Journal for History of Mathematics
Vol. 31 No. 2 (Apr. 2018), 73–91

http://dx.doi.org/10.14477/jhm.2018.31.2.073

A Historical Study on the Interaction of the Limit-the Infinite Set and Its Educational Implications

극한과 무한집합의 상호작용과 그 교육적 시사점에 대한 역사적 연구

Park Sun-Yong 박선용

This study begins with the awareness of problem that the education of mathematics teachers has failed to link the limit and the infinite set conceptually. Thus, this study analyzes the historical and reciprocal development of the limit and the infinite set, and discusses how to improve the education of these concepts and their relation based on the outcome of this analysis. The results of the study confirm that the infinite set is the historical tool of linking the limit and the real numbers. Also, the result shows that the premise of 'the component of the straight line is a point.' had the fundamental role in the construction of the real numbers as an arithmetical continuum and that the moral certainty of this premise would be obtained through a thought experiment using an infinite set. Based on these findings, several proposals have been made regarding the teacher education of awakening someone to the fact that 'the theoretical foundation of the limit is the real numbers, and it is required to introduce an infinite set for dealing with the real numbers.' in this study. In particular, by presenting one method of constructing the real numbers as an arithmetical continuum based on a thought experiment about the component of the straight line, this study opens up the possibility of an education that could get the limit values psychologically connected to the infinite set in overcoming the epistemological obstacle related to the continuum concept.

Keywords: limit, infinite set, point, real number, continuum; 극한, 무한집합, 점, 실수, 연속체.

MSC: 01A55 ZDM: A35

1 서론

실무한(또는 현실적 무한)을 수용하는 기준은 무엇일까? 데데킨트와 칸토르로부터 시작한 무한집합 이론을 받아들이는 것이 일단 기준이 될 수 있을 것이다. 그런데 우리는 이러

Park Sun-Yong: Dept. of Math. Edu., Yeungnam Univ. E-mail: polya@yu.ac.kr
Received on Dec. 4, 2017, revised on Jan. 20, 2018, accepted on Mar. 18, 2018.

한 무한집합의 수용과 별개로 '$0.9999\cdots$ 가 1이 됨' 을 믿는 것을 흔히 실무한을 수용하는 기준으로 삼는 경향이 있다. 즉, $0.9999\cdots$ 자체를 하나의 수학적 실체로 인정하면서, 1에 한없이 가까이 간다는 것이 아니라 '$0.9999\cdots$ 이 1이 됨' 을 인정하는 것을 실무한을 수용하는 전형적인 지표로 간주한다.

현재, 우리나라의 수학교사교육에서도 이러한 모습은 유지되는데, 예를 들어 어떤 주요교재에서도 "$0.\dot{9} = 0.9999\cdots$ 는 어떤 값을 향해 계속 진행하는 동적인 관점의 '과정(process)' 이다. 이에 반해 1은 완결된 정적인 관점의 '결과(product)' 이다 [13, p. 273]." 라고 말하며, 수열의 극한에 대한 학교수학과 학문수학의 정의를 다음과 같이 비교한다 : "직관적 정의에서는 '한없이 커지면 한없이 가까워진다.' 는 표현에서 알 수 있듯이 항이 끝없이 계속된다는 '가능적 무한' 을 기초로 한다. 그에 반해 형식적 정의는 수열이 무한하게 계속되지만 어느 순간 완결된 값을 갖는다고 생각하는 '실무한' 개념을 바탕으로 한다 [13, p. 284]."

여기서, '수열이 무한하게 계속되지만 어느 순간 완결된 값을 갖는다고 생각하는 것' 은 어떤 의미일까? 실무한을 수용한다는 것이 아리스토텔레스의 가능적 무한(또는 가무한)의 관점과 상반된다는 것을 고려하면, 그것은 수열의 항들이 나열되는 무한한 과정이 완결되어 마치 '수열의 어떤 항이 궁극적으로 극한값에 도달한다.' 는 것을 의미하는 것처럼 보일 위험이 있다. 예를 들어, 아리스토텔레스는 어떤 근사 상황에서 "이등분을 한없이 계속하면, 추가되는 부분들의 합은, 결코 도달하지는 못하지만, 더욱더 일정한 극한에 가까워진다 [12, p. 319, 재인용]." 고 주장하는데, 이러한 '도달 불가능' 의 관점과 달리, '그 부분들의 합을 이루는 수열이 일정한 극한값에 마침내 도달한다.' 고 간주하는 것이 마치 실무한을 수용하는 입장처럼 여겨진다고 하겠다.

사실, 이 아리스토텔레스의 인용문에서 언급된 '무한가분성' 과 '도달불가능' 은 가능적 무한의 특징을 나타낼 뿐만 아니라, 아리스토텔레스 이후 데데킨트 이전까지, 연속체의 본질 자체로도 간주되어왔다. 여기서 이러한 무한분할성은 '같은 종류의 양 a, b에 대해 $na > b$가 성립하는 자연수 n이 존재한다.' 는 일명 아르키메데스의 공준[1)]에 의해 지지되는데, 가능적 무한을 지지하는 입장에서는 이 공준에 의해 무한과 관련된 대부분의 문제를 유한한 방식으로 해결해왔다고 할 수 있다 [14].

그런데 이러한 가능적 무한의 입장은 '연속체는 점으로 이루어지지 않았다.' 는 것으로 단적으로 나타난다. 이 입장에서는 연속체로서의 선분에 대해 그것의 절반으로 계속 분할할 수 있을 뿐만 아니라 그렇게 계속 줄어드는 선분은 아르키메데스의 공리에 기초해 선분에 대한 불가분자(indivisibles) 인 점(point) 에 결코 도달할 수 없다고 보았던 것이다.

1) 아르키메데스는 아리스토텔레스의 약간 후세대에 속한 인물이다. 따라서 이 두 사람은 플라톤과 거의 같은 시기에 살았던 에어독소스로부터 내려온 이 내용에 대해 익히 알고 있을 것으로 여겨진다.

이러한 가능적 무한의 의견과 반대로 만약 '도달가능성의 실현' 을 인정하는 것이 실무한을 수용하는 기준이라면, 무한분할성을 부정하고 불가분자를 받아들이는 것이 실무한을 수용하는 사례가 되는 것일까? 예를 들어, 축소폐구간열 $< [0,(\frac{1}{2})^n] >$에 대해 $\bigcap_{n=1}^{\infty}[0,(\frac{1}{2})^n] = \{0\}$ 인 것과 관련해, $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2})^n = 0$과 같은 결과를 '도달가능성의 실현' 의 입장에서 각 구간의 길이가 $(\frac{1}{2})^n$ 이지만 궁극적으로 그 길이가 0에 이르게 되는 것으로 보는 것이 적합한 것일까? 즉, 구간(선분)의 무한분할은 마침내 종결되어 구간이 그것의 불가분자인 실직선 위의 점 0에 이르게 된다고 보는 것이 '실무한의 적용 사례' 로서 적절한 것일까?

하지만 완결된 실체로서의 집합 $\{(\frac{1}{2})^n | n \in \mathbb{N}\}$ 을 인정하더라도 이 집합의 원소 중에 0은 존재하지 않는다. 어떠한 자연수 n에 대해서도 $(\frac{1}{2})^n$ 은 절대로 0이 되지 않는 것은 분명하다. $(\frac{1}{2})^n$ 이 궁극적으로 0에 도달한다는 것을 수용할 수 없는 것이다. 여기서, $(\frac{1}{2})^n$ 이 0에 도달한다는 관점이 실무한의 입장을 나타내는 것인지에 대한 의문이 제기된다.

그렇다면, 무한집합 이론의 도입이 극한을 해석하는 것에 어떤 영향을 주는 것인지에 대한 것뿐만 아니라 실무한을 인정하는 기준이 무엇인지에 대한 근본적 의문이 제기될 수밖에 없다고 하겠다. 무엇보다, 이러한 의문을 가지면서 연구자는 현재의 예비수학교사교육에서 '무한집합과 극한이 적절한 관련을 맺지 못한 상태로' 지도되고 있다는 문제의식을 느끼게 되었다.

어쩌면, 우리는 무한집합론과 극한에 대한 $\epsilon - N$, $\epsilon - \delta$ 방식의 형식적 정의를 가르치고 배우지만, 그 둘 사이의 연관성을 도외시한 상태에서 $(\frac{1}{2})^n$ 이 0에 도달한다는 것을 믿어야 하는 듯이 교육하고 있는지도 모른다. 무한집합 이론, $\epsilon - N$, $\epsilon - \delta$ 방식의 극한에 대한 정의를 다루었으므로 그 내용에 의해 제논의 역설은 자연스럽게 해결된 것이고 $(\frac{1}{2})^n$ 이 0에 도달한다는 것을 믿을 수밖에 없는 것처럼 암묵적으로 호도할 위험이 있는 것이다.

