韓國數學敎育學會誌 시리즈 C <初等數學敎育>
https://doi.org/10.7468/jksmec.2018.21.2.131
2018. 4. 제 21권, 제 2호, 131-150

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
April. 2018, Vol. 21, No. 2, 131-150

과제의 구조화 정도에 따른 초등학생들의 통계적 변이성 이해 양상에 대한 사례 연구

한 채 린 (서울 신곡초등학교)
이 경 원 (서울대학교 대학원)†
김 도 연 (서울대학교 대학원)
배 미 선 (서울 국제고등학교)
권 오 남 (서울대학교)

수학 과제의 구조는 이를 해결하는 학생들의 배움의 양상에 영향을 미친다. 이 연구에서는 구조화된 정도가 다른 두 가지 문제를 소집단 토론 활동으로 해결하는 초등학생들의 통계적 변이성 이해 양상을 탐색하였다. 비구조화된 문제와 구조화된 문제에서 학생들의 통계적 변이 추론 발달 정도는 비슷하였지만 비구조화된 문제에서 학생들은 보다 다양한 아이디어를 전 과정에 걸쳐 역동적으로 제시하였으며, 구조화된 문제에서는 나타나지 않았던 가설에 기반한 추론의 양상을 보였다. 또한 비구조화된 문제에서 모든 학생이 끝까지 활발하게 참여하는 모습을 보였으며, 구조화된 문제에서는 일부 학생이 소외되는 현상이 나타났다. 이러한 차이는 과제의 구조화된 정도에서 비롯되었음을 확인하였다.

I. 서론

수학 과제의 목적은 학습자가 민감하게 인지하고 수행할 수 있는 역량을 갖추도록 수학적으로 유익한 활동을 시작하게 하는 데에 있다(Mason & Johnston-Wilder, 2006). 이러한 목적을 실현하기 위하여 교사는 어떠한 과제를 선택해야 하는가? 전미 수학교사 협의회(National Council of Teachers of Mathematics, 이하 NCTM)에서는 학교수학을 위한 원리와 규준(NCTM, 2000)에서 학생들의 이해력 및 사고력을 길러주고 수학적인 이해와 기술을 발전시키는데 도움을 줄 수 있으며, 수학적 아이디어를 논리적 구조로 발전시키고 서로 연결하여 학생들을 자극하는 과제를 좋은 수학 과제라고 제안한 바 있다.

Brousseau (1997)는 교사가 주어진 과제를 통해 기대할 수 있는 명백한 행동을 분명히 지시할수록, 학습자 스스로 과제를 개발하거나 재구성하지 않아도 그 행동을 보기는 더욱 쉬워진다고 하였다. 즉, 비구조화된 과제는 잘 구조화된 과제보다 과제에 대한 가르침이 불충분하기 때문에 학습자 스스로 구성하고 탐색할 기회가 많으며, 고로 비구조화된 과제가 능동적인 수학 학습에 더욱 효과적일 수 있다는 것이다. 비구조화된 과제를 구성하는 비구조화된 문제는[1] 학습자가 능동적으로 수학을 할 수 있도록 정해진 맥락으로부터 새롭게 출현하여 상황화된 것으로서, 학습자들에게 보다 더 흥미 있고 의미가 있으며 학습자 스스로 문제를 정의하고 문제 해결에 필요한 정보와 기술을 결정하도록 한다는 특징을 지닌다(Chi & Glaser, 1985). 이에 이 연구에서는 문제의 목표가 불명확하거나 잘 정의되지 않은 문제로, 다양한 해결책을 가지고 있거나 해결

* 접수일(2018년 3월 30일), 심사(수정)일(2018년 4월 17일), 게재확정일(2018년 4월 23일)
* ZDM분류 : C33
* MSC2000분류 : 97C30
* 주제어 : 과제의 구조화, 비구조화된 과제, 통계적 변이성
* 이 논문은 2016년 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단의 지원(NRF-2016S1A3A2925401)을 받아 수행된 연구임.
† 교신저자

1) 사전적으로 과제(task)는 맡겨진 일, 문제(problem)는 해답을 요구하는 물음을 뜻한다. 이 글에서는 수학적 과제를 수학적 문제의 상위개념으로 보았다. 예를 들면 ‘2×3=?’과 같은 수학 문제들이 모여 ‘곱셈 연습’이라는 하나의 수학 과제를 구성하는 것과 같다. 수학 과제를 구성하는 데에 있어 복수의 수학 문제가 꼭 필요한 것은 아니며, 과제의 목적에 따라 하나의 수학 문제가 곧 수학 과제가 될 수도 있다. 문제는 해결하는 것이고, 과제는 문제의 해결을 통하여 완성하는 것이다(Hiebert et al., 1997).

책이 없는 경우 비구조화된 문제라고 정의한다.

이러한 비구조화된 문제는 학생들로 하여금 문제를 조직하고 문제의 해결책을 찾는 것을 어렵게 만듦으로써(Ge & Land, 2003), 학생들이 필연적으로 실패를 경험하게 한다. 이때의 실패는 문제의 요구를 해결하지 못했다는 의미의 실패이지, 학습에서의 실패는 아니라는 관점에서 이 연구는 비롯되었다. Kapur (2008, 2010)는 비구조화된 문제 해결 과정에서 경험하는 실패가 이후의 수학적 문제 해결 능력을 향상시킨다고 주장하며, 비구조화된 문제 해결을 통한 학습을 생산적 실패(productive failure)라고 명명한 바 있다. 그러나 그는 생산적 실패와 비생산적 실패를 장기적 관점에서의 학습을 극대화시켰는지의 여부, 즉 학습의 과정이 아닌 학습의 결과에 따라 구분하였고(Kapur & Bielaczyc, 2012), 그 실패의 과정 안에서 학습이 일어나는 구체적인 양상에 주목하지는 않았다. 비구조화된 문제가 미래의 수학 학습이 아니라 현재의 수학 학습을 활성화하여 수학적으로 유익한 과제임을 증명하기 위해서는 비구조화된 문제 해결 과정 양상 자체가 수학 학습이 될 수 있음을 밝히고, 구조화된 문제 해결 과정과의 비교를 통해 그 가치를 입증할 필요가 있다.

이에 이 연구에서는 초등학교 6학년 학생들이 통계적 변이성 개념에 관한 비구조화 문제와 구조화 문제 해결 과정을 비교하였다. 소집단 협동학습을 통하여 문제를 해결하는 과정에서 드러난 학습 양상의 차이를 분석하여 비구조화된 문제가 수학적으로 유익한 과제임을 밝히고자 한다. 이때의 학습 양상은 학생들의 통계적 변이성에 대한 추론 수준의 발달 정도, 추론을 위해 시도한 아이디어의 다양성, 추론 과정의 집단적 참여 측면에서 조사되었다. 이는 문제가 목표하였던 통계적 변이 추론 능력, 추론 과정에서의 창의 역량, 협동적 문제 해결 역량과 각각 관련이 있다.

이 연구는 다음과 같은 연구 질문을 갖는다.

소집단 토론 활동을 통한 비구조화된 문제 해결 과정에서 학생들의 통계적 변이성에 대한 이해의 양상은 어떠한가?

Ⅱ. 이론적 배경

1. 비구조화된 문제

비구조화된 문제에서 '비구조화'는 문자 그대로 구조화되지 않았다는 의미이다. '아닐 비(非)'라는 한자에서 드러나듯이 비구조화는 구조화의 반대 개념이라기보다 구조화되지 아니한 모든 형태를 의미한다. 그러므로 비구조화된 문제의 정의는 문제의 구조화를 결정하는 요인이 무엇인지를 밝히는 데에서부터 시작된다.

문제의 구조화 요인에 대한 논의는 Simon (1973)의 문제 해결 이론에서 찾아볼 수 있다. Simon은 문제를 구조화 정도에 따라 잘 구조화된 문제 (Well-Structured Problem, 이하 WSP)와 비구조화된 문제(Ill-Structured Problem, 이하 ISP)로 나누어 설명하였다. 그는 WSP에 관한 정형화된 정의를 내리는 대신 WSP가 가지는 몇 가지 속성을 다음과 같이 제시하였다. 제기된 답안에 도달하기 위한 명확한 기준이 있고, 해결책을 얻기 위한 초기 문제 상태, 목적이 되는 상태, 도달할 수 있는 다른 상태가 표현될 수 있는 문제 상황이 적어도 하나가 있다가 그것이다. 반면, ISP의 경우에는 ISP가 지닌 속성을 WSP가 지닌 속성의 반대로 설명하였다. WSP가 가지고 있는 특징이 결여된 문제를 ISP로 본다는 것이다. 이에 따르면 ISP란 문제의 목적이 명확하지 않고 제약 조건이 언급되어 있지 않지만, 해결 과정에서 새로운 사실이 생성될 수 있는 문제이다.

구성주의 계열의 교육공학자인 Jonassen (1997)은 WSP와 ISP 각각의 속성을 제시하면서 둘 사이의 구별을 시도하였다. WSP는 적용 문제와 변형 문제의 두 가지의 속성을 가지고 있는데, 적용 문제는 교과서 단원의 말미에서 쉽게 찾아볼 수 있는 문제로 제한된 상황에서 개념, 법칙, 원리의 적용을 요구하고, 변형 문제는 잘 정의된 초기의 상태, 잘 알려진 목적을 가지고 있다는 것이다. 따라서 WSP에는 문제의 모든 요소가 제시되어 있고, 예상되는 해결책을 잘 정의된 상태에서 학습자에게 제시되며, 예측 가능한 범위에서의 일반적인 개념과 규칙을 포함하면서 정확하면서도 수렴적인 답안을 가지고 있다. 반면, ISP는 핵심적인 두 가지 속성은 일반적인 상황화된 문제이자 특정한 맥락으로부터 비롯된 창발적인 문제이다. 상황화된 문제란 문제의 기술이 명확하지 않거나 잘 정의되어 있지 않아서 문제의 진술에 필수적인 정보가 포함되어 있지 않은 문제를 의미하며, 창발적인 문제라 함은 그 답이 예측 가능하지 않거나 수렴하지 않는 창발적인 딜레마

를 가지고 있음을 의미한다. 따라서 Jonassen (1997)이 정의하는 ISP는 문제의 목표가 불명확하거나 잘 정의되지 않은 문제이며, 다양한 해결책을 가지고 있거나 해결책이 없는 문제를 의미한다.

수학 교육 연구자들도 역시 과제의 구조화된 정도에 관심을 가져왔다. Kapur (2006, 2008)는 생산적 실패라는 개념을 도입하여 WSP 대신 ISP를 해결하는 것은 실패하는 과정 속에서 학습을 위한 생산적인 연습이 될 수 있다고 주장하였다. ISP를 해결한 학생들은 겉보기에는 실패한 것처럼 보였지만 WSP를 해결한 학생들보다 이후의 문제 해결 능력이 향상되었다는 것이다(Kapur, 2008; Kapur & Kinzer, 2009). 특히 그는 생산적 실패에 관해 중학교 3학년 학생들이 분산 개념을 학습하는 과정에 관한 연구에서 학생들이 배우지 않았던 특정 개념에 관해 배우지 못한 채 문제를 풀게 하는 것은 그들의 문제 해결이 초기에는 실패하거나 필요한 개념을 형식적으로 알지 못하더라도 이후의 문제 해결 능력의 발달에 효과가 있음을 밝히기도 하였다(Kapur, 2012). 이후 다양한 후속연구가 진행되었으나, 대체적으로 실패의 과정이 문제 해결 능력 향상의 구인이 됨을 밝히는 형태로 진행되어 왔을 뿐, 실패의 과정에서 어떠한 식으로 특정 개념의 학습이 일어나는지에 관한 연구가 이루어지지는 않았다.

