각인 삼각형 ΔABC의 빗변의 길이가 a이고 나머지 두 변의 길이가 각각 b, c일 때 다음이 성립한다.

(i) 꼭지점 A를 지나 좌표축에 평행인 두 개의 직선이 모두 삼각형 ΔABC과 만날 때 $a = b + c$이다.

(ii) 꼭지점 A를 지나 좌표축에 평행인 두 개의 직선 중 하나만 삼각형 ΔABC과 만날 때 $a = b + c - 2\gamma$이다.

여기에서 γ는 꼭지점 B 또는 C에서 A를 지나 좌표축에 평행이고 삼각형 ΔABC를 만나는 직선에 내린 수선의 점을 H라고 할 때 선분 $\overline{AH}$의 길이이다.

택시 기하에서의 직각삼각형은 유클리드 기하에서 직각삼각형이고, 유클리드 기하에서

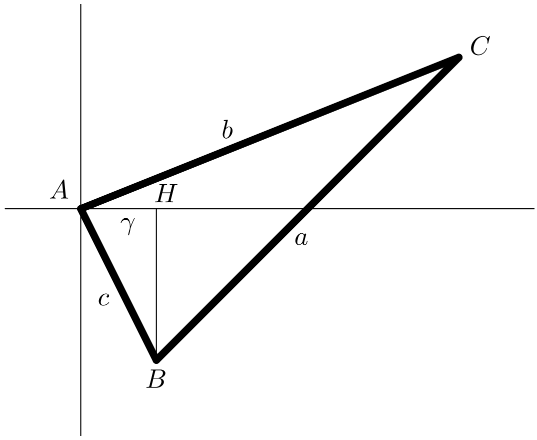


Figure 3. Taxicab version of Theorem A; 정리A의 택시 기하 버전

넓이에 대한 피타고라스의 정리(정리B)가 성립하므로 택시 기하에서도 정리B가 성립함을 바로 알 수 있다. 택시 기하에서는 실제로 길이에 대한 피타고라스의 정리(정리A)를 제외한 나머지 세 개의 피타고라스의 정리가 모두 성립한다:

정리 3.4: 택시 기하에서는 정리*B*, 정리*C*, 정리*D*가 성립한다.

증명. 택시 기하의 점들과 직선, 각은 유클리드 평면과 같으며 선분의 길이만 다르게 정의되어 있으며, 임의의 선분을 한 변으로 하는 정사각형을 항상 작도할 수 있다. 그런데 평행이동이 이 기하의 합동변환이므로,[7] 앞에서 본 피타고라스의 정리의 증명이 그대로 택시 기하에서도 성립한다. 그러므로 정리D가 성립하며, 따름정리 2.1과 2.2에 의해 정리C와 정리B가 성립한다. □

4 물톤 기하 (Moulton Geometry)

이 절에서 분석할 평면기하는 힐베르트의 '기하학의 기초' 10판 [4]에 있는 기하로, 물톤(F. R. Moulton)이 [14]에서 처음 정의한 이후로 거의 다뤄지지 않고 있다. [13]에서 비교적 자세한 정의를 찾을 수 있으며, [6]에 이어 이 논문에서 물톤 기하의 성질에 대한 새로운 정리를 증명하고 이를 이용하여 피타고라스의 정리를 살펴본다.

4.1 물톤 기하의 정의

물톤 기하에서의 점은 유클리드 평면에서의 점과 같으나 직선은 다르게 정의된다.

7) 택시 기하의 등장사상(isometry)은 임의의 평행이동과 대칭변환 4개(직선 $y = x$, $y = -x$, $x = 0$, $y = 0$에 대한 대칭변환) , 회전변환 4개($\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$)의 곱으로 이루어져 있다.([10] 참조)

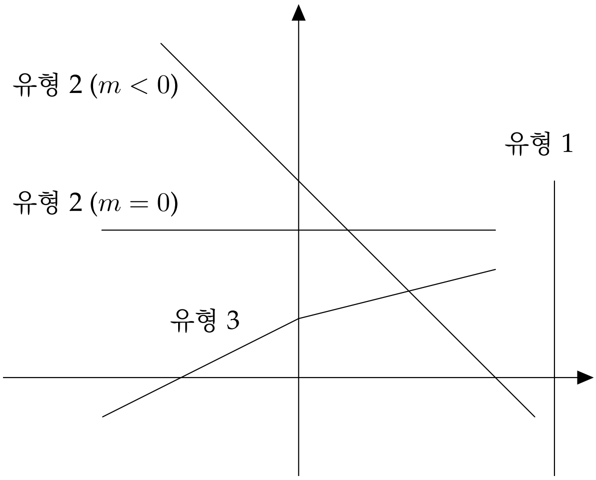


Figure 4. Lines in Moulton geometry; 물톤 기하의 직선

정의 4.1: 임의의 두 실수 x, y로 이루어진 순서쌍 (x, y)가 물톤 평면의 점이다. 물톤 평면에는 세 가지 유형의 직선이 있다. 이를 방정식으로 나타내면 다음과 같다. *(그림 4 참조)*

- 유형 *1* : $x = a$.
- 유형 *2* : $y = mx + b \quad$ (단 $m \le 0$)
- 유형 *3* : $y = \begin{cases} mx + b, & (\text{단 } x \le 0) \\ \frac{1}{2}mx + b, & (\text{단 } x > 0) \end{cases} \quad$ (단 $m > 0$)

물톤 선분의 길이는 유클리드 평면에서의 곡선의 길이로 정의한다. 즉, 물톤 선분은 유클리드 선분이거나 꺽인 선분이므로, 유클리드 선분의 경우에는 유클리드 길이가 물톤 길이이며, 꺽인 선분의 경우에는 두 선분의 유클리드 길이의 합이 물톤 길이이다.

물톤 기하에서 각은 다음과 같이 정의된다.

정의 4.2: 동일 시점을 갖는 임의의 두 반직선은 하나의 각을 결정하며, 이때 각도는 다음과 같다.

