韓國數學教育學會誌 시리즈 C <初等數學教育>
https://doi.org/10.7468/jksmec.2018.21.2.237
2018. 4. 제 21권, 제 2호, 237-260

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C: Education of Primary School Mathematics
April. 2018, Vol. 21, No. 2, 237-260

초등 수학 교과서 비와 비율 단원의 모델 비교 분석 -비례에 대한 곱셈적 사고 및 비례 상황의 구조를 중심으로-

박 선 영 (한국교원대학교 대학원)
이 광 호 (한국교원대학교)†

본 연구는 4개국의 초등학교 수학 교과서 비와 비율 단원에서 어떠한 모델을 사용하고 있는지 알아보고, 비례에 대한 곱셈적 사고와 비례 상황의 구조에 따라 이러한 모델이 교과서에 어떻게 반영되어 있는지 살펴보았다. 이를 위해 한국, 일본, 싱가포르, 미국의 초등학교 5, 6학년 수학 교과서를 비교 분석하였다. 그 결과 그림 모델과 비표, 이중수직선, 테이프 다이어그램에서 비례에 대한 곱셈적 사고와 비례 상황의 구조에 따른 차이를 확인할 수 있었다. 또한 다중묶음관점에서 변동부분관점으로 이어지는 일본교과서의 전개나 두 가지 이상의 모델이 함께 쓰인 각 나라 교과서의 사례에서 곱셈적 사고의 연결 및 통합 가능성을 찾을 수 있었다. 따라서 학생들의 곱셈적 사고를 신장시키고 측정 공간 내 또는 측정 공간 사이의 비례추론을 지도하기 위해 차기 교과서에서 어떤 종류의 모델을 어떻게 제시하는 것이 효과적일지 좀 더 신중한 검증과 논의가 필요하다.

I. 서론

비(ratio)와 비율(rate) 및 비례관계(proportional relationship)는 분수 및 소수와 곱셈, 나눗셈, 백분율, 함수, 확률, 닮음 등 수학의 주요 개념들을 모두 포함하는 상호 연관된 개념이다(Vergnaud, 1983). 비와 비례는 초등 수학과 중등 수학을 이어주는 가교역할을 할 뿐만 아니라 대학 수학의 교육과정에서도 찾아볼 수 있는 개념이며(박정숙, 2009) 과학과 같은 타 교과에서도 꼭 필요할 뿐만 아니라 속도, 축척, 농도, 조리법 등 실생활에서 유용하게 사용될 수 있다(Cramer, Post, & Currier, 1993; Lesh, Post, & Behr, 1988).

비와 비율이 초·중등 수학교육에서 중요하게 가르쳐야 하는 개념이라는 것은 많은 선행연구들에서 언급되었다(Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000; National Mathematics Advisory Panel, 2008). NCTM(2000)에서는 비와 비율을 시간과 노력을 기울여 신중하게 발전시켜야 하는 수학의 주요 개념으로 보았으며 National Mathematics Advisory Panel(2008)은 비와 비율이 분수, 소수, 백분율의 상호 관련 주제로서 대수학에서 중요한 토대를 제공한다고 하였다.

비와 비율을 이해하기 위해 학생들은 범자연수 뿐만 아니라 분수와 소수, 곱셈과 나눗셈에 대해 알아야 하며 비교하는 둘 이상의 양이 서로 배의 관계라는 것에 주목하여야 한다. 또한 비와 비율에 대한 관계적 이해 없이 형식적 계산에만 치우친다면 비례 개념을 함수나 확률, 기하학적 닮음으로 확장시켜 나가는 데 어려움이 있을 것이다.

한편 비와 비율 및 비례관계를 곱셈적 사고로 설명하려는 노력은 여러 학자들에 의해 이루어져 왔다(Behr, Harel, Post & Lesh, 1993; Confrey & Smith, 1994, 1995; Kaput & West, 1994; Vergnaud, 1988). 이 중 Vergnaud는 비례 상황의 구조에 따른 비례추론을 제시하였는데, 측정 공간 내 분석과 측정 공간 사이의 분석으로 나눌 수 있다. 또한 Beckmann과 Izsak(2015)은 여러 선행 연구들을 종합 및 발전시켜 비례 관계에 대한 곱셈적 사고이자 두 가지 양적 관점인 다중묶음관점(multiple batches perspective)과 변동부분관점(variable parts perspective)을 제시하고, 이에 따른 비례추론전략을 설명하였다.

초등학교 학생들의 특성을 고려하였을 때, 비례에

* 접수일(2018년 4월 5일), 심사(수정)일(2018년 4월 17일), 게재확정일(2018년 4월 25일)
* ZDM분류 : C13
* MSC2000분류 : 97C90
* 주제어 : 비, 비율, 비례관계, 모형, 곱셈적 사고, 비례 상황의 구조
† 교신저자 : paransol@knue.ac.kr

대한 곱셈적 사고를 신장하고 효과적인 비례추론 전략을 탐색하게 하기 위해서는 두 양의 곱의 관계 및 공변성과 불변성을 직관적으로 나타낼 수 있는 시각적 모델을 활용하는 것이 도움이 될 것이다. 비와 비율 지도에 시각적 모델을 사용할 필요가 있다는 것은 이미 국내의 여러 선행연구들을 통해 밝혀져 왔다(김경선, 박영희, 2007; 정은실, 2010; 임재훈, 이형숙, 2015; 정영옥, 2015; 서은미, 방정숙, 이지영, 2017). 그 중 임재훈, 이형숙(2015)은 Beckmann과 Izsak (2015)의 다중묶음관점과 변동부분관점에 적합한 시각적 모델인 이중수직선(double number line)과 이중테이프(double tape diagram) 모델을 통해 비례식과 비례배분 단원의 실생활 문제를 해결할 수 있음을 설명하였으며 서은미, 방정숙, 이지영(2017)은 비표, 이중수직선, 이중테이프 모델을 활용한 비례 추론 수업을 분석하였다.

현재 우리나라 교과서의 비와 비율 단원은 주로 비표와 문장제로 구성되어있으며 이마저도 문제 해결 방법이 자세하게 안내되어 있지 않다. 비례에 관한 곱셈적 사고나 비례 관계의 핵심인 공변성과 불변성에 대한 표현도 부족하며 시각적 모델을 활용한 비례추론 전략 탐색 보다는 분수와 소수를 사용한 연산과 답 구하기에 치중하고 있다.

이에 본 연구는 차기 교과서 비와 비율 단원에서의 모델 사용에 시사점을 주기 위해 국내·외 초등 수학교과서 비와 비율 단원에 어떠한 모델들이 사용되고 있는지 살펴보고, 비례에 대한 곱셈적 사고와 비례 상황의 구조에 따른 분석이 어떻게 반영되어 있는지 살펴보았다. 앞선 임재훈, 이형숙(2015)과 서은미, 방정숙, 이지영(2017)의 연구가 시각적 모델을 사용한 수업을 분석한 연구라면 본 연구는 4개국 교과서 비와 비율 단원에 사용된 시각적 모델들을 분석틀에 따라 비교·분석한 것이다. 기존의 비와 비율 단원에 대한 교과서 분석 연구(장혜원, 임미인, 유미경, 박혜민, 김주숙 외, 2017; 장혜원, 박혜민, 김주숙, 임미인, 유미경, 이화영, 2017)와 차별을 두기 위해 비례에 관한 용어의 정의나 학습 요소 및 지도 순서 보다는 비와 비율 지도 모델 분석에 집중하였고 모델의 종류와 이에 반영된 곱셈적 사고, 비례 상황의 구조에 따른 비례 추론 전략 분석에 집중하였다.

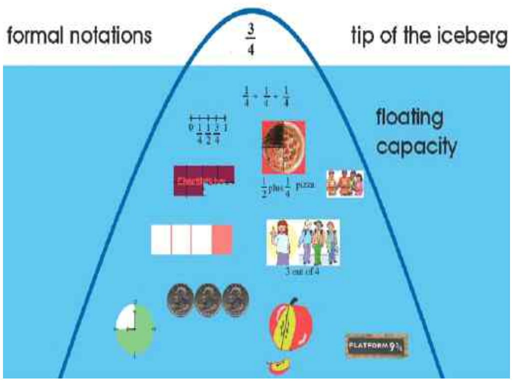
Ⅱ. 이론적 배경

1. 비와 비율 지도 모델

수학에서 모델이란 문제 상황과 관련된 수학적 개념 및 구조를 반영하는 다양한 표현이다(Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). 모델은 문자적인 방식이 아니며 구체물, 그림, 다이어그램 그리고 전형적인 상황제시나 기호까지 모두 포함한다.

Webb, Boswinkel, Dekker(2008)는 수학적 표현을 비형식적, 전형식적, 형식적 표현으로 구분하였다. 비형식적 표현이란 실제 또는 상상의 맥락에서 그림이나 구체물(예를 들면 시간, 동전, 사과조각 등)으로 상황을 표현하거나 언어로 설명하는 것이다. 비형식적 표현은 비표, 수직선, 이중수직선, 퍼센트 막대나 분수 테이프 다이어그램과 같은 전형식적 모델로 옮겨 가기 전에 사용한다.

