

초등학교 수학 교과서에 제시된 각의 개념과 도입 방법 분석

김 상 미 (춘천교육대학교)

각은 회전량이라는 양적 측면, 기하적 도형이라는 질적 측면, 평면 또는 선으로 만들어지는 관계적 측면 등의 다면적인 성격을 갖는다. 이 연구는 교수요목기에서 현재 2015 개정 수학과 교육과정에 따른 수학교과서 분석을 통하여 초등수학에서 각의 개념 및 지도 방법을 재검토하였다. 각의 개념을 보는 관점과 학습 계열의 구성이라는 두 가지 방향에서 분석하였다. 첫째로, 수학교과서에서 제시하고 있는 각의 정의와 표현 방법, 각의 구성요소를 통하여 수학교과서가 초점을 두고 있는 각의 개념을 분석하였다. 둘째로, 각과 관련된 개념들의 계열을 분석하고, 각의 개념을 도입하는 차시의 과제 및 활동을 통하여 각의 여러 측면들이 어떻게 계열화되고 있는지 교과서 흐름을 따라서 비교 분석하였다. 분석결과 우리나라 수학교과서의 변화에서도 각을 도입하는 방식은 주로 기하적인 도형이나 구성 요소에 대한 학습에 집중하였고 회전량으로서의 측면은 거의 다루지 않았다. 수학교실에서 각 개념이 갖는 기하적 도형의 측면, 회전량의 측면, 점이나 선과 면의 관계적 측면 등을 다양하게 경험하고 폭넓은 각 개념을 형성할 수 있도록 지원하고 연계하여야 할 것이다.

I. 서론

각은 어떤 종류의 것인가에 대하여 철학자들에게 오랜 논쟁 거리였다. 각은 양의 일종이라고도 하고, 질의 일종이라고도 하고, 관계의 일종이라고도 말하였다 (Euclid & Heath, 1998, pp. 42-44). 이와 같은 각의 다면적인 성격으로 인하여, 각의 개념을 형성하는 것은 단순하지 않다. 어떤 측면에서 각을 접근하는가에 따라 각의 도입 방법이나 전개 방식에도 차이가 있을 것이다.

- * 접수일(2018년 4월 19일), 심사(수정)일(2018년 4월 25일), 게재확정일(2018년 4월 26일)
- * ZDM분류 : G22
- * MSC2000분류 : 97U20
- * 주제어 : 각 개념, 각의 정의, 각의 표현, 각의 도입, 초등수학교과서

최근 2009 개정 수학과 교육과정에서는 각의 도입과 관련하여 ‘반직선’ 용어의 도입이 쟁점으로 부각되었다. 각을 정의할 때 선분이나 직선으로 정의하는 것의 문제점을 지적하고 학교수학에서 이전에 있었던 ‘반직선’을 재도입해야 한다는 주장이었다. 4차 교육과정 시기까지 3학년에서 선분, 직선과 함께 ‘반직선’이라는 용어가 사용되었고 각을 도입할 때 두 반직선의 구성으로 도입하였다. 5차부터 ‘반직선’이 삭제되었고 각을 해설하는 방식도 변화하였다. 이에 대하여 2009 개정 수학과 교육과정에 ‘반직선’이라는 개념이 다시 도입되었고, 각을 도입할 때 두 반직선이 한 꼭지점에서 만나는 것으로서(한국과학창의재단, 2011, p. 34) 해설한다. ‘반직선’의 도입은 ‘각’을 정확하게 정의하려면 필요하다 주장에서 시작되었지만, 또 한편으로는 각을 바라보는 측면과도 관련되는 것이다. 각의 개념 형성이라는 관점에서 수학교과서의 변화 과정을 재검토 해볼 수 있다.

이 연구는 초등수학교육에서 각을 어떤 것으로 바라보고 어떻게 도입하여 지도해 왔는가를 통하여 초등수학에서 각의 개념 및 지도를 재검토하였다. ‘교수요목기’에서 ‘2015 개정 수학과 교육과정’에 이르기까지 우리나라 수학과 교육과정 시기별로 발간된 수학교과서를 활용하였고, 각의 도입 차시에서 나타난 각의 개념과 도입 및 지도 방법을 분석하였다. 오랜 쟁점이 되어 온 각의 다면적인 성격을 초등수학교육의 입장에서 밝히고, 폭넓은 각의 개념을 깊이 있게 형성할 수 있는 방향을 모색하고자 한다.

II. 각의 개념과 교수학습

1. 각의 개념

초등학교 수학에서 각은 두 반직선으로 만들어지는

직선각을 주로 다룬다. 초기 그리이스 시대의 각 개념은 입체와 면에서 이루어지는 것으로, 이 때의 각은 평면뿐만 아니라 곡면에서의 각, 즉 곡선 사이의 각 또는 직선과 곡선 사이의 각도 다루었다(이중희, 2001, p. 27). 유클리드의 <기하학 원론>에서 각의 정의를 살펴본다면 두 향에 걸쳐서 나누어 표현하고 있다. ‘(8) 평면에 있는 두 선이 서로 만나고, 그들이 한 직선에 놓여 있지 않을 때, 그들이 서로 기운 정도를 각이라 부른다. (9) 각을 만드는 선이 둘 다 직선일 때, 직선각이라고 부른다.(Euclid & Heath, 1998, p. 40)’ 당시에는 곡선으로 된 각도 일반적으로 인정하였기 때문에, 유클리드가 각을 기운 정도로 정의하는 것은 새로운 시도라고 볼 수 있다. 아리스토텔레스의 <형이상학>에 기술된 바에 따르면, 그 당시의 각이란 선의 굴절이나 꺾인 정도를 말하는 것이었고, 한 개의 선이 굽어서 각을 만든다고 보았다.

Euclid & Heath(1998)은 철학자들이 아리스토텔레스의 범주론에서 어떤 범주에 각을 놓으려고 하였는가의 논쟁을 소개하고 있다. 첫째로는 각을 ‘양’의 범주에 넣은 사람들은 각은 선으로 나눌 수 있고, 입체각은 면으로 나눌 수 있다는 사실에서 논쟁하였다. 선에 의하여 나누어지는 것은 면이고, 면에 의해서 나누어지는 것은 입체이므로, 각은 면 또는 입체이고 따라서 양이라고 말한다. 둘째로, 각은 ‘질’의 범주에 속한다고 주장한다. 아리스토텔레스는 어떤 사물에 존재하는 형태, 생김새, 곧음, 굽음 등과 같은 것은 질에 대한 것으로서, 사물의 어떤 형태란 그 사물의 질적인 것이다. 예를 들어 삼각형과 사각형은 더 많거나 더 적은 양적인 문제가 아니며 각은 일종의 도형이라고 말한다. 셋째로, 각을 기운 정도로 말하는 것은 ‘관계’의 범주에 넣고 있다. 각을 두 선 사이에 놓이는 평면 사이의 관계를 말한다는 것이다. 각은 이러한 세 가지 범주에 모두 포함되는 것으로, 각은 같다, 다르다, 등분한다 등의 양적 측면이 있고, 어떤 형을 가지는 질적 측면이 있으며, 그 각을 만드는 선과 그 각이 놓이는 평면 사이의 관계적 측면을 갖기도 한다.