- 꼭지점이 y축에 있지 않을 때 : 물톤 각도는 유클리드 각도와 같다.
- 꼭지점이 y축에 있을 때 : 먼저 서로 다른 두 점 $P = (a, c)$, $V = (0, b)$에 대하여 점 P_V를 다음과 같이 정의한다:

$$P_V := \begin{cases} P = (a, c) & (\text{단 } a \le 0 \text{ 또는 } c \le b) \\ P + (0, c - b) = (a, 2c - b) & (\text{단 } a > 0 \text{ 그리고 } c > b) \end{cases}$$

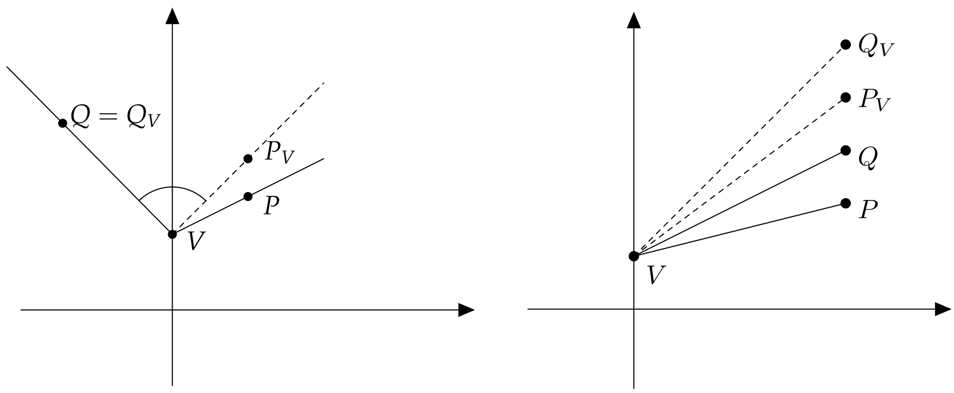


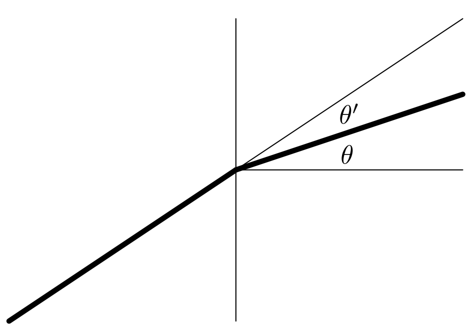
Figure 5. Magnitude of $\angle PVQ$ in Moulton geometry; 물톤 기하에서 $\angle PVQ$의 크기

이제 물톤 각 PVQ의 크기 $m\angle PVQ$는 유클리드 각 P_VVQ_V의 유클리드 크기 $m\measuredangle P_VVQ_V$로 정의한다(그림 5 참조). 즉

$$m\angle PVQ := m\measuredangle P_VVQ_V$$

4.2 물톤 기하의 성질

물톤 기하의 삼각형의 내각의 합은 y축과 양의 기울기로 만나는 선분들이 x축에 평행한 직선과 이루는 각에 의해 표현된다. x축에 평행한 직선과 이루는 각이 θ일 때, $\theta' = \tan^{-1}(2\tan\theta) - \theta$



$$\theta' = \tan^{-1}(2\tan\theta) - \theta$$

Figure 6. Definition of θ'; θ'의 정의

라고 두면(그림 6 참조), 삼각형의 내각의 합은 다음과 같다.

도움정리 4.1: 물톤 평면에 있는 삼각형의 변들이 y 축과 끝점 또는 내부점에서 양의 기울기로 만날 때 그 교점에서 x 축에 평행인 직선과 이루는 각을 θ_1, θ_2 라 하면(한 점에서 만나는 경우 $\theta_2 = 0$ 으로 둔다), 이 삼각형의 내각의 합은

$$\pi + \epsilon_1\theta_1' + \epsilon_2\theta_2'$$

이다. 여기에서 ϵ_i 는 1 또는 -1 로서 다음과 같이 정의된다: 삼각형의 해당 변과 x 축에 평행인 직선이 이루는 각 θ_i 가 삼각형의 내부에 있을 때는 1, 삼각형의 외부에 있을 때는 -1 이다.

증명. 그림 7 참조. □

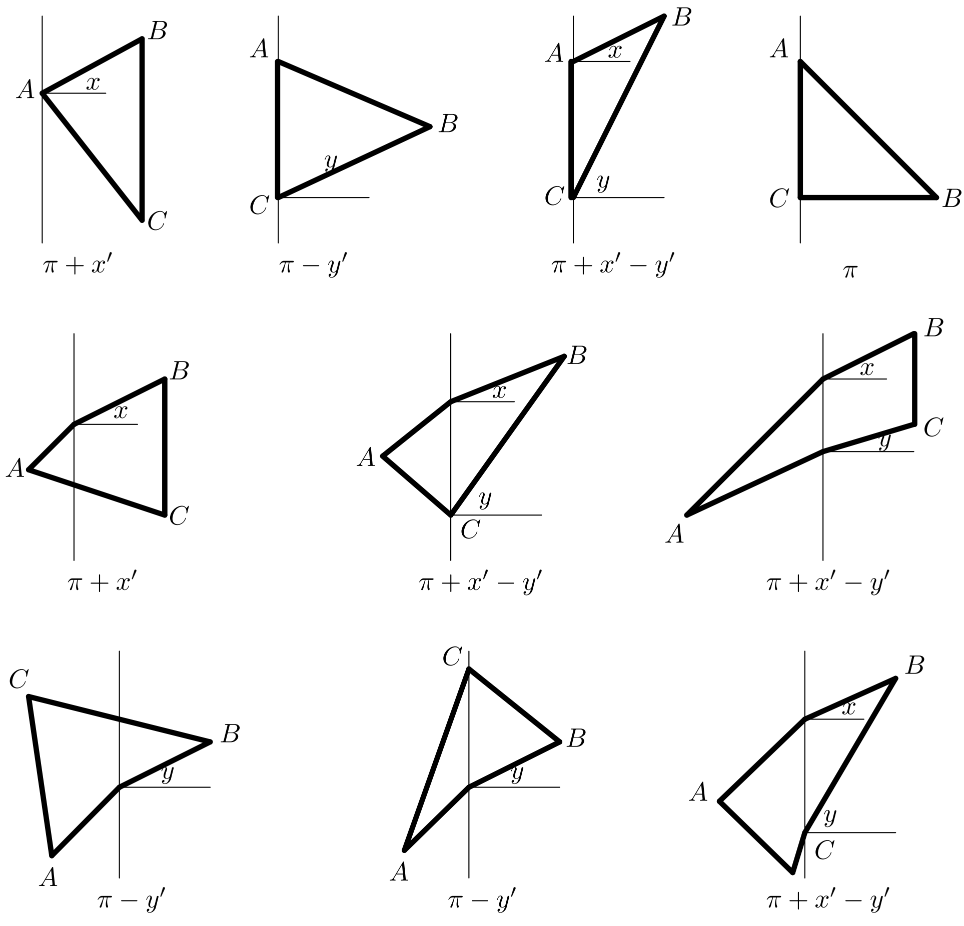


Figure 7. Angle Sum of a triangle in Moulton geometry; 물톤 삼각형의 내각의 합

위 도움정리로부터 우리는 다각형의 내각의 합에 대한 정리를 바로 얻는다.