한편, 국내에서도 문제의 구조화된 정도가 수학 학습에 미치는 영향을 분석하는 연구가 실시되었다. 나미영, 조형미, 권오남(2017)은 중학교 소규모 수학교실 환경에서 비구조화된 문제가 학생들의 학습과 연구에 미치는 영향을 탐색하였다. 김민경 외(2011)는 초등학교 수학 교과서의 문제의 비구조성(ill-structured)을 분석한 연구를 실시하였다. 초등학교 4학년 학생의 비구조화 문제 해결을 통한 추론 능력을 다루거나, 초등학교 5학년 학생의 확률과 통계를 주제로 한 비구조화 문제에서 학생들의 의사결정능력과 비구조화 과제를 이용한 문제 해결 과정에서의 비례적 추론 과정을 분석하기도 하였다(김민경 외, 2012a; 김민경 외, 2012b; 김민경, 박은정, 2013). 초등학교 6학년 학생들을 대상으로 비구조화된 문제 학습을 통한 정당화 유형을 분석, 비구조화된 문제를 개발하고 초등학교 고학년 학생들의 문제 해결 과정과 창의·융합적 사고와의 관계를 분석한 연구도 있었다(김민경, 허지연, 박은정, 2014; 김동희, 김민경, 2016). 구조화되지 않은 문제 해결 과정에서의 생산적 실패가 초등학생의 문제 해결력과 학습 태도의 변화를 다룬 연구도 실시되었다(박유나, 박만구, 2015). 대부분의 연구들이 ISP 해결 경험과 문제 해결 능력과 같은 여타의 능력과의 상관관계를 살펴, ISP의 효과를 검증하였다는 공통점이 있다.

전술한 바와 같이 이 연구는 초등학생들이 ISP를 해결하는 과정에서 통계적 변이성의 발달이 어떠한 양상으로 일어나는지 살펴보는 목적을 갖는다. 이를 위하여 ISP와 WSP 해결 과정을 비교하였다. 연구진은 학습자가 예측 가능한 해결 범위에서 명확한 답안을 가지도록 WSP를 설계한 반면, WSP의 속성을 갖지 않으면서 답이 존재하지 않도록 ISP를 설계하였다. 두 가지 문제의 핵심적인 개념은 통계적 변이성이며, 이는 다음 절에서 다룬다.

2. 통계적 변이성에 대한 추론의 발달

가. 통계적 변이성과 통계 교육

변이(variation)란, 말 뜻 그대로 변화하는 행위 또는 주어진 조건을 변화시키는 것을 의미하며, 변이성(variability)은 변화하는 자연의 관찰 가능한 특징을 의미한다(Reading & Shaughnessy, 2004). 통계학에서는 분산의 개념을 이용하여 변이성을 다룬다(Rice, 2007). 변이성은 변이가 발생하는 원천에 따라 실제적 변이성(real variation)과 유도된 변이성(induced variation) 두 가지로 나뉜다(Wild & Pfannkuch, 1999). 실제적 변이성은 관찰 대상인 체계에 내재된 변이성이며, 유도된 변이성은 자료의 수집과정에서 발생하는 것이다. 예를 들어, 어떤 공장의 특정 생산라인에서 농구공 100개를 생산했을 때 해당 농구공의 무게가 모두 다른 것은 실제적 변이성에 의한 것이다. 한편, 한 개의 농구공의 무게를 100번 쟀을 때 측정치가 모두 다른 현상은 유도된 변이성이 발현된 것이다.

변이성은 우리 세계의 필연적인 특징이자 관찰 가능한 실체로서 언제나, 어디에나 존재한다. 이러한 변이성은 자료를 기반으로 한 경험적 탐구과정에서 나타나는 불확실성의 원천으로서, 인간은 이 변이성을 인식하는 순간 탐구의 목적에 맞게 그것을 설명하고, 예측하며, 더 나아가 통제하려 한다(Moore, 1990; 1992; 1997; Snee, 1990; Wild & Pfannkuch, 1999). 결국 변이성은 인간이 통계적 방법을 발달시키게 된 동기로

볼 수 있으며, 변이성을 인식하고, 설명, 예측, 통제하려는 것은 통계적 사고의 전 과정에 걸쳐 영향을 준다(Pfannkuch & Wild, 2004).

통계적 사고에 있어서 필수불가결한 요소인 변이와 변이성은 통계 교육에 있어서도 중요한 구심점이 된다. 통계적 사고를 기르는 것이 통계 교육의 목적임을 상기해 볼 때, 통계 교육의 궁극적인 목적은 변이성과 자료를 현명하게 다루는 능력을 기르는 것이 된다. 또 통계적 사고에 대한 어떤 논의에서도 변이의 개념과 역할을 빼놓고 논해서는 안되는 바(Wild & Pfannkuch, 1999), 변이성에 대한 이해는 학생들이 갖추어야 할 통계적 소양에 반드시 포함되어야 한다(Watson, 2006).

이러한 변이성의 지도를 포함한 통계 교육에서 자료의 분산 측도, 즉 산포도를 살펴보는 일은 큰 의의를 갖는다. 통계 교육의 핵심적인 두 가지 개념으로는 중심 측도(대푯값)와 분산 측도(산포도)를 꼽을 수 있다. 변이성은 반복되는 자연현상에 변이를 발생시키며, 그 변이는 곧 자료에 분포가 존재하게 하는 원인이다. 이에 따라 한 집단의 자료에 담긴 값들이 어떻게 변하는지, 또 이러한 변화가 다른 집단의 자료가 갖는 변화와는 어떻게 다른지를 비교하는 것은 곧 변이성에 대한 추론을 유발하게 되는 것이다(Ben-Zvi, 2004).

그러나 변이성의 개념은 통계 교육연구에서는 90년대 후반에 이르기까지 제대로 된 주목을 받지 못하였다(Reading & Shaughnessy, 2004; Pfannkuch & Wild, 2004). 90년대 후반까지의 통계 교육의 연구들은 분산 측도에 대해서는 거의 주목하지 않은 채 오직 중심 측도에 대한 연구에 과도하게 편중되어 있는 경향을 보였다(Shaughnessy, 1997; Reading & Shaughnessy, 2004). 이러한 경향은 최근까지도 이어져서 통계교육에서 분산 측도 및 변이성을 주제로 한 연구는 평균, 중앙값 등 중심 측도를 주제로 한 연구에 비해서 적은 편이다. 이는 국내의 연구의 경우도 마찬가지로, 이러한 연구는 절대적인 수가 적을 뿐 아니라 연구 대상이 영재 학생으로 제한되어 이루어지고 있다(송선아, 이경화, 2007; Ko & Lee, 2010; 고은성, 이경화, 2011; 고은성, 2012; 2013). 이러한 문제의식에 의거하여 소수의 국내 연구자들은 변이성의 지도가 초등학교 수준에서부터 분포 개념을 이용하여 이루어져 함을 지속적으로 주장하고 있다(박태학, 2003; 김영미, 박영희, 2006).

나. 통계적 변이 추론의 발달

통계적 변이성에 대한 추론(reasoning about statistical variability, 이하 통계적 변이 추론)은 변이성을 보이는 상황 속에서 관찰한 현상들을 기술하는데 필요한 인지적 과정으로 정의된다(Reading & Shaughnessy, 2004). Wild & Pfannkuch (1999)은 변이에 대해 고려하는 것은 실생활에서 변이를 발견하는 데에서 출발하여, 이것이 자료 관리 단계에서 변이성의 원천을 통제하기 위해 사용하는 전략에도 영향을 미치고, 나아가서는 분석 및 결론의 단계에서도 우리가 변이성에 대해 어떻게 반응할 것인지를 결정하는 데에 영향을 준다고 하였다.

Watson et al. (2003)은 반복되는 표집 상황에 대하여 설문지를 사용하여 변이에 대한 학생들의 이해를 측정하고 이를 4단계로 나누었다. 1단계는 선행단계로서, 주어진 환경을 이해하고 표나 간단한 그래프를 읽을 수 있으며 가능성에 대한 직관적 이해를 갖는 단계다. 2단계는 변이에 대한 부분적 인지로, 이 단계의 학생은 자신의 주어진 맥락에 맞추어 사고할 수 있으나 한 가지 측면에만 몰두하고 나머지 측면을 무시하는 경향이 있다. 3단계는 변이의 적용 단계로, 맥락 속에서의 아이디어들을 모으고 정리하고 사용할 수 있으나 두드러진 특징을 짚어내는 데에는 실패한다. 마지막 4단계는 비판적 단계로서, 이 단계의 학생은 변이에 대해 비판적인 사고를 보이고 복합적인 정당화를 적용할 수 있다.

Ben-Zvi (2004)는 Watson et al. (2003)의 연구와는 다르게 변이성의 가장 기초적인 형태가 한 가지 분포 내에서의 변이에서 드러난다고 보고, 단일 분포 자료 상황 속에서 이스라엘 7학년(만 13세 경) 학생들에 대한 수업관찰과 활동자료 분석을 통하여 연구를 수행하였다. 그 결과, Ben-Zvi는 변이 추론의 발달 단계를 7단계로 정교화하여 다음과 같이 제안하였다.

(1) 1단계: 무엇에 초점을 맞출 것인가

1단계는 학생들이 무엇에 초점을 맞출지를 결정하는 단계로서, 문제 해결과 전혀 무관한 정보에서 시작하여 국소적인 정보로 초점을 맞추는 것으로 나아간다. 이 단계의 학생들은 두 집단의 자료가 주어졌을 때 교

사가 “자료에서 흥미로운 현상을 찾아 (통계적) 가설을 세워보세요”라는 요청을 하면, 유관한 자료의 측면보다는 무관한 측면에 초점을 맞추는 모습을 보인다. 그러다가 어느 순간, 그들은 무엇에 초점을 맞추면 안 되는지를 깨닫게 되지만, 이 맥락에서 어떤 것이 ‘유관한 측면’인지를 판단하지는 못하며 교사의 도움을 요청한다. 또한 학생들은 국소적인 정보나 면모에 초점을 맞춘 채 자료의 분포를 전체적으로 파악하지 못한다.

(2) 2단계: 변이성을 어떻게 비형식적으로 기술할 것인가

2단계는 변이성을 미가공 자료로부터 어떻게 비형식적으로 기술할 것인지를 알게 되는 단계다. 이 단계의 학생들은 여전히 교사의 통계적 가설을 세워보라는 요청을 제대로 이해하지 못한다. 이를 돕기 위해 교사가 특정한 연구 질문을 던져주어도 그것이 학생들로 하여금 유관한 측면에 초점을 맞추는 데에 도움을 주지는 못하며, 자료의 복잡함에 겁을 먹는 모습을 보인다. 역시 그들의 처음 초점은 문제 해결과 무관하고 또 국소적인데 이는 질문의 의도를 이해하지 못하고, ‘흥미로운 현상’이 무엇을 의미하는지 이해하지 못하며 자료가 복잡하기 때문인 것으로 보인다. 그러나 여기서 중요한 것은 학생들이 변이성을 기술하려고 시도한다는 점이다. 물론 그것이 변이성을 명시적으로 드러내지는 못하며, 가설이 여러 문제를 내포하고 있는 경우가 많다.

(3) 3단계: 통계적 가설을 어떻게 세울 것인가

3단계는 변이성에 대해 설명하는 통계적 가설을 어떻게 세울 것인지를 알게 되는 단계다. 교사와의 지속적인 상호작용은 학생들로 하여금 가설을 만드는 일에 다시 집중하도록 한다. 이 단계의 학생들은 “~는 ~하다”와 같은 결정론적인 명제를 종종 만들고는 한다. 그러나 이러한 가설은 모든 데이터를 고려한 것은 아니며, ‘대개’, ‘항상 그렇지는 않은’ 등과 같은 제한적 수사구를 붙이지 않는다. 여기서 자신이 세운 규칙에 따르지 않는 자료가 존재한다는 것을 깨닫는 일은 다음 단계로의 발전을 위해 중요한 디딤돌이 된다.

(4) 4단계: 집단 간의 비교에서 어떻게 변이성을 설명할 것인가

4단계는 두 집단 간의 도수분포표(frequency table) 비교를 함으로써 변이성에 대해 설명하는 단계이다. 학생들은 미가공 자료를 정리한 두 개의 도수분포표를 받고는 자신의 변이성에 대한 가설을 검증할 것을 요구받는다. 학생들은 가장 값이 낮은 계급과 높은 계급 또는 불연속인 계급, 서로 이웃한 계급 등을 찬찬히 살펴보며 자신의 종합적 결론을 만들어 간다. 이 과정은 결코 직선적이지 않으며 학생마다 그 과정이 다를 수 있다.