Schotten(1893)은 각의 정의를 세 가지로 요약하였는데, 첫째로, 두 직선 사이의 방향의 차, 둘째로, 평면상에서 한 변을 원래의 위치에서 다른 위치로 이동하는 회전 양, 셋째로, 한 점에서 만나는 두 직선 사이에 포함되는 평면의 일부분이라고 하였다(Shreves, 1969,

p. 362). 또한 이중희(2001)는 각의 정의를 정적 접근과 동적 접근으로 요약하면서, 두 반직선에 의해 만들어진 점의 집합이나 두 반평면으로 정의하는 정적 접근과 반직선의 회전량으로 정의하는 동적 접근으로 정리하였다.

각에 대한 논의에 따르면 각은 다면적인 성격의 것으로 여러 측면을 갖고 있다. 양적 측면, 질적 측면, 관계적 측면에서 볼 수 있고, 도형이라는 정적인 성격과 회전량이라는 동적인 면을 가진다. 이 연구에서는 초등학교 수학 내용에 나타난 여러 측면들과 관련하여, 각을 회전량이라는 양적 측면, 하나의 형이라는 점에서 질적 측면, 평면 또는 선으로 만들어지는 관계적 성질이라는 세 가지 측면에서 다루기로 한다.

2. 각 개념의 교수학습

Freudenthal(1973)은 초등기하, 삼각법, 해석기하, 공간기하 등 네 가지 관점에서 [표 1]과 같이 각 개념을 분석하였다. 각 관점에 따라서 절대각, 회전각이라는 용어를 사용하고, 각도의 측정은 반원 각도기, 원 각도기, 주행기 등을 사용할 수 있다. 또한 각 개념의 형성은 측정과 함께 도입하고 구체적인 경험을 제공해야 한다고 주장한다.

[표 1] 각 개념(Freudenthal, 1983, 이중희, 2001, p. 32에서 재인용)

[Table 1] Angle concepts

기하의 종류	각 개념	각도의 범위
초등기하	비유향 평면에 있는 반직선의 비순서쌍	0도와 180도 사이
삼각법	유향 평면에 있는 반직선의 순서쌍	$\text{mod } 2\pi$
해석기하	유향 평면에 있는 직선의 순서쌍	$\text{mod } 2\pi$
공간기하	비유향 공간에 있는 직선의 비순서쌍	0도와 180도 사이

Henderson & Taimina(2005)는 각을 세 가지 다른 관점에서 기하적 모양(geometric shape)로서의 각, 이동(dynamic motion)으로서의 각, 측정(measure)으로서의 각으로 볼 수 있다고 밝혔다. 후속 연구 Henderson & Taimina(2006)는 각을 형식적으로 표현하는 것은

어렵다고 말하고, 평면기하 저서들을 살펴보면 여러 가지 정의들을 찾을 수 있다고 한다. 각각은 각의 다른 측면이나 의미를 표현하고, 이러한 측면은 어떤 정리에 대하여 다른 증명을 이끌어낼 수 있다는 것이다.

Mitchelmore(1998)은 학생들의 각 개념을 분석하고, 학생들이 각의 크기를 각의 변이나 각을 표시하는 호의 반지름과 관련짓거나 각의 한 변이 수평이고 반시계 방향이라고 고정적으로 연결짓고 각과 각도 측정에 어려움을 겪는다고 밝혔다. 후속 연구(Mitchelmore & White, 2000)를 통하여 각 개념을 여러 가지 측면에서 다루어야 하며, 학교 수학에서 회전의 경험을 통하여 각을 다룰 것을 권고하고 있다. Keiser(2004)는 CMP(Connected Mathematics Project) 수업을 진행한 6학년 두 교실을 관찰하면서 각 개념 구성을 분석하였다. 다음 세 가지 주제 즉, ‘첫째는 각의 크기를 말할 때 정확히 무엇을 측정하는가? 둘째로, 작은 곡선을 포함할 수 있는가? 셋째로, 각도가 0°, 180°, 360°인 각을 이해하는 데에 어려움이 있는가?’(Keiser, 2004, p. 288)’를 분석하였다. 각의 측정에서 학생들은 각의 변을 길수록 더 큰 각이라고 생각하고, 각의 변이 길어지고 두 변의 사이 공간 커져 보일지라도 각의 크기는 변하지 않는다는 것을 어려워한다고 밝혔다. 일부 학생들은 곡선에서 각을 생각하기도 하고, 각도가 0°, 180°, 360°인 각을 이해하기 어려워한다고 하였다.

지금까지 살펴본 학생들의 각 개념 형성과 관련된 연구들은 학생들이 각의 크기를 각의 변의 길이와 관련짓거나 각을 회전량과 관련짓는 것을 어려워한다고 말하고 있다. 그 이유로는 각의 다면적인 측면을 다루지 못하고 있다고 지적하고, 이러한 어려움을 해결하는 데 있어서 각 개념 형성에서 측정의 경험을 하도록 하고 각의 회전량으로서의 측면을 다루도록 조언하고 있다.

III. 연구방법

1. 분석 대상

이 연구는 각 개념의 다면적 측면을 어떻게 도입해왔는가를 분석하고자 수학과 교육과정 시기별 수학교과서를 분석하였다. 교수요목기의 수학교과서 ‘셈본’을

비롯하여 1차~7차 수학과 교육과정 시기의 수학교과서, 2007개정, 2009개정, 2015개정 수학과 교육과정에 따르는 초등학교 6개 학년의 수학교과서를 수집하였다. 이 중에서 각의 개념이 처음 도입되는 학년-학기-단원을 조사하여 분석 대상으로 설정하였다. 추가적으로 각과 관련된 개념들의 순서를 분석하기 위하여 수학교과서에서 각과 관련하여 도입되는 개념들을 중심으로 단원을 조사하여 분석 대상에 추가하였다. [표 2]는 분석 대상으로 설정된 교과서 단원과 해당 쪽수를 나타낸다.

[표 2] 자료 수집
[Table 2] Collecting data

수학과 교육과정	학년-학기-단원명	해당 쪽
교수요목기	셈본 3-1-1. 새학년 셈본 3-1-1. 공원	8 28-31
1차*	산수 3-1-1. 새학년 산수 4-1-1. 새학년	11-12 20
2차	산수 3-2-3. 점과 선	39-64
3차	산수 3-1-3. 점과 선 산수 3-2-3. 다각형과 원	43-57 38-58
4차	산수 2-1-5. 평면도형 산수 3-1-6. 선과 각	51-59 90-105
5차	산수 2-1-4. 도형 산수 3-1-6. 평면도형	34-43 82-95
6차	수학 2-1-3. 도형 수학 3-1-4. 평면도형	24-33 48-61
7차	수학 2-가-3. 도형과 도형움직이기 수학 3-가-3. 평면도형	35-42 35-46
2007 개정	수학 2-1-3. 여러 가지 모양 수학 3-1-3. 평면도형	31-50 33-46
2009 개정	수학 3-1-2. 평면도형	55-69
2015 개정	수학 3-1-2. 평면도형	28-49

* 표 내부의 ‘1차’는 ‘1차 수학과 교육과정에 따른 수학교과서’를 말하는 것으로, 이후의 논의에서도 각 시기별 교육과정에 따른 수학교과서를 간단히 1차, 2차, …… 등으로 표시하기로 한다.