정리 4.2: 물톤 평면에 있는 n 각형의 변들이 y 축과 끝점 또는 내부점에서 양의 기울기로 만날

때 그 교점에서 x 축에 평행인 직선과 이루는 각을 $\theta_1, \cdots, \theta_k$ 라 하면, 이 n각형의 내각의 합은

$$(n-2)\pi + \epsilon_1\theta_1' + \cdots + \epsilon_k\theta_k'$$

이다. 여기에서 ϵ_i 는 1 또는 -1 로서 다음과 같이 정의된다: 다각형의 해당 변과 x 축에 평행인 직선이 이루는 각 θ_i 가 다각형의 내부에 있을 때는 1, 다각형의 외부에 있을 때는 -1 이다.

정리 4.3: 물톤 기하에서 합동인 임의의 두 삼각형은 유클리드 기하에서 합동이다.

증명. 삼각형 ΔABC 와 삼각형 $\Delta A'B'C'$ 이 물톤 기하에서 합동이라고 하자. 두 삼각형이 모두 y 축과 만나지 않으면 유클리드 합동이어야 함이 명백하다. 나아가 두 삼각형의 세 변이 모두 유클리드 선분과 일치하는 경우에도 그러하다. 그러므로 삼각형 ΔABC 의 세 변 중 하나 이상이 y 축을 양의 기울기로 만나는 경우에 대해서만 증명하면 된다. 선분 $\overline{AB}$ 가 y 축과 양의 기울기로 만난다고 가정하자. 즉, 삼각형 ΔABC 가 그림 7의 두 번째와 세번째 줄에 있는 6 개의 삼각형 중의 하나와 같은 유형이라고 가정하면, 합동인 두 삼각형의 내각의 합이 같아야 하므로 삼각형 ΔABC 와 삼각형 $\Delta A'B'C'$ 의 가능한 쌍이 결정된다. 이들을 각각 분석하여 보면 삼각형 ΔABC 와 삼각형 $\Delta A'B'C'$ 가 유클리드 합동이어야 함을 보일 수 있다. 예를 들어, 내각의 합이 $\pi + x'$ 인 두 삼각형이 합동이 되기 위해서는 같은 유형일 수 밖에 없음을 다음과 같이 보일 수 있다. 그림 8에서 삼각형 ΔABC 와 삼각형 $\Delta A'B'C'$ 이 합동이라면,

$$\angle B = \angle B',\ \angle C = \angle C'$$

이므로 평행이동에 의해서 삼각형 $\Delta A'B'C'$ 를 삼각형 $\Delta A''B''C''$ 로 옮길 수 있다. 그런데 $\angle A \neq \angle A''$ 이므로 모순이다. □

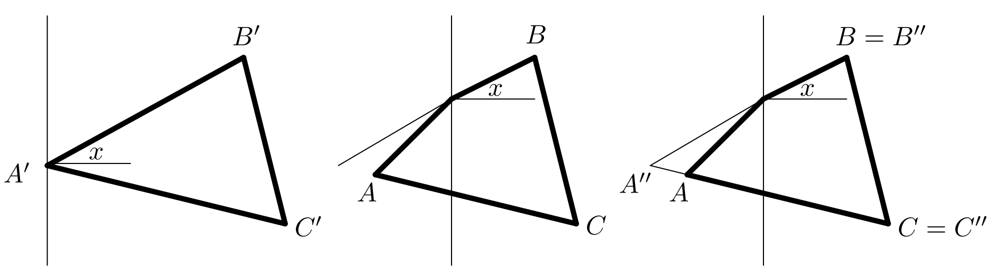


Figure 8. Moulton triangle with angle sum $\pi + x'$; 내각의 합이 $\pi + x'$ 인 물톤 삼각형

정리 4.3으로부터 우리는 물톤 평면에서 다음과 같은 넓이 함수를 얻는다.

물톤 기하의 넓이 함수: 물톤 기하에서 임의의 다각형의 넓이는 그 다각형의 통상적인 유클리드 넓이로 한다.

4.3 물톤 기하와 피타고라스의 정리

정리 4.4: 물톤 기하에서는 정리A가 성립하지 않는다.

증명. 그림 9의 다각형은 유클리드 기하에서는 사각형이지만 물톤 기하에서는 꼭지점이 A, B, C 인 직각삼각형이다. 이 경우에는 다음과 같이 빗변의 길이의 제곱이 밑변과 높이의 제곱의 합보다 더 크다.

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 < \overline{AC}^2$$

그러므로 피타고라스의 정리가 성립하지 않는다.

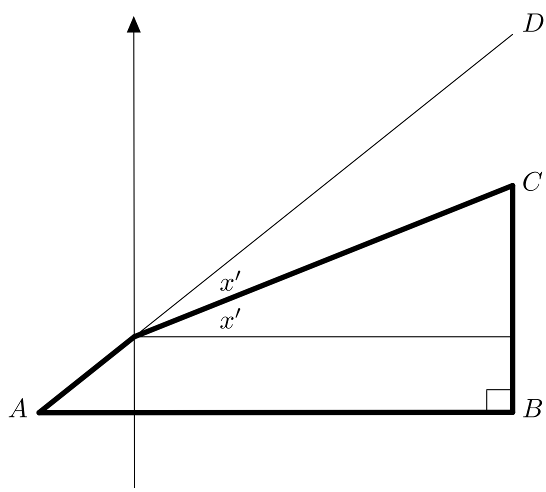


Figure 9. Right triangle in Moulton Geometry; 물톤 직각 삼각형

그림 10의 삼각형 OAB는 내각 중 두 각이 직각인 삼각형이다. (이 삼각형은 이등변 삼각형이 아니다.) 이 삼각형의 두 직각 중 $\angle B$는 유클리드 기하에서도 직각이나 $\angle O$는 유클리드 기하에서는 직각보다 작은 각이다. 그러므로 선분 OA를 빗변으로 생각하였을 때는 정리A의 식이 참이지만, 선분 AB를 빗변으로 생각하였을 때는 정리A의 식이 성립하지 않는다. □