물론, 이러한 상황을 해결하기 위해서는 무한집합과 극한 사이의 관계를 규명하고 그 분석 결과를 교육적으로 활용하는 작업이 요구된다고 할 수 있다. 이 연구에서는 이 상황을 극복하기 위한 해결의 단서를 수학의 발전과정에서 찾고자 하였다. 구체적으로 이 연구는 '극한과 무한집합은 서로 어떤 영향을 주면서 발생하였는가?' 에 대해 역사적으로 분석하고 그 결과를 바탕으로 하여 수학교사교육을 개선하기 위한 방향을 제안하고자 한 것이다.

2 무한집합의 발생: 극한값의 창조로

서론에서 제기했던 극한값에의 도달여부의 문제는 18세기와 19세기 초, 중엽에 걸쳐서도 뜨거운 논쟁거리였다. 이러한 논란을 우회하여 해결하기 위한 방안의 하나로, 코시는 어떤 수열에 대한 극한값을 언급하지 않고도 그 수열이 수렴하기 위한 필요충분조건을 모색해 보면서, 일명 코시 기준(Cauchy criterion) 을 제시한다. 이것은 가능적 무한의 관점에서의 시도라

할 수 있기에, 이 자체로는 실무한의 도입에 직접적으로 기여한 것으로 볼 수는 없다. 하지만 이러한 작업에서 코시가 간과하였던 사항이 오히려 수학계에서 실무한으로서의 무한집합을 사용하도록 하는 역할을 하게 된다.

구체적으로, 코시는 극한값 S를 사용하지 않는 방식으로 어떤 수열이 수렴하는 조건을 찾고자 했는데, 암묵적으로 직관적인 실수체계를 가정하면서, 실수로 이루어진 수열 $< S_n >$에 대해 '그 자신 안에서 수렴한다.' 는 조건인 '모든 자연수 r과 충분히 큰 n에 대해 $|S_{n+r} - S_n|$을 임의의 할당된 크기보다 작게 만들 수 있다.'를 제시하였다.

그런데 코시가 제기한 조건은 수열이 수렴하기 위한 필요조건임은 분명하나 충분조건으로서는 논리적으로 결함이 있다. 왜냐하면 실수에 대한 정의가 없이는 충분조건임을 증명하려는 어떠한 시도도 '순환논리'에 빠질 수밖에 없기 때문이다.[2] 사실, 코시도 이 조건의 충분성에 대해서는 결함이 있었음을 느꼈던지 그 증명을 명확히 제시하지 못하고 "여러 조건이 충족되었을 때, 급수의 수렴은 보장된다 [3, p. 109, 재인용]." 는 언급을 남긴다.

비록 코시는 극한값 S를 언급하지 않으려 했어도 '수열 $< S_n >$의 극한값 S(실수)의 존재성' 을 가정하였던 것이다. 하지만 그는 실수체계가 명확히 정의되지 않은 상태에서의 이런 근본적 문제점을 명확히 인식하지 못했다. 즉, 그가 제시한 조건이 실수의 존재성을 보장해주는 것은 아니지만, 코시는 그 자신 안에서 수렴하는 수열은 극한을 가진다는 생각에 기초해서 유리수열의 극한으로 무리수를 정의하는 것이 가능하다고 생각하였다. 코시는 극한 자체를 가지고 실수를 정의하는 것이 가능하다고 여겼던 것이다.

19세기 중엽 이후의 수학계는, 코시의 논의에 담긴 이런 순환성을 파악하고, '어떤 실수로의 극한' 개념을 사용하지 않는 방식으로 실수를 만드는 시도를 하게 되었다. 이와 관련해 3가지의 초기 시도가 있었다 [4]. 첫 번째는 코시의 조건을 이용하지 않고 수열을 이용해 실수를 정의하는 것이고, 두 번째는 극한값 S의 존재를 가정하지 않는 방식으로 코시의 조건을 보완하여 실수를 정의하는 것이고, 세 번째는 직선의 성질에 기초해서 직선의 점에 대응하는 실수를 정의하는 것이었다. 처음의 두 종류는 코시 논의의 순환성을 직접적으로 피하거나 제거하는 방식이었던 반면에, 마지막의 것은 산술적 연속체를 구성하는 방식으로 이루어졌다.

첫 번째 종류의 작업은 바이어슈트라스에 의해 시도되었는데, 이때 핵심적인 역할을 한 것이 바로 무한집합의 도입이었다. 그가 기존의 유리수로부터 새로운 무리수를 만든 아이디어는 '유리수 수열' 과 그 수열의 각 항을 원소로 갖는 '무한집합' 을 동일시하면서, 그 집합의 임의의 유한개의 원소들의 합이 어떤 유리수보다 작을 때, 그 수열 자체 또는 무한집합을 새로운 수로 정의하는 것이다. 그리고서 그 수열의 극한값으로 그 수를 제시하는 것이다. 즉, 수열의 극한값의 존재를 무한수열 또는 무한집합의 존재로 대체하는 것이 무리수를 창조하는 방식이었던

2) 실수로 이루어진 수열 $< S_n >$을 유리수로 이루어진 수열 $< S_n >$로 바꾸어도, 극한 자체만을 사용해서는 순환논리로부터 벗어날 수 없다.

것이다.

두 번째 종류의 작업은 머레이, 칸토르, 하이네 등에 의해 이루어졌는데, 그들도 수열 자체를 새로운 수로 간주한다는 점에서 본질적으로 바이어슈트라스와 같은 아이디어를 사용했다고 할 수 있다. 그 아이디어의 윤곽은, '유리수열 $< S_n >$과 임의의 자연수 r에 대해 $\lim_{n\to\infty}(S_{n+r}) - S_n = 0$' 을 '유리수열 $< S_n >$이 수렴한다.' 는 조건으로 제시하면서, 극한값 S의 존재를 가정하지 않으면서, 그 수렴하는 유리수열 자체를 새로운 수로 간주하는 것이다. 이때, 머레이는 유리수열이 수를 결정한다고 보았고 칸토르와 하이네는 유리수열이 수를 정의한다고 보았다. 그들은 유리수열의 극한으로 무리수를 정의하는 것이 아니라, 바이어슈트라스처럼, 유리수열(의 집합) 자체로 무리수를 만들었고 그 이후에 그 수를 수렴하는 유리수열의 극한값으로 삼았던 것이다.

물론, 이러한 실수를 만드는 두 작업을 통해 당시의 수학계는 '극한에 대한 이론이 근본적으로 무한집합에 기초한다는 것 [4, p. 298]' 을 인식하기 시작했다고 할 수 있다. 그런데 칸토르와 더불어, 무한집합을 하나의 이론으로 진척시키고 수학계가 그 중요성에 대해 확신을 갖도록 하는 데에는 데데킨트의 역할이 매우 컸다고 할 수 있다. 그 이유는, 데데킨트가 '자신의 진부분집합과 1-1 대응이 되는 집합' 을 무한집합으로 정의함으로써 무한집합을 체계적으로 다룰 수 있도록 했을 뿐 아니라 그러한 바탕 위에 연속체의 본질을 드러내고 직선에 대응하는 실수를 만드는 과정을 보여주었기 때문이다.

그렇다면, 데데킨트는 무한집합을 이용해 연속체의 본질을 어떻게 통찰했고 그러한 연속체의 본질을 갖고 있는 산술적 연속체로서의 실수를 어떻게 정의했던 것일까? 그는 기하적인 연속체인 직선의 본질을 '틈(gap)이 없는 점의 무한집합' 으로 간주하면서 이 직선과 관련해 실수를 구성하였는데, 직선을 잘라내는 결정적 사고실험을 통해 밝힌 직선의 본질에 대해 다음과 같이 말한다.

> "그것은 다음의 원리[3)]이다 : 직선의 모든 점들이 첫째 클래스의 모든 점이 두 번째 클래스의 모든 점보다 왼쪽에 놓이는 방식에 의해 두 클래스에 속하게 될 때, 직선의 모든 점들이 두 클래스로 나뉘게 하는, 즉 직선을 두 부분으로 잘라내는 하나의 유일한 점이 존재한다 [9, p. 771]."

이러한 아이디어에서 출발하여, 잘 알려져 있듯이, 데데킨트는 직선 위의 점을 유리수 집합의 절단(cut)으로 정의한 후, 이 절단을 통해 직선상의 각 점에 대응하는 실수를 구성하였다. 구체적으로, 유리수로는 채워지지 않는 직선상의 점에 대해 '새로운 점-개별자(point-individuals)' 를 만들어 채우는 과정을 이용해 실수를 구성하고자 하였는데, 데데킨트는 이 과정에 대해 다음과 같이 말한다.