2. 분석 방법

이 연구는 수학과 교육과정 변화 과정에서 각을 도입하는 방법을 분석하였다. 각의 개념을 보는 관점과 학습 계열의 구성이라는 크게 두 가지 방향의 분석 틀을 설정하였다. 첫째로, 수학교과서에서 제시하고 있는 각의 정의와 표현 방법, 각의 구성요소를 통하여 수학교과서가 초점을 두고 있는 각의 개념을 분석하고자 하였다. 둘째로, 각과 관련된 개념들의 계열을 분석하고, 각의 개념을 도입하는 차시의 과제 및 활동을 통하여 지도 방법적 측면에서 교육과정 시기별 변화 과정을 비교 분석하였다.

가. 각의 정의와 표현에 대한 분석 방법

수학과 교육과정 시기별 수학교과서에서 각을 정의하는 방식과 표현 방식, 구성 요소를 다루는 방식을 조사하고 분석하였다. 첫째로, 각 개념과 관련하여 각을 도입할 때, 각을 무엇이라고 정의하고 있는지와 각을 시각적으로 표현하는 방법을 교육과정 시기별 흐름에 따라 비교 분석하였다. 둘째로, 각을 정의할 때 각의 구성 요소 즉, 각의 꼭짓점과 각의 변을 설정하고 있는지를 조사하고, 특히 최근 ‘반직선’의 도입과 관련하여 쟁점이 되었던 각의 변을 무엇으로 해설하는지 분석하였다.

나. 각의 도입과 지도 순서에 대한 분석 방법

수학 교과서에서 각과 관련된 개념들의 순서를 어떻게 설정하고 있는지 밝히고 각을 도입 및 지도하는 차시를 중심으로 지도 과제 및 활동을 중심으로 그 계열을 분석하였다. 첫째로, 각의 도입과 전개에서 언급되는 개념으로서 각의 도입과 관련하여 선분, 직선, 반직선, 직각, 삼각형, 사각형 등을 어떤 순서로 구성하고 있는지 각 교육과정 시기별로 비교 분석하였다. 둘째로, 각을 도입하는 차시에서 설정한 활동을 중심으로 지도 계열을 조사하였다. 각의 개념을 양의 측면(각의 회전량), 질적 측면(기하적 도형), 관계적 측면(각의 구성)이라는 세 가지 측면을 어떤 순서와 내용으로 다루고 있는지 분석하였다.

IV. 연구 결과

1. 수학교과서의 각 개념 분석 결과

가. 각의 정의와 시각적 표현 분석 결과

다음 [표 3]은 수학과 교육과정 시기별로 각을 도입하는 해설과 그에 딸린 시각적 표현들이다.

교수요목기와 1차에서는 각을 기하적인 형으로서 ‘모’라고 도입하였다. 2차에서는 모난 모양과 점에서 가지는 두 선이 이루는 모양이라는 두 가지 정의가 나타난다. 3차와 4차, 6차 이후 2015 개정까지는 한 점(또는 끝점)에서 두 사선(또는 반직선, 직선)으로 이루어지는 것으로 정의한다. 5차는 두 선분이 한 점에서 만나는 두 선분으로 이루어진 도형이라고 각을 정의한다. 그 당시 5차 수학과 교육과정에서 이전까지 지도되었던 선분, 반직선, 직선 중에서 반직선이라는 용어를 삭제하였고, 각을 도입할 때 삭제된 반직선을 대체하여 ‘선분’으로 각을 정의한다. 6차 이후에는 각의 변을 ‘선분’에서 ‘직선’으로 설정하였으며, 2007 개정까지 각의 변은 직선으로 해설되어왔다. 2009 개정 교육과정에서 각의 변으로서 ‘직선’이 각 개념을 정확하게 표현하고 있는가의 문제가 제기되면서, ‘반직선’을 도입하였고 각의 변을 ‘반직선’으로 해설하고 있다. 각을 정의하는 면에서 요약한다면, ‘모난 모양’이라는 기하적 도형에서 시작하였고 이후 한 점에서 그은 두 선이라는 관계적 접근으로 변화하고 있다.

시각적인 표현은 1차는 각을 ‘모’라고 하면서 삼각형과 사각형에서 각의 부분을 표시하여 나타냈다. 2차~4차는 각의 변이 반직선이고 계속 나아가는 것을 표현하고자 화살표를 사용하여 표현하고 있다. 5차 이후 2007 개정까지는 반직선의 개념을 초등학교 수학에서 다루지 않았고 화살표 표시도 삭제하였다. 2009 개정부터 반직선의 개념이 다시 도입되었고, 시각적인 표현에서 화살표는 삭제하지만 각의 변 위의 한 점을 지나 계속 나아가는 것을 표시하려고 하였다.

나. 각의 구성요소 분석 결과

다음 [표 4]는 각, 각의 꼭짓점, 각의 변을 무엇으로 정의하였는지를 나타낸 것이다.

[표 3] 각의 정의와 시각적 표현
 [Table 3] Definitions and representations of an angle

수학과 교육과정	각의 정의	각에 대한 시각적 표현
교수요목기	(각의 용어 별도로 다루지 않음, 각에 대한 언급은 시계단원에서 직각 만들기에서 나타남)(샘본3-1, p.8)	
1차	‘모’를 각이라고 합니다.(산수4-1, p.20)	
2차	다각형에서 꼭지점 있는 곳의 모난 모양을 ‘각’이라고 합니다. 이러한 각은 1점을 한쪽 끝점으로 가지는 두 선이 이루는 모양입니다.(산수3-2, p.51)	
3차	끝점이 같은 두 사선으로 이루어지는 그림을 ‘각’이라고 합니다. 이 때, 끝점 기를 ‘각의 꼭지점’이라고 합니다.(산수3-2, p.49)	
4차	위와 같이, 끝점이 같은 두 반직선으로 이루어지는 도형을 각이라고 합니다. 이 때 끝점 기를 각의 꼭지점이라고 합니다. 오른쪽 그림과 같이 반직선 기와 반직선 기로 이루어지는 각을 각 \sphericalangle 또는 각 \sphericalangle 이라고 합니다.(산수3-1, p.99)	
5차	위의 가, 나, 다와 같이 한 점에서 만나는 두 선분으로 이루어지는 도형을 각이라고 합니다. 각을 이루어있는 두 선분 기, 기를 각의 변이라고 하며, 두 선분이 만난 점 기를 각의 꼭지점이라고 합니다. 왼쪽 그림의 각을 이 각을 각 \sphericalangle 또는 각 \sphericalangle 이라고 합니다.(산수3-1, p.83)	
6차	가, 나 도형과 같이 한 점에서 그은 두 직선으로 이루어진 도형을 각이라고 합니다. 왼쪽 그림과 같이 점 기를 각의 꼭지점이라 하고, 두 직선 기, 기를 각의 변이라고 합니다. 이 때, 각을 각 \sphericalangle 또는 각 \sphericalangle 이라고 읽습니다.(수학3-1, p.49)	
7차	한 점에서 그은 두 직선으로 이루어진 도형을 각이라고 합니다. 그림에서 점 기를 각의 꼭지점이라 하고, 두 직선 기, 기를 각의 변이라고 합니다. 또 이 각을 각 \sphericalangle 이라고 합니다.(수학3-가, p.37)	
2007 개정	한 점에서 그은 두 직선으로 이루어진 도형을 각이라고 합니다. 오른쪽 각에서 점 기를 꼭짓점이라고 하고, 직선 기와 직선 기를 변이라고 합니다. 또 이 각을 각 \sphericalangle 또는 각 \sphericalangle 이라고 합니다.(수학3-1, p.35)	
2009 개정	한 점에서 그은 두 반직선으로 이루어진 도형을 각이라고 합니다. 오른쪽 각에서 점 기를 꼭짓점이라 하고, 반직선 기와 반직선 기를 변이라고 합니다. 이 각을 각 \sphericalangle 또는 각 \sphericalangle 이라고 합니다.(수학3-1, p.61)	
2015 개정	한 점에서 그은 두 반직선으로 이루어진 도형을 각이라고 합니다. 그림의 각을 각 \sphericalangle 또는 각 \sphericalangle 이라 하고, 이 때 점 기를 각의 꼭짓점이라고 합니다. 반직선 기와 반직선 기를 각의 변이라 하고, 이 변을 변 기와 변 기이라고 합니다.(수학3-1, p.34)	