(5) 5단계: 집단 간의 비교에서 어떻게 중심 측도(대푯값)와 분산 측도(산포도)를 이용할 것인가

5단계는 자료의 대푯값과 산포도 등을 찾아 변이성에 대한 이해에 사용하는 단계다. 학생들은 주로 최빈값, 평균, 중앙값(대푯값)과 자료의 범위(산포도) 및 이상점의 개념을 사용하여 두 집단을 비교한다. 그러나 그들의 비교는 겉보기에는 문제없이 흘러갈 수 있겠으나 단순히 절차적일 뿐이며 자료를 대표하는 값들을 구하는 것으로서의 측정의 의미를 깨닫지는 못하고, 또 중심 측도와 분산 측도 사이의 구분도 명확하게 이루어지지 않는다. 아울러, 분석에 종종 오류가 발생하기도 한다.

(6) 6단계: 이상점을 다룸으로써 어떻게 변이성을 모델링할 것인가

6단계에서는 이상점에 보다 명시적으로 초점을 맞추고 다룸으로써 비형식적으로나마 변이성에 대한 모델을 세워본다. 이상점의 존재는 학생들에게 문제를 어렵게 느끼게 하는 요인이 된다. 여기서 이상점을 단순히 특정한 자료의 값이 아닌 독립적인 하나의 분류로서 개념화하는 것은 학생들의 개념적 이해의 발전에 기여한다. 이상점을 다룸으로써 학생들은 자료의 변이성을 다루기 위한 단순화된 관점을 보여주게 된다.

(7) 7단계: 그래프 내 혹은 그래프 간의 변이성에 어떻게 주목하고 그것을 구별해낼 것인가

마지막 7단계의 학생들은 그래프로 나타나는 분포들 간의 비교를 통해 변이성에 주목하고 그것을 명시적으로 구별해내게 된다. 이 단계에서 학생들은 그래프로 표현된 자료를 해석하여 그 속에 내재된 변이성

을 이해한다. 예를 들어, 막대그래프를 사용한다면 그들은 인접한 막대 사이의 높이를 비교하고 두 집단 간의 차이를 정리할 수 있다. 그들은 눈에 띄는 특정한 막대들 몇 가지를 골라 비교하는 전략을 사용할 수 있으며 이전 단계에서 도수분포표를 이용하여 두 집단을 비교했던 전략이 여기서도 도움을 주게 된다. 그러나 이 단계에 이르렀다고 해서 학생들이 반드시 자신의 답에 확신을 가지는 것은 아니며, 때로 자신의 답에 대한 교사의 확인을 요청하기도 한다.

이와 같은 Ben-Zvi (2004)의 통계적 변이 추론 발달 단계는 이 연구에서 학생들이 문제 해결 과정을 범주화하여 통계적 변이성에 대한 이해 정도를 판단하는 준거로 활용되었다.

Ⅲ. 연구방법

이 연구는 초등학생들이 통계적 변이성에 관한 문제를 해결하는 현상을 심층적으로 분석하기 위하여 사례 연구 방법으로 설계되었다. 사례 연구 방법은 연구자가 이해하고자 하는 사례나 현상을 심층적으로 분석하여 최대한의 논점과 시사점을 도출하는 목적을 지닌다는 점에서(Stake, 1995), 이 연구에 부합하는 것으로 판단하였다.

1. 연구 대상

이 연구에는 6학년 학생 4명(수민, 재학, 도영, 예은)[2)]이 참여하였다. 이들은 같은 학급에 소속된 남학생 2명, 여학생 2명으로 담임교사의 추천을 통하여 수학을 좋아하고, 수학성취수준이 중상 이상인 학생들이다. 같은 학교 6학년으로 이루어진 유사한 구성의 3개 그룹을 대상으로 파일럿 실험을 진행하여 수학적 논의가 가장 활발하게 일어났던 1개 그룹을 최종적으로 선정하였다.

연구진은 과제의 구조화 정도에 따른 학생들의 통계적 변이성 개념의 발달을 살펴보기 위해서 5학년 2학기를 마친 상태이면서 분산과 관련된 선행학습을 하지 않은 학생들이 적절할 것으로 판단하였다. 4명의 학생들이 교육받고 있는 2009 개정 수학과 교육과정에서는 5학년 2학기 마지막 단원에서 평균을 다룬 뒤, 초등학교 과정 종료 시까지 분산을 다루지 않기 때문이다. 또한 학생들이 소속된 S 초등학교의 경우 맞벌이 가정이 많아 가정의 지원을 받기가 어렵고, 교육열도 비교적 낮은 지역에 위치하여 학생들이 선행학습을 하는 경우가 드문 편이다. 실제로 구두로 확인한 결과 4명의 학생 모두 분산의 개념에 대한 선행학습은 하지 않은 것으로 확인되었다. 그러므로 이 연구에 참여한 학생들은 평균의 개념은 학습하였지만 통계적 변이성의 한 지표인 분산의 개념은 아직 학습하지 않은 상태라고 할 수 있다.

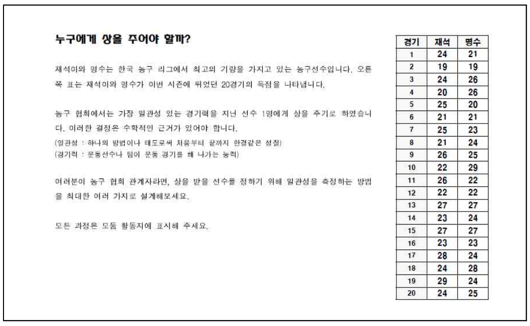
2. 연구 절차 및 과제

본 연구는 교사나 연구자의 개입 없이 학생들이 소집단 토론 활동을 통하여 40분간 주어진 문제를 해결하도록 설계되었다. 명확한 답안을 갖지 않는 ISP와 학습자가 예측 가능한 해결 범위에서 명확한 답안을 가진 WSP를 각각 일주일 간격으로 제공되었다. 첫 번째 시간에 학생들은 통계적 변이성과 관련된 ISP를 소집단 토론 활동을 통하여 해결하도록 요구받았고, 일주일 뒤 두 번째 시간에는 통계적 변이성과 관련된 WSP가 주어졌다. 본 연구는 ISP 해결 과정에서의 학생들의 통계적 변이성 발달 양상을 살피는 데에 목적이 있으므로, WSP 해결 과정을 통한 학습 변인을 제거하기 위하여 ISP를 먼저 실시하였다. WSP는 비교를 통해 ISP 해결 과정의 특징을 드러내기 위한 목적으로 ISP 이후에 실시하였다.

문헌 분석 및 전문가 검토를 통해 학생들에게 주어진 문제는 다음과 같다.

첫 번째 시간에는 Kapur (2014)가 제시한 문제를 ISP로 사용하였다. 그는 9학년 학생들을 대상으로 생산적 실패(Productive Failure, PF)그룹에게 비구조화된 농구 선수 문제를 제시하며 개별적으로 최대한 많은 해답을 도출하여 생산적 실패를 경험하도록 유도한 바 있다. Kapur (2014)의 문제가 싱가포르 9학년을 대상으로 설계되었음에도 불구하고, 평균의 개념을 학습한 우리나라 초등학교 6학년 학생들이 이해하기에 무리가 없었고, 그와는 달리 학생들이 개별이 아닌 소집단 협력학습을 통하여 문제를 해결함으로써 학생들의

2) 가명이다.



누구에게 상을 주어야 할까?

재석이와 명수는 한국 농구 리그에서 최고의 기량을 가지고 있는 농구선수입니다. 오른쪽 표는 재석이와 명수가 이번 시즌에 뛰었던 20경기의 득점을 나타냅니다.

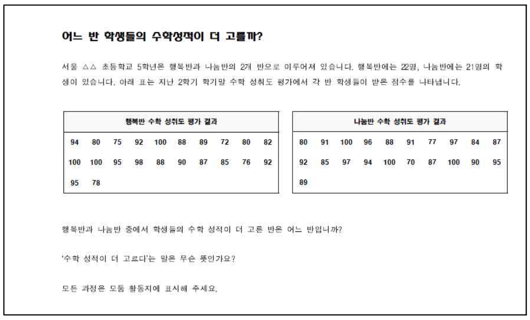
농구 협회에서는 가장 일관성 있는 경기력을 지닌 선수 1명에게 상을 주기로 하였습니다. 이러한 결정은 수학적인 근거가 있어야 합니다.
(일관성 : 하나의 방법이나 태도로써 처음부터 끝까지 한결같은 성질)
(경기력 : 운동선수나 팀이 운동 경기를 해 나가는 능력)

여러분이 농구 협회 관계자라면, 상을 받을 선수를 정하기 위해 일관성을 측정하는 방법을 최대한 여러 가지로 설계해보세요.

모든 과정은 모둠 활동지에 표시해 주세요.

경기	재석	명수
1	24	21
2	19	19
3	24	26
4	20	26
5	25	20
6	21	21
7	25	23
8	21	24
9	26	25
10	22	29
11	26	22
12	22	22
13	27	27
14	23	24
15	27	27
16	23	23
17	28	24
18	24	28
19	29	24
20	24	25

[그림 1] 통계적 변이성과 관련된 ISP
[Fig. 1] ISP on variability



어느 반 학생들의 수학성적이 더 고를까?

서울 △△ 초등학교 5학년은 행복반과 나눔반의 2개 반으로 이루어져 있습니다. 행복반에는 22명, 나눔반에는 21명의 학생이 있습니다. 아래 표는 지난 2학기 학기말 수학 성취도 평가에서 각 반 학생들이 받은 점수를 나타냅니다.

행복반 수학 성취도 평가 결과									
94	80	75	92	100	88	89	72	80	82
100	100	95	98	88	90	87	85	76	92
95	78								

나눔반 수학 성취도 평가 결과									
80	91	100	96	88	91	77	97	84	87
92	85	97	94	100	70	87	100	90	95
89									

행복반과 나눔반 중에서 학생들의 수학 성적이 더 고른 반은 어느 반입니까?

'수학 성적이 더 고르다'는 말은 무슨 뜻인가요?

모든 과정은 모둠 활동지에 표시해 주세요.

[그림 2] 통계적 변이성과 관련된 WSP
[Fig. 2] WSP on variability

체감하는 난이도는 보다 낮아질 것으로 판단하였다.

사용된 ISP는 [그림 1]과 같다. 농구선수의 이름을 학생들에게 친근한 재석과 명수로 정하였고, 재석과 명수의 득점 평균 및 분산, 득점 종류별 개수도 동일하게 하였다. 주어진 자료의 변이성의 편재 비교를 유도하기 위하여 '일관성 있는'이라는 표현을 사용하였으며, 학생들의 어휘수준을 고려하여 일관성 및 경기력의 뜻도 병기하였다. 학생들은 개별적인 활동 및 소집단 논의 활동을 주어진 종이에 적으면서 진행하도록 요구받았으며, 충분한 양의 빈 A4용지가 제공되었다.

두 번째 시간에는 학생들의 ISP 풀이 과정을 바탕으로 WSP를 새롭게 개발하였다. 1차 실험에서 소재로 활용하였던 농구선수의 득점의 경우, 학생들은 이산량이 아닌 연속량으로 인식하여 득점의 추세에 주목하거나, 재석과 명수의 득점은 독립사건임에도 불구하고 종속사건으로 해석하는 모습을 보였다. 또한 재석과 명수가 모두 유명 연예인의 이름임에도 불구하고 학생들은 수학적 근거 없이 명수보다 재석에게 후한 평가를 내리려는 경향을 보였다. 이에 학생들에게 친숙한 상황이면서도 독립된 이산량으로 확실히 인식되고 있는 수학 성적 소재를 선정하였고 학급명 역시 보편적인 가치를 담아 선호의 차이가 없도록 하였다.