3) 이하의 논의에서는, 이 원리를 '데데킨트의 공준'이라 지칭한다.

> "유리수가 산출해내지 않는 절단 (A_1, A_2)을 가질 때마다, 우리는 이 절단 (A_1, A_2)에 의해 완전히 정의되는 것으로 간주하는 새로운 수인 무리수 α를 창조한다 ; 우리는 수 α가 이 절단에 대응한다거나 이 수가 이 절단을 산출한다고 말할 것이다 [7, p. 15]."

그런데 이러한 데데킨트의 실수의 구성 작업과 관련해 하나의 중요한 의문이 제기된다. 그의 '직선을 두 부분으로 잘라내는 하나의 유일한 점이 존재한다.' 는 결론은 '직선이 점으로 이루어졌다.' 는 가정 하에서 유도된다. 구체적으로 말해, '직선은 점으로 이루어졌는데 직선을 두 부분으로 잘라내도록 하는 단 하나의 점이 그 직선 위에 존재한다.' 는 것이다. 사실, '직선의 모든 점들' 이란 말에서 이미 알 수 있듯이, 그의 논의 전체가 직선이 점으로 이루어졌다는 것을 이미 가정하고 있다. 여기서, 다음과 같은 의문이 제기된다. 데데킨트의 '직선은 점들로 이루어졌다.' 는 가정은 도대체 무슨 근거를 통해 나온 것일까?

그런데 데데킨트의 논의와 다르게, 서론에서 제기했듯이, 가능적 무한의 입장에서는 선분에 대한 무한분할이 가능하다는 것에 근거해 이 선분이 점으로 이루어진 것은 아니라고 간주하였다. 이러한 불일치를 고려하면, '연속체가 점으로 이루어졌다.' 는 것에 대한 인정 여부가 실무한과 가능적 무한 사이를 구분 짓는 기준과 관련되어있음을 알 수 있다.

물론, '점들의 무한집합' 이 무한집합 자체를 인정한다는 사항에 단순히 주목하면, 두 입장의 차이에 대한 더 이상의 논의가 필요 없는 것처럼 보인다. 하지만 실무한의 입장에서도 선분의 무한분할성을 함의하는 '아르키메데스의 공준' 를 인정한다. 즉, 이 입장에서는 '연속체의 무한분할성' 과 '연속체의 점에 의한 구성' 을 모두 인정하는 것이다.

이러한 논의는, '연속체는 무한분할가능하다.' 와 '연속체는 점으로 이루어졌다.' 는 두 주장이 양립가능한지의 여부에 대한 인정이 실무한과 가능적 무한의 입장을 구분 짓는 중요한 기준이 될 수 있음을 시사한다. 이에 대해서는 다음 절부터 살펴보기로 하자.

3 점집합으로의 분화 : 선분의 무한분할과 점구성의 양립

'연속체는 무한분할가능하다.' 와 '연속체는 점으로 이루어졌다.' 는 두 주장의 양립가능성에 대한 문제는 고대 그리스시대부터 뜨거운 논쟁거리였다. 그 대표적인 예로, 아낙사고라스는 연속체와 관련해 "작은 것 속에 그 중 최소의 것은 없고 항상 더 작은 것이 있다. 왜냐하면 존재하는 것은 아무리 나누더라도 존재하는 것을 멈추지 않는다." 고 말하며, 데데킨트의 실수 구성작업에서와 유사하게, '꼭 도끼에 의해 절단된 것처럼 분리된다.' 는 연속체의 특성을 언급하면서도 이 이유를 근거로 해서 연속체는 개별적인 점에 의해 이루어지지 않는다고 주장하였다. 즉, 직선이 도끼에 의해 절단되는 '점' 은 직선에서의 '위치' 일뿐이며 '구성성분' 이 될 수 없다는 주장이다.

사실, 아낙사고라스 이후 수천 년 동안 수학계는 대체로 연속체를 점으로 이루어진 것으로

간주하지 않았다. 그러한 주장을 한 플라톤과 모나드 이론을 제창한 라이프니츠[4] 정도를 제외하고는, 연속체에 대한 두 주장이 양립불가능하다는 것이 수학계에서 줄곧 주된 의견이었던 것이다 [2]. 예를 들어, 18세기의 오일러와 칸트도 연속체에 대해 무한히 나눌 수 있지만 그것이 무한히 많은 궁극적인 부분에 의해 구성된다는 말은 전혀 틀린 것으로 이 두 가지 사항은 양립되지 않는다고 주장하였다. 오랜 기간, 왜 이렇게 생각할 수밖에 없었을까?

그것은 '선분에서 어떤 점의 그 바로 다음 점을 도저히 생각할 수 없는' 인식의 한계와 깊은 관련이 있다. 이와 관련해, 아리스토텔레스는 '접촉(in contact)' 과 '바로 다음으로 이어짐(in succession)' 의 관점에서 점이 선분을 구성할 수 없다고 주장한다. 그에 따르면, 어떤 두 대상의 접촉은 '그것들의 극단이 같이 있을 때'[5]에 일어나며 두 대상이 서로 바로 다음으로 이어지는 것은 '그것들 사이에 같은 종류의 것이 들어가지 않을 때'[6]에 일어난다. 이 두 가지 측면에서, 그는 점이 선분을 구성할 수 없는 이유를 다음과 같은 논지로 제시한다.

점은 불가분량이기 때문에 더 나눌 수 있는 부분을 갖지 아니한다. 그러므로 각 점은 그 자체가 하나의 전체이며 점의 한쪽과 다른 쪽을 구분할 수는 없다. 점들이 서로 '점 대 점' 으로 접촉한다면 '전체 대 전체' 의 접촉이므로 두 점은 하나의 같은 점에 되게 되고, 같은 방식으로 생각하면 접촉하는 점들은 결국 하나의 같은 점이 되게 되는 모순에 빠진다. 또한, 어떤 점과 그것의 바로 다음의 다른 점이 있다면 그 사이에 선분이 존재할 것인데 그렇게 되면 그 선분에는 새로운 다른 점이 있을 수밖에 없어 모순이 발생하게 된다. 이러한 두 모순에 따르면, 점은 선분을 구성하지 못 한다.[7]

아리스토텔레스는, 연속체에 대해 그것의 구성성분도 무한분할 가능해야 하고 그 구성성분은 다른 어떤 구성성분과 공통된 경계에서 맞닿아있어야 한다고 보았다. 그에게 있어, 연속체의 구성성분들은 여전히 연속체여야 하고, 그 구성성분들이 연속성을 유지하며 전체로서의 연속체를 이루는 방식은 그것들의 극단이 일치[8]하는 방식이라고 하겠다. 앞서 보았듯이, 점은 선분과 관련해 이러한 기준을 통과하지 못한다.

그렇다면, 이러한 지적인 흐름 속에서 데데킨트는 어떻게 '연속체가 점으로 이루어졌다.' 는 것을 가정할 수 있었을까? 앞 절에서 살펴보았듯, 데데킨트가 직선을 분리시키는 결정적 사고실험을 통해서 '직선이 점으로 이루어졌다.'는 것이 도출되지 않는다. 오히려, 그러한 가정과 공간에 대한 직관으로부터 '직선을 두 부분으로 분리시키는 유일한 점이 존재한다.'는

4) 하지만 라이프니츠도 점이 연속체를 구성하지 않는다는 견해를 가지게 되었다[2, 17].

5) if their extremities are together [6, p. 86]

6) if there is nothing of their own kind intermediate between them [6, p. 86]

7) 사실, 이러한 아리스토텔레스의 논의는 오늘날의 우리가 정렬성의 원리를 선뜻 수용하지 못하는 인식론적 현상과 매우 유사하다고 할 수 있다. 예를 들어, 우리는 점과 수를 동일시하는 수직선에서 0의 바로 다음의 최소원소가 무엇인지에 대해 도무지 알지 못한다. "모든 집합은 잘 정렬될 수 있다."는 정렬성의 원리는 그 가능성에 대해서만 언급할 뿐 그것을 찾는 구체적인 방법에 대해서는 전혀 말하지 아니한다. 아리스토텔레스는 이와 관련된 인식론적 어려움에 대해 이야기한 것으로 볼 수 있는 것이다.

8) things being continuous if their extremities are one [6, p. 86]

것이 유도될 뿐이다. 그렇다면, 이러한 가정은 레이코프와 누네즈의 주장처럼 은유적인 가설에 불과한 것일까? 하지만 비록 은유적인 가설이라 할지라도 수학사를 통해 면면히 이어져온 반대에 대항할만한 근거가 있어야 하지 않을 것인가?

이러한 분석을 통해, 이 연구에서는 데데킨트가 직선을 절단하는 결정적 사고실험 이전에 '점이 직선(또는 선분)의 구성성분이다.' 는 것을 직관적으로 확신하는 사전 사고실험을 무의식적으로 했을 것이라는 추측을 하게 되었다. 그가 수행했을 법한 사고실험은 어떤 것이었을까?