각은 2차부터 본격적인 도형으로 다루어졌다. 각을 나타내는 그림에서 ‘꼭지점’과 ‘변’을 표시하였다. 3차와 4차는 각을 도입하는 차시에서 ‘각의 꼭지점’은 해설하였지만, ‘각의 변’이라는 해설은 나타나지 않는다. ‘각의 변’이라는 용어는 5차부터 각의 해설에 추가되었다. 5차 개정에 따른 교과서에서는 ‘두 개의 선분을 변, 두 선분이 만난 점을 각의 꼭지점이라고 한다(문교부, 1989d, p.131)’고 하였고, 5차에 따른 <산수 2-1>에서 삼각형의 변을 ‘선분’으로 다루었던 것과 같은 방식으로 각의 변을 ‘선분’으로 도입하고 있다.

각의 변이라는 명명은 5차부터였지만, 각의 변이라는 요소를 3차에서는 ‘사선’, 4차에서는 ‘반직선’, 5차에서는 ‘선분’, 6차부터 2007 개정까지는 ‘직선’, 2009 개정부터는 ‘반직선’으로 해설하고 있다. 3차의 ‘사선(ray)’은 한 점에서 한 방향으로 한없이 곧게 뻗어가는 선으로 시작되는 끝점이 있고 다른 끝점은 존재하지 않는 것을 말한다. 4차의 ‘반직선(half-line)’은 3차의 사선과 같은 의미로 끝점을 포함하는 폐반직선을 말한다. 4차에서 선분, 직선, 반직선으로 용어가 정리되었고, 각의 변에서도 ‘반직선’이라는 용어로 사용된다. 5차는 반직선이라는 용어가 삭제되었고, 각의 변을 ‘선분’으로 해설하였다. 6차에서는 각의 변은 ‘직선’이라는 용어로 변경되었고, 2009 개정부터 ‘반직선’이라는 용어로 해설하고 있다.

[표 4] 각의 꼭지점과 각의 변
[Table 4] A vertex and sides in an angle

수학과 교육과정	각	각의 꼭지점	각의 변
교수요목기	-	-	-
1차	모	-	-
2차	모난 모양	끝점	선
3차	끝점이 같은 두 사선	↓	사선
4차	끝점이 같은 두 반직선	↓	반직선
5차	한 점에서 만나는 두 선분	만난 점	선분
6차	한 점에서 그은 두 직선	한 점	직선
7차	↓	↓	↓
2007 개정	↓	↓	↓
2009 개정	한 점에서 그은 두 반직선	↓	반직선
2015 개정	↓	↓	↓

[표 5] 각과 관련된 개념 도입
[Table 5] Introduction of concepts related to angles

수학과 교육과정	각과 관련된 개념들의 등장 (학년-학기-단원)			
교수 요목기	세번3-1-1 직각	세번3-1-3 삼각형 변	번3-1-3 삼각형 정삼각형 직삼각형	
1차	3-1-1 (시계에서) 직각	4-1-1 삼각형 변, 변 각	4-1-4 직삼각형 정삼각형	4-1-4 직삼각형 정삼각형
2차	3-2-3 모든 선 직선 폐곡선 개곡선	3-2-3 다각형 변 꼭지점 교차	3-2-3 가 사선	3-2-3 직삼각형 정삼각형 직삼각형
3차	3-1-3 점 모든 선 선분 함등인 선분	3-1-3 직선 사선	3-1-3 가 함등인 각 직각	
4차	2-1-5 삼각형 꼭지점 삼각형 변	2-1-5 직삼각형	3-1-6 점 선분 직선 반직선	3-1-6 각의 함등인 각 꼭지점 직각
5차	2-1-4 모든 선 선분 직선	2-1-4 삼각형의 꼭지점 삼각형의 변 삼각형	3-1-3 각의 변 꼭지점	3-1-6 크기 직각
6차	2-1-4 모든 선 선분 직선	2-1-4 삼각형의 변 삼각형의 변 꼭지점 삼각형	3-1-3 각의 꼭지점 각의 변	3-1-6 크기 삼각형 삼각형 직삼각형
7차	2-1-3 모든 선 선분 직선	2-1-3 삼각형 삼각형	3-1-3 각의 꼭지점 각의 변	3-1-3 크기 삼각형 삼각형 직삼각형
2007개정	2-1-3 선의 모양 선분 직선	2-1-3 삼각형 삼각형	3-1-3 각의 꼭지점 각의 변	3-1-3 삼각형 삼각형 정삼각형
2009개정	3-1-2 모든 선 선분 직선	3-1-2 반직선 직선	3-1-2 각의 꼭지점 각의 변	3-1-2 삼각형 삼각형 정삼각형
2015개정	3-1-2 모든 선 선분 직선	3-1-2 반직선 직선	3-1-2 각의 꼭지점 각의 변	3-1-2 삼각형 삼각형 정삼각형

각의 꼭지점을 명명한 것은 1차부터 볼 수 있고, 1차에서는 각의 내부와 각의 외부를 해설하였다. 2차~4차까지는 ‘끝점’, 5차는 ‘만난 점’, 6차 이후는 ‘한 점’이라고 말하면서 각의 꼭지점을 도입하였다. 말하자면, 끝점에서 뻗어가는 것으로 도입하다가, 두 선분이 만나는 점으로, 한 점에서 직선을 그어서 만들어지는 것으로 꼭지점과 관련한 해설이 변화하고 있다.

‘각의 꼭지점’과 ‘각의 변’의 서술에 대하여 살펴본다면, 변과 꼭지점이 모두 나타난 것은 5차부터이다. 5차에서 각을 도입할 때 ‘변’을 먼저 서술하고 ‘꼭지점’을 이어서 서술한다. 이는 삼각형에서 ‘선분’으로 된 변과 꼭지점을 해설하듯이 각에서도 ‘선분’으로 된 변과 꼭지점의 순으로 해설하는 것과 관련된다고 할 수 있다. 6차 이후에는 각을 도입할 때 ‘꼭지점’을 먼저 서술하고 ‘변’을 서술하는 것으로 순서가 변경된다. 이는 한 점에서 직선이 교차하는 것으로 서술하는 것과 관련된다고 볼 수 있다. 순서의 변경과 함께 둘의 관계를 밝히는 것도 차이점이 나타났다. 5차까지의 각 도입은 ‘변’을 해설하고 두 변이 만난 점을 ‘꼭지점’이라고 해설하고 한다. 6차부터 현재 2015 개정은 각의 구성요소를 ‘꼭짓점*(꼭지점)’과 ‘변’으로 나열하고 둘 간의 관계를 서술하지는 않는다.