물톤 기하는 택시 기하와 마찬가지로 넓이 함수가 잘 정의되지만 정리B, 정리C, 정리D를 논의할 수 없다. 이는 물톤 기하에서는 한 선분이 y 축과 만날 때 그 선분을 변으로 가지는 정사각형이 없을 수도 있기 때문이다. 그림 10에서 선분 OB 위에 정사각형을 세울 수 없으며, 그림 11의 직각삼각형 ABC에서 빗변 AC 위에는 정사각형을 세울 수 없다.[8)]

8) 임의의 선분을 합동인 다른 선분으로 바꾸어 정사각형을 만들 수 있으므로 '정리B', '정리C', '정리D'를 이 방법으로 해석하여 생각할 수 있으나, 물톤 기하에서는 여전히 이 정리들이 성립하지 않음을 알 수 있다. 참고로, 물톤 기하처럼 정사각형을 그릴 수 없는 변을 가지는 기하에서도 한 점을 중심으로 하는 원을 그릴 수 있으므로 정리B에서 나타나는 정사각형을 원으로 바꾸어 표현하여 다음과 같이 생각할 수 있다. '직각삼각형의 밑변과 높이를 각각 반지름으로 하는 두 원의 넓이의 합은 빗변을 반지름으로 하는 원의 넓이와 같다.' 그렇지만 물톤 기하에서는 여전히 이 정리가 참이 아님을 어렵지 않게 확인할 수 있다.

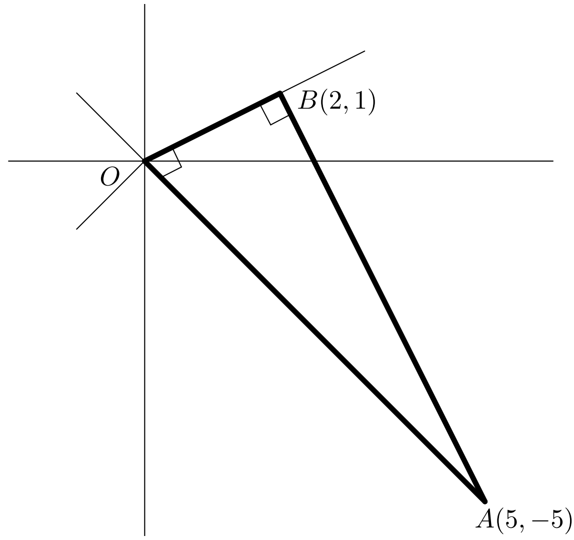


Figure 10. Right triangle in Moulton Geometry; 물톤 직각 삼각형

5 비-아르키메데스 평면기하 Π_1

이 절에서 소개하는 평면기하 Π_1은 힐베르트의 '기하학의 기초' 10판의 부록 II에 있는 기하이다([4, 5] 참조).

5.1 Π_1 의 정의

Π_1 의 원소 즉, 점들의 집합은 아래와 같이 정의되는 순서체(ordered field) F 위에서 정의된 좌표기하 Π_F 와 동일하다.

> F 의 임의의 원소 α는 변수 t, $a_i \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$에 대하여 다음과 같이 표현된다:
>
> $$\alpha = a_0 t^n + a_1 t^{n+1} + a_2 t^{n+2} + \ldots, \quad a_0 \neq 0.$$
>
> 특히, $a_0 > 0$일 때 $\alpha > 0$이다.

즉, $\Pi_1 = \{(x, y) \mid x, y \in F\}$이다. 우리는 때로 점 $(\alpha, \beta) \in \Pi_1$를 $\alpha + i\beta$로 나타낼 것이다. 여기서 $i^2 = -1$이고 $\alpha + i\beta = \alpha' + i\beta'$은 $\alpha = \alpha', \beta = \beta'$를 의미한다.

직선도 좌표기하와 동일하게 다음과 같이 정의한다: F의 임의의 세 원소의 비 $(u : v : w)$는 직선을 정의한다. 즉, 점 (x, y)가 직선 $(u : v : w)$ 위에 있다는 것은

$$ux + vy + w = 0$$

을 만족시킴을 의미한다. 그러나 선분의 합동은 좌표기하 Π_F 와 조금 다르게 정의되는데 다음 절에 소개할 합동변환을 이용하여 정의된다.

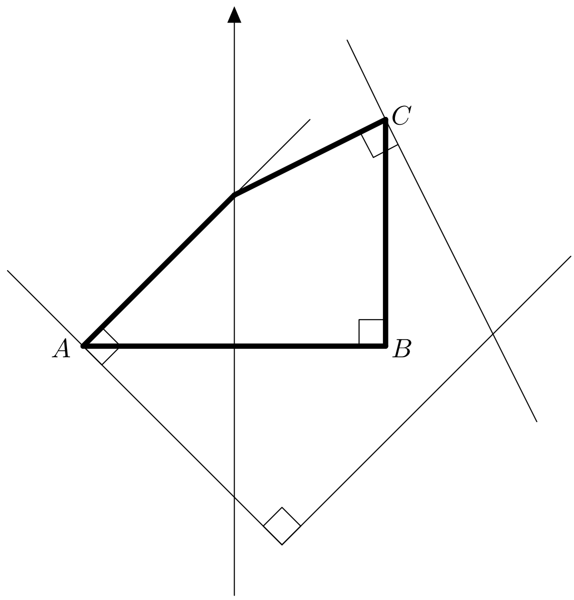


Figure 11. A right triangle in Moulton geometry which does not have a square on the hypotenuse; 빗변을 한변으로 하는 정사각형이 없는 물톤 직각 삼각형

5.2 Π_1 의 합동변환

합동변환을 정의하기 위하여 우선 F의 원소 중 $n > 0$인 τ를 특별히 **극소 원소(infinitesimally small number)**라 하면, 즉,

$$\tau = a_0t^n + a_1t^{n+1} + a_2t^{n+2} + \dots, \quad a_0 \neq 0, \quad n > 0$$

이면, $\sin\tau, \cos\tau, e^\tau, e^{i\tau}$ 등이 각 함수의 멱급수 표현에 의해 Π_1 의 원소로 잘 정의된다. 그리고 임의의 실수 θ와 극소원소 τ에 대하여 다음과 같이 Π_1 의 원소가 정의된다.

$$\begin{aligned}
\sin(\theta+\tau) &= \sin\theta\cos\tau + \cos\theta\sin\tau, \\
\cos(\theta+\tau) &= \cos\theta\cos\tau - \sin\theta\sin\tau, \\
e^{i(\theta+\tau)} &= e^{i\theta}e^{i\tau}, \\
e^{i\theta+(1+i)\tau} &= e^{\tau}e^{i(\theta+\tau)}.
\end{aligned}$$

Π_1 의 합동변환은 위와 같은 Π_1 의 원소들을 이용하여 다음과 같이 정의된다.