형식적 표현은 숫자와 기호로 이루어진 식이며 모델 해석의 어려움이 없고 실용적이며 정확한 계산을 가능하게 한다. 하지만 학생들은 식을 사용하기 전 반드시 비형식적, 전형식적 표현을 충분히 경험해야 한다. 이들은 빙산 모델(The iceberg model)을 통해 학생들이 형식적 개념을 이해하기 위해서는 폭넓은 수학적 표현에 대한 경험을 바탕으로 해야 한다고 하였으며 눈으로 확인 가능한 형식적 개념에 대한 이해는 빙산의 일각과 같다고 하였다([그림1]).



[그림 1] 수학적 이해에 관한 빙산 모델
[Fig. 1] The iceberg model
(Webb, Boswinkel, Dekker, 2008, p111)

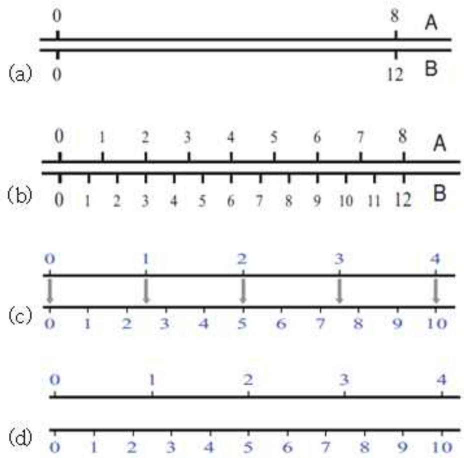
본 연구는 Webb, Boswinkel, Dekker(2008)의 수학적 표현의 구분에 따라 각 나라 교과서 비와 비율 단원의 모델을 분류하였으며 특히 전형식적 모델 중에서 비표와 이중수직선, 이중테이프 다이어그램에 주목하였다.

먼저 비표는 많은 학자들에 의해 비와 비율 지도에 유용하다는 것이 밝혀진 모델이다(Streefland, 1985; van de Walle, 2008; Lamon, 2012; Sumarto, 2013). Streefland(1985)에 따르면 비표는 현실주의 수학교육(Realistic Mathematics Education)자들에 의해 비와 비율에 대한 학생들의 이해를 증진시키는 도구로서 채택 및 개발되었다. 비표는 동등한 관계의 비를 연속적으로 기록함으로써 학생들에게 비와 비례 개념을 구축할 수 있는 경험을 제공한다. 또한 비표는 다양한 비례 상황과 비례 관계를 표시할 수 있는 통합 모델이며 비와 비율을 장기간 학습하는 과정에 필요한 도식화 도구이다. 비표는 비의 수치를 문맥으로부터 분리하는데 기여하고 나아가 그 수치에서 비례 관계의 모든 특성을 발견하고 적용할 수 있도록 돕는다.

이중수직선 모델 역시 현실주의 수학교육에 영향을 받아 학교 교과서에 등장하기 시작했으며 학생들이 비와 비율에 대한 덧셈적 접근에서 곱셈적 접근으로 자연스럽게 옮겨가는 데 유용한 모델이다(Kuchemann, Hodgen & Brown, 2011). 이중수직선 위에서의 반복적인 뛰어 세기는 학생들의 곱셈적 사고를 기르기 위한 효율적인 방법이며 특히 두 양이 공변함을 직관적으로 나타낼 수 있다는 점에서 비와 비율 지도에 효과적이다.

이중수직선의 형태는 [그림 2]와 같이 다양하게 나타낼 수 있다. 0을 표시한 두 수직선에 서로 대응되는 수를 평행하게 배치한다. (a),(b)와 같이 서로 대응하는 수만을 눈금으로 표시하거나 모든 눈금을 표시할 수도 있고, (c),(d)와 같이 대응화살표를 나타내거나 생략할 수 있다.

이중수직선은 본질적으로 대응 다이어그램 두 개의 평행 축이 선형 함수관계를 나타낸다(Kuchemann, D., Hodgen, J., & Brown, M. 2014). 선형함수 그래프의 축과 축을 나란히 눕혀 놓은 꼴로 볼 수 있으며 서로 대응관계에 있는 두 수를 같은 선상에 놓는다. 또한 선형함수의 성질을 이중수직선을 통해 비례관계로 나타낼 수 있다. 예를 들면 선형함수 $f(x)=mx$는 $f(p+q)=f(p)+f(q)$, $f(rp)=rf(p)$의 성질을 갖는데, 이러한 성질을 이중수직선을 통해 표현할 수 있으며 각각을 비례추론의 덧셈전략과 곱셈전략으로 연결시킬 수 있다.

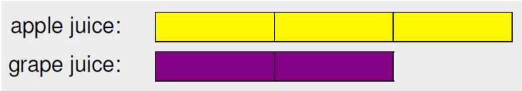


[그림 2] 이중수직선의 여러 가지 형태
[Fig. 2] The different forms of double number lines
(Kuchemann, Hodgen, & Brown, 2011, 2014)

Beckmann과 Izsak(2015)에 따르면 다중묶음관점은 이중수직선 모델을 통해 시각적으로 나타낼 수 있다. 곱셈 및 나눗셈 연산은 길이의 반복 및 분할로 표현할 수 있으며, 새로운 양의 추가는 수직선 길이를 확장하는 것으로 나타낼 수 있다.

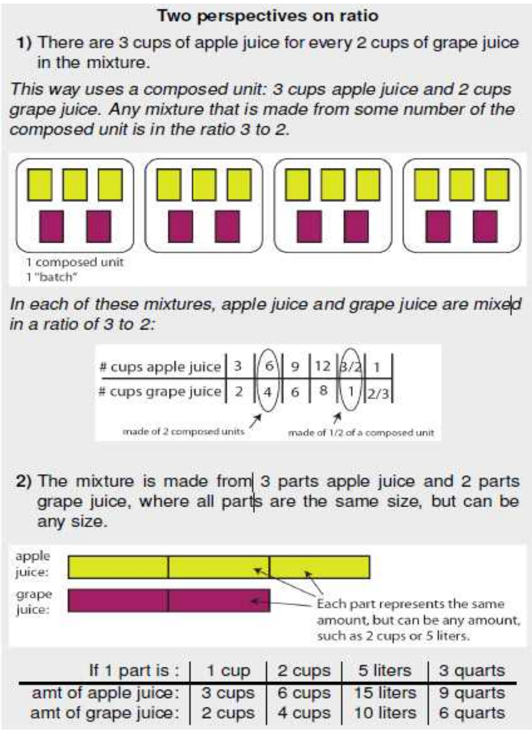
이중수직선과 더불어 이중테이프 다이어그램은 동치 비를 나타내기에 유용한 모델이며 두 유형의 다이어그램 모두 비례관계에 있는 두 양의 상대적 크기를 시각적으로 나타낸다(Common Core Standards Writing Team, 2011). 이중수직선이 비교하는 두 양의 단위가 다를 때 유용한 반면 이중테이프 다이어그램은 비교하는 두 양의 단위가 같을 때 적합하다.

[그림 3]은 사과 주스와 포도 주스를 3 : 2의 비로 섞어 혼합 주스를 만드는 상황을 이중테이프 다이어그램으로 나타낸 것이다. 혼합 주스의 양은 5칸의 테이프에 각각 같은 크기로 나누어진다. 예를 들어 혼합 주스의 양이 10컵이면 테이프 한 칸 당 혼합 주스의 양은 2컵이고, 혼합주스의 총량이 1갤런이면 테이프 한 칸 당 혼합 주스의 양은 갤런이다.



[그림 3] 사과주스와 포도주스의 비를 나타내는 이중 테이프 다이어그램
[Fig. 3] The double tape diagrams showing the ratio of apple juice to grape juice
(Common Core Standards Writing Team, 2011, p4)

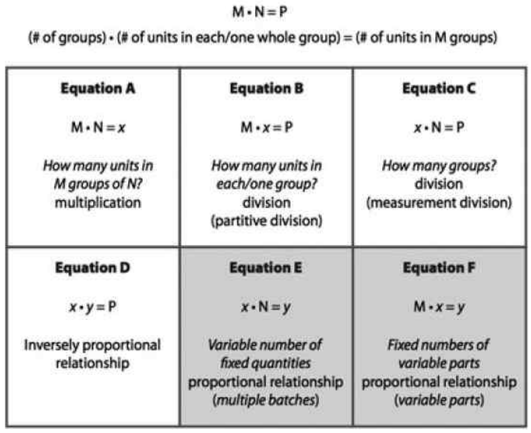
Common Core Standards Writing Team(2011)은 [그림 4]와 같이 비에 대한 두 가지 관점을 제시한 바 있다. 첫 번째 관점은 비를 하나의 합성단위(composed unit) 또는 한 묶음(batch)으로 보고 이를 여러 번 반복하는 것이다. 두 번째 관점은 비를 같은 크기인 부분들(parts)로 이루어진 것으로 보는데, 각각의 부분은 어떤 크기(any size)나 양(any amount)으로 자유롭게 변할 수 있다. 이 두 관점은 본 연구에서 다룰 다중묶음관점과 변동부분관점에 각각 대응된다.



[그림 4] 비에 대한 두 가지 관점
[Fig. 4] The two perspectives on ratio
(Common Core Standards Writing Team, 2011, p14)

2. 다중묶음관점과 변동부분관점

Beckmann과 Izsak(2015)은 곱셈 및 나눗셈, 비례 관계를 모두 포함하는 곱셈적 관계(multiplicative relationships)를 [그림 5]와 같이 방정식으로 나타냈다. 각각의 식에서 M, N, P는 상수이고 x, y는 변수이다.