2. 각 개념의 도입 방식 분석 결과

가. 각과 관련한 개념의 도입 순서

교수요목기에는 각이라는 용어를 별도로 도입하는 곳은 나타나지 않았고, 직각이라는 용어에서 시작하였다. 각이라는 용어가 처음 도입되는 학년과 학기를 살펴보면, 1차는 4학년 1학기였고, 2차는 3학년 2학기, 3차부터 현재 2015 개정까지는 3학년 1학기에 배당되어 있었다. [표 5]는 각과 관련한 개념이 수학과 교과서에 도입되는 시기를 정리한 것이다.

각 개념 도입의 이전과 이후 관련된 개념들을 도입하는 순서를 통하여 각 개념이 설정된 위치를 밝혀볼 수 있다. 다음 [표 6]은 각 개념이 도입되는 시기에 어떤 관련 개념들이 배열되어 있는지 분석한 것이다.

1차는 삼각형과 사각형의 구성으로서 각을 도입하

여 다루었으며, 각을 하나의 도형으로서 다룬 것은 2차부터이다. 2차에서 선분과 직선, 다각형에 이어서 각을 도입하였다. 2차, 4차~7차, 2007 개정에서는 선분과 직선, 삼각형과 사각형의 꼭지점과 변을 도입하고 삼각형과 사각형의 구성과 관련하여 각을 도입한다. 반면에 3차, 2009 개정, 2015 개정에서는 선분, 직선, 반직선(또는 사선)에 이어서 각을 도입하고 이어서 직각과 직각삼각형, 직사각형 또는 정사각형의 순서로 진행되었다.

[표 6] 각 개념 도입 전후의 관련 개념들
[Table 6] Sequences of related concepts before and after introduction of angle concept

수학과 교육과정	이전	각 도입	이후
교수요목기	직각	-	삼각형, 변, 사각형, 정사각형
1차	직각 삼각형, 변과 (각) 사각형, 변과 (각)		직각삼각형 정삼각형 직사각형, 정사각형
2차	꼭은선 선분, 직선 폐곡선, 개곡선 다각형, 변, 꼭지점	각 사선	직각 직각삼각형 정사각형, 직사각형
3차	꼭은 선, 선분 합동인 선분 직선, 사선	각	합동인 각 직각
4차	삼각형, 꼭지점, 변 사각형, 직사각형 선분, 직선, 반직선	각	합동인 각 직각
5차 6차 7차	꼭은선, 선분, 직선 삼각형, 꼭지점, 변 사각형, 꼭지점, 변	각	각의 크기 직각 직각삼각형 직사각형, 정사각형
2007개정 2009개정 2015개정	꼭은선, 굽은선 선분 반직선, 직선	각	직각 직각삼각형 직사각형, 정사각형

간단히 요약한다면, 삼각형과 사각형을 다루고 그 구성 요소에서 각을 도입하는 것과 선분, 반직선(직선) 또는 직선에서 각을 도입하는 것으로 볼 수 있다. 각 개념을 도입할 때 관련되는 개념들의 순서 측면에서 본다면, 2차, 4차~7차, 2007 개정에서 다각형에서 그 부분으로 각 개념을 도입하는 방식과 2009 개정, 2015 개정에서 점과 반직선의 구성으로 각 개념을 도입하는 두 가지 입장을 읽을 수 있다.

* 2007 개정 이후 한글 맞춤법에 따라 ‘꼭지점’은 ‘꼭짓점’으로 변경되어 표기되었다.

[표 7] 각 개념 도입 차시의 과제 및 활동 분석

[Table 3] Analysis of tasks or activities in the introduction of angle concepts

수학과 교육과정	각의 도입 차시의 과제 및 활동	양적 측면	질적 측면	관계적 측면
교수요목기	(각이라는 용어를 별도로 다루지 않고 직각으로 도입됨) ◦ 종이를 접어서 직각을 만들기 (샘본3-1, p.8)			
1차	◦ 삼각형과 사각형을 그리기 ◦ 삼각형과 사각형에서 각을 정의하기(모를 ‘각’이라고 한다.) ◦ 삼각형과 사각형의 변의 개수 비교하기 ◦ 각의 개수 비교하기 (산수4-1, p.20)		(1) 다각형 모난 모양	
2차	◦ 다각형에서 삼각형과 사각형을 알아보기(삼각형에는 3개의 변과 3개의 꼭지점, 사각형에는 4개의 변과 4개의 꼭지점이 있다.) ◦ 삼각형과 사각형에서 각을 정의하기(꼭지점이 있는 곳의 모난 모양을 ‘각’이라고 한다.) (산수3-2, pp.51-52)		(1) 다각형 모난 모양	
3차	◦ 주어진 세 점에서 사선 그리기 ◦ 그린 사선에서 각을 정의하기 ◦ 분을 떼서 두 각을 포개보기 ◦ ‘한동인 각’ 정의하기 ◦ 분 사선과 각의 꼭지점 말하기 ◦ 한동인 각을 찾기와 주어진 각 찾기 (산수3-1, pp.49-52)	(3) 각을 포개보기	(2) 각의 분을 떼기 (5) 합동인 각 찾기	(1) 두 사선에서 도입구 말 (4) 각의 요소성하기
4차	◦ 주어진 세 점에서 반직선 두 개 그리기 ◦ 그린 반직선에서 각을 정의하기 ◦ 각의 꼭지점 말하기 ◦ 주어진 각에서 반직선, 꼭지점, 각의 이름 말하기 ◦ 주어진 세 점을 이용하여 각을 그리기 (산수3-1, pp.99-100)		(3) 그림에 각 찾기	(1) 반직선 도입구 말 (2) 각의 요소성하기 (4) 점선을 이용하여 그리기
5차	◦ 건물의 지붕 그림에서 각 가, 나, 다를 본뜨기 ◦ 본을 뜬 그림에서 선분 찾기 ◦ 각 가 나, 다 중에서 가장 많이 벌어져 있는 것 찾기 ◦ 삼각자 표시판과 콤팩트 그림에서 각을 표시하고, 각을 정의하기 ◦ 각의 변과 각의 꼭지점 정의하기 ◦ 주어진 그림에서 각 읽기 (산수3-1, pp.82-83)	(3) 벌어져 있는 정도를 비교하기	(1) 각을 본뜨기 (4) 그림에서 각을 표시하기	(2) 각의 요소성하기 (4) 각의 구별
6차	◦ 건물의 지붕 그림에서 각 가, 나, 다를 본뜨기 ◦ 본을 뜬 그림에서 가장 뽀족한 것 찾기 ◦ 삼각자를 대고 모난 그림 그리기 ◦ 꽃어진 그림에서 각의 꼭지점, 각의 변 정의하기 ◦ 주어진 각에서 각을 읽고, 꼭지점, 변을 말하기 ◦ 각의 본을 써서 삼각자 비교하기 (수학3-1, pp.48-50)	(5) 각의 뽀족함을 비교하기	(1) 그림에 선분을 본뜨기 (2) 뽀족한 것 찾기 (3) 삼각자 각 그리기	(4) 각의 요소성하기 (4) 각의 구별
7차	◦ (교실 물건 중에서) 모난 부분 찾아서 본을 뜨기 ◦ 종이를 접어서 뽀족한 부분 만들고 본을 뜨기 ◦ 주어진 세 점을 연결하여 각을 그리기 ◦ 그림에서 각의 꼭지점, 각의 변 정의하기 ◦ 주어진 도형에서 각을 읽고, 각의 꼭지점, 각의 변을 말하기 (수학3-1, pp.36-37)		(1) 구체 물에서 본뜨기 (2) 종이 접어서 본뜨기	(3) 점을 연결하여 그리기 (4) 각의 요소성하기
2007 개정	◦ (한옥 지붕 그림에서) 모난 부분 찾고 이름 붙이기 ◦ (최고 액자 가위, 표시판 등 물건 그림에서) 모난 부분 찾기 ◦ 삼각형의 모난 부분 찾아서 그리기 ◦ 각의 꼭지점, 변을 정의하고 각을 읽는 방법 해결 ◦ 각을 그리고, 각을 넣어서 문장 만들기 (수학3-1, pp.34-35)		(1) 그림에 부분 본뜨기 (2) 삼각자 각 그리기	(3) 각의 요소성하기 (4) 문장 만들기
2009 개정	◦ (등대가 빛을 비추는 모습에서) 도형을 찾기 ◦ (가위 본뜨기, 변을 정의하고 각을 읽는 방법 해결 ◦ 주어진 세 점을 이용하여 각을 그리기 ◦ (그네 건물, 건축물 사진에서) 각을 찾아 표시하기 (수학3-1, 60-61pp)		(1) 각을 찾기고 본을 뜨기 (3) 사진에서 각 표시하기	(2) 세 점을 이용하여 그리기
2015 개정	◦ (시계 삼각자, 집자에 표시된 점선) 따라 그리기 ◦ 주어진 그림에서 각, 꼭지점, 변을 정의하기 ◦ (집자를 이용하여) 여러 가지 각을 만들고 본을 떼보기 ◦ 주어진 세 점을 이용하여 각을 그리고, 각의 꼭지점, 각의 변을 써 보기 (수학3-1, pp.34-35)	(2) 두 자를 벌려서 각을 만들기	(1) 각을 따라 그리기	(3) 세 점을 이용하여 그리기 (4) 각의 요소성하기