사용된 WSP는 [그림 2]와 같다. 행복반과 나눔반의 수학 성취도 평가 결과를 분리하여 제시하여 행복반의 성적과 나눔반의 성적이 독립사건임을 확실히 하였고, 행복반의 수치를 22개, 나눔반의 수치를 21개 제시함으로써 두 학급의 성적을 일대일 대응으로 이해하지 않도록 유도하였다. 또한 학생들이 자료를 연속량으로 이해하지 않도록 자료에 연번을 매기지 않고 단순 나열하였다. 학생들이 첫눈에 인식하는 100점의 개수는 두 학급이 같게 하였지만, 평균은 나눔반이 더 높게, 분산은 행복반이 더 높게 설계하였다. 주어진 자료의 변이성의 편재를 비교하도록 하기 위하여 이번에는 '고른'이라는 표현을 사용하였으며, 학생들은 단어의 뜻을 이해하는 데에 별다른 어려움을 겪지 않았다.

학생들에게 사전에 연구의 내용을 알리지 않았으며, 첫 번째 시간에 ISP를 해결하였던 경험의 학습 효과로 인해 두 번째 시간에 WSP 풀이 과정에서 통계적 변이성의 개념을 빠르게 습득하는 상황을 방지하기 위해서 두 번째 시간을 시작하기에 앞서 첫 번째 시간과는 아무런 상관없는 문제임을 주지시켰다. 모든 과정이 끝난 뒤에는 개별 면담 과정에서 연구의 목적과 문제의 의도, 올바른 풀이 방법 등을 설명해주어 학생들의 학습권을 보장하고자 하였다.

아울러, 이 연구는 Ben-Zvi (2004)의 변이 추론 발달 단계를 학생들의 변이성의 이해를 판단하는 준거로 활용하였다. 이는 그의 변이 추론 발달 단계가 다양한 상황에 있는 학생들의 변이성 이해 판단의 준거로 활용 가능한 일반성을 지니고 있다는 판단에서 비롯되었다. 이에 공학용 도구 사용 환경에서 실시된 Ben-Zvi의 연구(2004)와는 달리 공학용 도구를 사용하지 않는 환경에서도 변이 추론 발달 단계를 학생들의 변이성의 이해를 판단하는 준거로 사용 가능할 것으로 보았다. 국내 초등 수학교실에서 공학용 도구의 활용이 보편적이지 않고, 연구 참여 학생의 학년 수준에서 문제 해결을 위한 그래프의 구성을 기대하기는 어렵다는 점 또한 실험 설계에서 공학용 도구를 포함시키지 않는 요인으로 작용하였다.

3. 자료 수집 및 분석

자료 수집을 위하여 문제 풀이 전 과정을 녹음 및 녹화하였다. 각 실험은 4명의 학생들이 서로 마주보도록 2-2 배열로 책상을 배열하였고, 이들의 양쪽에서 2대의 비디오카메라로 촬영을 실시하였다. 책상 한 가운데에는 녹음기 한 대가 놓였다. 이들이 사용했던 개인 및 모둠활동지, 풀이과정을 적은 연습장 또한 자료로 수집되었다. 각 실험 후에는 개별면담을 추가적으로 실시하였으며, 이 과정 역시 비디오로 녹화되었다.

수집된 자료의 분석을 위하여 Ben-Zvi (2004)의 통계적 변이 추론 발달 단계를 본 연구의 맥락에서 재해석하였다. Ben-Zvi (2004)의 통계적 변이 추론 발달 단계는 통계적 활동에서 변이성의 원인을 조사하고 설명하는 활동의 중요성을 강조하며, 이에 대한 학생들의 수준을 7단계로 구분하여 비교적 풍부한 정보를 제공해주므로 본 연구의 목적에 부합하는 준거를 제공해 준다. 다만 연구에서 사용한 과제의 유형이 Ben-Zvi는 개방형 과제, 이 연구는 비구조화된 과제로 다소 차이가 있었기 때문에 연구의 맥락에 비추어 Ben-Zvi의 단계를 재해석하여 활용할 필요가 발생하였다. 재해석 작업은 학생들의 문제 해결 과정에서 드러난 발화를 토대로 연구진 간 교차 검토를 통해 이루어졌다. 이를 통해 본 연구에서 수집된 실제 데이터에서의 학생들이 문제 해결 과정을 범주화하여 통계적 변이성에 대한 이해 정도를 판단하는 준거를 획득할 수 있었다. 학생들이 작성한 활동지도 수준 판단을 위한 근거 자료로 함께 사용되었다.

이어 재해석된 통계적 변이 추론 발달 단계를 토대로 학생들의 발화를 시퀀스 단위로 분리하여 분석을 실시하였다. 시퀀스(sequence)는 주제를 도입하고 확장하는 발화들의 모음으로, 담화 분석에 있어서 하나의 문제 혹은 시퀀스들의 모음인 에피소드(episode)보다는 낮은 수준의 범주이고, 대화 이동(move)들의 모음인 교환(exchange)보다는 높은 수준의 범주이다(Truxaw & DeFranco, 2008). 학생들의 토론에서 교사의 가이드 유무가 담화 패턴 및 협력적인 추론 과정에 미치는 영향을 비교하였던 Hogan, Nastasi, & Pressley (1999)의 연구에서도 상호작용의 주제에 따라 담화를 시퀀스 단위로 분석한 바 있다. 본 연구에서도 변이성 개념 발달의 각 단계를 하나의 주제로 놓고 이에 따라 담화를 분리하고 있으므로, 이렇게 분리된 담화는 시퀀스로 명명하였다. 시퀀스 단위의 분석은 문제 해결 과정에서의 통계적 변이성에 대한 이해의 발달을 시간의 흐름에 따라 살필 수 있게 해주었다.

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

ISP 해결 과정에서 학생들의 통계적 변이성에 대한 이해의 발달 양상은 학생들이 최종적으로 도달한 통계적 변이 추론 발달 수준, 통계적 변이성에 대한 이해가 발달하는 과정에서 논의의 흐름, 그리고 해당 과정에서 논의의 주체에 따라 분석되었다. WSP 해결 과정과 비교를 통해 ISP 해결 과정에서의 통계적 변이 추론 발달 수준은 ISP 해결 과정에서 학생들의 배움을 증명하고, 드러난 논의의 흐름은 그들의 배움이 ISP 해결 과정에서 어떤 식으로 일어난 것인지를 말해주며, 그 논의의 주체를 밝히는 일은 ISP 해결 과정에서 학생들의 참여를 알려주었다.

1. 그들은 얼마나 배웠는가?

ISP와 WSP 해결 과정에서 드러난 학생들의 배움의 정도를 파악하고 비교하기 위하여 Ben-Zvi (2004)의 통계적 변이 추론의 일곱 가지 발달 단계를 그 준거로 하였다. 단계 분석 결과, ISP 해결 과정에서 학생들은 WSP 해결 과정과 유사한 정도의 통계적 변이 추론 발달을 보여주었다.

가. ISP에서의 통계적 변이 추론 발달 수준

ISP 해결 과정에서 학생들은 1단계부터 시작하여 6단계 수준까지 도달하였다. 이러한 발달이 순차적으로 나타나지는 않았으며, 6단계의 경우는 한 학생에게서만 해당 발화가 관찰되었다.

(1) 1단계

Ben-Zvi의 틀에서 1단계는 학생들이 변이성과 관련된 측면에 주의를 전혀 기울이지 못하는 상태를 나타낸다. 이에 연구진은 학생들이 ‘일관성 있는 경기력’과 관련성이 현저하게 떨어지는 요소에 초점을 맞추거나, 그 어떤 것에도 초점을 맞추지 못할 때, 통계적 변이

성에 대한 추론에서 1단계에 머무르고 있다고 판단했다. 아래와 같이 각 경기에서 더 많이 득점한 선수를 '이긴' 것으로 간주하여 총 이긴 횟수를 찾으려 하는 등, 자료의 변이성과 전혀 관련이 없는 자료의 특징에 주목하는 학생들의 발화에서 1단계의 증거를 찾을 수 있었다.

재학 : 일단 보니까...재석이는 명수한테 이긴 점수가 한 번, 두 번, 세 번, 네 번, 다섯 번, ...
예은 : 내가 그거 찾았는데.
수민 : 재석이가 더 많이 이긴 거 같다고?
예은 : 아니, 그게 아니고. 그거 경기... 이긴 횟수는 똑같았잖아. (중략) 이긴 횟수가 근데 똑같아.
수민 : 이긴 횟수랑 진 횟수가 같겠네.

(2) 2단계

Ben-Zvi에게 변이성을 비형식적으로 기술한다는 것은 단순히 데이터에 초점을 맞추는 데에서 나아가 데이터의 변화에 주목하고 변이성에 대한 모델을 세우는 일을 포함한다. 여기서의 모델은 반드시 정확하거나 형식적인 수학의 언어를 사용한 것은 아니지만, 변이성에 대한 더 발전된 논의를 위한 토대가 된다. 이 연구에서는 ISP 해결 과정에서 학생들이 일관성은 점수의 변화와 관련이 있다는 인식을 드러내거나, 일관성을 알아보기 위하여 점수의 차 또는 점수 차의 차에 초점을 맞추려고 할 경우, 이를 변이 추론의 2단계로 간주했다. ISP 해결 과정에서 다음과 같은 학생 발화에서 2단계의 증거를 찾을 수 있었다.

수민 : 이게 23에 19는 3 차이가 나고, 19랑 23은 3이 차이나고, 거의 비슷비슷하게 차이가 나잖아. 그런데 명수는 2나 7이나 0이나 6이나 1이나 2, 그냥 막 뒤죽박죽 차이가 나는 거야.
재학 : 봐봐, 이거 봐봐, 일단 첫 번째는 해당이 안 될 수도 있는데, 두 번째 때는 4지, 4고, 4고, 4빼고, 4빼고 4지. 4고, 4고, 4.

(3) 3단계

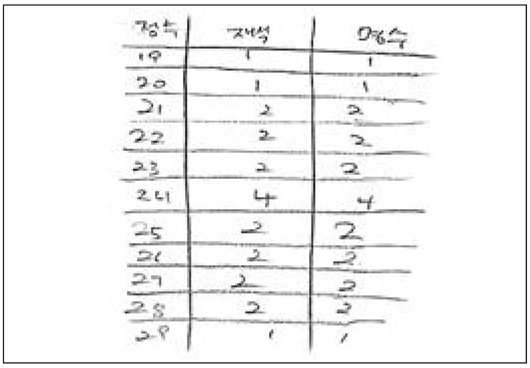
통계적 변이성 개념의 발달 과정에서 만들어지는 통계적 가설은 단순한 답안의 서술이 아니라 2단계에서 주목했던 데이터의 변화에 가치판단을 포함한다. 즉, 학생들이 자료 전체에 주목하지 않았더라도 결론을 도출하기 위한 어떤 가설을 세웠다면, 이는 Ben-Zvi의 통계적 변이 추론 발달의 3단계로 볼 수 있다. 이에 연구진은 ISP 과제에서 점수의 변화 또는 점수의 차이, 혹은 점수 차의 차가 작을수록 일관성이 높을 것이라는 가정을 할 경우에는 3단계에 속한다고 판단하였다.

ISP 해결 과정에서 다음과 같은 학생 발화를 통해 3단계의 증거를 찾을 수 있었다.

수민 : 성질이니까 더 차가 적은 것을 선택해야 하잖아. 점수랑 점수가.
수민 : 나는 그, 차이가, 거의 다 한결 같잖아.

(4) 4단계

학생들은 ISP 해결 과정에서 집단 간의 비교를 위하여 [그림 3]과 같이 점수별 빈도표를 작성하였으며, 이는 통계적 변이 추론 발달 과정의 4단계에 해당된다.



점수	재석	명수
19	1	1
20	1	1
21	2	2
22	2	2
23	2	2
24	4	4
25	2	2
26	2	2
27	2	2
28	2	2
29	1	1

[그림 3] ISP 해결 과정에서 학생들이 작성한 빈도표
[Fig. 3] Frequency table drawn by the students in the solving process of ISP

(5) 5단계

통계적 변이 추론 발달의 5단계는 자료집단 간의 변이성을 비교하기 위하여 자료의 대푯값인 평균을 구하거나 평균과 점수분포의 상관관계를 살피는 경우라고 할 수 있다.