데데킨트도 선분의 무한분할을 인정하지만, 아리스토텔레스와 달리, 어떤 완결된 실체로서의 무한집합을 인정한다. 이 결정적 차이에 주목하면, 오늘날의 유리축소구간열에 의한 실수의 구성 과정이 데데킨트가 수행했을 법한 사고실험과 유사했을 것으로 본다. 왜냐하면 이 과정 안에는 선분을 무한분할 시키는 상황에서 무한집합을 인정하고 도입했을 때에 선분의 구성성분이 무엇인지를 알아보는 실험적 측면이 들어 있기 때문이다. 즉, 데데킨트는 무의식적으로라도 무한분할 상황 속에서 무한집합을 인정했을 때의 그 결과를 알아보는 사고실험을 했을 것으로 예측된다고 하겠다.

이 연구에서는 이러한 사고실험과 그에 대한 명제를 각각 '축소선분열에 대한 사고실험', '축소선분열에 대한 원리' 라 부르기로 하는데, 이 실험은 다음과 같이 전개된다.

—축소선분열에 대한 사고실험—

> 직선의 일부분인 선분을 기하적 대상인 것으로 보며, 직선과 선분에서의 점은 단지 직선과 선분에서의 '위치'를 나타내는 것으로만 간주하자. 직선 위에 선분의 수열 $I_1, I_2, I_3, \cdots, I_n, \cdots$ 을 만드는데, 각 선분이 그 앞의 선분에 쏙 들어가고 n 번째 선분 I_n 의 길이는 n 이 증가할 때 0 에 원하는 만큼 가깝게 된다고 하자.[9)] (단, 어떠한 자연수 n 에 대해서도 선분 I_n 의 길이는 0 이 아니다.)
>
> 여기서, 선분 I_n 의 양끝에는 단지 그 위치를 나타내는 점이 자리해 있다고 보고 각 선분의 길이는 선분의 양 끝점의 위치의 간격으로 다루도록 하자. 이러한 선분은 상식적인 연속체이다. 자연스러운 선분은 마치 껍데기나 경계가 없는 것 같은 모습, 즉 '선분의 끝에 아무것도 없는 모습' 으로 상상할 수가 없기 때문이다. 여전히, 각 선분이 점으로 이루어졌다고 가정하지 않았다는 것에 계속 유의해보자.
>
> 어떠한 자연수 n 에 대해서도 선분 I_n 의 길이는 0 이 아니므로 분할은 끝나지 않는다. 이런 무한분할을 인정하고 $\{I_n | n \in \mathbb{N}\}$ 과 같은 무한집합이 존재한다고 가정하면, 모든 선분 I_n 이 공유하는 부분 또는 함께 점유하는 부분은 무엇일까?

9) 여기서 선분의 길이는 실수를 의미하는 것이 아니며, 두 선분의 길이의 비교는 한 쪽 끝점을 일치시킨 다른 쪽 끝점의 위치에 의해 다룬다. 선분 I_n 의 길이가 0 에 가까이 간다는 것은 <임의의 선분이 주어진다고 할 때, 기껏해야 유한개의 선분을 제외하고 나머지 모든 선분 각각은 처음에 임의로 주어진 선분보다 더 짧다.> 는 것을 의미한다.

각 선분이 그 앞의 선분에 쏙 들어가는 방식을 취하기 때문에 모든 선분 I_n 이 서로 공유하는 부분은 있다. 그런데 그 공유하는 부분은 절대로 선분이 될 수 없다. 그 이유는, 만약 그러하면 선분의 무한분할성과 상충하기 때문이다. 예를 들어, 모든 선분 I_n 이 공유하는 부분이 두 점 s, t를 양끝으로 갖는 선분 l 이라고 해보자. 선분 I_n 의 길이는 0에 가까이 가므로, 그 길이가 선분 l 의 길이보다 짧은 선분 I_{N_0} 가 존재한다. 그러면 두 점 s, t는 I_{N_0} 에 동시에 위치할 수가 없는 모순이 발생하게 된다.

따라서 모든 선분 I_n 이 공유하는 부분은 하나의 점일 수밖에 없다. 두 개의 점일 수는 없다. 왜냐하면 서로 다른 두 점을 공유한다면 이 두 점을 양끝으로 갖는 선분을 생각할 수 있고 앞에서와 같이 모순이 발생하기 때문이다.

무한집합의 존재에 기초하여 축소하는 '모든' 선분이 공유하는 부분을 찾는 이러한 사고실험의 결과는 직선에서 '위치' 로서의 점이 그 직선의 '구성성분' 이 되는 것 같은 심상을 분명히 제시해 준다. 일종의 심적 확실성(moral certainty)을 제공한다고 할 수 있다. 하지만 '축소선분열에 대한 원리는 하나의 기하학의 공준에 불과하고, 이러한 실험과정에서 암묵적으로 점의 집합을 사용했을 수 있다.' 는 지적이 제기될 수 있다. 이와 관련해, 직선 자체와 선분 I_n 이 점의 집합이라는 것을 가정한 상태에서 수정된 사고실험을 수행했다고 하자. 원래의 사고실험과 비교해 이 수정된 사고실험은 어떤 의미를 지니게 되는 것일까?

여기서, '축소선분열의 원리' 와 그것이 들어간 기하학의 공준체계에 대해 생각해보자. '선분은 무한분할가능하다.' 를 인정하는 기하학의 공준체계에 '무한집합의 존재성' 과 '축소선분열의 원리' 를 공준으로 넣었다고 할 때, '축소선분열의 원리' 가 '선분이 점으로 이루어졌다.' 를 이끌어내는지는 불분명하다. 왜냐하면 '축소하는 선분들이 서로 공유하는 부분은 어떤 유일한 점이다.' 는 결과가 '선분의 구성성분은 점이다.' 는 것을 함의한다고 보기는 힘들기 때문이다.

이런 측면을 고려하면, 수정된 사고실험은 무한집합을 사용했을 때에 '선분은 무한분할가능하다.' 와 '선분은 점으로 이루어졌다.' 는 두 주장이 양립하는 모델에 대한 것이라 할 수 있다. 즉, 수정된 사고실험은 '축소선분열의 원리' 에 참인 해석을 주는 하나의 모델을 구축하는 실험[10]인 것이다.

실험의 성격이 더 뚜렷해진 것인데[11], 이 수정된 사고실험에서도 '유일한 한 점을 공유한다.' 또는 '$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ 은 하나의 점으로 이루어진 집합이다.' 와 같은 결과가 나오기 때문에 '축소선분열의 원리' 에 참인 해석을 부여함을 알 수 있다. 여기서 주목해야 하는 것은, 수정된 사고실험에

10) 실수모델의 구성은 점의 집합으로서의 직선을 인정하는 기하학체계와 실수체계와 관련해 상대적 무모순성(relative consistency)을 입증하는 과정에 해당한다고 할 수 있다 [8].

11) 원래의 사고실험이 무한집합을 사용했을 때에 무한분할 상황 속에서 '선분의 구성성분이 무엇인가' 를 알아보는 것이었다는 것을 고려하면, 두 종류의 실험 모두는 무한집합을 사용했을 때에 '선분은 무한분할가능하다.' 와 '선분은 점으로 이루어졌다.' 는 두 주장이 양립하는지에 대한 것이라 할 수 있다.

서는 '자연스러운 선분' 이 아니라 '서로 떨어져 있는 점들의 집합으로서의 구간' 을 명시적으로 다루었다는 것이다. 이러기에, 수정된 사고실험에서 실제로 다룬 것은 '서로 연결되어 있지 않은 점들의 집합' 이 '자연스러운 선분' 에 대한 모델이 되는지를 알아보는 것이라 할 수 있을 것이다.

데데킨트가 연속체의 구성성분이 지닌 특성이 무엇인지에 대해 오랜 관심을 가져왔다는 것을 고려하면, 원래의 사고실험과 함께 수정된 사고실험도 수행했을 개연성이 있을 것으로 판단된다. 이러한 추측은 데데킨트의 언급을 통해 그 신빙성이 뒷받침된다고 할 수 있다. 1858년 무렵부터 10년 이상 동안 연속성의 본질을 규명하고 실수를 구성하던 작업을 소회하면서, 데데킨트는 '연속체의 구성성분은 서로가 연결되는 특성을 가지고 있다.' 는 사항에 대해 강하게 의심하고 오랫동안 연속체가 가지고 있는 특성을 드러내고자 노력했음을 명확히 말한다. 구체적으로, 그는 '가장 작은 부분들에서 끊어지지 않은 연결(unbroken connection in the smallest parts)' 이 연속성의 본질로서 부적절하다고 보고 그 본질을 찾던 과정에 대해 다음과 같이 말한다.