나. 각 개념 도입 차시의 지도 방법 분석 결과

각을 도입하는 차시에서 과제나 활동을 구성하는 방식을 따라 강조되는 각 개념의 측면을 분석하였다. 각의 개념은 다면적인 성격이 있으며, 초등수학 내용과 관련하여 세 가지 측면 즉, 각의 크기나 상등을 다룬다는 점에서 양의 측면, 어떤 형태가 있다는 점에서 질의 측면, 각을 만드는 선과 그 각이 놓여 있는 평면 사이의 관계의 측면에서 분석하였다. [표 7]은 각을 도입하는 차시에서 과제 및 활동 내용을 정리하고 이 세 가지 측면을 분석한 것이다.

각을 도입하는 과제 및 활동들을 살펴보면, 기하적 도형과 구성요소의 관계적 측면을 주로 다루고 있었다. 각이 어떤 형을 말하는지 다루고 각의 구성요소를 살펴보거나 각을 그려보는 활동을 주로 하였고, 각이 갖는 도형적 측면에 집중하였다. 각에 대한 양적 측면은 3차, 5차, 6차, 2015 개정에서만 나타났는데, 각의 벌어진 정도나 포개어서 크기를 비교하는 활동이었다.

도입하는 첫 과제의 측면에서 본다면, 1차, 2차, 5차~7차, 2007개정~2009개정 등의 대부분은 각을 도입하는 차시의 첫 과제 또는 활동은 모난 곳을 찾기, 각의 본뜨기, 그림이나 구체물에서 각을 찾기 등 기하적 도형이라는 측면에서 도입되고 있었다. 이와는 달리 3차와 4차는 두 사선(또는 반직선)이라는 각의 구성으로 시작한다.

과제의 순서는 크게 다음의 네 가지 유형을 찾을 수 있었다. 첫째로, 3차와 4차는 각의 구성 살펴보는 관계적 측면에서 시작하여 다음으로 각을 본뜨고 찾는 기하적 도형에 초점을 두는 순으로 배열되었고 3차에서는 추가적으로 각을 포개어 보는 활동이 나타났다. 둘째로, 5차, 6차는 각을 본뜨는 기하적 도형의 측면에서 각의 구성을 찾는 관계적 측면으로 그리고 양을 비교하는 양적 측면의 순으로 나타났다. 셋째로, 7차, 2007개정, 2009 개정에서는 각을 본뜨고 각을 찾는 도형이라는 질적 측면에서 그 구성요소들의 관계적 측면을 다루었다. 넷째로, 2015 개정은 각을 따라 그리는 도형의 질적 측면에서 두 자를 벌리면서 회전량을 경험하는 양적 측면이 도입되었고 각의 구성요소를 말하는 관계적 측면으로 전개되었다.

V. 결론

이 연구는 초등수학에서 각의 개념 및 지도를 재검토하고자 교수요목기의 수학교과서 ‘셈본’을 비롯하여 1차~7차 교육과정 시기의 초등학교 수학(산수)교과서, 2007 개정, 2009 개정, 현재의 2015 개정 수학과 교육과정에 따르는 초등학교 수학교과서를 분석하였다. 각의 개념을 보는 관점과 학습 계열의 구성이라는 두 가지 방향을 설정하였고, 다음과 같은 연구결과를 얻을 수 있었다. 첫째로, 수학교과서에서 제시하고 있는 각의 정의와 표현 방법, 각의 구성요소를 통하여 수학교과서가 초점을 두고 있는 각의 개념을 분석하고자 하였다. 둘째로, 각과 관련된 개념들의 계열을 분석하고, 각의 개념을 도입하는 차시의 과제 및 활동을 통하여 지도 방법적 측면에서 비교 분석하였다.

첫째로, 각을 정의하는 방식에서는 ‘모난 모양’이라는 기하적 도형의 접근에서 한 점에서 그은 두 선이라는 관계적 접근으로 변화하고 있었다. 교수요목기와 1차에서는 각을 ‘모’라고 도입하였고, 2차에서는 모난 모양이라는 것과 점에서 가지는 두 선이 이루는 모양이라는 두 가지 정의가 혼재한다. 3차부터 현재 2015 개정까지는 한 점에서 두 반직선(또는 사선, 선분, 직선)으로 이루어지는 것으로 정의하고 있다. 각의 시각적인 표현은 1차는 삼각형과 사각형에서 각의 부분을 표시하였고, 2차~4차는 각의 변을 반직선임을 표현하고자 화살표를 사용하였다. 5차이후 2007 개정까지 반직선의 개념을 삭제되었고, 반직선을 표시하던 각의 변의 화살표도 삭제되었다. 2009 개정에서 반직선의 개념이 다시 도입되면서 각의 시각적인 표현에서 각의 변 위의 한 점을 지나 계속 나아가는 것을 표시하고 있었다.