[그림 5] 곱셈적 관계에 대한 방정식
[Fig. 5] The equation of multiplicative relationships
(Beckmann & Izsak, 2015, p.19)

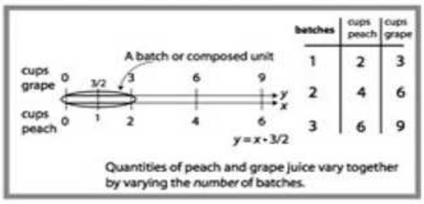
식 A, B, C는 곱셈 및 나눗셈 상황이며 식 D는 반비례 관계, 식 E, F는 비례 관계이다. 식 E와 F에서 N과 M은 비례 상수(the constant of proportionality) 또는 비의 값(a value of the ratio)이며, 단위 비율(unit rate)로 간주된다. Beckmann과 Izsak은 이 식 E, F를 각각 비례관계에 대한 곱셈적 사고인 다중묶음관점과 변동부분관점으로 설명하였으며, 용어의 명확화를 통해 비례 관계를 나타낼 때 고정되어 있는 것과 변하는 것을 확실하게 구분하여 제시하였다.

식 E는 다중묶음(multiple batches)관점으로 단위 비율(N)의 크기를 고정한 채 그 개수를 x배한다. 여기서 묶음(batch)이란 단위 비율을 말하며 선행 연구에서는 구성단위(composed unit)라 하였다(Lamon, 1993; Lobato & Ellis, 2010). 예를 들면 복숭아 주스와 포도주스를 2 : 3의 비로 섞어서 혼합 주스를 만드는 문제를 다중묶음관점에 따라 해석해보자. 혼합 주스 한 병은 복숭아 주스 2컵과 포도주스 3컵으로 만들어지며, 이 혼합 주스 한 병은 단위 비율이자 구성단위가 된다.

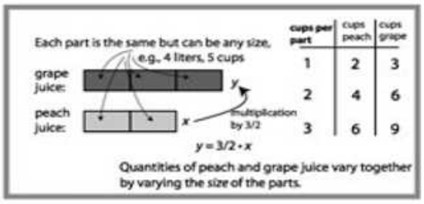
식 F는 변동부분(variable parts)관점으로 단위 비율

(M)의 개수를 고정한 채 단위의 크기를 n배한다. 앞서 예시로 들었던 혼합주스 문제를 이번에는 변동부분관점에 따라 해석해보자. 복숭아 주스와 포도 주스를 2 : 3의 비로 섞어서 혼합 주스를 만들기 위해 컵이 아닌 5개의 큰 용기를 준비한다. 이에 복숭아 주스와 포도 주스를 각각 2통, 3통씩 넣고 섞어 혼합주스를 만든 뒤 작은 병에 소분한다. 이 해석에 따르면 단위 비율인 2 : 3이 더 이상 2컵, 3컵이 아닌 2통, 3통으로 그 양의 크기가 커진 것을 알 수 있다.

두 관점에서 컵이나 용기는 하나의 단위 즉 유닛(unit)으로 보는 것이 적절하며, 유닛의 크기와 상관없이 복숭아 주스와 포도 주스의 비가 2 : 3이라는 것은 변함이 없다. Beckmann과 Izsak은 두 관점을 [그림 6]과 같이 나타내었다.



(a) 다중묶음관점



(b) 변동부분관점

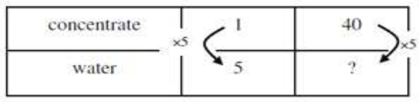
[그림 6] 다중묶음관점과 변동부분관점
[Fig. 6] The multiple-batches perspective and variable-parts perspective
(Beckmann & Izsak, 2015, p.22)

Beckmann과 Izsak(2015)은 다중묶음관점과 변동부분관점이 서로 상호 보완적이라고 하면서 교사는 학생들의 비례추론 발달을 위해 이 두 가지 관점을 모두 이해할 수 있도록 적절한 경험을 제공해야 하며 각 관점에 적합한 인지적 자원을 제시하여야 한다고 하였다.

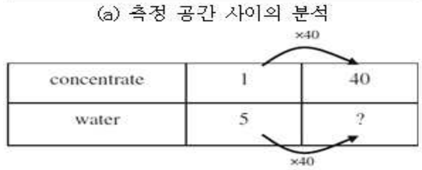
3. 비례 상황의 구조

Vergnaud(1988)는 곱셈구조(multiplicative structure)의 일부로서 비와 비율 및 비례관계에 대한 포괄적인 분석을 제시하였다. 그는 학교수학 교육과정에서 가장 중요한 개념적 영역(conceptual field)이 곱셈구조라고 하였으며, 단순하거나 다중적인 비례 관계에서부터 곱셈 및 나눗셈을 필요로 하는 비례 문제까지 비와 비율에 대한 모든 상황을 포함한다.

또한 그는 비례 상황의 구조(the structure of proportion situations)에 대하여 논하였는데, 비례 상황의 구조란 비교하는 두 구성요소 즉 측정 공간(measure space)사이의 관계를 말한다. 이 두 구성 요소 사이에는 두 가지 유형의 분석이 가능한데, 바로 측정 공간 내(within)의 분석과 측정 공간 사이(between)의 분석이다. Shield와 Dole(2013)은 이러한 비례 상황의 구조를 부연 설명하기 위해 [그림 7]과 같은 예를 제시하였다(p.187). 측정 공간 내의 분석에 따르면 농축액 1의 양을 40배 한 것과 같이 물 5의 양을 40배하여 200ml라는 값을 얻을 수 있고, 측정 공간 사이의 분석에 따르면 물은 농축액의 5배로 40ml × 5 = 200ml이다.



(a) 측정 공간 사이의 분석



(b) 측정 공간 내의 분석

[그림 7] 주스문제의 측정 공간 사이 또는 측정 공간 내의 분석
[Fig. 7] The measure spaces representation and between or within analysis of the juice problem (Shield & Dole, 2013, p.187)

Shield와 Dole(2013)은 비와 비율은 두 요소 간의 곱셈적 비교(multiplicative comparison)이며 측정 공간 사이 또는 측정 공간 내의 곱셈 및 나눗셈이 비와 비율의 이해에 중요한 역할을 한다고 하였다. 이 외에도 여러 학자들이 비와 비율을 곱셈적 비교로 보았으며 효과적인 비례추론을 위해 덧셈적 비교와 곱셈적 비교를 구분할 수 있어야 한다고 하였다(Behr, Harel, Post & Lesh, 1992; Lamon, 2012).

Ⅲ. 연구 방법

1. 분석 대상

본 연구는 각 나라 초등학교 수학교과서 비와 비율 단원의 모델에 대한 고찰을 통해 비례에 대한 곱셈적 사고와 비례상황의 구조에 따른 분석을 제시한다. 이를 위해 한국 1종, 일본 3종, 싱가포르 3종, 미국 1종의 총 8종 초등학교 수학 교과서를 비교 분석하였다(<표 Ⅲ-1>). 일본과 싱가포르 교과서는 2종 이상이므로 구분명칭을 부여하였으며 출판연도를 2015년으로 통일하여 선정하였고, 가능한 많은 교과서의 시각적 모델을 살펴보고자하는 과정에서 나라 간 교과서 수의 차이가 발생하였다(국정교과서인 한국 교과서 제외). 반복적인 연습문제나 문장제 위주인 수학익힘책과 워크북, 저널 등의 보조 교과서를 제외했으며 주 교과서에서 시각적 모델과 함께 제시된 모든 문제 상황을 분석하였다.

[표 1] 분석대상 교과서
[Table 1] The textbooks for analysis of this study

국가	교과서명	출판사	년도
한국	수학 6-1, 6-2	천재교육	2015
일본	新しい算數(JPN1) 5下, 6上, 6下	東京書籍	2015
	れくれく算數(JPN2) 6上	啓林館	2015
	小學算數(JPN3) 6年上, 6年下	日本文敎出板	2015
싱가포르	Shaping Maths Course Book(SGP1) 5A, 6A	Marshall Cavendish Education	2015
	Primary Mathematics Textbook(SGP2) 5A, 6A		2015
	Discover Maths(SGP3) 5A, 6A	Pan Pacific	2015
미국	Everyday Mathematics Grade 6	McGraw-Hill Education	2015

2. 분석틀

본 연구에서 사용한 교과서 분석틀은 [표 2]와 같다. 분석요소는 형식적인 측면과 내용적인 측면으로 나누었으며 형식적인 측면에서는 지도 모델을, 인지적인 측면에서는 비례에 대한 곱셈적 사고와 비례 상황의 구조에 따른 비례추론 전략을 살펴보았다. 지도 모델 분류는 Webb, Boswinkel & Dekker (2008)가 제시한 모델의 분류를 사용하였으며 전형식적 모델의 여러 종류 중 4개국 교과서에 주로 등장하는 비표, 이중수직선, 테이프 다이어그램을 비교 분석하였다. 비례에 대한 곱셈적 사고는 Beckmann과 Izsak(2015), 비례 상황의 구조는 Vergnaud (1983)의 견해에 따른 것이다.