> "이러한 연속성은 무엇에 달려있는가? 모든 것은 이 질문에 대한 답에 달려있는데, 오직 이 답을 통해서만 모든 연속적인 영역에 대한 탐색의 과학적 기초를 얻을 수 있을 것이다. 하지만 가장 작은 부분에서 끊어지지 않은 연결에 기초해서 애매모호하게 언급한 것으로부터는 아무런 답을 얻을 수 없다 ; 문제는 어떤 타당한 연역을 위한 기초로 기능할 수 있는 연속체에 대한 정확한 특성을 지적하는 것이다. 나는 오랫동안 성과를 내지 못한 채 이 문제에 대해 숙고하였는데, 나는 마침내 찾던 것을 알아내게 되었다. 이 발견은, 아마도 다른 사람에 의해 제각각으로 평가될 것이다 ; 하지만 대다수의 사람들은 그 내용이 아주 평범하다는 것을 알게 될 것이다. 이전 단원에서, 직선의 각 점 p는 그 직선을 두 부분으로 분리(separation) 해서 한 부분의 모든 점이 다른 부분의 모든 점보다 왼쪽에 위치하게 된다는 사실을 다루었음을 상기해보자. 나는 연속성의 본질이 이러한 사실의 역이라는 것을 알게 되었다 [9, p. 771]."

데데킨트의 회상에서 드러나듯, 그는 연속체의 본질을 '연결(connection)' 이 아닌 '분리(separation)' 의 측면에서 드러내고자 하였다. 왜 그랬을까? 그 이유는, 그가 연속체에 대한 기본전제가 달라짐에 따라 연속체를 두 대상으로 분리시켰을 때의 결과도 확연히 달라짐을 인식했기 때문이라 할 수 있다. '연속체의 구성성분은 어떤 다른 구성성분과 반드시 연결되어 있어야 한다.' 는 것으로부터 '연속체의 구성성분은 서로가 분리되어있는 점이다.' 는 것으로 그 전제가 변함에 따라 선분(또는 직선)을 두 부분으로 분리시킬 때의 양상도 완전히 달라질 수밖에 없는데, 데데킨트는 이 현상에 주목했다고 할 수 있다.

아리스토텔레스에게 선분이란 그 양 끝에 점이 위치하는 '폐구간 모양' 의 선분일 뿐이고, 이

선분을 자르더라도 같은 유형인 두 개의 '폐구간 모양' 의 선분으로 나누어진다. 자르는 위치에 있던 점은 단지 위치이고 경계일 뿐이기 때문에, 그 위치로서의 점은 두 개의 선분이 모두 가져가게 된다. 두 개의 선분은 각각 시작점과 끝점을 가지는데, 이 두 개의 선분을 접촉시키면 다시 하나의 원래 선분으로 합쳐지게 된다. 왜냐하면 그의 이론에 따르면 '점 대 점' 으로 접촉한다면 '전체 대 전체' 의 접촉이므로 그 두 점은 하나의 같은 점에 되기 때문이다. 아리스토텔레스에게 있어서, 어떤 선분을 이와 같이 두 선분으로 분리하는 작업은 그보다 작은 두 선분으로 각각 분할(division) 하는 것에 해당한다고 할 수 있다.

하지만 데데킨트에게 있어서, 선분은 두 개의 선분으로 분리되지 않는다. 어떤 선분의 양 끝점의 사이에 있는 점에서 그 선분을 잘라냈다고 하자. 그러면 그 절단부에 위치한 점은 위치일 뿐 아니라 구성성분이므로, 그 점은 분리된 두 영역 중 어느 한 곳으로 가야한다. 그래서 '폐개구간과 폐구간' 또는 '폐구간과 개폐구간' 의 형태로 분리가 이루어지게 되어, 분리되어 남은 두 영역 중 한 영역만 통상적인 선분이 된다고 하겠다.

물론, 데데킨트는 이러한 선분(또는 직선) 을 분리했을 때의 이러한 뚜렷한 양상의 차이를 연속성의 본질로 내세우고자 했다. 여기서, 데데킨트는 어떤 결정적인 사고실험을 수행했다고 할 수 있다. 그의 소회에서 밝혔듯이, 그는 처음에는 '직선의 각 점 p는 그 직선을 두 부분으로 분리해서 한 부분의 모든 점이 다른 부분의 모든 점보다 왼쪽에 위치하게 된다.' 는 성질이 직선의 본질인지의 여부에 대해 고찰했을 것이다. 하지만 이러한 성질은 유리수에 대응되는 점만으로 이루어진 가상의 허술한 직선도 가지고 있다. 유리수 집합의 임의의 원소는 유리수의 집합을 두 부분으로 분할해서 한 부분의 모든 원소가 다른 부분의 원소보다 왼쪽에 위치하게 할 수 있기 때문이다.

이에, 데데킨트는 '직선은 점들로 더 이상 들어갈 것도 없이 빼곡히 채워진 집합이다.' 는 특성을 직선을 두 부분으로 자르는 상황과 관련해 어떻게 드러낼 수 있을지에 대해 고민했을 것이다. 즉, 그는 이러한 직선의 특성을 명확히 나타내기 위해 '직선의 임의의 점이 있을 때, 그 점이 어떤 한 영역에만 들어가는 방식으로 그 선분이 왼쪽 영역과 오른 쪽 영역으로 분리된다.' 와 같은 초기 착상을 어떻게 수정할지에 대해 숙고했을 것이다.

여기서, '나는 연속성의 본질이 이러한 사실의 역이라는 것을 알게 되었다.' 는 말에서 알 수 있듯이, 데데킨트는 초기착상의 가정과 결론을 뒤집는 방식을 취하여 '직선이 왼쪽과 오른쪽 영역으로 분리가 될 때, 그 직선을 그처럼 두 부분으로 잘라내는 점이 그 직선 위에 있다.' 는 성질을 고안하고, 유리수-점으로만 이루어진 가공의 직선에 적용해보는 사고실험을 했을 것이다. 그리고 이 가상의 직선의 빈틈에서 이 직선을 자르는 상상을 통해, '가상의 직선은 왼쪽과 오른쪽 영역으로 분리됨에도 불구하고 이 직선은 그렇게 잘라내는 점을 가지고 있지 않다.' 는 것을 확인하였을 것이다. 그리고 그는 이러한 사고실험의 바탕 위에서 데데킨트 절단에 의해 실수를 구성할 수 있었을 것이다.

4 극한과 무한집합의 밀접한 관련

우리는 19세기 말의 수학계에서 순환논리를 피하기 위해 극한이 아닌 방식으로 실수를 구축해 나가면서 무한집합 이론을 사용하는 몇몇 과정을 살펴보았다. 이러한 무한집합, 특히 점-집합의 사용은 수학에 어떤 영향을 끼친 것일까?

수학사적으로 본다면, 집합 및 그에 기초한 관계 개념에 의해 수학의 대부분이 통합적으로 체계화되었다는 것, 집합론에 대한 역설의 제기와 그에 따른 다양한 수학기초론이 등장했다는 것 등을 그 주요한 예로 들 수 있을 것이다. 물론, 이것은 수학계가 겪은 큰 변화의 모습을 잘 보여준다. 하지만 더 중요한 것은 수학을 할 때의 인식의 변화라 할 것인데, 특히 변수와 극한에 대한 관점이 변하게 된 것이 근본적 변화라 할 것이다.

구체적으로 말해, 변수와 극한을 다루는 수학적 활동은 이전과 비교했을 때 외적으로 유사한 것처럼 보이지만, 점-집합에 의해 산술적 연속체를 정의하는 방식을 수용함으로써, 그러한 개념에 대한 해석이 확연히 바뀌게 되었다고 할 수 있다.

데데킨트 이전까지 연속변수는 암묵적으로 '직선에서 변하는 점의 원점으로부터의 위치 또는 변하는 구간의 길이를 임의로 취할 수 있는 변수' 정도로 간주되었다. 이것은 연속변수를 동적으로 취급하는 입장을 나타내는데, 그러한 해석을 했던 이유는 다음과 같다 : 연속체로서의 직선에서 점은 단지 그 직선에서의 위치를 나타낼 뿐이며 점이 그 직선을 구성하는 것은 아니다. 이때, 직선은 끊어지지 않고 연결되어 있어서, 어떤 점이 그 직선을 따라서 움직이게 되면 직선상의 모든 위치를 빠짐없이 통과한다. 연속변수는 이러한 운동에서 선분의 변하는 길이를 대신하는 것이다.