정의 5.1: *(합동변환) 임의의 실수 θ, 극소 원소 τ, 그리고 $\lambda, \mu \in F$에 대하여 $[\theta, \tau; \lambda + i\mu]$를 Π_1 위에서 정의된 함수로 다음과 같이 정의한다:*

$$[\theta, \tau; \lambda + i\mu](x + iy) = e^{i\theta+(1+i)\tau}(x + iy) + \lambda + i\mu$$

이와 같은 함수를 우리는 **합동변환(congruent mapping)**이라 부르는데, 특히 λ와 μ가 모두 0인 경우를 **회전변환(rotation)**, θ와 τ가 모두 0인 경우를 **평행이동(parallel displacement)**이라고 한다. (회전변환 중에서 $[\theta, 0; 0]$는 유클리드 평면에서의 회전변환과 같지만 Π_1의 일반적인 회전변환은 유클리드 평면에서의 회전변환과 완전히 다름을 알 수 있다.)

이러한 합동변환에 의하여 선분과 각의 합동을 정의한다. 즉, 두 선분 AB와 $A'B'$이 합동이라 함은 합동변환 T가 있어 $T(AB) = A'B'$임을 의미하고,

$$AB \equiv A'B'$$

로 나타낸다. 마찬가지로 합동변환 T가 있어 반직선 $\overrightarrow{AB}$가 반직선 $\overrightarrow{A'B'}$로, 반직선 $\overrightarrow{AC}$가 반직선 $\overrightarrow{A'C'}$로 보내지고, 각의 내부가 내부로 갈 때, 우리는 두 각 $\angle BAC$와 $\angle B'A'C'$가 합동이라고 정의하며,

$$\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$$

으로 나타낸다.

합동변환으로부터 임의의 선분의 길이도 다음과 같이 결정된다. 우선 원점이 아닌 임의의 점은

$$x + iy = e^{i(\theta+\tau)}\alpha$$

로 표현되는 $\theta \in \mathbb{R}$와 $\alpha > 0$, 그리고 극소 원소(infinitesimally small number) τ가 존재한다.[9)]

회전변환 $T = [-\theta, -\tau; 0]$에 의해 임의의 점 $x + iy = e^{i(\theta+\tau)}\alpha$는 x축의 양의 방향의 점 $e^{-\tau}\alpha$으로 옮겨지므로, 즉

$$T(x + iy) = [-\theta, -\tau; 0]e^{i(\theta+\tau)}\alpha = e^{-\tau}\alpha$$

이므로, 원점과 점 $x+iy = e^{i(\theta+\tau)}\alpha$를 양 끝점으로 하는 선분의 길이는 $e^{-\tau}\alpha$이다. 평행이동에 의하여 선분의 한쪽 끝점을 원점으로 옮길 수 있으므로 임의의 선분의 길이를 이런 식으로 계산할 수 있다.

5.3 Π_1과 피타고라스의 정리

우리는 다음 정리에서 임의의 극소 원소 t에 대하여 밑변의 길이가 $\cos t$이고 높이가 $\sin t$이며 빗변의 길이가 1이 아닌 직각삼각형이 Π_1에 존재함을 볼 것이다. 이는 이 기하에서는 정리A가 성립하지 않음을 말해준다.

정리 5.1: Π_1에서는 정리A가 성립하지 않는다.

9) 예를 들어, $t + i = e^{i(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} t)}\sqrt{1+t^2}$ 이다. 여기에서 $\tan^{-1} t = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \cdots$ 이므로 $-\tan^{-1} t$는 극소원소이고 $\sqrt{1+t^2} = 1 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{8}t^4 + \frac{1}{16}t^6 - \frac{5}{128}t^8 + \cdots$ 이므로 $\sqrt{1+t^2} > 0$이다.

증명. 그림 12의 삼각형 OQR와 삼각형 OQP은 밑변의 길이가 $\cos t$이고 높이가 $\sin t$인 직각삼각형이다. 그런데

$$[\pi/2, 0; -e^{i\pi/2}\cos t]\cos t = 0$$

이고

$$[\pi/2, 0; -e^{i\pi/2}\cos t]e^{-it} = \sin t$$

이므로, 합동변환 $[\pi/2, 0; -e^{i\pi/2}\cos t]$에 의하여 선분 QP는 x축 위의 선분으로 옮겨지며

$$\overline{QP} = \sin t$$

이다. 마찬가지로

$$[-\pi/2, 0; -e^{-i\pi/2}\cos t]\cos t = 0$$

이고

$$[-\pi/2, 0; -e^{-i\pi/2}\cos t]e^{it} = \sin t$$

이므로

$$\overline{QR} = \sin t$$

이다. 그러므로 직각삼각형 OQP와 삼각형 OQR는 동일한 밑변과 높이를 가진다. 그리고

$$[0, t; 0]e^{-it} = e^{(1+i)t}e^{-it} = e^t$$

이고

$$[0, -t; 0]e^{it} = e^{-(1+i)t}e^{it} = e^{-t}$$

이므로, 합동변환 $[0, t; 0]$와 $[0, -t; 0]$에 의해 각각 점 P와 점 R는 x축 위의 점 e^t와 e^{-t}로 옮겨지므로 삼각형 OQP의 빗변의 길이와 삼각형 OQR의 빗변의 길이는 각각 e^t와 e^{-t}이다. 두 직각삼각형 모두 빗변의 길이가 1이 아니므로 정리A를 만족시키지 않는 삼각형이다.