[표 2] 교과서 분석틀
[Table 2] The framework for analysis of this study

분석요소		분석내용	
형식적 측면	지도 모델	비형식적 모델	그림 모델
		전형식적 모델	비표
			이중수직선
			이중테이프 다이어그램
		형식적 모델	비례식
내용적 측면	비례에 대한 곱셈적 사고	다중묶음관점	
		변동부분관점	
	비례 상황의 구조에 따른 비례추론	측정 공간 내의 분석	
		측정 공간 사이의 분석	

Ⅳ. 연구 결과

1. 지도 모델

가. 비형식적 모델

4개국 교과서 모두 단원의 도입 부분에서 구체물이나 그림 모델과 같은 비형식적 모델을 제시하고 있다. 하지만 구체적인 활용 모습은 나라별로 조금씩 차이가 있다.

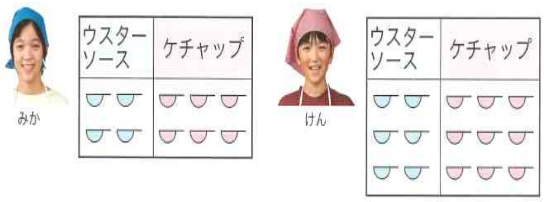
먼저 우리나라 수학 교과서는 스토리텔링 방식에 의해 각 차시별로 문제 상황과 이를 묘사하는 삽화를 제시하고 있다. 문제에서 제시된 숫자가 삽화에 정확하게 나타난 경우도 있으나 그림으로 표현해야 하는 숫자가 너무 큰 경우 그 수의 일부분만 그림으로 표현되어 있다([그림 8]). 수학적 상황을 그림 모델로 묘사하고자 할 때는 그 수나 양이 그림 모델로 나타내기에 적합한 상황을 선택하여 수학적 속성을 정확하게 제시해주는 것이 학생들의 이해를 돕는 데 효과적일 것이다.

(a) 문제에서 제시된 수가 정확하게 나타난 경우(p. 102)

(b) 문제에서 제시된 수의 일부분만 나타난 경우(p. 100)

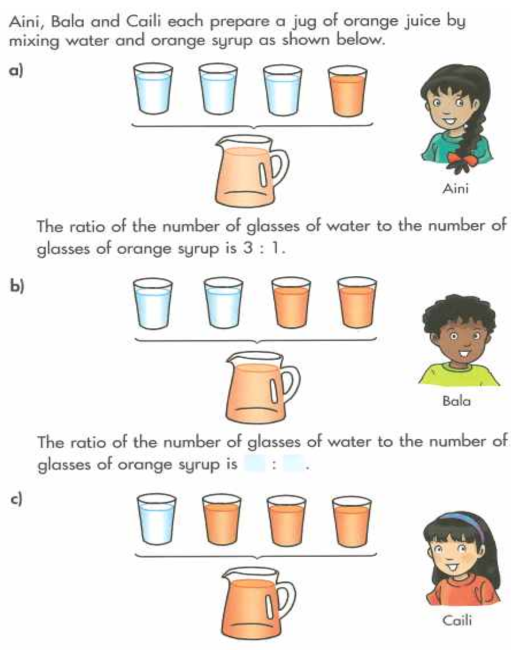
[그림 8] 우리나라 비와 비율 단원의 삽화 (교육부, 2015a)
[Fig. 8] The illustration of Ratio and Rate in Korea

일본의 그림 모델을 살펴보면 JPN1 6上 '와리아이(割合)의 표시 방법을 배워요.'의 도입부에서 굴 소스 두 스푼과 케첩 세 스푼을 섞어 함박소스를 만드는 상황을 [그림 9]와 같이 그림 모델로 나타고 있다. 일본 교과서의 그림 모델은 수학적 속성을 간결하고 정확히 나타낼 뿐만 아니라 비교하는 두 양을 병렬로 제시하여 크기를 비교하기 쉽게 구성되어 있다. 스토리텔링 방식의 우리나라 교과서에서도 문제 풀이 과정에서는 이러한 그림 모델을 충분히 활용할 수 있을 것이다.



[그림 9] JPN1 6上의 그림 모델 (藤井齊亮 外, 2015b, p. 61)
[Fig. 9] The pictorial model of JPN1 6上

싱가포르 교과서에서는 5a와 6a에서 Ratio 단원이 각각 한 번씩 등장하는데, 5a의 Ratio 단원에서 그림 모델이 주로 사용되고 있다. [그림 10]은 물과 오렌지 시럽을 섞어 오렌지주스를 만드는 상황을 묘사한 그림 모델이다. 오렌지시럽이 높은 비율로 들어갈수록 그림 모델의 오렌지주스의 색이 진해지고 있는데, 이는 학생들이 농도 개념을 직관적으로 알 수 있도록 도와준다.



[그림 10] SGP1 5A의 그림 모델
[Fig. 10] The pictorial model of SGP1 5A (Collars et al, 2015a, p.92)

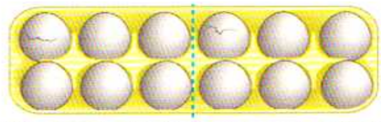
색의 변화를 사용하여 세심하게 그려진 싱가포르의

그림 모델과는 달리 우리나라의 농도 그림 모델은 색에 의한 진하기 표현이 되어있지 않으며 단지 그림과 함께 제시된 수를 읽고 계산함으로써 농도를 비교할 수 있다([그림 11]). 또한 우유와 지방은 농도에 따른 색이 거의 드러나지 않아 그림 모델로 표현하기 어려운 소재이다. 많은 학자들은 모델이 수학적 상황을 명확하게 제시해야 하며 학생들의 문제해결을 지원하는 역할을 해야 한다고 주장하였으며(Treffers and Goffree, 1985; Treffers, 1987; Gravemeijer, 1994; Van den Heuvel-Panhuizen, 1995, 2002), 특히 그림모델은 비형식적인 현실세계를 수학의 형식적 개념과 연결하는 교량 역할을 해야 한다고 하였다(Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). 추상적인 사고에 익숙지 않은 초등학생들을 위해 농도 관련 문제의 그림모델에서는 농도에 따른 색 변화를 직관적으로 표현해주는 것이 학생들의 수학적 사고를 돕는 데 도움이 될 것이다.

[그림 11] 우리나라의 농도 그림 모델 (교육부, 2015a, p. 121)
[Fig. 11] The pictorial model of concentration in Korea

미국 교과서에서는 [그림12]의 (a)와 같은 그림 모델이 단원의 도입부분에 등장한다. 이 그림 모델은 비의 개념을 소개하기 위한 것이며 개와 고양이의 크기가 불규칙하게 제시되어 있다. (b)는 비의 표시인 콜론(:)에 대해 설명하기 위한 그림 모델이다. 12개의 계란 중 두 개의 계란이 깨져있는 상황을 나타내며, 이를 2 : 12나 1: 6으로 나타낼 수 있다는 것을 묘사한다. (c)는 일정한 비율로 그림의 크기를 변화시키는 그림 모델이며 'size-change factor'라는 배수의 개념을 함께 제시하고 있다. 이는 추후 도형의 닮음과 연관 지어 비의 개념을 지도할 수 있도록 해준다.

(a) 비의 개념을 설명하기 위한 그림 모델 (p. 38)



(b) 비의 표시를 설명하기 위한 그림 모델 (p. 39)

(c) 일정 비로 크기를 변화시키는 문제의 그림 모델 (p. 72)

[그림 12] 미국 교과서 비와 비례 관계 단원의 그림 모델
[Fig 11] The pictorial model of Ratio and Proportional Relationships in U.S. (Bell et al., 2015)

나. 전형식적 모델

1) 비표

비표는 우리나라의 비와 비율 단원 및 비례식과 비례배분 단원에 널리 사용되고 있다([그림 13]). Broekman, Van der Valk, Wijers(2000)는 비표에 사용된 화살표가 학생들에게 수와 연산에 대한 정확한 자극을 제공하며 비례관계 문제해결에 도움을 줄 수 있다고 하였다. 이러한 관점에서 보았을 때 곱셈을 나타내는 보조화살표는 학생들이 비례 관계를 곱셈적 관계로 해석하는 데 도움을 줄 수 있다.

모둠 수	1	2	3	4	5	6
남학생 수	4					
여학생 수	2					

(a) 모둠 수에 따른 남학생 수와 여학생 수(p. 102)

모둠 수	1	2	3	4	5	6
학생 수	6					
손전등 수	2					

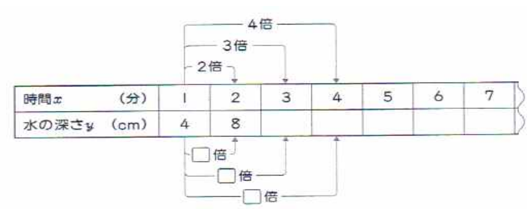
(b) 모둠 수에 따른 학생 수와 손전등 수(p. 103)

물 양	7	14			
카레 가루 양	1	2			

(c) 물 양과 카레 가루 양의 컵 수(p. 104)

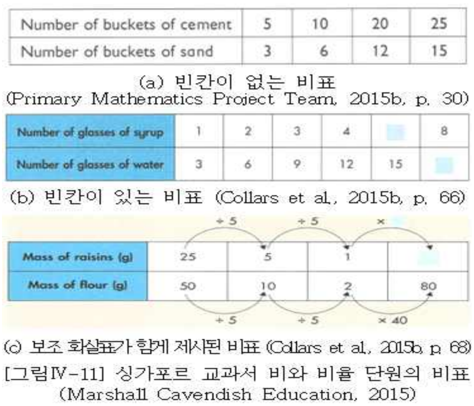
[그림 13] 우리나라 비와 비율 단원의 비표 (교육부, 2015a)
[Fig. 13] The ratio table of Ratio and Rate in Korea

우리나라와는 달리 일본의 비표에는 몇 배인지를 나타내는 화살표가 표시되어 있어 학생들의 곱셈적 사고를 돕고 문자 x, y가 함께 나타나 있어 방정식이나 함수와 같은 후속 학습과 연관되어 있다. [그림 14]는 JPN3 6-下 비례 단원의 비표이며 시간에 따른 물의 높이를 나타낸다.