둘째로, 각과 관련된 개념들의 도입 시기를 각의 도입 이전과 이후로 분석한 결과 두 가지 계열을 파악하였다. 하나는 삼각형과 사각형을 다각형의 꼭지점과 변을 먼저 다루고 이런 다각형의 부분으로 각을 도입하는 방식(2차, 4차~7차, 2007 개정)과 한 점과 반직선의 합성으로 각 개념을 도입하는 방식(3차, 2009 개정, 2015 개정)의 두 가지 입장을 읽을 수 있다. 각을 도입하는 차시에서 각 개념의 측면을 분석한 결과, 기하적 도형이라는 질적 측면과 구성요소의 관계적 측면을 주로 다루었다. 각의 벌어진 정도나 포개어서 크기를 비교하는 활동 등의 양적 측면은 3차, 5차, 6차, 2015 개정에서만 나타났다. 과제 및 활동으로 네 가지

유형을 찾을 수 있었다. 각의 꼭지점과 변의 구성이라는 관계적 측면에서 시작하여 각을 분뜨거나 찾는 기하적 도형 측면의 순으로 배열(3차, 4차), 각을 분뜨는 기하적 도형의 측면에서 각의 구성을 찾는 관계적 측면과 크기를 비교하는 양적 측면의 순으로 배열(5차, 6차), 각을 분뜨고 각을 찾는 도형이라는 질적 측면에서 그 구성요소들의 관계적 측면의 순으로 배열(7차, 2007 개정, 2009 개정), 각을 따라 그리는 기하적 도형의 측면에서 두 자를 벌리면서 회전량을 경험하고 각의 구성요소를 말하는 관계적 측면으로 배열(2015 개정) 등이다. 특히 2015 개정에서는 기하적 도형이라는 질적 측면과 함께 각의 회전량이라는 양적 측면을 다루고 있다. 이전의 수학교과서가 기하적 도형 개념에만 집중되었다면, 2015 개정에서는 회전량이라는 양적 측면을 추가하여 각 개념의 다른 측면도 다루고자 하는 의도를 보여주고 있었다.

이상의 분석 결과를 통하여 각 개념과 관련하여 ‘반직선’을 도입하는 것은 각을 정확하게 하려는 의도만이 아니라 각 개념을 다면적으로 형성하는 것에도 관련된다. 이에 대하여 ‘반직선’의 삭제와 추가를 둘러싼 의도를 파악하고자 수학교과서 지도서의 해설을 살펴본다면, 5차에 따른 <산수 2-1 교과용지도서>와 <산수 3-1 교과용지도서>에서는 직선의 화살표나 반직선의 삭제 의도를 다음과 같이 밝히고 있다.

‘직선에서 화살표는 끝없이 곧게 늘인 것을 상징으로 나타낸 것이며, 도형에서만 나타내고 수직선에서는 사용하지 않는다(문교부, 1989b, p. 67).’ ‘엄격한 의미의 각을 정의하려면 반직선을 지도하고, 두 반직선의 합집합으로 정의하고, 각의 내부와 외부 등을 구분하며, 각의 일부분인 삼각형, 사각형의 각도 별도로 이름을 붙여야 되겠지만 3학년 어린이에게는 그러한 정의들이 어렵다고 판단하여 직관에 의해 이해하는 수준으로 하향 조정된 것임을 유의해야 한다.(문교부, 1989d, p. 131)’

5차는 초등 3학년 학생들에게 반직선이 어려울 수 있다고 파악하고 구체물에서 추상하여 직관에 의하여 각을 정의하려는 의도를 밝히고, 본 뜬 그림에서 벌어진 정도가 다르다는 것으로 시각적으로 표현하고자 하였다.

이에 대하여 ‘반직선’을 제도입한 2009 개정은 반직선의 시각적 표현을 고민하였고 화살표는 추가하지 않

기로 결정하였다. 2009 개정에 따른 <수학 3-1 교과용지도서>에 따르면, 그 근거로는 ‘화살표 자체는 방향성을 나타내는 추상적 개념을 강조하는 표식이니 도형이 아니며, 초등학생에게 화살표 자체가 하나의 도형으로 인식될 수 있으므로 권장하지 않는다(교육부, 2014b, p. 173)’라고 밝히고 있다. 이 의도는 반영되었고, 화살표를 대신하여 각의 변 위의 한 점에서 더 늘이는 것으로 표현되었다. 하지만 2009 개정에서 각을 시각적으로 표현할 때 화살표를 추가하지 않는 것을 밝히면서 이어서 각을 시각적으로 표현하는데 있어서 반직선의 개념에 드러내는 것을 비판적으로 해설하고 있다. ‘이러한 각의 정의는 (각을 한 점에서 그은 두 반직선으로 정의하는 것은) 추상성을 강조하는 수학에서나 의미가 있을 뿐 실생활에서는 거의 아무런 의미도 없고 효용성도 없다. 우리가 일상에서 말하는 각의 변은 거의 모든 경우에 선분을 의미한다. 반직선이나 직선은 현실적으로 작도 불가능하므로 각의 변으로서 반직선만 고집한다면 그림으로 나타낼 수 없다. …… 초등학생의 인지발달단계를 감안할 때 가장 바람직한 것은 선분으로 표시하는 것이다. 뒤이어 나오는 직각삼각형, 직사각형 등의 도형에서도 선분으로 표현할 수 밖에 없다.(교육부, 2014b, p. 173)’라고 해설한다.

그러나 오히려 이 해설은 2015 개정이 반직선을 도입하여 각을 해설하는 의도를 드러내지 못하고 있다. 말하자면, 각의 변으로서 화살표를 표시하지 않는다는 것이나 또는 선분으로 그릴 수 밖에 없다는 점은 동의할 수 있지만, 각의 변을 반직선으로 정의하려는 시도가 무의미하거나 효용성이 없다고 평가하는 것은 2009 개정에서 반직선을 도입하는 취지를 드러내고 있는지 의문하게 된다. 반직선의 도입은 각 개념 형성과 관련지어 고려된 것이었고, 선과 점은 무정의 용어이며, 흔히 그림으로 표현하는 것은 그 아이디어를 현실적으로 시각화하는 것일 뿐 마음으로 그릴 수 밖에 없는 것들이다. 각을 그릴 때 선분으로 표현할 수 밖에 없다는 것은 그것은 각의 변이 선분이라는 의미가 아니라 유한의 수준에서 반직선을 시각화하는 것일 뿐이다. 각 개념의 형성이라는 측면에서 초등학생들이 각의 변을 유한하게 마치 선분처럼 그리지만 학생들의 마음에는 무한하게 뻗어가는 반직선을 상상하도록 하는 것이 반직선을 도입하는 취지라고 보아야 할 것이다.

2009 개정에서 반직선을 도입하였지만 수학교과서

지도서의 해설은 오히려 5차에서 반직선을 삭제하면서 선분으로 표현했던 의도와 유사한 맥락에서 해설하고 있다. '반직선'이라는 개념을 2009 개정에서 도입한 것은 단지 각을 수학적으로 정확하게 정의하려는 시도라는 점에서 뿐만 아니라 각의 다면적 측면을 경험하고 폭넓은 개념을 형성할 수 있는 방향에서 재해설이 필요하다 고 본다.

각은 회전량이라는 양적 측면, 기하적 도형이라는 질적 측면, 평면 또는 선으로 만들어지는 각의 관계적 측면 등의 다면적인 성격을 갖는다. 각 개념 형성에 관한 연구들은(Mitchelmore & White, 2000, Henderson & Taimina, 2005, 2006; Keiser, 2004) 학생들이 각의 크기를 각의 변의 길이와 관련짓고 각의 회전량과 관련짓는 것을 어려워한다고 지적하면서, 이러한 어려움은 각 개념 형성에서 다면적인 측면을 다루지 않고 있음을 지적하였다. 각 개념 형성에서 기하적 형태의 측면만이 아니라 회전이나 측정의 관점에서 각 개념을 다루어야 한다고 말하고 있다. 우리나라 수학교과서의 변화에서도 각을 도입하는 방식은 주로 기하적인 도형이나 구성 요소에 대한 학습에 집중하여 왔다. 또한 2015 개정에서는 회전량으로서의 각을 도입하고 있지만 교사용 해설을 통하여 강조점을 부각할 필요성이 있다. 미래의 수학교과서는 각의 다면적인 성격을 드러낼 수 있도록 구성하고, 또 한 편 수학과 교사용지도서에도 그 의도를 드러내어 해설할 필요가 있다. 각 개념을 도입하는 수학교과서의 입장을 변화 시킴으로써 수학교실에서 각 개념이 갖는 기하적 도형의 측면, 회전량의 측면, 점이나 선과 면의 관계적 측면 등을 다양하게 경험하고 폭넓은 각 개념을 형성할 수 있도록 지원하고 연계하여야 할 것이다.