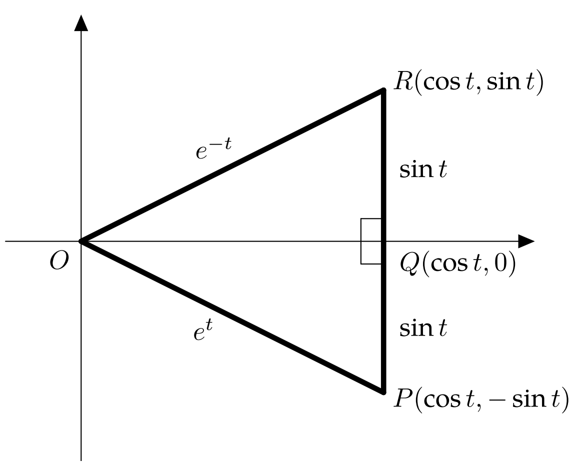


Figure 12. Right triangle in Geometry Π_1; Π_1의 직각 삼각형

□

그림 12에서 삼각형 OQP와 삼각형 OQR은 직선 OQ에 대하여 대칭이다. 우리가 논의하는 기하에서는 이러한 직선에 대한 대칭변환이 합동변환이 아니다. 이는 이 기하가 변-각-변 공리를 만족시키지 않기 때문이다.[10] 그런데 변-각-변 공리가 성립하지 않는 삼각형 OQP와 삼각형 OQR은 향(orientation)이 반대인 경우이다. 이 기하에서도 동일한 향을 갖는 두 삼각형에 대해서는 변-각-변 공리가 성립한다.

변-각-변-공리*: 두 삼각형 ABC와 $A'B'C'$ 사이에 합동관계

$$AB \equiv A'B',\ AC \equiv A'C',\ \angle BAC \equiv \angle B'A'C'$$

이 성립하고, 선분 AB와 선분 $A'B'$이 각 $\angle BAC$와 각 $\angle B'A'C'$의 같은 방향에 각각 위치하면,[11]

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$$

이다.

Π_1에서는 '변-각-변 공리'는 성립하지 않지만 위의 '변-각-변 공리*'가 성립하기 때문에, 임의의 선분에 대해서 그 변을 한 변으로 하는 정사각형의 작도가 가능하다.

정리 5.2: Π_1의 임의의 선분에 대해서 그 변을 한 변으로 하는 정사각형이 그 선분의 양 쪽에 각각 유일하게 존재하고 그 둘은 합동이다.[12]

증명. Π_1의 임의의 선분 AB는 한 합동변환 T에 의하여 원점을 왼쪽 끝점으로 하는 x축 위의 선분으로 옮겨진다. 옮겨진 선분의 오른쪽 끝점이 $\alpha \in F$라 하면 네 점

$$(0,0),(\alpha,0),(0,\alpha),(\alpha,\alpha)$$

은 정사각형을 만든다. 이 정사각형 $\square_1$을 합동변환 T^{-1}에 의하여 옮겨주면 선분 AB를 한 변으로 하는 정사각형이 된다.

마찬가지로 네 꼭지점

$$(0,0),(\alpha,0),(0,-\alpha),(\alpha,-\alpha)$$

에 의한 정사각형 $\square_2$은 합동변환 T^{-1}에 의하여 선분 AB를 한 변으로 하는 정사각형이 되며 앞의 정사각형과 반대쪽에 위치한다. $\square_1$은 합동변환 $[\frac{3}{2}\pi, 0; 0]$에 의하여 $\square_2$로 옮겨지므로 두 정사각형 $T^{-1}(\square_1)$과 $T^{-1}(\square_2)$이 합동임은 명백하다. $\square$

이 정리로부터 우리는 §2에서 본 피타고라스의 정리의 증명이 유효하며 이 기하에서 정리C와 정리D가 성립함을 알 수 있다.

10) 2.2절에서 우리는 변-각-변 공리를 제외한 모든 힐베르트 공리를 만족시키는 기하에서는 위와 같은 대칭변환을 포함한 합동변환이 충분히 많다는 것과 변-각-변 공리가 성립한다는 것이 동치임을 보았다.

11) 힐베르트는 이러한 위치관계를 equipositional이라 정의하였는데, 이는 직선에 대한 점의 위치, 각, 삼각형 등에 향을 준 것이다.

12) [4]의 Appendix II, p.127에 이러한 정사각형의 존재성에 대하여 언급되어 있다.

정리 5.3: Π_1 에서는 정리C와 정리D가 성립한다.

마지막으로 Π_1 에서는 졸트 공리가 성립하지 않으므로 넓이 함수를 가질 수 없다. ([5] 참조.) 그러므로 이 기하에서는 정리B를 논의할 수 없다.

6 아르키메데스 평면기하 Π_2

이 절에서 소개하는 평면기하는 Π_2 는 힐베르트의 '기하학의 기초' 10판의 부록 II에 있는 두 번째 기하이며 ([4] 참조) 앞 절에서 소개한 평면기하 Π_1 과 유사한 기하로, 아르키메데스 공리가 성립하지만 대신 다음 공리가 성립하지 않는 기하이다.

근방 공리(Neighborhood Axiom): 임의의 선분 AB 에 대해서 내부에 선분 AB 와 합동인 선분을 포함할 수 없는 삼각형이 존재한다.

6.1 Π_2 의 정의

Π_2 의 원소 즉, 점과 직선들의 집합은 아래와 같이 정의되는 실수의 부분체 Ω 위에서 정의된 좌표기하 Π_Ω 와 동일하다.

> Ω 는 1과 $\tau = \tan 1$ 에서 시작하여 사칙연산과 멱승(exponentiation)을 통하여 만들어지는 모든 실수들의 집합이다. 즉, ω_1 과 ω_2 가 이미 Ω 의 원소일때,
>
> $$\omega_1 + \omega_2,\ \omega_1 - \omega_2,\ \omega_1 \cdot \omega_2,\ \omega_1 \div \omega_2,\ \omega_1^{\omega_2}$$
>
> 는 다시 Ω 의 원소가 된다. 여기서 $\omega_1 \div \omega_2$ 에서는 $\omega_2 \neq 0$ 이고, $\omega_1^{\omega_2}$ 에서는 $\omega_1 > 0$ 이다.