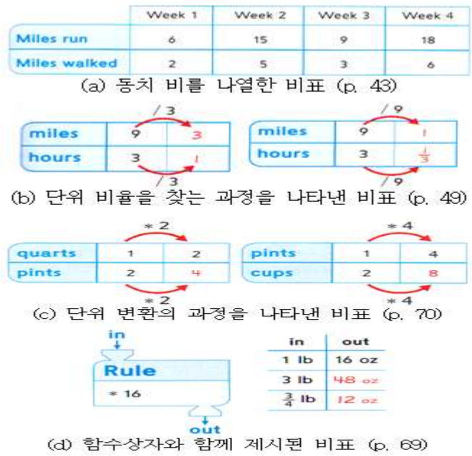
[그림 14] JPN3 6下의 비표 (小山正孝 外, 2015b, p. 19)
[Fig. 14] The ratio table of JPN3 6下

싱가포르의 비표는 그림모델과 이중테이프 다이어그램에 비해 그 수가 적다. 비표는 빈칸이 없는 비표와 빈칸이 있는 비표 모두 제시되며 빈칸이 있는 비표는 비례관계에 있는 두 수가 1배, 2배, 3배와 같이 연속적으로 제시되다가 도중에 5배, 8배 등으로 건너뛰는 비연속적인 제시 방법을 사용한다. 또한 곱셈적 사고를 돕는 보조 화살표가 함께 표시된 비표도 있다([그림 15]).



[그림 15] 싱가포르 비 단원의 비표
[Fig. 15] The ratio table of Ratio in Singapore

미국 교과서에서는 가로형 비표와 세로형 비표가 모두 사용되었으며 곱셈적 사고를 돕는 화살표가 함께 쓰이기도 한다. 비표는 동치 비, 단위 비 또는 단위 비율(unit ratios or unit rate), 단위 환산(unit conversion) 등 다양한 개념을 익히는 데 사용되며 비표가 함수상자와 함께 제시되기도 한다([그림 16]).



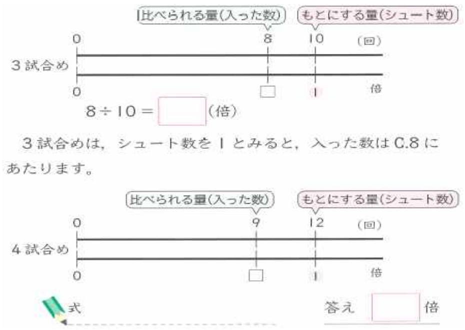
[그림 16] 미국 비와 비례 관계 단원의 비표
[Fig. 16] The ratio table of Ratio and Proportional Relationships in U.S. (Bell et al., 2015)

단위 변환은 단위 비 또는 단위 비율을 n배하여 미지 값을 찾는 과정으로 단위 비를 활용하는 비례추론 전략이다. 미국 교과서에서는 이러한 단위 변환의 과정을 비표를 사용하여 표현하고 있으며 함께 제시되는 보조 화살표는 단위 비를 n배하는 곱셈적 사고를 시각화하여 나타내고 있다.

한편 미국 교과서에서는 단위 비 또는 단위 비율(unit rate)을 '비교하는 두 양 중 하나가 1일 때의 비 또는 비율'이라 정의하고 있다. 이는 일본 고유의 비례 개념인 '와리아이'와 같은 개념이다. 명칭은 다르지만 두 나라가 같은 비례 개념을 중요하게 지도하고 있음을 알 수 있다. 현재 우리나라 비와 비율 단원에는 미국의 단위 비율이나 일본의 '와리아이'에 해당되는 단위 비가 소개되지 않고 있다. Lobato와 Ellis(2010)에 따르면 학생들이 비례추론과정에서 겪게 되는 중요한 변화 중 하나가 바로 합성 단위(composed units)전략에서 곱셈 비교(multiplicative comparisons)전략으로 나아가는 것인데, 이를 위한 가장 쉬운 방법은 바로 단위 비율을 인식하는 것이라고 하였다. 차기 우리나라 교과서에서도 학생들의 비례추론전략 발달을 위해 단위 비를 지도할 필요가 있다.

2) 이중수직선

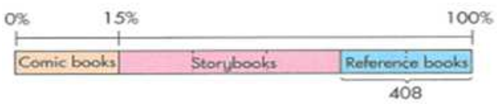
일본 교과서에서는 기준량을 1로 보았을 때 비교하는 양이 기준량의 얼마 만큼인지를 뜻하는 '와리아이(割合)'를 지도할 때 이중수직선을 주로 사용한다. [그림 17]은 농구 3회차와 4회차 시합에서 슛 시도 수 대비 성공 횟수가 각각 어떠한지 이중수직선으로 나타낸 것이다.



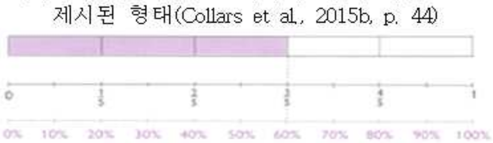
[그림 17] JPN1 5下의 이중수직선 (藤井齊亮 外., 2015a, p. 52)

[Fig. 17] The double number lines of JPN1 5下

싱가포르 교과서의 백분율 단원에서는 단일 또는 이중 수직선에 테이프 다이어그램이 더해진 이중 또는 삼중의 모델이 사용되고 있다. 백분율 또는 분수를 나타내는 수직선과 비교하는 둘 이상의 양을 직관적으로 나타내는 테이프 다이어그램을 동시에 사용함으로써 백분율과 그에 해당되는 양을 구별하여 제시하였다([그림 18]).



(a) 수직선과 테이프 다이어그램이 이중으로 제시된 형태(Collars et al., 2015b, p. 44)



(b) 테이프 다이어그램과 이중수직선이 동시에 제시된 형태(Primary Mathematics Project Team, 2015b, p. 49)

[그림 18] 싱가포르 교과서 백분율 단원의 단일 또는 이중수직선과 테이프 다이어그램

[Fig. 18] The single or double number lines of Percentage in Singapore (Collars et al., 2015)

미국 교과서에서는 단일수직선에 두 개의 척도가 표시된 모델이 등장한다. 이 수직선은 축척을 지도할 때 사용되었다. [그림 19]와 같이 지도에서의 거리를 뜻하는 인치와 실제 거리를 뜻하는 마일이 수직선 눈금 위아래로 표시되어 있다. 이 수직선에 따르면 지도에서의 2인치는 실제 거리 10마일을 나타낸다.

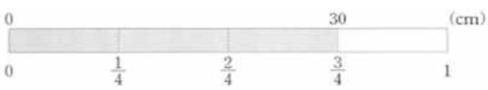
[그림 19] 미국 비와 비례관계 단원의 이중수직선

[Fig. 19] The double number lines of Ratio and Proportional Relationships in U.S. (McGraw-Hill Education, 2015)

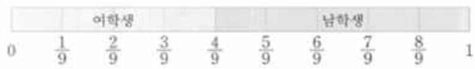
현재 우리나라 교과서 비와 비율 단원에는 이중수직선이 없다. Kuchemann과 Hodgen, Brown(2011, 2014)에 따르면 이중수직선은 비표와 같이 비례관계인 두 양을 나타낼 수 있는 유용한 모델일 뿐만 아니라, 눈금이 있는 수직선상에 공변 하는 두 양을 표시함으로써 직관적인 크기 비교에 더 효과적인 모델이다. 또한 이중수직선은 단위 비를 반복하는 비례추론전략을 표현하기에 유용한 도구이기 때문에, 비례추론의 초기 전략 탐색을 위해 필요하다(Beckmann & Izsak, 2015).

3) 이중테이프 다이어그램

우리나라 교과서에서 테이프 다이어그램은 사진의 가로를 주어진 비율로 축소하였을 때 얼마가 되는지 알아보는 문제와 초등학교의 여학생 수와 남학생 수의 비를 나타내는 문제에 각각 제시되었으며 단일테이프 다이어그램으로 사용되고 있다. [그림 20]의 (a)는 단일 테이프 다이어그램이지만 두 개의 척도가 표시되어있으며 (b)는 비교하는 두 양과 하나의 척도가 표시되어있다.