학생들은 두 자료 집단의 일관성을 비교하기 위해 최댓값, 최솟값을 구하며, 그것이 각각 29와 19로 동일하다는 것 역시 식별해낸다. 이어서 학생들은 평균을 구하고자 시도한다. 이는 자료 집단의 평균과 일관성 간에 어떠한 관계가 있을 것으로 주목한 것으로 5단계

의 증거가 된다.

수민 : 야야, 최대랑 최소랑 구해야 돼, 평균이랑.
재학 : 최소 득점이 둘이 다 똑같이 19고, 최대 득점은 명수도 29고, 재석도 29야.
수민, 재학 : 한 경기 총 득점은...
수민 : 다 더하자.
재학 : 아니야 안 더해도 돼.
...(중략)...
예은 : 있잖아, 평균은 일관성이 아니지 않아?
수민 : 그렇지. 그래도 평균을 구해야하지 않을까 그래도? 평균 득점이니까.
....(중략)...
재학 : 너네들이 재석이는, 너네들이 명수를 구해봐.
수민 : 재석 몇 나왔는데? 재석 몇 나왔습니까?
...(중략)...
도영 : 480 나왔는데.
수민 : 480?
....(중략)...
도영 : 재석이 480.
재학 : 재석이 480 맞아.
수민 : 명수는?
...(중략)...
도영 : 480 같은데?
수민 : 뭐라고? 480? 똑같다고?
도영 : 어...똑같을 수도 있지 않나?
예은 : 똑같으면..
수민 : 야, 이 최대가 똑같잖아. 최대랑 최소가. 똑같으면 평균도 총 득점도 똑같을 수도 있네?
...(중략)...
재학 : 평균 24.

이들은 두 집단의 평균이 같음을 발견한 이후, 두 자료 집단 간의 차이를 도출해내기 위해 다양한 시도를 하지만 모두 실패하게 된다. 이러한 다양한 시도들은 애초에 본 과제가 평균과 최댓값, 최솟값이 동일하도록 설계되었기 때문이다.

(6) 6단계

ISP 해결 과정에서 학생들은 자신들이 자료 집단에 대해 심적으로 가지고 있는 가설에 크게 위배되는 자료가 있을 경우 그 자료를 배제하려는 경향을 보였다.

재학 : (선생님에게)...높았다고 하면 그 수 포함하면 안 되죠?

재학의 발화를 통해 평균과 차이가 큰(“높은”) 자료가 있을 경우 이를 포함하지 않으려는 시도를 관찰할 수 있다. 이는 이상점에 대한 고려를 보이는 대목으로 학생들이 일시적으로 6단계에 해당하는 발달 수준을 보였다는 것의 증거가 된다.

나. WSP에서의 통계적 변이 추론 발달 수준

WSP 해결 과정에서 학생들은 3단계, 4단계, 5단계 수준을 드러내었지만 1단계와 2단계는 명시적으로 드러내지 않았다. 이는 1주일 전에 실시했던 ISP 해결 과정에서 이미 초점을 맞추어야 할 데이터가 무엇인지, 또 데이터의 변화에 주목해야함을 학습했기 때문으로 보인다. 한편, ISP에서 보였던 6단계에 해당하는 모습은 WSP 해결 과정에서는 관찰되지 않았다.

(1) 3단계

주목했던 데이터의 변화에 대한 가치판단이 곧 통계적 가설이므로, WSP 과제에서 주어진 점수들 간의 차의 합을 구하는 활동을 하자고 하는 경우, 결과의 크기 비교를 통해 고른 점수를 가려낼 수 있다는 가설을 설정한 것으로 볼 수 있다.

WSP 해결 과정에서는 다음과 같은 학생 발화를 통하여 그들이 설정한 통계적 가설을 알 수 있었다.

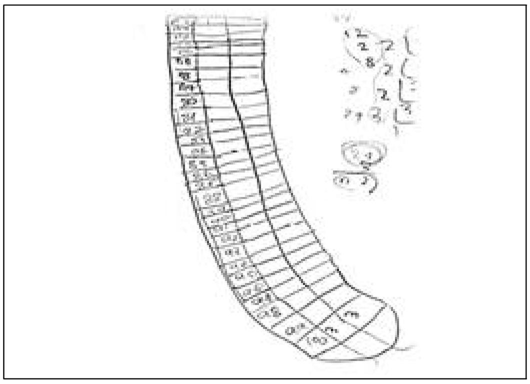
수민 : 그냥 나는, 나는 차를 한 번 다 더해보게.
수민 : 차를 찾아. 그 다음에 다 더한 게 이거야. 마이너스 플러스 다 해가지고.

(2) 4단계

WSP 해결 과정에서도 역시 학생들은 집단 간의 비교를 위하여 [그림 4]와 같이 점수별 빈도표를 작성하였으며, 이는 통계적 변이 추론 발달 과정의 4단계에 해당된다.

(3) 5단계

학생들은 두 자료집단의 최솟값을 확인하는 활동부터 시작하였으며, 두 집단의 최솟값이 각각 72, 77이라는 것을 확인했다. 그런데 학생들은 ISP에서와 달리 최댓값을 확인하지 않았는데, 이는 자료의 속성이 시



[그림 4] WSP 해결 과정에서 학생들이 작성한 빈도표

[Fig. 4] Frequency table drawn by the students in the solving process of WSP

험 점수이고 또한 두 자료집단이 만점인 100점을 모두 포함하고 있어 최댓값을 명시적으로 확인할 필요성을 느끼지 못했기 때문이다. 뒤이어 학생들은 두 자료집단 간의 비교를 위해서 평균을 구하였고, 이를 이용해서 다음과 같이 편차의 개념을 활용하는 모습을 보였다.

수민 : 여기 88 해가지고 차가 얼마 나오는지 볼까?
재학 : 행복반이 88이라고 했지.
수민 : 행복반이 88이잖아, 여기서 88을 빼는 거, 다 빼봐가지고 수가 얼마나 고른지 보면 되잖아.
예은 : 응. 그러면 되겠지?
재학 : 이게 평균보다 높은 게.
예은 : 평균보다 낮은 거랑, 높은 거의 차를 구해봐야 될까?
재학 : 평균보다 높은 게.... 12개고, 평균하고 같은 게, 같은 사람을, 2명이고, 평균보다 낮은 사람이 하나, 둘, 셋, 넷, 다섯, ...
수민 : 평균과 같은 것이 몇 개라고?
재학 : 평균과 같은 사람이 12명이고, 똑같은 사람이 2명이고, 낮은 사람이 8명, 총 22명 맞고.

....(중략)....

재학 : 봐봐. 이걸 보면, 만약에 점수가 동일하다는, 이렇게 평균을 구했다는 조건에서, 이 점수가 더 높은 사람이 일단 평균보다 점수가 더 높은 반이 행복반이고, 평균하고 같은 게 2명이고 얘는 1명이잖아. 얘는 11명이고, 평균 아래인 게 얘가 8명인데 얘는 9명이잖아.

....(중략)....

예은 : 있잖아, 나눔반. 나눔반도 구해야 되는데 평균.... 저, 있잖아. (도영)아, 여기에 평균이 90이지? 약으로 치면? 거기서 점수 차를 좀 해줄래? 이렇게? 평균하고 점수 차. 뭔 말인지 알겠니?

학생들은 먼저 행복반의 평균이 88이라는 것을 구한 뒤, 행복반의 개별 점수들로부터 평균을 빼려고 시도했다. 이러한 시도는 개별 자료들이 평균으로부터 얼마나 떨어져 있는지를 구하는 것이 해당 자료집단의 고른 정도를 나타내 줄 것이라는 신념에 기반한 것이다. 이 신념은 자료의 산포도로 직접 사용할 수 있는 편차 개념과 맞닿아 있는 것으로서, 앞의 인용문은 학생들이 두 자료집단의 분포를 비교하기 위해 편차를 사용하는 사례를 보여준다.

이러한 사례는 두 자료집단의 고른 정도를 비교하기 위해 중심 측도와 분산 측도를 활용하려는 시도로서 ISP에서와 다른 양상의 5단계의 증거이다.

다. 과제의 구조화된 정도에 따른 발달 수준 비교

ISP에서 학생들은 통계적 변이 추론 발달의 6단계까지 보인 반면, WSP에서는 5단계까지 보였지만 이것으로 ISP에서의 학생의 배움이 더 깊은 단계까지 이루어졌다고 단정 짓기는 어렵다. ISP에서의 6단계는 한 학생의 혼잣말 같은 발화에서만 등장했고, 이 아이디어가 다른 학생들과 공유되지는 못했기 때문이다. 그러므로 ISP와 WSP에서 학생들의 통계적 변이 추론 발달 수준은 비슷하게 나타났다고 할 수 있다.

한편, ISP 및 WSP에 대한 문제 해결 과정에서 공통적으로 변이 추론의 단계가 1단계에서 6단계까지 순차적으로 등장하지 않는다는 점에 주목할 필요가 있다. 학생들은 1단계에 해당하는 논의를 진행하다가도 갑자기 5단계 수준의 논의를 시작하기도 했으며, 5단계에 머물렀다가도 곧잘 3단계 혹은 1단계의 발달 수준에 해당하는 모습을 보이기도 했다. 이는 변이 추론 개념의 학습 양상을 보다 통시적으로 분석할 필요성을 제기한다. 이어지는 절에서는 학습 양상에 대한 시간 순서에 따른 분석을 시도한다.

2. 그들은 어떻게 배웠는가?

문제 해결 과정을 시간의 흐름에 따라 분석하기 위하여 학생들의 담화를 Ben-Zvi (2004)의 통계적 변이성 추론의 발달 단계에서 지표가 되는 발화에 따라 시퀀스를 구분하였다. 시퀀스는 학생들의 역동적인 학습 양상을 추적하는 단위로 기능하였다.

가. ISP와 WSP 해결 과정에서의 담화 양상

ISP 해결 과정의 시퀀스 분석 결과는 [표 1]과 같다. ISP 해결 과정은 8개의 시퀀스로 분리할 수 있었는데, 이는 학생들이 문제를 해결하기 위하여 8가지의 아이디어를 도출하였음을 의미한다. 각각의 아이디어가 함의하는 통계적 변이성의 발달 단계는 순차적으로 나타나지 않았다. 특히 해결 과정의 초반에는 문제가 의도했던 '일관성'의 의미대로 문제를 해결할 듯이 보이며 높은 통계적 변이성 단계를 나타냈지만, 답이 없는 ISP의 특성으로 인하여 학생들은 자료에서 다양한 방식으로 '일관성'을 해석하여 정보를 유추해내려는 양상을 나타냈다. 이에 따라 통계적 변이성 발달 단계는 초기의 5단계에서 낮은 단계로 회귀하는 형태를 보이며, 심지어 1단계로 되돌아가기도 하였다. 또한 시퀀스

[표 1] ISP 해결 과정의 시퀀스 분석
[Table 1] Sequence analysis of ISP solving process

#	line	내용	변이 추론 단계
1-1	34 ~59	개별 선수의 점수를 보고 일관성 있는 선수 추측해보기. 이유를 설명하기 힘듦(일관성에 대한 수학적 근거가 필요함).	0단계
1-2	85 ~122	평균 구하기, 평균이 같음을 발견.	5단계
1-3	131 ~219	빈도표 작성하기, 점수별 빈도가 동일함을 발견.	4단계
1-4	195 ~274	두 선수의 승패 구하기, 이긴 횟수 같음 발견.	1단계
1-5	220 ~234	동점의 개수 세기, 6회임을 발견.	1단계
1-6	195 ~267	각 선수의 점수 차이 구하기, 명수가 더 적음을 발견.	3단계
1-7	275 ~512	각 선수의 점수 차의 차 구하기, 재석이 더 적음을 발견.	3단계
1-8	513 ~끝	점수 차의 차가 적은 선수가 일관성이 높은 선수로 결정.	3단계

분석을 통해 하나의 시퀀스가 종료되기 전에 또 다른 시퀀스가 중첩되어 나타나기도 하였다. 시간이 지남에 따라 시퀀스에서 드러난 발달 단계는 3단계로 일정하게 유지되었으며 학생들이 설정하였던 가설에 근거한 일관된 결론으로 수렴하는 모습을 나타냈다.