이와 비교해, 연속체를 점이나 개별적인 원소의 집합인 것으로 간주하게 되면 연속변수를 정적으로 취급할 수밖에 없게 된다. 왜냐하면 연속변수는 산술적 연속체인 실수집합의 서로 분리된 원소 중에서 임의로 선택하는 것이기 때문이다. 이에 대해, 칸토르와 더불어 점-집합 이론의 초기 기여자였던 쇤플라이즈(Schoenflies, A.)는 다음과 같이 말한다.

> "변수의 개념, 특히 독립변수의 개념은 원래 소박한 기하적 연속체의 개념에 일치되는 것이었을 뿐 더 정의되지 않았다; 이제는 변수의 영역을 어떤 값의 집합 또는 점-집합으로 허용하는 것이 아주 흔한 일이 되었다 [16, p. 83, 재인용]."

그런데 이러한 정적인 해석이 수학 전체에 파급력을 가지게 된 것은 그 해석을 통해 함수를 다루었기 때문이라 할 수 있다. 쇤플라이즈도 수학의 모든 식과 법칙에 점-집합 이론이 스며들 때 매개체가 함수였다고 주장한다 [16]. 즉, 함수를 다룰 때에도 점-집합 이론에 근거해 연속변수에 대한 정적인 해석을 그대로 적용했던 것이 수학 전체의 변화를 가져왔다는 것이다. 그런데 이 정적인 해석이 함수를 통해 적용된 사례로서 가장 중요한 것이 바로 '극한으로의 침투' 라 할 수 있다.

역사적으로 볼 때, 볼차노와 코시뿐만 아니라 바이어슈트라스도 초기의 연구에서 기하적인 직관에 기초해서 동적인 연속변수 개념을 암암리에 사용하면서 극한을 정의하였다. 그런데 데데킨트와 바이어슈트라스의 중기 연구 이후로는 (연속) 변수를 단지 집합의 원소를 대신하는 것으로 간주하기 시작하면서 극한을 정의하기 시작했다고 할 수 있다.

데데킨트는 "변하는 크기가 고정된 극한값에 접근한다는 개념을 논의할 때, 그는 코시가 그보다 앞서 했던 것처럼 연속적 크기에 대한 기하학의 믿을만한 근거에 의존(p.336)." 하였고, 바이어슈트라스도 초기 연구에서 유사하게 생각하였다. $\epsilon - N$ 및 $\epsilon - \delta$ 방식의 '수열 및 함수의 극한에 대한 정의' 를 동적인 연속변수 개념에 기초하여 해석했던 시기도 있었던 것이다. 예를 들어, 바이어슈트라스의 함수의 극한에 대한 정의에 대해서도 $\lim_{x\to a} f(x) = L$은 모든 ϵ에 대하여 $\delta > 0$가 존재하여, x가 a로 움직여 a로부터의 거리가 δ안에 머무를 때, $f(x)$가 L로부터의 거리가 ϵ안에 머무는 것을 의미하는 것으로 해석하기도 하였던 것이다. 하지만 그들은 수와 연속(체) 의 본질을 탐색하면서 연속변수를 정적으로 취급해야 할 필요성을 자각하게 되고 이에 기초하여 극한도 정적으로 다루게 된다 [1, 3].

구체적으로, 바이어슈트라스는 무한집합 이론에 기초한 정적인 연속변수 개념을 이용하면서부터는 극한에 대해 거의 완벽한 정적인 해석을 부여하게 된다. 즉, "변수는 구간의 모든 값들을 지나는 전진통로를 나타내지 않고 그 구간의 어느 한 값을 분리하여 가정하는 것을 나타낸다 [4, p. 333]." 고 간주하면서, 수열 및 함수의 극한을 완전히 정적으로 다루게 된다. 바이어슈트라스는 극한의 성격을 '가까이 간다' 는 동적 심상을 이용해 도달가능성의 문제를 다루던 것으로부터 선분 상의 점의 위치관계 또는 집합의 원소 사이의 순서 관계를 이용해 '가까이 있다' 는 근접성의 문제를 취급하는 것으로 변모시킨 것이다.

$\forall\epsilon > 0, \exists\delta(\epsilon) > 0$ s.t. $\forall x \in E, 0 < |x - a| < \delta(\epsilon) \longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon$과 같은 정의 안에는, 어떠한 움직임이나 시간의 흐름도 없다. 이러한 정의에서는 변수가 집합의 원소를 대신 나타낼 때, 그 x가 개구간 $(a - \delta(\epsilon), a + \delta(\epsilon))$의 원소가 될 때 $f(x)$가 개구간 $(L - \epsilon, L + \epsilon)$의 원소가 되는지의 여부를 다룰 뿐인 것이다. 여기서, 점과 실수를 동일시하기 때문에 개구간은 틈이 없는 추상적인 점들의 집합처럼 간주된다.

마찬가지로, $\forall\epsilon \in \mathbb{R}^+, \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N(\epsilon) \to |x_n - x| < \epsilon$과 같은 수열의 극한의 정의에도 어떠한 시간적-공간적 움직임은 남아있지 않다. 우리는, 이 정의를 만족하는 수열 $< x_n >$이 "$\forall\epsilon \in \mathbb{R}^+$ 에 대해 $\{n \in \mathbb{N} \mid |x_n - x| \geq \epsilon\}$ 이 항상 유한집합이 된다." 는 것을 만족함을 알 수 있을 뿐이다. 한편 이러한 무한집합과 극한 사이의 개념적 연결성과 관련해, 와일은 극한의 정의에 들어있는 실무한적 특징을 다음과 같이 밝힌다.

> "어떻게 이 수렴개념이 정의되는가? <모든 양수 ϵ에 대해서 조건 $a-\delta < x < a+\delta$를 만족하는 모든 실수 x에 대해서 $f(a) - \epsilon < f(x) < f(a) + \epsilon$이 만족되는 그러한 하나의 양수 δ가 존재해야 한다.> 그래서 우리의 태도는 여전히 정적이다.

> 그것의 특징은 <존재한다> 및 <모든> 이라는 말을, 자연수뿐만 아니라 연속체에서의 위치, 즉 자연수의 가능한 수열 또는 집합에 무제한으로 적용하는 것이다. 이것이 집합론의 본질이다 ; 집합론은 수열뿐만 아니라 그것의 부분집합의 전체를, 그 자신에 존재하는 대상의 닫힌 집합체라고 생각하고 있다. 이런 의미에서 집합론은 현실적 무한을 기초로 하고 있다 [17, 59–60]."

이제, 일련의 논의에 기초하여 서론에서 제기했던 $\bigcap_{n=1}^{\infty}[0,(\frac{1}{2})^n] = \{0\}$ 와 $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2})^n = 0$ 의 해석의 문제를 살펴보도록 하자. 이 연구에서는 이 결과를 구간(선분)의 무한분할이 마침내 종결되어 구간이 그것의 불가분자인 실직선 위의 점 0에 이르게 된다고 보는 것이 바른 해석인지에 대한 문제를 제기한 바 있다.

물론, 무한집합을 인정한다고 해도 그러한 해석은 전혀 타당하지 않다. 우선, 우리는 $\epsilon - N$ 정의를 사용했을 때, $\forall\epsilon \in \mathbb{R}^+$, $\exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N(\epsilon) \to |(\frac{1}{2})^n - 0| < \epsilon$ 이 성립함을 알고 있다. 그런데 이것은 집합론의 관점에서 $\forall\epsilon \in \mathbb{R}^+$ 에 대해 $\{n \in \mathbb{N} | \, |(\frac{1}{2})^n| \geq \epsilon\}$ 이 유한집합[12)]임, 즉 수열 $(\frac{1}{2})^n$ 이 0과의 '근접성' 의 조건을 충족한다는 것에 대해 말할 뿐이지 그 수열이 0에 도달하는지의 여부에 대해서는 전혀 말하지 않는다.

그리고 $\bigcap_{n=1}^{\infty}[0,(\frac{1}{2})^n] = \{0\}$ 은 어떤 구간에 대한 무한분할이 종결되어 마침내 불가분량인 점에 이르게 됨을 보여주는 것도 아니다. 기본적으로 구간의 무한분할성을 인정하기 때문에, 어떠한 $n \in \mathbb{N}$ 에 대해서도 $(\frac{1}{2})^n$ 이 0에 도달하는 것도 아니고 $[0,(\frac{1}{2})^n]$ 이 한 점으로 변하는 것도 아니다. 앞 절에서 분석했듯이, 이러한 결과는 기하학적 관점에서는 구간의 무한분할성과 구간의 점에 의한 구성을 동시에 인정했을 때 축소하는 모든 구간이 공유하는 것은 하나의 점임을 나타낸다고 하겠다.