(a) 두 개의 척도가 표시됨. (p. 114)

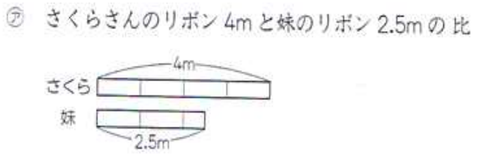


(b) 비교하는 두 양과 하나의 척도가 표시됨. (p. 115)

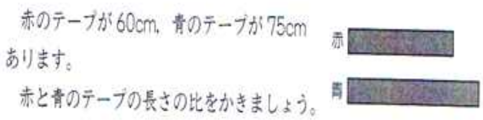
[그림 20] 우리나라 비와 비율 단원의 테이프 다이어그램(교육부, 2015a)

[Fig. 20] The double tape diagrams of Ratio and Rate in Korea

일본교과서의 이중테이프 다이어그램은 JPN2 6-上에서 두 사람이 가진 리본의 길이의 비나 두 가지 색 테이프의 길이의 비를 비교하는 데 사용되었으며 눈금이 있는 것과 없는 것 모두 찾아볼 수 있다([그림 21]).



(a) 눈금이 있는 이중테이프 다이어그램

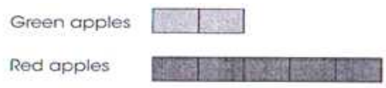


(b) 눈금이 없는 이중테이프 다이어그램

[그림 21] JPN2의 이중테이프 다이어그램 (青水靜海 外., 2015, p. 62)
[Fig. 21] The double tape diagrams of JPN2

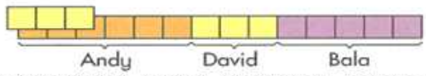
싱가포르에서는 이중테이프 다이어그램을 다른 어떤 모델보다 압도적으로 많이 사용하고 있다. 이중테이프 다이어그램은 비교하는 두 양의 크기를 직관적으로 나타내어 학생들의 비례 감각 신장을 돕는다. 테이프 다이어그램은 그림과 결합된 경우도 있으며 때로는 겹쳐지거나 이어져서 사용되기도 하고 삼중테이프 다이어그램으로 연비를 표현하기도 한다([그림 22]). 미국 교과서에서 이중테이프 다이어그램은 그림 배열 모델 또는 숫자와 결합되어 제시되어 있다([그림 23]). 두 모델을 함께 제시함으로써 하나의 풀이 방법을 다양하게 나타낼 수 있음을 보여준다.

이중테이프 다이어그램은 비례관계에 있는 두 양의 크기를 직관적으로 나타내며(Common Core Standards Writing Team, 2011) 비례 관계에 대한 곱셈적 사고를 표현할 수 있는 유용한 모델이다(Beckmann & Izsak, 2015). 이러한 맥락에서 여러 나라에서는 비와 비율 지도에 이중테이프 다이어그램을 적극 활용하고 있으며 우리나라에서도 해당 모델의 사용을 고민해볼 필요가 있다.

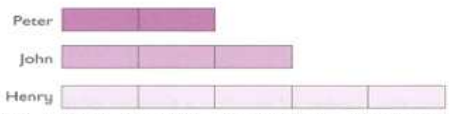


(a) 이중테이프 다이어그램 기본형
(Chung et al., 2015b, p. 34)

(b) 그림과 결합된 이중테이프 다이어그램
(Collars et al., 2015b, p. 64)

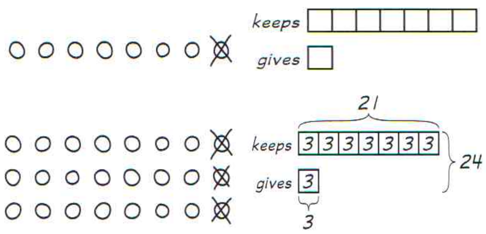


(c) 겹쳐지거나 이어진 이중테이프 다이어그램
(Collars et al., 2015b, p. 62)



(d) 연비를 나타내는 삼중테이프 다이어그램
(Primary Mathematics Project Team, 2015b, p. 26)

[그림 22] 싱가포르 비 단원의 이중테이프 다이어그램
[Fig. 22] The double tape diagrams of Ratio in Singapore



[그림 23] 미국 비와 비례 관계 단원의 이중테이프 다이어그램
[Fig. 23] The double tape diagrams of Ratio and Proportional Relationships in U.S. (Bell et al., 2015)

다. 형식적 모델

우리나라 수학 교과서에서는 6학년 2학기 '비례식과 비례 배분' 단원에 비례식이 등장한다. 각 차시에서는 문장제로 학생들이 직접 비례식을 세워보도록 지시하고 있으며 비례식과 다른 모델이 함께 제시된 경우는 없다([그림 24]).

비례식의 성질을 이용하여 실제 거리를 알아보시오.

- 지도상에서 공원과 다리 사이의 거리는 5 cm입니다. 공원과 다리 사이의 실제 거리를 □ cm라 하고 축척을 이용하여 비례식을 세워 보시오.
- 비례식에서 외항의 곱을 곱셈식으로 나타내어 보시오.
- 비례식에서 내항의 곱을 곱셈식으로 나타내어 보시오.
- 외항의 곱과 내항의 곱을 등식으로 나타내어 보시오.
- 등식에서 □의 값을 구하시오.
- 학교에서 공원을 거쳐 다리까지 이동한 실제 거리는 얼마인지 알아보시오.

(a) 비례식을 세워 문제를 해결하도록 지시하는 문장제

□ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.

4 : 5=16 : □ 20 : 5=□ : 1

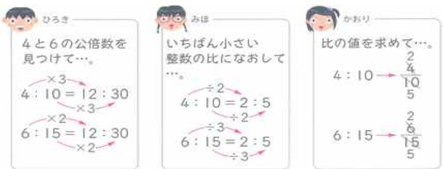
5 : □=60 : 96 □ : 35=3 : 5

(b) 차시의 마무리 문제에서의 비례식

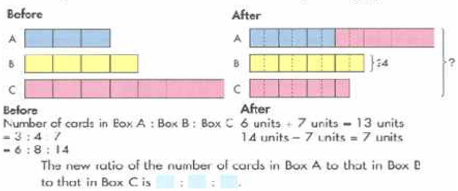
[그림 24] 우리나라 교과서에서의 비례식 (교육부, 2015b, p. 47)

[Fig. 24] The proportional expression of in Korea

일본과 싱가포르에서는 비례식의 풀이과정, 즉 곱셈이나 나눗셈의 과정을 자세히 나타내며 한 문제의 해결방법을 다양하게 안내한다([그림 25]). 또한 비례식만을 제시하기 보다는 수직선이나 테이프 다이어그램과 함께 제시하여 학생들이 비와 비례 개념을 다양한 표현을 통해 익힐 수 있는 기회를 제공한다(Webb, Boswinkel, Dekker, 2008).



(a) JPN1의 비례식(藤井齊亮 外, 2015, p. 65)



(b) 테이프 다이어그램과 함께 제시된 SGP1의 비례식(Collars et al., 2015, p. 84)

[그림 25] 외국 교과서의 비례식

[Fig. 25] The proportional expression of in foreign textbook

2. 비례에 대한 곱셈적 사고

우리나라 교과서에서 비례에 대한 곱셈적 사고가 가능한 모델은 비례관계에 있는 두 양이 n배로 공변함을 알 수 있는 비표이다([그림 26]). 비표를 통해 교사는 학생들에게 비례 관계의 공변성과 불변성을 동시에 지도할 수 있다. 비표 외에 다중묶음관점이나 변동부분관점으로 해석할 수 있는 시각적 모델은 없었다.

지수와 효정이가 조개를 1 : 2로 나누어 가지면 각자 가지게 되는 조개의 수는 얼마인지 알아보시오.

- 1 : 2의 의미를 생각하며 표를 완성하시오.

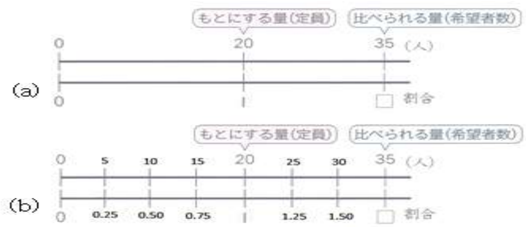
전체 조개 수	3	6	9	12	15
지수의 조개 수	1	2	3		
효정이의 조개 수	2	4	6		

[그림 26] 곱셈적 사고가 가능한 우리나라 교과서의 비표 (교육부, 2015b, p. 50)

[Fig. 26] The ratio table showing multiplicative perspective in Korean textbook

반면 일본교과서에서는 비표뿐만 아니라 비례에 대한 곱셈적 사고가 표현된 모델을 다수 찾을 수 있었다. JPN1 5下 12단원인 '비교하는 방법을 배워요 (2)'에서는 기준량을 1로 보았을 때 비교하는 양이 기준량의 얼마 만큼인지를 뜻하는 '와리아이'를 지도하는 데, 이 때 주로 등장하는 모델은 이중수직선이며 여기에 다중묶음관점을 적용할 수 있다.

[그림 27]의 (a)는 방송부 정원의 수를 1로 보았을 때 희망자 수는 몇으로 나타낼 수 있는지 이중수직선으로 표현한 것이다. 이를 (b)와 같이 작은 눈금을 사용하여 5명씩 4묶음이 기준량일 때 35명은 몇 묶음인지, 그리고 기준량의 몇 배인지 생각해보도록 할 수 있다.