WSP 해결 과정의 시퀀스 분석 결과는 [표 2]와 같다. WSP 해결 과정은 ISP에서보다 적은 5개의 시퀀스로 분리되었다. 학생들은 ISP의 '경기력이 일관성 있는 선수'와 다르게 WSP에서는 '고른 점수'가 의미하는 바를 비교적 빠르게 파악하였기에 다양한 접근을 시도할 시간이 상대적으로 많았음에도 불구하고 시퀀스는 더 적게 나타났다.

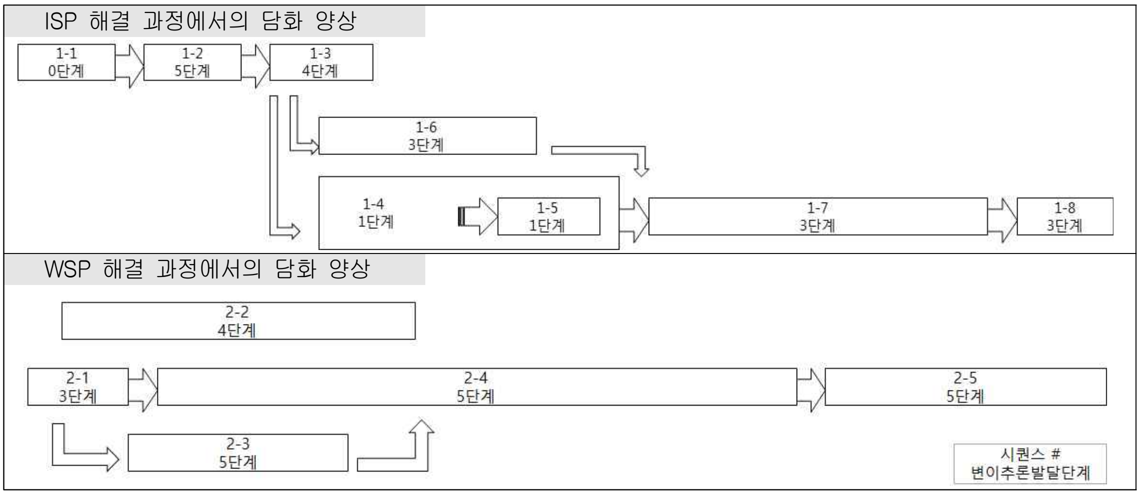
반면, 각각의 아이디어가 함의하는 통계적 변이성의 발달 단계는 ISP에서와 다르게 순차적으로 나타났다. 해결 과정의 초반에 학생들의 변이 추론 발달 단계는 3단계부터 순차적으로 5단계로 나아갔다. 나아간 발달 단계는 회귀하거나 급격한 변화를 거치지 않고 새로운 시퀀스에서도 동일하게 5단계를 유지하였다.

[표 2] WSP 해결 과정의 시퀀스 분석
[Table 2] Sequence analysis of WSP solving process

#	line	내용	변이 추론 단계
2-1	27 ~77	차를 다 더하기, 발견 없음.	3단계
2-2	29 ~227	빈도표 작성하기. 점수의 총합 구하기.	4단계
2-3	49 ~186	평균 구하기, 평균이 다름 발견.	5단계
2-4	86 ~373	평균과의 차 구해서 더하기, 나눔반이 더 적음을 발견.	5단계
2-5	374 ~끝	평균과의 차의 합이 더 적은 반이 성적이 고른 반으로 결정.	5단계

나. 담화 양상 차이의 의미

시퀀스 분석을 통하여 과제별로 학생들의 문제 해결 과정에서의 담화가 서로 다르게 분화한 것을 관찰할 수 있었다. 이러한 분화를 시간의 흐름에 따라 통계적 변이성의 발달 단계와 함께 [그림 5]와 같이 도식화하였다. [그림 5]의 상단과 같이 학생들은 ISP 해결 과정에서 두 선수의 점수의 빈도를 파악하는 하나



[그림 5] ISP와 WSP에서의 담화 분화 양상
[Fig. 5] Aspects of discourse differentiation in ISP and in WSP

의 시퀀스에서 두 선수의 승패에 집중하거나, 두 선수의 점수의 차이에 주목하는 두 가지 시퀀스로 활동의 양상이 분화하는 양상을 보였다. 이때 동일한 수학적 아이디어에 기초한 시퀀스는 중첩하여 표현하였다. 두 선수의 승패에 집중하는 1-4시퀀스 안에서 새로운 상황 판단 기준으로 동점인 경우를 제안하는 1-5시퀀스의 양상이 중첩하게 표현되었다. 이러한 과정을 통해서 ISP를 해결하기 위해 학생들은 데이터를 조작하는 하나의 아이디어가 여러 개의 하위 아이디어로 분화하기도 하고, 후속 아이디어로 연결하기도 하였음을 파악할 수 있었다.

반면, WSP 해결 과정은 [그림 5]의 하단에 나타난 것처럼 ISP 해결 과정에 비하여 담화의 양상이 비교적 단조로운 편이었다. 초반에는 문제를 해결 방안을 다양하게 모색하는 듯했지만, 2-3시퀀스부터는 그 흐름이 평균을 구하고 각각의 점수와의 차이를 계산하는 방법으로 단일화되는 모습을 보였다. 이는 WSP를 해결하는 데에 학생들은 주어진 데이터를 조작하기 위한 다양한 아이디어를 탐색할 필요를 갖지 못했음을 의미한다.

학생들이 나타낸 통계적 변이 추론 발달 단계의 양상 역시 ISP와 WSP 간에 차이가 있었다. 학생들은 ISP를 해결하는 과정에서 순차적이지는 않았지만 1단계부터 6단계까지 다양한 단계의 통계적 변이성 단계를 경험하였다. 반면, WSP 해결 과정에서는 3단계에서 5단계까지 3개의 단계만이 나타났다. WSP 해결 과정에서 1, 2단계가 나타나지 않았던 것은 일주일 전에 실시된 ISP 해결을 통한 학습의 영향으로 추측해볼 수 있다. 그러나 3, 4, 5단계가 순차적으로 나타난 뒤, 5단계에서만 머물다가 WSP 해결 과정이 종료되었다는 점은 역동적인 단계의 변화를 보여주었던 ISP 해결 과정과 차이를 드러낸다. 문제 해결 과정에서 모든 단계를 드러내는 것이 통계적 변이 추론 발달에의 유익을 보장하는 것은 아니지만, ISP 해결 과정에서 다양한 단계를 역동적으로 거쳤다는 것은 통계적 자료를 보다 적극적으로 탐색하였음을 의미하므로 통계 교육의 지향점과 일치한다고 볼 수 있다.

이에 연구진은 ISP와 WSP에서의 담화 양상 차이가 과제의 구조화된 정도의 차로 인한 문제의 특성에서 기인한 것으로 판단하였다. WSP에 비하여 덜 구조화된 ISP의 대표적인 특성인 답안 도달 과정의 불투명성이 학생들의 문제 해결 활동을 WSP에서와는 다른 특별한 방식으로 이끌었기 때문이다. ISP의 특성이 담화로 드러난 학생들의 문제 해결 활동에 미친 영향은 다음과 같다.

첫째, ISP의 특징인 답안 도달 과정의 불투명성은 학생들이 도전적인 활동을 유발하였다. WSP에서는 몇 가지 수학적 아이디어를 통해 답안에 도달하는 것이

가능했지만, ISP에서는 그 어떤 수학적 아이디어로도 답안에 도달할 수 없었다. 그러므로 학생들은 ISP를 해결하기 위해 이전에는 시도하지 않던 새롭고 다양한 아이디어를 허용적으로 받아들이고 실행에 옮기게 된다. 또한 WSP 해결 과정과 비교하여 물리적으로 훨씬 많은 수의 아이디어들을 시도하기도 한다. 예를 들어, ISP 해결 과정에서 학생들은 두 선수의 점수의 빈도를 파악하는 아이디어에서 실패하자 두 선수의 승패에 집중하는 아이디어나 두 선수의 점수의 차이에 주목하는 아이디어로 분화해 나갔다. 또 두 선수의 승패를 판단하는 아이디어로부터 두 선수가 동점인 경우를 세어보는 아이디어로 나아가기도 했다. 이러한 다양하고 수많은 수학적 아이디어를 시도하는 과정은 답안 도달 과정이 불투명했기 때문에 일어났던 것이다.

둘째, 답안 도달 과정의 불투명성은 학생의 추론 방식에 있어서도 WSP와 다른 ISP만의 특징이 드러나게 하였다. ISP 해결 과정에서 학생들은 일관성이 있는 선수를 가려내기 위하여 점수 차의 합이 작은 명수가 일관성이 있는 선수라는 가설을 세우고 이 가설에 따라 점수 차의 합이 일관성을 판단하는 기준이 될 수 있음을 특징으로 이끌어냈다. 이 특징은 또 다른 자료 집단인 재석의 점수를 분석하는 데에도 적용되었다. 자료 집단에서 파악해낸 규칙을 토대로 자신들의 결론에 부합하는 또 다른 사례를 유도하는 과정을 거듭하면서 학생들은 새로운 자료 분석 방법을 시도하게 되었다. 이러한 추론 과정은 학생들이 자료를 통해 알 수 있는 것과 그 결과가 설명할 수 있는 것이 무엇인지를 구별할 필요성을 야기하며, 초등학생이 자료 분석 과정에서 자료로부터 추론과 결론을 도출하는 능력을 기르는 것은 통계의 기초를 형성한다는 점에서 중요하다(NCTM, 2000). 답안 도달 과정이 불투명한 과제였기 때문에, 그 해결 과정에서 드러난 자신들이 판단할 수 있는 기준을 스스로 세워 나가는 모습은 WSP에서는 보이지 않았던 색다른 추론 양상이라고 할 수 있다.

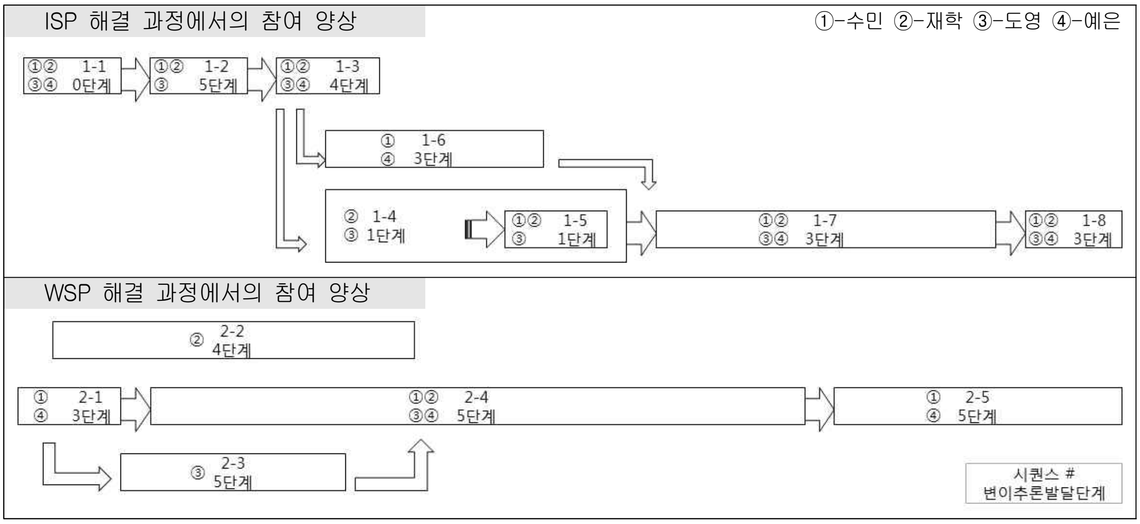
3. 그들은 함께 배웠는가?