참 고 문 헌

- 교육과학기술부(2009). 수학 2-1. 서울: 두산동아(주).
Ministry of Education, Science and Technology (2009). *Mathematics 2-1*. Seoul: Doosan Donga.
- 교육과학기술부(2010). 수학 3-1. 서울: 두산동아(주).
Ministry of Education, Science and Technology (2010). *Mathematics 3-1*. Seoul: Doosan Donga.
- 교육부(1995). 수학 2-1. 국정교과서주식회사.
- Ministry of Education (1995). *Mathematics 2-1*. National Textbooks Co., Ltd.
- 교육부(1996). 수학 3-1. 국정교과서주식회사.
Ministry of Education (1996). *Mathematics 3-1*. National Textbooks Co., Ltd.
- 교육부(2000). 수학 2-가. 서울: (주)천재교육.
Ministry of Education (2000). *Mathematics 2-Ga*. Seoul: Chunjae.
- 교육부(2001). 수학 3-가. 서울: (주)천재교육.
Ministry of Education (2001). *Mathematics 3-Ga*. Seoul: Chunjae.
- 교육부(2014a). 수학 3-1. 서울: (주)천재교육.
Ministry of Education (2014a). *Mathematics 3-1*. Seoul: Chunjae.
- 교육부(2014b). 수학 3-1. 서울: (주)천재교육.
Ministry of Education (2014b). *Mathematics 3-1 Teachers' Guide*. Seoul: Chunjae.
- 교육부(2018). 수학 3-1. 서울: (주)천재교육.
Ministry of Education (2018). *Mathematics 3-1*. Seoul: Chunjae.
- 문교부(1954). 셈본 3-1. 대한문교서적주식회사
Ministry of Education (1954). *Sembon 3-1*. Deahan Moongyo Book Co., Ltd.
- 문교부(1959). 산수 3-1. 대한문교서적주식회사.
Ministry of Education (1959). *Arithmetic 3-1*. Deahan Moongyo Book Co., Ltd.
- 문교부(1963). 산수 4-1. 국정교과서주식회사.
Ministry of Education (1959). *Arithmetic 4-1*. Deahan Moongyo Book Co., Ltd.
- 문교부(1965). 산수 3-2. 국정교과서주식회사.
Ministry of Education (1965). *Arithmetic 3-2*. National Textbooks Co., Ltd.
- 문교부(1972). 산수 3-1. 국정교과서주식회사.
Ministry of Education (1972). *Arithmetic 3-1*. National Textbooks Co., Ltd.
- 문교부(1973). 산수 3-2. 국정교과서주식회사.
Ministry of Education (1973). *Arithmetic 3-2*. National Textbooks Co., Ltd.
- 문교부(1985a). 산수 2-1. 국정교과서주식회사.
Ministry of Education (1985a). *Arithmetic 2-1*. National Textbooks Co., Ltd.
- 문교부(1985b). 산수 3-1. 국정교과서주식회사.
Ministry of Education (1985b). *Arithmetic 3-1*. National Textbooks Co., Ltd.

- 문교부(1989a). 산수 2-1. 국정교과서주식회사.
 Ministry of Education (1989a). *Arithmetic 2-1*. National Textbooks Co., Ltd.
- 문교부(1989b). 산수 2-1 교사용지도서. 국정교과서주식회사.
 Ministry of Education (1989b). *Arithmetic 2-1 Teachers' Guide*. National Textbooks Co., Ltd.
- 문교부(1989c). 산수 3-1. 국정교과서주식회사.
 Ministry of Education (1989c). *Arithmetic 3-1*. National Textbooks Co., Ltd.
- 문교부(1989d). 산수 3-1 교사용지도서. 국정교과서주식회사.
 Ministry of Education (1989d). *Arithmetic 3-1 Teachers' Guide*. National Textbooks Co., Ltd.
- 이종희(2001). 각 개념에 대한 수학교육적 분석. 학교수학, 3(1), 25-44.
- Lee, Chong Hee (2001). An analysis on angle concepts in mathematics education. *Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics: School Mathematics*, 3(1), 25-44.
- 한국과학창의재단(2011). 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정 연구. 정책연구 2011-11. 서울: 한국과학창의재단.
- KOFAC(2011). *Study of mathematics curriculum according to 2009 revised curriculum: Policy research 2001-11*. KOFAC: Korea Foundation for the Advancement of Science & Creativity
- Browning, C. & Garza-Kling, G. (2009). Conceptions of angle: Implications for middle school mathematics and beyond. In Craine, T. & Rubenstein, R. (Eds.) *Understanding Geometry for a Changing World*, 127-140. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
- Euclid & Heath, T. 이무현(역)(1998) 기하학원론 마. 서울: 교우사.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.
- Henderson, D. W. & Taimina, D. (2006). Eeperiening meanings in geometry, In David Pimm and M. Sinclair(Eds.), *Aesthetics and Mathematics*, 58-83, Springer-Verlag.
- Keiser, J. (2004). Struggles with developing the concept of angle: Comparing 6th grade students'discourse to the history of the angle concept. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(3), 285-306.
- Mitchelmore, M. C. (1998). Young students' concepts of turning and angle. *Cognition and Instruction*, 16(3), 265-284.
- Mitchelmore, M. C., & White, P. (2000). Development of angle concepts by progressive abstraction and generalisation. *Educational Studies in Mathematics*, 41(3), 209-238.

Angle concepts and introduction methods of angles in elementary mathematics textbooks

Kim, Sangmee

Department of Mathematics Education,
Chuncheon National University of Education, Chuncheon, Korea
E-mail: sangmee@cnue.ac.kr

Angle concepts have a multifaceted nature such as quantitative aspects as the amount of rotation, qualitative aspects as geometric shapes, and relationship aspects made with planes or lines. This study analysed angle concepts and introduction methods of angles in elementary mathematics textbooks which have been used from the Syllabus Period to the 2015 Revised Mathematics Curriculum.

First, the concepts of angles in mathematics textbooks focus through the definitions, representations, and components of angles presented in mathematics textbooks are analyzed. Secondly, how various aspects of each angle are sequenced through the tasks or activities in the introduction of lesson is looked. As a result of analysis, the methods of introducing angles in the changes of mathematics textbooks have mainly focused on learning about geometric shapes and relations of components. In the mathematics classroom, students should experience various aspects of geometric shapes, rotations, relational aspects of points, lines and surfaces, and support and link them to form a wide range of concepts.

* ZDM Classification : G22

* MSC2000분류 : 97U20

* Key Words : angle, angle concepts, representations of angle, definitions of angle, introduction methods of angles, elementary mathematics textbooks