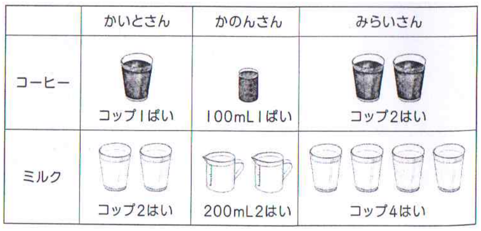
[그림 27] JPN1 5下의 이중수직선에 나타난 다중묶음 관점 (藤井齊亮 外, 2015a, p. 53)

[Fig. 27] The double number lines of JPN1 5下 showing multiple batches perspective

일본교과서에서 변동부분관점은 본격적으로 비와 비율에 대하여 배우는 6학년 때부터 등장하며, 그림모델과 수직선, 테이프 다이어그램 등을 통해 묘사된다. JPN1 6上 6단원 '와리아이(割合)의 표시방법을 배워요'의 도입부분에서 굴 소스 두 스푼과 케첩 세 스푼을 섞어 함박소스를 만드는 상황을 [그림 28]과 같이 그림모델로 나타내었다. 2 : 3의 비례 관계에 있는 두 양이 1배, 2배, 3배하는 과정을 점선으로 표시된 각 부분의 크기를 1배, 2배 3배로 늘리는 것으로 표현되었는데, 여기서 변동부분관점을 확인할 수 있었다.

[그림 28] JPN1 6上 그림모델에서의 변동부분관점(藤井齊亮 外, 2015b, p. 61)
[Fig. 28] The pictorial model of JPN1 6上 showing variable parts perspective

한편 JPN3 6上 8단원 '두 개의 수로 와리아이(割合)를 표시해요'의 그림모델에서는 변동부분관점과 다중묶음관점을 모두 찾아볼 수 있었다. [그림 29]는 여러 가지 용기를 사용하여 커피와 우유를 1 : 2의 비로 섞어 밀크커피를 만드는 상황이다. 이 때 밀크커피의 양을 늘리는 방법으로 컵의 크기를 크게 하는 방법과 컵의 개수를 늘리는 방법인 두 가지를 모두 그림 모델로 표현하였다. 두 가지 관점으로 1 : 2의 비를 표현함으로써 비례에 대한 학생들의 유연한 곱셈적 사고를 돕고 비례 관계에 있는 두 양의 공변성과 불변성에 대해서도 직관적으로 알 수 있도록 하였다.



[그림 29] JPN3 6上 그림모델에서의 변동부분관점과 다중묶음관점(小山正孝 外, 2015a, p. 102)
[Fig. 29] The pictorial model of JPN3 6上 showing variable parts perspective and multiple batches perspective

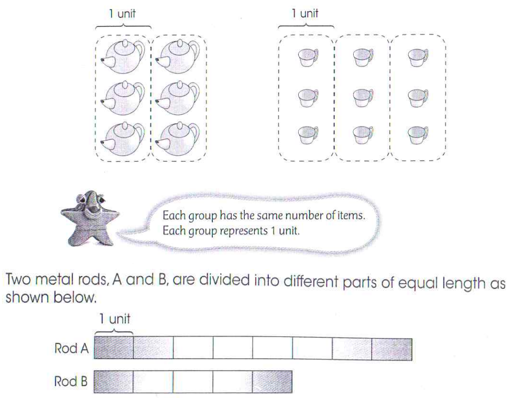
또한 일본교과서에서는 수직선이 변동부분관점에 따라 사용된 경우도 있었다. 이는 수직선이 다중묶음관점에서만 국한되어 사용되는 것은 아니며 변동부분관점에서도 얼마든지 해석이 가능하다는 것을 보여준다. [그림 30]은 Beckmann과 Izsak(2015)의 연구에서도 소개된 바가 있는 JPN1 6上 6단원의 문제이다(p. 67). 이 문제의 수직선을 살펴보면 수직선 7칸과 5칸에 각각 140과 □만큼의 양을 부여하는 변동부분관점임을 알 수 있다.

[그림 30] JPN1 6上 수직선에서의 변동부분관점(藤井齊亮 外, 2015b, p. 67)
[Fig. 30] The double number lines of JPN1 6上 showing variable parts perspective

일본교과서에서는 비와 비율 개념 도입의 초기 단계인 5학년 와리아이(割合)단원에서는 다중묶음관점을, 본격적으로 비와 비율을 배우는 6학년에서는 변동부분관점을 주로 채택하고 있다. 이러한 일본교과서의 흐름은 다중묶음관점이 학생들이 비례관계에

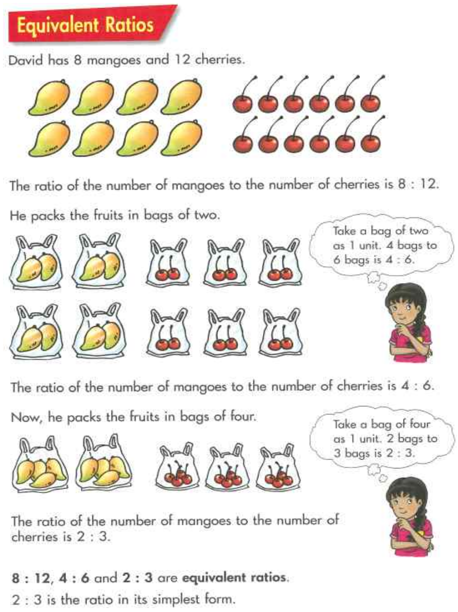
접근하는 초기 전략으로 효과적이며 심화된 후속학습을 위해서는 변동부분관점에 대한 이해가 필요하다는 Beckmann과 Izsak(2015)의 견해와 일치한다. 또한 일본교과서에서는 다중묶음관점과 변동부분관점을 동시에 제시하기도 하는데, 이는 두 관점이 서로 상호보완적이며 교사는 학생들이 두 가지 관점에서 비례 관계를 이해할 수 있도록 적절한 경험을 제공해야 한다는 동 학자들의 견해와도 일치한다.

싱가포르 교과서에서는 비를 이루는 하나의 묶음이자 단위가 되는 '1 Unit'에 대해 자세히 안내한다([그림 31]). 초반에는 고정 묶음이 반복되는 다중묶음관점을 제시하고 이 후 단원의 전반에 걸쳐서는 변동부분관점을 적극적으로 채택하고 있다. '1 Unit'은 그림 모델의 한 묶음 또는 테이프 다이어그램 한 칸이며, 각 부분은 같은 양 만큼을 갖는다. '1 Unit'은 문제에 따라 그 양이 달라지며 이는 변동부분관점이다. 싱가포르 교과서의 모든 비와 비율 문제는 이 '1 Unit'의 양을 구하는 것에서 시작된다.



[그림 31] SGP3 5A의 '1 Unit'
[Fig. 31] The 1 unit of SGP3 5A (Chung et al., 2015a)

특히 싱가포르 교과서는 동치 비(equivalent ratios)에 대해 자세하게 안내하고 있다. [그림 32]는 SGP1 5A의 동치 비에 관한 그림모델이다. '1 Unit'을 뜻하는 하나의 비닐가방에 과일 두 개를 넣을 수도 있고, 세 개를 넣을 수도 있다는 것은 비례하는 부분의 양이 변하는 변동부분관점이며 단위 비인 2 : 3을 n배하여 동치 비를 생성하는 곱셈적 사고를 가능하게 한다.



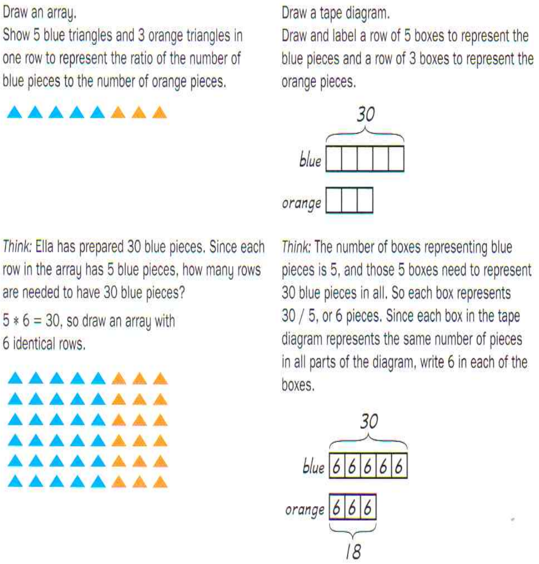
[그림 32] SGP1 5A의 동치 비 그림모델 (p. 96)
[Fig. 32] The pictorial model for equivalent ratios of SGP1 5A (Collars et al., 2015a)

미국교과서에서는 그림 배열 모델과 테이프 다이어그램에서 각각 다중묶음관점과 변동부분관점을 확인할 수 있었다. 문제 상황은 다음과 같다(p. 46).

'Ella의 엄마가 퀼트를 할 때 사용하는 파랑색 세모 조각과 주황색 세모 조각의 비는 5 : 3이다. Ella가 엄마를 위해 파랑색 세모 조각을 30개 준비했다면, 주황색 세모 조각은 몇 개를 준비해야 하는가?'