즉, $\Pi_2 = \{(x, y) = x + iy \,|\, x, y \in \Omega\}$ 이고 Ω 의 임의의 세 원소의 비 $(u : v : w)$ 는 직선을 정의한다. 다시 말해서, 점 (x, y) 가 직선 $(u : v : w)$ 위에 있다는 것은

$$ux + vy + w = 0$$

을 만족시킴을 의미한다. 가산체 Ω 로부터 우리는 또 다른 가산체 Θ 를 얻을 수 있다.

$$\Theta = \{\theta \,|\, \theta = \tan^{-1} \omega, \omega \in \Omega'\}, \quad \Omega' = \Omega \cup \{\infty\}$$

Θ 의 임의의 부분가산집합을 택하여 π 의 유리수배가 아닌 첫 번째 원소를 θ_{k_1} 이라 하고,

$$\theta = r\pi + r_1\theta_{k_1}, r \in \mathbb{Q}, r_1 \in \mathbb{Q}$$

로 표현될 수 없는 Θ 의 원소 중 첫 번째 원소를 θ_{k_2} 라 한다. 이와 같은 방법으로

$$\theta = r\pi + r_1\theta_{k_1} + r_2\theta_{k_2} + \cdots + r_n\theta_{k_n}, r \in \mathbb{Q}, r_i \in \mathbb{Q}$$

로 표현되지 않는 Θ 의 원소 중 첫 번째 원소를 $\theta_{k_{n+1}}$ 라 하면, 우리는 수열

$$\theta_{k_1}, \theta_{k_2}, \theta_{k_3}, \ldots$$

를 얻을 수 있으므로, 임의의 $\theta \in \Theta$에 대해서

$$\theta = r\pi + r_1\theta_{k_1} + r_2\theta_{k_2} + \cdots + r_n\theta_{k_n}$$

로 표현되는 유한수열 $\{r, r_1, \ldots, r_n\} \subset \mathbb{Q}$이 유일하게 존재한다.

위 정의로부터

$$2^{r_1}, \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}, \quad \sin\theta = \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$$

는 모두 Ω의 원소이다.

6.2 Π_2의 합동변환

Ω의 원소 λ, μ와 Θ의 원소 $\theta = r\pi + r_1\theta_{k_1} + r_2\theta_{k_2} + \cdots + r_n\theta_{k_n}$에 대하여, Π_2의 **합동변환** $T = [\theta; \lambda + i\mu]$가 다음과 같이 정의된다:

$$x' + iy' = T(x+iy) = 2^{r_1}e^{i\theta}(x+iy) + \lambda + i\mu$$

특히, λ와 μ가 0인 경우를 **회전변환(rotation)**, θ가 0인 경우를 **평행이동(parallel displacement)**이라고 한다.

Π_1과 마찬가지로 Π_2에서는 변-각-변 공리를 제외한 힐베르트의 결합공리군, 순서공리군, 합동공리군이 성립함을 보일 수 있다.

원점이 아닌 임의의 점은

$$x + iy = \sqrt{x^2+y^2}e^{i\tan^{-1}\frac{x}{y}}$$

으로 표현된다. 그리고 임의의 점 $P = (\alpha, \beta) = \alpha + i\beta$를 지나는 반직선 $\overrightarrow{OP}$는 다음과 같이 표현된다:

$$x + iy = e^{i\tan^{-1}\frac{\beta}{\alpha}} \cdot s, \quad s > 0, s \in \Omega$$

회전변환 $T = [-\theta; 0]$에 의해 임의의 점

$$x + iy = e^{i\theta}\alpha, \quad \alpha > 0, \quad \theta = r\pi + r_1\theta_{k_1} + r_2\theta_{k_2} + \cdots + r_n\theta_{k_n}$$

는 x축의 양의 방향의 점 $2^{-r_1}\alpha$로 옮겨지므로, 즉

$$T(x+iy) = [-\theta; 0](x+iy) = 2^{-r_1}e^{-i\theta}(x+iy) = 2^{-r_1}e^{-i\theta}e^{i\theta}\alpha = 2^{-r_1}\alpha$$

이므로, 원점과 점 $x + iy = e^{i\theta}\alpha$를 양 끝점으로 하는 선분의 길이는 $2^{-r_1}\alpha$이다. 평행이동에 의하여 선분의 한쪽 끝점을 원점으로 옮길 수 있으므로 임의의 선분의 길이를 이런 식으로 계산할 수 있다.

6.3 Π_2와 피타고라스의 정리

정리 6.1: Π_2에서는 정리A가 성립하지 않는다.

그림 13의 삼각형 OQR와 삼각형 OQP는 밑변의 길이가 $\cos\theta_{k_1}$ 이고 높이가 $\sin\theta_{k_1}$ 인 직각삼각형이다. 그런데 회전변환 $T_1 = [-\theta_{k_1}; 0]$과 $T_2 = [\theta_{k_1}; 0]$에 의해

$$T_1(R) = 2^{-1}e^{-i\theta_{k_1}}e^{i\theta_{k_1}} = 2^{-1}$$

이고

$$T_2(P) = 2^{1}e^{i\theta_{k_1}}e^{-i\theta_{k_1}} = 2$$

이므로, 직각삼각형 OQR의 빗변의 길이는 2^{-1} 이고 직각삼각형 OQP의 빗변의 길이는 2 이다. 그러므로 이 두 삼각형은 직각을 낀 두 변의 길이가 같지만 빗변의 길이가 서로 다르며, 또한 정리A를 만족시키지 않는다.

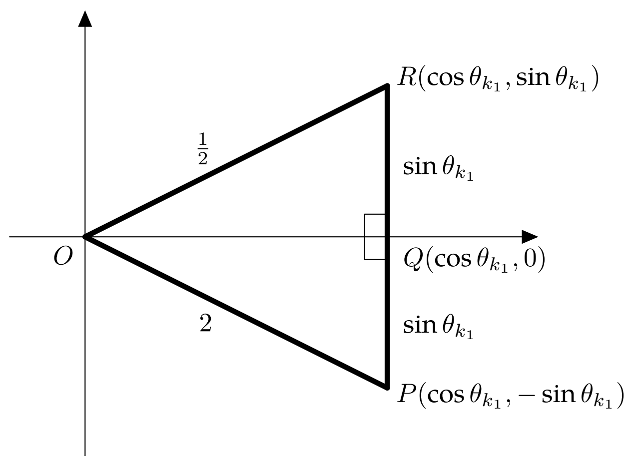


Figure 13. Right triangle in Geometry Π_2; Π_2의 직각 삼각형

Π_2는 Π_1과 마찬가지로 '변-각-변 공리' 대신 '변-각-변 공리*' 가 성립하며 나머지 모든 힐베르트의 평면 공리를 만족시키기 때문에, 임의의 선분에 대해서 그 변을 한 변으로 하는 정사각형의 작도가 가능하다. 그러므로 정리C와 정리D가 성립한다.