한편, 우리는 이러한 결과에서 완결된 실체를 찾을 수 있다. 그것은 모든 구간이 공유하는 점인 0이다. 그리고 이 점에 대응하는 무한집합 $\{[0,(\frac{1}{2})^n] | n \in \mathbb{N}\}$, 무한집합 $\{(\frac{1}{2})^n | n \in \mathbb{N}\}$ 도 완결된 실체이다. 그러기에, 수열 <$(\frac{1}{2})^n$> 의 극한값인 0의 존재성은 이 공유하는 점의 존재성에 의해 확보된다고 할 수 있다.

5 결론 및 교육적 시사점

서론에서 밝혔듯, 수학교사교육에서는 무한집합론과 극한에 대한 $\epsilon - N$, $\epsilon - \delta$ 방식의 형식적 정의를 모두 다루지만 현재의 교육은 실무한과 가능적 무한의 구분에 있어 일종의 개념적 혼동을 유발할 소지가 있다. 이 연구는 이러한 현상의 이면에 무한집합과 극한을 관련시키지 못하는 교육이 자리하고 있다는 것에 주목하고, 무한집합과 극한이 어떤 관련을 맺으면서 성장했는지에 대해 분석하고 그 분석결과를 바탕으로 하여 수학교사교육을 개선하기 위한

12) 수열의 항들의 개수가 유한개이기 때문에 필요조건으로서 그 항들의 집합이 유한집합임.

시사점을 도출하고자 하였다.

실무한을 인정하는 것의 기준이 무한집합을 완결된 실체로 인정하는 것임은 주지의 사실이다. 이와 관련해, 이 연구는 '무한집합의 존재에 대한 인정이 극한과 관련해 도달가능성의 실현에 대한 인정을 함의하는 것일까?', '무한집합을 사용할 때 변수와 극한에 대한 해석은 어떻게 해야 하는가?' 등의 기본적인 문제도 다루었다.

물론, 오늘날에는 '도달가능성의 실현' 의 관점에서 극한을 다루지 않는다. "바이어슈트라스의 극한 이론의 정확성에 비추어 보면 그 문제[13)]는 전체적으로 부적절한 것으로 보인다. 극한 개념은 접근한다는 개념을 포함하지 않고, 단지 문제의 정적인 상태만을 포함한다. (중략) $f(x)$가 $f(a)$ 또는 L에 도달하는 것은 아니다 [4, p. 333]." 왜냐하면 $\epsilon - N$와 $\epsilon - \delta$ 방식의 형식적 정의는 '가까이 감' 이 아니라 '가까이 있음' 에 기초하여 극한을 다룸으로써 도달의 여부를 다룰 필요가 없어지도록 했기 때문이다.

그런데 이러한 극한에 대한 정적인 해석은 (연속) 변수에 대한 정적인 해석에 기초한다. 여기서, 무한집합과 극한 사이의 연결은 무한집합의 원소를 나타내는 변수를 정적으로 해석하는 것을 통해 이루어짐을 알 수 있다. 와일의 분석처럼, 극한의 정의에서 <존재한다>, <모든>이라는 용어를 어떤 완결된 무한집합과 관련해 여전히 정적으로 사용하는 것이 극한에 정적인 특성을 부여한다고 하겠다.

하지만 여기서 교육적 차원에서 음미하고 주목해야 할 사항이 있다. 그것은, 대학수학교육에서 $\epsilon - N$ 및 $\epsilon - \delta$ 방식에 의해 극한을 줄곧 정적으로 취급해 왔음에도 불구하고 예비 및 현직 수학교사들은 '수열이 무한하게 계속되지만 어느 순간 완결된 값을 갖는다.' 는 것이 무엇을 의미하는지에 대해 항상 혼란스러워했다는 것이다. 물론, 이것은 '실무한으로서의 무한집합과 완결된 값으로서의 극한값이 어떤 관련이 있는지를 이해하지 못하는 현상' 이라 할 수 있다.

그러나 이러한 진단은 상황을 개선하기 위한 처방이 쉽게 마련될 수 있다는 것을 의미하지 않는다. 예를 들어 '무한집합 $\{(\frac{1}{2})^n | n \in \mathbb{N}\}$ 자체가 완결된 극한값으로서의 0이다.' 라고 일종의 완성된 지식을 직접 가르치더라도, 학생들은 이내 '그러면, $(\frac{1}{2})^n$이 0에 도달한다는 말이 아닌가?' 라는 생각을 품기 마련이다.

연구자는 무한집합과 극한을 개념적으로 연결시키는 지적인 필요를 느끼게 하는 교육만이 이러한 문제를 근본적으로 해결할 수 있다고 판단하였다. 이에, 이 연구에서는 '극한과 무한집합이 서로 어떤 영향을 주면서 발생하였는가?' 의 문제를 다루면서 '무한집합과 극한이 관련될 수밖에 없었던 이유' 에 대해 분석하였다.

이 연구에서 무한집합과 극한의 상호작용의 역사에 대해 분석한 결과는 다음과 같이 요약할 수 있다: 19세기 중엽 이후에 무한집합을 사용하기 시작했던 계기는 극한값의 존재를 미리 가정하는 순환논리를 피하기 위해서였는데, 무리수를 유리수열 또는 유리수의 무한집합으로

13) 여기서의 문제는, 제논의 역설에서와 같이, '도달가능성의 실현' 관점에서 다루는 극한의 문제를 뜻한다.

정의함으로써 이 순환성의 문제를 해결하였다. 직선을 점의 무한집합으로 간주하면서부터는 직선 위의 각 점과 무한집합으로서의 실수를 대응시킬 수 있었다. 이러한 결과에 기초해 실수집합을 추상적인 점의 집합처럼 취급하면서부터, 실수집합에 대한 연속변수는 개별적인 원소를 나타내는 정적인 특성을 가지게 되고, 이러한 변수를 이용하는 극한의 정의는 도달가능성이 아니라 근접성을 다루는 것으로 그 성격이 바뀌게 되었다.

이러한 역사에 대해 '실수를 구축하여 해석학의 기초를 튼튼하게 한다.' 는 19세기 수학계의 목표에 초점을 맞추어 '해석학의 산술화(arithmetization of the analysis)' 라 지칭하고, '이산적인 점에 대응시키는 작업을 통해 산술적 연속체로서의 실수를 구축한다.' 는 핵심적인 특징에 주목하여 '이산화 프로그램(discretization program)' 이라 부르기도 한다 [5, 10, 11, 15]. 그런데 무한집합과 극한의 관련성을 이해하기 위해서는 결국 이 역사적 경험을 교육적으로 활용할 필요가 있다. 왜냐하면 극한값의 존재성을 무한집합의 총체성으로 대체하는 것이 왜 그럴듯한지를 납득했던 과정이 그 역사의 경험 안에 담겨있기 때문이다.

이 연구의 분석을 통해, 우리는 그러한 역사의 경험 중 가장 중요한 것이 '연속체의 구성성분이 점이라는 것에 대해 심적 확실성을 갖게 되었던 경험' 임을 알 수 있었다. 구체적으로, '선분의 무한분할과 선분의 점에 의한 구성의 양립을 인정하게 되는 경험' 이 해석학의 산술화 역사 속에서 이산화 프로그램이 작동할 수 있도록 한 원동력이라고 할 수 있다. 이산화 프로그램은 기존의 '연속체를 구성하는 부분은 그 연속체와 동일한 성질을 가져야 한다.' 는 통념을 극복할만한 심적 근거를 갖춤으로써 출발했다고 볼 수 있는 것이다.

이 연구에서는 직선에서의 '위치' 에 불과했던 점을 그 직선을 구성하는 '성분' 으로 인정하는 경험에 대해 논의하면서, 무한집합을 인정했을 때에 기하적 축소선분열이 공유하는 부분이 어떤 한 점이라는 것을 직관하게 되는 사고실험이 '선분을 점유하는 부분으로서의 점' 을 인정하는 데에 도움이 되었을 것이라 예측하였다. 즉, 축소하는 모든 선분들이 공통적으로 차지하는 부분이 '하나의 점' 이라는 사실을 파악함으로써 '점이 선분의 구성성분이다.' 는 것에 대해 확실성을 느꼈을 것으로 판단하였다.

이러한 사항을 고려할 때, 만약 '안내된 재-발명' 을 통해 대학수학교육의 난제인 '유리수만 가지고 무리수를 만드는 작업' 을 지도하려고 한다면, 축소선분열이 공유하는 유일한 점의 존재성을 적극적으로 활용하는 것에 대해 고려할 여지가 있다고 하겠다. 이제, 지금까지의 논의에 기초하여, 예비수학교사들에게 '무한집합 자체를 완결된 극한값으로 간주할 수 있도록 안내하는 교수-학습' 과 관련해 세 가지 사항을 제안하고자 한다.