본 연구에서 학생들은 소집단 토론 방식으로 문제를 해결하였으며, 연구진은 이들의 담화가 진행되는 양상을 통하여 각각의 과제에서 일어난 배움을 탐색하였다. 이러한 탐색은 소집단 활동에서의 통계적 변이 추론의 발달이 4명의 구성원 모두에게 ‘함께’ 일어났음을 가정하지만 실제로 문제 해결 전 과정에 걸쳐 모든 학생이 동일하게 통계적 변이 추론이 발달하기란 불가능에 가깝다. 한편으로는 이러한 발달의 개인차를 직접적으로 드러내는 것은 방법론적으로 매우 도전적인 일이기도 하다. 그러나 연구진은 활동에 참여하는 4명의 학생에게 통계적 변이 추론 발달에서 개인차는 분명 존재하며, 특히 이 개인차는 두 과제 간의 의미 있는 차이를 드러내어 줄 것으로 보았다. 이에 시퀀스별로 학생별 참여 양상을 식별함으로써 두 과제에서 통계적 변이 추론 발달의 개인차를 드러내고자 시도하였다. 이러한 차이는 그들이 두 과제에서 진정으로 ‘함께’ 배웠는지를 말해줄 것으로 기대되었다.

ISP에서의 학생별 참여 양상은 [그림 6]의 상단과 같다. 초반의 시퀀스는 주로 예은의 아이디어에 수민이 동조하는 양상이었다. 그러나 ISP의 특성으로 인해 예은의 아이디어로 문제가 해결되지 않자, 1-4시퀀스부터 재학과 도영이 주도적으로 아이디어를 내며 참여하였다. 예은이 대부분의 시퀀스에 참여하며 해결 과정을 주도하기는 하였지만, 자신의 아이디어가 실패하였기 때문에 다른 학생들의 아이디어를 수용할 수밖에 없었던 것이다. 재학과 도영은 자신들의 아이디어가 받아들여지자 더욱 적극적으로 해결 과정에 참여하였으며, 마지막에는 결국 예은의 아이디어로 다시 돌아오기는 했지만 이들은 끝까지 적극적인 참여를 유지하였다.

WSP에서 학생별 참여 양상은 ISP에서보다 단순하였다. ISP에서 해결 과정을 주도했던 예은이 WSP에서도 해결 과정을 주도하는데, 이는 예은의 아이디어가 2-1, 2-4, 2-5시퀀스로 이어짐을 통해 알 수 있다. 2-2, 2-3시퀀스에서 재학과 도영이 예은과는 아이디어를 제기하지만 이는 다른 학생들의 동의를 얻지 못한 채 금방 사라진다. WSP가 지닌 답안 도달 과정의 투명성으로 인하여 예은의 아이디어가 올바른 접근 과정임이 자명하게 드러났기 때문이다. WSP 해결 과정에서는 다양한 아이디어가 도출되기 어려움을 알 수 있다.

한편, [그림 6]의 하단과 같이 WSP 해결 과정 종료 시점에는 모든 학생이 끝까지 참여했던 ISP에서와 달리 예은과 수민만이 참여하고 있었다. 이는 예은의 아이디어를 재학과 도영이 받아들이지 않았기 때문이라



[그림 6] ISP와 WSP에서 학생별 참여 양상
[Fig. 6] Aspects of student participation in ISP and in WSP

기보다, 예은이 다른 학생들과 자신의 아이디어에 대해 설득하고 이해시키려 노력하지 않았기 때문이다. 다른 학생보다 수학적 성취 수준이 다소 높았던 예은에게 있어 자신의 아이디어가 주어진 과제에 적합함이 자명했고, 스스로 이 아이디어에 따라 문제를 해결할 능력이 있으므로 다른 학생들을 굳이 참여시킬 필요가 없었다. 예은과 비슷한 성취 수준이었던 수민의 경우는 예은의 아이디어를 스스로 이해할 수 있었기에 참여할 수 있었다. 반면, 재학과 도영은 예은과 수민의 활동에 대한 이해가 부족하여 참여하지 못하였는데, 이는 다음과 같은 발화를 통해 확인할 수 있다.

도영 : 무슨 말인지.
재학 : 나만 모르는 거 같지?
재학 : 그런데 이게 뭐야 이게?

4명이 함께 푸는 문제임을 주지시키고 시작한 활동이었음에도 불구하고 재학과 도영은 끝내 문제 해결 과정에 참여하지 못하였고 통계적 변이 추론의 발달 단계를 드러낼 기회도 갖지 못하였다. 이를 통하여 WSP는 그 구조의 특성으로 인하여 모든 학생이 서로 의사소통하게 하고, 해결 과정에 참여하게 할 유인이 부족하다고 할 수 있다.

ISP와 WSP에서의 학생별 참여 양상 비교를 통하여 학생마다 시퀀스별 참여가 달랐으며, ISP에서는 모든 학생이 끝까지 활발하게 참여하여 ‘함께’ 배움이 일어났음에 반해, WSP에서는 일부의 학생이 해결 과정을 주도하고, 나머지 학생은 해결 과정에서 소외되어 ‘함께’ 배움이 일어나지 못하였음을 알 수 있었다. 이것은 문제의 구조화 정도를 결정하는 답안 도달 과정의 투명성 여부가 학생들 간의 아이디어 교류에 영향을 미쳤기 때문이라고 할 수 있다.

V. 결론 및 제언

이 연구에서는 소집단 토론 활동을 통한 ISP 해결 과정에서 학생들의 통계적 변이성에 대한 이해의 양상이 어떠한가라는 질문에 답하기 위하여 문제의 구조화 정도에 따라 학생들의 이해 양상을 세 가지 관점에서 분석하였다. 첫 번째 관점은 학생들의 배움의 결과를 비교하기 위해 ‘그들은 얼마나 배웠는가’를 설정하였다. 이를 통해 ISP와 WSP 해결 과정에서 학생들의 통계적 변이 추론 발달 정도는 비슷함을 알 수 있었다. 비슷한 배움의 결과를 드러냈음에도 불구하고 배움의 과정에서 드러난 차이를 드러내고자 두 번째 관점은 ‘그들이 어떻게 배웠는가’로 설정하였다. 그 결과 ISP에서 보다 다양한 아이디어들을 WSP에서와는 다른 추론

방법으로 탐색하는 모습을 찾을 수 있었다. 마지막으로는 소집단 내에서의 배움의 차이를 식별하기 위하여 개별 학생들의 배움에 초점을 맞추어 '그들은 함께 배웠는가'로 설정하였다. 그 결과 ISP에서 참여 학생들의 아이디어가 모두 동등하게 존중받고 활동이 종료될 때까지 활발한 의사소통 및 전원 참여가 지속됨을 확인하였다. 세 가지 관점에서 드러난 학생들의 통계적 변이성에 대한 이해 양상은 모두 ISP 해결 과정의 불투명성에서 기인하였다. 이러한 결과가 함의하는 바는 다음과 같다.

첫째, ISP는 통계적 사고 신장을 목표로 하는 교수·학습 활동에 적합할 수 있다. 통계는 단순한 수가 아닌 변이성과 문맥을 가진 수를 다루기 때문에 여타 수학 분야와는 다른 통계적 사고를 필요로 한다(Cobb & Moore, 1997). 이 연구는 ISP가 답안 도달 과정의 불투명성으로 인해 학습자로 하여금 생산적으로 실패할 가능성을 높인다는 기존 연구에서 한발 더 나아가 ISP에서 일어나는 실패의 과정을 분석하여 학생들이 그 어떤 풀이 과정도 확신할 수 없게 만드는 ISP의 구조가 학생들로 하여금 주어진 자료를 수없이 관찰하고 다양한 아이디어를 모색하게 만듦을 보였다. 이는 통계적 사고는 이론이 아닌 경험을 통하여 자료를 다양하게 관찰하는 과정이 우선적으로 전제되어야 가능하다고 할 수 있다는 Moore (1997)의 주장과 일치하며, 이를 통해 ISP는 통계적 사고를 기르는 데에 도움이 된다는 주장은 타당성을 확보한다.

둘째, ISP는 수학적 의사소통 역량을 높이는 데에 도움이 될 수 있다. 수학적 의사소통은 단순히 수학적인 내용의 발화가 증가하는 데에 가치가 있는 것이 아니라, 수학 학습의 사회적인 측면인 아이디어의 공유를 가능하게 한다는 점에서 가치가 있다(Hiebert, 1992). 소집단 활동에서 ISP는 모든 아이디어를 실패로 만들기 때문에 그 어느 아이디어에도 권위를 부여하지 않는다. 즉, 수학적 성취 수준이 다양한 학생들 간에도 수평하게 아이디어를 공유할 수 있는 수학적 의사소통을 보장하는 것이다. 본 연구에서도 ISP 해결 초기에는 WSP에서처럼 수학적 성취 수준이 높은 학생이 논의를 주도하다가, 해당 아이디어가 두 자료집단 간의 유의미한 차이를 만들어내지 못하자 학생들의 서로의 아이디어를 제시하고 공유하며 활발한 수학적 의사소통을 하는 모습을 나타내었다. 답이 없기 때문에 답을 합의하기 위하여 수학적 아이디어에 대한 의사소통의 필요가 발생하고, 답이 없기 때문에 수학적 의사소통의 평등한 참여 또한 보장될 수 있게 된다.

셋째, ISP는 이질 집단의 학습에 효율적일 수 있다. 모든 수학 교실의 학생들은 이질적이며, 다양한 수준의 학생들을 한 데 놓고 가르쳐야 한다는 사실은 영원히 수학교사를 괴롭히는 난제이다. ISP는 이러한 어려움을 해소하는 데에 일조할 수 있을 것이다. ISP에서는 모든 수준의 학생들이 동일하게 실패를 경험하며, 실패를 통하여 다양한 수준의 학생들이 내는 수학적 아이디어는 동등한 지위를 갖게 된다. 동등한 지위를 가졌기 때문에 성취 수준이 낮은 학생들이 내는 아이디어도 무시당하지 않고, 성취 수준이 높은 학생들이 내는 아이디어가 지배하지 않게 된다. 이러한 현상은 성취 수준이 낮은 학생들이 문제 해결 과정에 지속적으로 참여할 동인을 제공하며, 동시에 성취 수준이 높은 학생들 역시 다양한 아이디어를 경청하고 시도하는 동인 또한 제공해준다.

한편, 이 연구가 ISP가 언제나 WSP보다 우수함을 주장하는 것은 아니다. 이 연구는 소집단 토론 활동으로 초등학생들이 통계적 변이성에 관한 ISP와 WSP를 해결하는 사례에 관한 연구이므로 통계적 변이성에 관한 초등학생 소집단 토론 활동으로 그 논의를 한정한다. 그러나 한편으로는 이 연구의 결과가 ISP에서의 배움을 상당히 긍정적으로 드러냈기에, 조심스럽게 본 연구 결과가 통계 영역 전체로 확장되어 적용될 수 있을 것으로 예상한다. 이론적 배경에서 전술한 바와 같이 통계적 변이성은 모든 통계적 사고에서 빼놓을 수 없는 개념이기 때문이다.

이 연구는 좋은 수학 과제가 무엇인지에 대한 논의에서부터 시작되었다. 수학적 아이디어를 논리적 구조로 발전시키고 서로 연결하여 학생들을 자극할 수 있는 좋은 수학 과제(NCTM, 2000)로 ISP를 제시하고 WSP와의 비교를 통해 ISP 해결 과정에서 충분히 수학적으로 유의미한 배움이 일어남을 증명하였다는 데에 이 연구의 의미가 있다. 이는 향후 다양한 통계 교육 내용 및 상급 학교 학생들을 대상으로 확장 가능하며, 특히 통계 교육에서 ISP의 유익을 밝혀 학교 현장에 실질적인 통계 교수 학습 방안을 제공하는 데에 일조할 수 있을 것으로 기대된다. 또한 이 연구는 학령인구의 감소로 인하여 미래 수학 교실에 도래할 소규

모 학급에서 통계적 사고 신장을 위하여 사용할 수 있는 교수·학습 도구로서도 그 가치가 있다.