정리 6.2: Π_2에서는 정리C와 정리D가 성립한다.

마지막으로 Π_2는 Π_1과 마찬가지로 넓이 함수를 가질 수 없는 평면기하이다.[13)] 그러므로 이 기하에서는 정리B를 논의할 수 없다.

7 요약 및 결론

평행공리를 만족시키는 힐베르트 평면기하에서는 4가지 피타고라스의 정리가 모두 성립한다. 우리는 본론에서 변-각-변 공리를 제외한 모든 힐베르트 평면공리와 평행공리를 만족시키는 네

13) Π_1과 마찬가지로 Π_2도 졸트 공리를 만족시키지 않는 기하로 넓이 함수를 가질 수 없다.

개의 평면기하를 살펴 보았다. 다음 표는 우리가 살펴본 네 평면에서의 피타고라스의 정리의 성립 여부 및 넓이 함수의 존재 유무를 도표로 정리한 것이다.

	평행공리	넓이 함수	정리A	정리B	정리C	정리D
택시 기하	O	O	X	O	O	O
물톤 기하	O	O	X	X	X	X
Π_1	O	X	X	X	O	O
Π_2	O	X	X	X	O	O

Table 1. Validity of the various Pythagorean propositions and existence of the area function in the four planes; 네 평면에서의 피타고라스의 정리의 성립 여부 및 넓이함수의 존재 유뮤

표에서 확인할 수 있듯이 변-각-변 공리 하나의 부족으로 위 네 개의 평면기하에서는 정리A가 성립하지 않는다. 그리고 물톤 기하에서는 정리C와 정리D가 둘 다 성립하지 않으며, 나머지 세 평면기하에서는 정리C와 정리D가 둘 다 참임을 알 수 있다. 또한 넓이 함수가 존재하는 택시 기하와 물톤 기하의 경우, 택시 기하에서는 정리B, 정리C, 정리D가 모두 성립하지만 물톤 기하에서는 이 세 정리가 모두 성립하지 않는다. 그리고 물톤 기하를 제외한 나머지 세 기하는 각각 수체 $\mathbb{R}, F, \Omega$로부터 정의된 좌표기하와 동일한 점과 직선을 가지며, 평행이동이 합동변환이라는 공통점이 있다.

그러므로 우리는 자연스럽게 다음 질문을 생각해 볼 수 있다.

- 정리C는 성립하지만 정리D가 성립하지 않는 평면기하가 존재할까?
- 변-각-변 공리를 제외한 모든 힐베르트 공리를 만족시키는 평면기하에서는 정리C와 정리D가 동치일까?
- 넓이가 정의되는 평면기하에서는 정리B, 정리C, 정리D가 모두 동치일까?
- 점과 직선들이 좌표기하처럼 순서쌍으로 정의되지 않는 기하 중에서 정리A, 정리B, 정리C, 정리D 중 어느 하나라도 만족시키는 평면기하가 존재할까?

마지막으로, 평행공리와 피타고라스의 정리는 어떤 관계에 있는지 생각해 볼 수 있다. (각주 2 참조.) 평행공리가 성립하는 힐베르트 기하는 모두 피타고라스의 정리를 만족시킨다. 그 역도 참이라고 언급되어지는 경우가 많이 있지만, 사실은 그러한 경우 암묵적으로 아르키메데스 공리를 사용하고 있음을 확인할 수 있다. 실제로는 아르키메데스 공리를 만족시키는 힐베르트 기하에서만 평행공리와 피타고라스의 정리가 동치이며, 비-아르키메데스 힐베르트 기하 중에는 피타고라스의 정리는 성립하지만 평행공리가 성립하지 않는 예가 있다. 이러한 논의는 다음 논문 [7]에서 자세히 다루어질 예정이다.

References

1. H. Eves, *An introduction to the History of Mathematics*, Rinehart, New York, 1953.
2. Robin Hartshorne, *Geometry: Euclid and beyond*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2000.
3. T. L. Heath, *The thirteen books of Euclid's Elements, translated from the text of Heiberg, with introduction and commentary*, 2nd ed., 3 vols, University Press, Cambridge, 1926(Dover reprint 1956).
4. D. Hilbert, *The Foundations of Geometry*, 2nd English Edition, Translated by Leo Unger from the 10th German Edition, Revised and Enlarged by Dr. Paul Bernays, The open court publishing company, 1971.
5. K. Jo, A historical study of de Zolt's axiom, *Journal for History of Mathematics* 30(5) (2017), 261–287.
6. K. Jo, S.-D. Yang, Moulton Geometry, *Journal for History of Mathematics* 29(3) (2016), 191–216.
7. K. Jo, S.-D. Yang, *Pythagorean Theorem II : Relationship to Parallel Axiom*, in preparation.
8. R. Kaya, Area formula for Taxicab triangle, Π*ME Journal* 12(4) (2006) 219–220.
9. R. Kaya H. B. Colakoglu, Taxicab versions of some Euclidean theorems, *Int. J. Pure Appl. Math.* 26(1) (2006), 69–81.
10. İ. Kocayusufoğlu, E. Özdamar, Isometries of Taxicab geometry, *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series Al* 47 (1998), 73–83.
11. Lee Man-Guen, Jeon Byung-Ki, comps., *All that Pythagorean Proposition*, Kyung Moon Sa, 2007. 이만근, 전병기 엮음, 올 댓 피타고라스의 정리, 경문사, 2007.
12. E. S. Loomis, *The Pythagorean Proposition, Classics in Mathematics Education Series.*, National Council of Teachers of Mathematics, 1968.
13. George E. Martin, *The foundations of geometry and the non-Euclidean plane*, Springer, New York, 1975.
14. F. R. Moulton, A simple non-Desarguesian plane geometry, *Transactions of the AMS* April (1902), 192–195.
15. M. Özcan, R. Kaya, Area of a Taxicab triangle in terms of the Taxicab Distance, *Missouri Journal of Mathematical Sciences* 15(3) (Fall 2003), 21–27.
16. K. P. Thompson, The nature of length, area, and volume in Taxicab geometry, arXiv:1101.2922v1.