첫째, 유리수만을 가지고 무리수를 정의하는 활동을 시도하면서 유리코시수열의 극한으로 무리수를 정의하는 방식의 논리적 문제점을 알게 할 필요가 있다. 예비수학교사들은 코시처럼 직선에 대응하는 실수가 있는 것이 자명하다고 여기기 때문에, 유리코시수열의 극한을 다루는 것 자체가 무리수를 암묵적으로 가정하는 것임을 자각할 필요가 있는 것이다. 19세기 중기의

수학자들이 코시의 논리적 허점을 인식하면서부터 무리수를 만들었던 것처럼, 실수 구성에 대한 교수-학습은 '무리수의 존재' 를 자명하게 생각하는 것에서 탈피하는 것으로부터 출발해야 한다고 할 수 있다.

둘째, 축소선분열에 대한 사고실험을 통해 점이 직선에서 '위치' 를 나타낼 뿐만 아니라 그 직선의 '구성성분' 이 된다는 것에 대해 심적 확실성을 가질 수 있도록 할 필요가 있다. '연속체의 구성성분은 무한히 분할되는 성질을 지녀야 하고, 어떤 구성성분은 다른 구성성분과 연결되어있어야 한다.' 는 생각은 거대한 인식론적 장애였다. 수천 년간 이런 생각에 기초해 연속체의 구성성분은 점이 될 수 없다고 보았지만, 연속체를 점의 집합으로 간주하면서부터 수학은 비약적으로 발전하게 된 것이다.

그러기에, 이러한 인식론적 장애를 극복해보는 사고실험 경험은 '이산화 프로그램' 에 대한 재-발명 학습의 핵심이 되어야 한다고 하겠다. 이 제안과 관련해, 이 연구에서의 '무한집합을 인정했을 때 축소하는 선분들이 공유하는 것을 알아보는 사고실험' 은 '점이 직선의 구성성분이 된다.' 는 심상을 형성하는 데에 도움이 될 것으로 기대한다.

셋째, 유리축소구간열이 공유하는 점을 이용해 실수를 정의하면서, 무한집합과 극한값의 관계를 파악할 수 있도록 해야 한다. 이것은 예비수학교사들이 '유리축소구간열이 공유하는 유일한 점의 존재성에 의해, 무한집합 자체가 완결된 실체로서의 극한값이 됨' 을 이해할 수 있어야 한다는 것이다. 이에 대한 개략적인 지도의 방향은 다음과 같다.

$I_n = [x_n, y_n]$을 유리수 x_n, y_n에 대응하는 점을 양 끝점으로 가진 폐구간 (점들의 집합)으로 정의하고 n번째 선분 I_n의 길이는 n이 증가할 때 0에 원하는만큼 가깝게 된다고 하자. 그러면, 유리축소구간들의 교집합 $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$은 하나의 점으로 이루어진 집합이 되고 유리수열 $< x_n >$과 $< y_n >$은 유리코시수열이 된다. 이 상황에서 이 점의 유일한 존재성을 활용하여 유리수만을 가지고 직선의 각 점에 대응하는 실수를 어떻게 만들 수 있는지에 대해 다룸으로써, 무한집합이 극한값으로 간주되는 과정을 이해할 수 있어야 한다는 것이다.

이때, 유리수만을 가지고 실수를 만드는 방식은 유리코시수열 $< x_n >$과 $< y_n >$, $\{I_n | n \in \mathbb{N}\}$ 등을 이 점과 동일시하는 것이다. 즉, 유리코시수열 $< x_n >$과 $< y_n >$, $\{I_n | n \in \mathbb{N}\}$ 자체를 이 점에 대응하는 실수로 정의하고 수열 $< x_n >$과 $< y_n >$의 극한값이 그 실수가 되도록 하는 것이다.

만약 이러한 과정을 거치지 않고 예비수학교사들이 처음부터 유리코시수열의 동치류 또는 그 대표원으로 실수를 정의하도록 배운다면, 그들은 실수에 대해 어떤 생각을 가지게 될까? 그들의 마음에 실수가 보일까? 순환논리를 피했지만 공허함을 느낄 수밖에 없을 것이다. 연구자는, 축소구간들이 공유하는 유일한 점이 보일 때에야 실수에 대한 심상이 형성되고, '무한집합 $\{(\frac{1}{2})^n | n \in \mathbb{N}\}$ 자체가 완결된 극한값으로서의 0이다.' 와 같은 말이 완성된 지식으로 탈바꿈한다고 생각한다.

이 연구에서 이 세 가지 제안을 제시한 이유가 있다. 그것은, 이러한 제안들이 학교수학을 통해 무한소수와 극한을 가르칠 수학교사가 갖추어야 할 필수적인 소양에 대한 것이기 때문이다. 그들은 '$0.9999\cdots = 1$' 에 대해 축소구간열 $< I_n = [1-(\frac{1}{10})^n, 1] >$이 공유하는 유일한 점으로서의 1을 마음속으로 그릴 수 있어야 한다. 그리고 이러한 1은 $\{I_n | n \in \mathbb{N}\}$, 수열 $< 1-(\frac{1}{10})^n >$ 와 동일시 될 수 있기 때문에 $\lim_{n\to\infty} 1-(\dfrac{1}{10})^n = 1$이 됨을 이해할 수 있어야 하는 것이다. 요컨대, 극한값의 존재성을 무한집합의 총체성으로 대체하는 것에 대한 심적 근거를 가질 수 있어야 하는 것이다.

레이코프와 누네즈는 '직선은 점으로 이루어졌다.' 는 지식이 일종의 은유라고 주장한다 [15]. 하지만 수학의 역사는, 이 지식의 사용은 '무한집합을 가지고 하는 사고실험' 에 의해 직선의 구성성분이 점이라는 것에 대한 심적 확실성을 가질 수 있었기 때문에 가능했으리라는 것을 암시해준다. 또한, 이 연구에서 살펴보았듯 19세기말의 수학계는 그러한 바탕 위에 무한집합과 극한값을 직선 위의 점을 통해 개념적으로뿐만 아니라 심리적으로도 연결시켰고, 극한의 기초인 실수와 연속체를 다룸에 있어 무한집합이 가장 중요한 도구가 된다는 것을 명확히 인식하게 되었다고 할 수 있다. 그러기에, 역사 발생적 원리의 시각에서 이 연구에서는 어떤 은유로서가 아니라 사고실험을 통해서 점의 집합인 직선을 도입하는 수학교사교육이 이루어져야 함을 제안하고자 하였다.

References

1. M. Anderson, V. Katz, R. Wilson, *Who gave you the epsilon?*, Washington, DC, Mathematical Association of America, 2009.
2. J. L. Bell, *The Continuous and the Infinitesimal in Mathematics and Philosophy*, Milano, Polimetrica, 2006.
3. U. Bottazzini, *The Higher calculus: A History of Real and Complex Analysis From Euler to Weierstrass*, New York, Springer-Verlag, 1986.
4. C. B. Boyer, *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*, New York, Dover Publications, 1949. 김경화 역, 미적분학사—그 개념의 발달, 서울, 교우사, 2004.
5. C. B. Boyer, *A History of Mathematics*, Wiley, 1991. 양영오, 조윤동 역, 수학의 역사(하), 경문사, 2000.
6. R. Calinger, *Classics of Mathematics*, New Jersey, Prentice Hall, 1995.
7. R. Dedekind, *Essays on the theory of numbers*, New York, Dover Publications, 1963.
8. H. Eves, *Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*, Boston, Pws-Kent, 1990. 허민, 오혜영 역, 수학의 기초와 기본개념, 경문사, 1999.
9. W. B. Ewald, *From Kant to Hilbert, A Source Book in the Foundations of Mathematics*, New York, Oxford University Press, 1999.
10. I. Grattan-Guinness, *The Development of the Foundations of Mathematical Analysis From Euler to Riemann*, Cambridge, MIT Press, 1970.
11. I. Grattan-Guinness(ed.), *From the Calculus to Set Theory*, London, Duckworth, 1980.

12. R. HERSH, *What is Mathematics, Really?*, New York, Oxford University Press, 1997. 허민 역, 도대체 수학이란 무엇인가? 서울, 경문사, 2003.
13. KIM, N. H. et al, Mathematics Curriculum and a Study of Teaching Materials, Seoul, KyungMoon, 2017. 김남희 외, 수학교육과정과 교재연구, 서울, 경문사, 2017.
14. KIM, Y. W., KIM, Y. K., *Set Theory and Mathematics*, Seoul, WooSung, 1991. 김용운, 김용국, 집합론과 수학, 서울, 우성문화사, 1991.
15. G. LAKOFF, R. E. NUNEZ, *Where Mathematics Comes From*, New York, Basic Books, 2000.
16. C. MCLARTY, Defining sets as sets of space, *Journal of Philosophical Logic* 17 (1988), 75–90.
17. H. WEYL, *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, Princeton University Press, 1947. 김상문 역, 수리철학과 과학철학, 서울, 민음사, 1990.