참 고 문 헌

고은성 · 이경화 (2011). 일반학급 학생들과의 비교를 통한 수학영재학급 학생들의 표본 개념 이해 수준 연구. 영재교육연구, 21(2), 287-307.

Ko, E-S & Lee, K. H. (2011). Study on levels of mathematically gifted students' understanding of statistical samples through comparison with non-gifted students. *Journal of Gifted/Talented Education, 21*(2), 287-307.

고은성 (2012). 통계적 변이성 사고 요소 간의 관계 연구. 학교수학, 14(4), 495-516.

Ko, E-S. (2012). The relationship among components of thinking related to statistical variability. *School Mathematics, 14*(4), 495-516.

고은성 (2013). 수학영재학급 학생들과 일반학급 학생들의 통계적 변이성 인식 수준 비교 연구. 영재교육연구, 23(3), 287-406.

Ko, E-S. (2013). A comparison of mathematically talented students and non-talented students' level of statistical thinking: The noticing of statistical variability. *Journal of Gifted/Talented Education, 23*(3), 287-406.

김동희 · 김민경 (2016). 초등학생의 창의·융합적 사고 및 문제해결력에 관한 연구. 학교수학, 18(3), 541-569.

Kim, D. & Kim, M. K. (2016). A study on creativity integrated thinking and problem solving of elementary school students in ill-structured mathematics problems. *School Mathematics, 18*(3), 541-569.

김민경 · 이지영 · 홍지연 · 김은경 (2011). 초등학교 수학 교과서에서 나타난 '문제'의 비구조성(ill-structured)에 관한 연구. 학습자중심교과교육연구, 11(2), 1-21.

Kim, M. K., Lee, J-Y, Hong, J. Y., & Kim, E. K. (2011). A study of 'ill-structured' status from mathematics problems in elementary school textbooks. *Journal of Learner-Centered Curriculum and Instruction, 11*(2), 1-21.

김민경 · 조미경 · 박윤미 · 허지연 (2012). 초등학교 4학년 학생들의 비구조화된 문제에서 나타난 해결 과정 및 추론 분석. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 51(2), 95-114.

Kim, M. K., Heo, J. Y., Cho, M. K., & Park, Y. M. (2012). An analysis on the 4th graders' ill-structured problem solving and reasoning. *J. Korea. Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education, 51*(2), 95-114.

김민경 · 이지영 · 홍지연 · 주현정 (2012). 자료분석에 관한 비구조화된 문제해결모형 적용에서 나타난 초등학교 5학년 학생들의 의사결정에 관한 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육논문집>, 26(2), 221-247.

Kim, M. K., Lee, J. Y., Hong, J. Y., & Joo, H. J. (2012). Decision making from the 5th graders' ill-structured problem of data analysis. *J. Korea. Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education, 26*(2), 221-247.

김민경 · 박은정 (2013). 비구조화된 정도에 따른 비례 문제 유형에서 나타난 초등학생의 비례추론에 관한 연구. 한국학교수학회논문집, 16(4), 719-743.

Kim, M. K. & Park, E. J. (2013). Children's proportional reasoning on problem type of proportion according to ill-structured degree. *Journal of the Korean School Mathematics Society, 16*(4), 719-743.

김민경 · 허지연 · 박은정 (2014). 초등수학에서의 비구조화된 문제해결 모형 설계, 적용 및 그 교육적 의미. 한국초등수학교육학회지, 18(2), 189-209.

Kim, M. K., Heo, J. Y., & Park E, J. (2014). Design, application and its educational implication of ill-structured problem solving in elementary mathematics education. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea, 18*(2), 189-209.

김영미 · 박영희 (2006). 초등학교 5학년 학생의 통계적 변이성 개념의 이해와 그 지도에 관한 연구. 수학교육학연구, 16(3), 221-249.

Kim, Y. M. & Park, Y. H. (2006). Understanding of statistical variation concept of elementary school 5th graders and study on its lesson plans. *Journal of Educational Research in Mathematics, 16*(3), 221-249.

나미영 · 조형미 · 권오남 (2017). 미래학교 수학교실의 교육방법론에 대한 탐색: 비구조화된 문제에서 학생들의 질문 만들기를 중심으로. 한국수학교육학

회 시리즈 A <수학교육>, 56(3), 301-318.

Na, M., Cho, H., & Kwon, O. N. (2017). Teaching methodology for future mathematics classroom: Focusing on students' generative question in ill-structured problem. *J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education, 56*(3), 301-318.

박유나・박만구 (2015). 문제해결에서 생산적 실패의 경험이 초등학생의 수학적 문제해결력 및 수학적 성향에 미치는 영향. 한국수학교육학회 시리즈 C <초등수학교육>, 18(2), 123-139.

Park, Y., & Park, M. (2015). The influences of experiences of productive failures on mathematical problem solving abilities and mathematical dispositions. *J. Korea Soc. Mathe Ed. Ser. C: Education of Primary School Mathematics, 18*(2), 123-139.

박태학 (2003). 학교통계교육의 문제점과 개선방향. 교육학연구, 41(2), 401-430.

Park, T. H. (2003). The problems and reform directions of statistics education at school levels. *Korean Journal of Educational Research, 41*(2), 401-430.

송선아・이경화 (2007). 중학교 3학년 학생들의 변이성 이해에 대한 사례 연구. 학교수학, 9(1), 29-44.

Song, S. A., & Lee, K. H. (2007). A case study aimed at junior high school 3rd grade students understanding of variability. *School Mathematics, 9*(1), 29-44.

Ben-Zvi, D. (2004). Reasoning about variability in comparing distributions. *Statistics Education Research Journal,* 3(2), 42-63.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical Situations in Mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Cobb, G. W. & Moore, D. S. (1997). Mathematics, statistics, and teaching. *The American Mathematical Monthly,* 104(9), 801-823.

Chi, M. T. H. & Glaser, R. (1985). Problem solving ability. In R. J. Sternberg (Ed.), *Human abilities: An information processing approach* (pp. 227-250). New York: W. H. Freeman and Company.

Ge, X. & Land, S. M. (2003). Scaffolding students' problem-solving processes in an ill-structured task using question prompts and peer interactions. *Educational Technology Research and Development,* 51(1), 21-38.

Hiebert, J. (1992). Reflection and communication: Cognitive considerations in school mathematics reform. *International Journal of Educational Research,* 17(5), 439-456.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A., & Human, P. (1997). *Making sense: Teaching and learning mathematics with understanding.* Portsmouth: Heinemann.

Hogan, K., Nastasi, B. K., & Pressley, M. (1999). Discourse patterns and collaborative scientific reasoning in peer and teacher-guided discussions. *Cognition and Instruction,* 17(4), 379-432.

Jonassen, D. H. (1997). Instructional design models for well-structured and ill-structured problem-solving learning outcomes. *Educational Technology Research and Development,* 45(1), 1042-1629.

Kapur, M. (2006). Productive failure: A hidden efficacy of seemingly unproductive production. In R. Sun (Ed.), *Proceedings of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society,* 28(28), (pp. 1587-1592). Mahwah: Erlbaum.

Kapur, M. (2008). Productive failure. *Cognition and Instruction,* 26(3), 379-425.

Kapur, M. & Kinzer, C. K. (2009). Productive failure in CSCL groups. *International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning,* 4(1), 21-46.

Kapur, M. (2010). Productive failure in mathematical problem solving. *Instructional Science,* 38(6), 523-550.

Kapur, M. (2012). Productive failure in learning the concept of variance. *Instructional Science,* 40(4), 651-672.

Kapur, M. & Bielaczyc, K. (2012). Designing for productive failure. *Journal of the Learning Sciences,* 21(1), 45-83.

Kapur, M. (2014). Productive failure in learning math. *Cognitive Science,* 38, 1008-1022.

Ko, E-S. & Lee, K. H. (2010). Are mathematically talented elementary students also talented in statistics?. In B. Sriraman & K. H. Lee (Eds.), *The Elements of Creativity and Giftedness in Mathematics*. Rotterdam: Sense Publishers.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Mason, J., & Johnston-Wilder, S (2006). *Designing and Using Mathematical Tasks*. St. Albans: Tarquin.

Moore, D. S. (1990). Uncertainty. In Steen, L. A (Ed.) *On the shoulders of giants: A new approaches to numeracy* (pp. 95-137). Washington, D. C.: National Academy Press.

Moore, D. S. (1992). Teaching statistics as a respectable subject. In F. S. Gordon & S. P. Gordon (Eds.) *Statistics For the Twenty-First Century* (pp. 14-25). Washington, D. C.: Mathematical Association of America.

Moore, D. S. (1997). New pedagogy and new content: The case of statistics. *International Statistical Review* 65(2), 123-137.

Pfannkuch, M. & Wild, C. (2004). Towards an understanding of statistical thinking. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (pp. 17-46). New York: Kluwer Academic Publishers.

Shaughnessy, J. M. (1997). Missed opportunities on the teaching and learning of data and chance. In J. Garfield & J. Truran (Eds.), *Research Papers on Stochastics Education* (pp. 129-145). Minneapolis: The University of Minnesota.

Simon, H. A. (1973). The structure of ill-structured problems. *Artificial Intelligence,* 4, 181-201.

Snee, R. D. (1990). Statistical thinking and its contribution to total quality. *The American Statistician,* 44(2), 116-121.

Stake, R. E. (1995). *The Art of Case Study Research*. Thousand Oaks: Sage Publications.

Truxaw, M. P. & DeFranco, T. (2008). Mapping mathematics classroom discourse and its implications for models of teaching. *Journal for Research in Mathematics Education* 39(5), 489-525.

Reading, C. & Shaughnessy, J. M. (2004). Reading About Variation. In: Ben-Zvi, D & Garfield, J (Eds) *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (pp. 201-226). Dordrecht: Springer.

Rice, J. A. (2007). *Mathematical Statistics and Data Analysis* (3rd ed.). Belmont: Thompson Brooks/Cole.

Watson, J. M., Kelly, B. A., Callingham, R. A., & Shaughnessy, J. M. (2003). The measurement of school students' understanding of statistical variation. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 34(1), 1-29.

Watson, J. M. (2006). Issues for statistical literacy in the middle school. In A. Rossman, & B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador: International Association for Statistical Education and International Statistical Institute.

Wild, C. J. & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review,* 67(3), 223-248.

Aspects of Understandings on Statistical Variability across Varying Degrees of Task Structuring

Chaereen Han
Seoul Singok Elementary School,
Deungchon-ro 13ja-gil, Gangseo-gu, Seoul, Korea.
E-mail : feelgood81@snu.ac.kr

Kyungwon Lee†
Graduate School of Department of Mathematics Education, Seoul National University,
Gwanak-ro 1, Gwanak-gu, Seoul, Korea.
E-mail : ayunakids@snu.ac.kr

Doyen Kim
Graduate School of Department of Mathematics Education, Seoul National University,
Gwanak-ro 1, Gwanak-gu, Seoul, Korea.
E-mail : dk0209mathed@snu.ac.kr

Mi Seon Bae
Seoul Global Highschool,
Sungkyunkwan-ro 13-gil, Jongno-gu, Seoul, Korea.
E-mail : rrkseekdls@gmail.com

Oh Nam Kwon
Department of Mathematics Education, Seoul National University,
Gwanak-ro 1, Gwanak-gu, Seoul, Korea.
E-mail: onkwon@snu.ac.kr

The structure of a mathematics task shapes the aspects of learning of those who solve the task. This study explores the process of understandings on the statistical variability of primary school students. Students were given two problems with different degrees of structuring - a well-structured problem (WSP) and an ill-structured problem (ISP) – and discussed in a group to solve each task. The highest level of development achieved in both cases appeared to be similar. However, when given the ISP, students dynamically proposed ideas and justified the conclusion based on their hypothesis. Furthermore, all students actively participated in solving the ISP until the end whereas some students were marginalized while solving the WSP. This discrepancy results from the difference in the degrees of task structuring.

* ZDM Classification : C33
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30
* Key Words : Task structuring, Ill-structured problem, Statistical variability
* This work was supported by the Ministry of Education of the Republic of Korea and the National Research Foundation of Korea (NRF-2016S1A3A2925401).
† Corresponding Author