[그림 33]은 이 문제의 해결방법을 그림 배열 모델과 테이프 다이어그램으로 나타낸 것이다. 그림 배열 모델에서는 파랑색 세모 조각과 주황색 세모 조각의 개수를 각각 6배하여 답을 구하는 데, 이것은 단위 묶음의 개수를 늘리는 다중묶음관점이다. 반면 테이프 다이어그램에서는 파랑색 세모 조각과 주황색 세모 조각을 각각 테이프 5칸과 3칸으로 나타낸 뒤 테이프 한 칸의 양을 6배하여 답을 구하는 데, 이는 변동부분관점이다. 이처럼 미국 교과서는 다중묶음관점과 변동부분관점의 모델을 함께 제시함으로써

비례를 보는 두 가지 관점을 균형 있게 발달시키고 하나의 문제를 둘 이상의 방법으로 해결하는 경험을 제공한다.



[그림 33] 미국교과서에서의 다중묶음관점과 변동부분 관점
[Fig. 33] The multiple batches perspective and variable parts perspective in U.S. textbook (Bell et al., 2015)

3. 비례 상황의 구조에 따른 분석

우리나라는 비표에 배의 관계를 나타내는 화살표가 표시되어 있지 않으며 측정 공간 사이 또는 측정 공간 내의 분석이 명시된 부분이 없다. 따라서 비례 상황의 구조에 따른 분석을 위해서는 교사의 구체적인 안내가 필요하다. 우리나라 비와 비율 단원 문제에 측정 공간 사이 또는 측정 공간 내의 분석을 적용해보면 다음과 같다. 다음 문제는 6학년 1학기 4단원 4차시인 ‘비를 알 수 있어요’에 제시된 것이다(p.104).

“물 7컵과 카레 가루 1컵을 넣으면 맛있는 카레를 만들 수 있습니다. 카레 가루를 4컵 넣는다면 물은 몇 컵 넣어야 합니까?”

이 문제의 비표를 Shield와 Dole(2013)이 제시했던 예시와 같이 재구성하면 [그림 34]과 같다.

물 양	7	14	21	?
	×7	×7	×7	×7
카레 가루 양	1	2	3	4

(a) 측정 공간 사이의 분석

×4

물 양	7	14	21	?
카레 가루 양	1	2	3	4

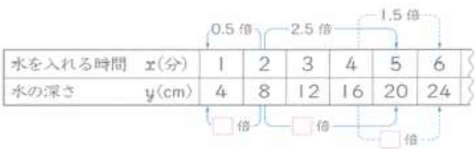
×4

(a) 측정 공간 내의 분석

[그림 34] 우리나라에서 나타난 비례 상황의 구조에 따른 분석(교육부, 2015a, p.104)
[Fig. 34] The analysis for the structure of proportion situations in Korea

측정 공간 사이의 분석은 카레 가루 양을 7배하여 물 양으로 변환하는 방법이며 측정 공간 내의 비례 추론은 카레 가루 양을 4배하였듯이 물 양도 4배하여 답을 구하는 방법이다. 이 밖에도 모둠 수에 따른 학생 수를 구하는 문제, 속력 문제 등에 위와 같은 분석 방법을 적용할 수 있다.

일본교과서의 비표는 화살표나 묶음 표시가 함께 제시되어 있어 비표를 재구성하지 않아도 비례 상황의 구조에 따른 분석이 가능하다. [그림 35]는 JPN1 6下 11단원 ‘비례를 자세하게 알아보아요’에서 제시된 비표이다. 물을 받는 시간(x)과 물의 높이(y) 사이의 비례 관계를 표로 나타낸 것인데, 화살표 및 묶음 표시에 따르면 (a)는 측정 공간 내의 분석이고 (b)는 측정 공간 사이의 분석이다. 특히 (b)에서는 $y \div x$ 값을 적을 수 있는 행이 있는데, 이를 통해 학생들은 비례상수의 개념을 알고 비례관계의 핵심인 공변성과 불변성을 습득할 수 있다. 또한 후속학습인 함수식과 그래프와도 연관 지을 수 있다. 이처럼 일본교과서는 같은 비례관계라도 비례 상황의 구조에 따라 다르게 접근할 수 있음을 안내하여 학생들이 다양한 비례추론 전략을 탐색할 수 있는 기회를 제공한다.



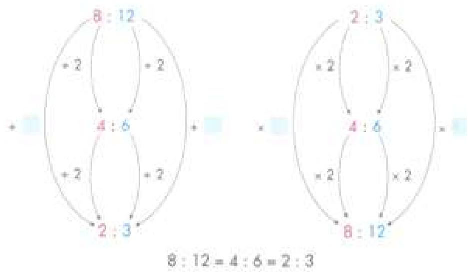
(a) 측정 공간 내의 분석(p. 7)

(b) 측정 공간 사이의 분석(p. 5)

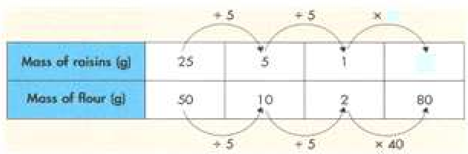
[그림 35] JPN1에서 나타난 비례 상황의 구조에 따른 분석(藤井齊亮 外., 2015c)

[Fig. 35] The analysis for the structure of proportion situations in JPN1

한편 싱가포르 교과서는 측정 공간 내의 분석만을 사용하고 있다([그림 36]). 비와 비율 문제를 해결할 때 두 양을 각각 같은 수로 나누거나 곱하는 측정 공간 내 비례추론 전략을 사용하는데, 이는 동치비의 활용을 중요시하는 싱가포르 교과서의 특징이 반영된 부분이다.



(a) SGP1 5A의 동치 비 생성과정 (p. 97)

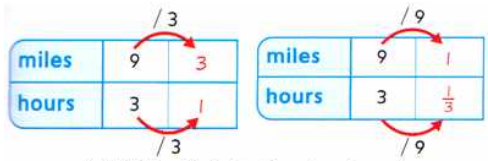


(b) SGP1 6A의 비표 (p. 68)

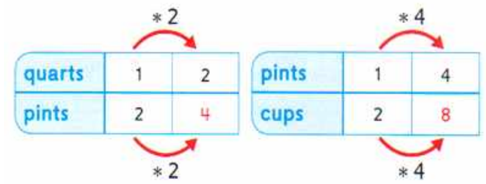
[그림 36] SGP1에 나타난 측정 공간 내의 분석

[Fig. 36] The within analysis of measure spaces in SGP1 (Collars et al., 2015)

미국 교과서에서는 단위 비율(unit ratios or unit rate)을 구할 때나 단위 환산(unit conversion)을 할 때 측정 공간 내의 분석을 사용한다([그림 37]). 단위 변환은 단위 비율을 n배하여 새로운 측정값을 구하는 과정이고 단위 비율을 찾는 과정과 역의 관계이다. 싱가포르 교과서와 마찬가지로 미국 교과서에서도 측정 공간 내의 분석을 통한 단위 비 및 동치 비 생성 과정을 중요하게 다루고 있다. 하지만 측정 공간 사이의 분석에 대해서는 언급하고 있지 않아 두 가지 유형의 분석을 균형 있게 다룰 필요가 있어 보인다.



(a) 단위 비율을 구하는 비표 (p. 49)



(b) 단위 변환에 관한 비표 (p. 70)

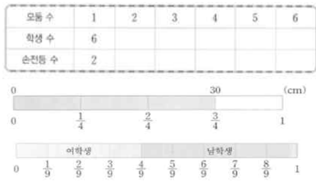
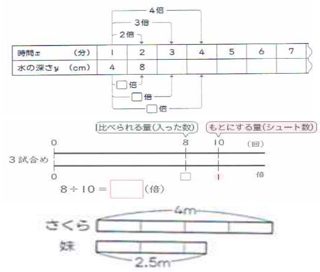
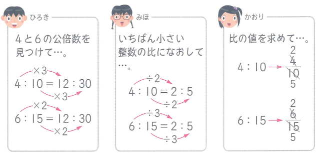
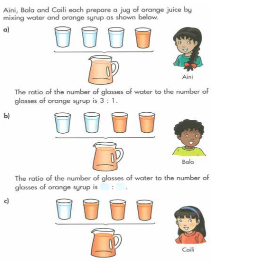
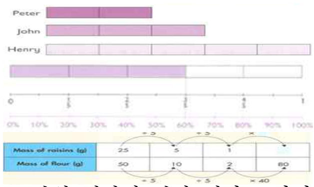
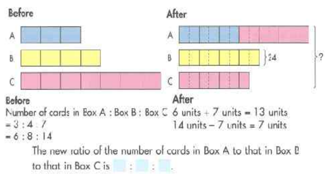
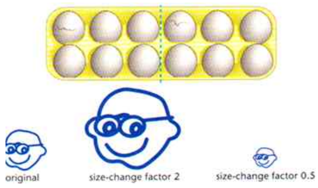
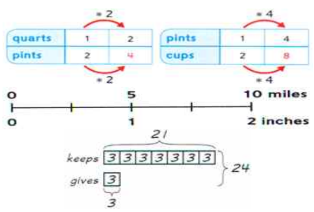
[그림 37] 미국 교과서에 나타난 측정 공간 내의 분석

[Fig. 37] The within analysis of measure spaces in U.S. (Bell et al., 2015)

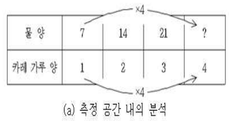
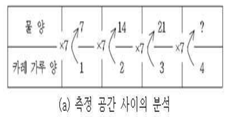
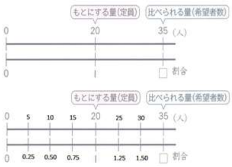
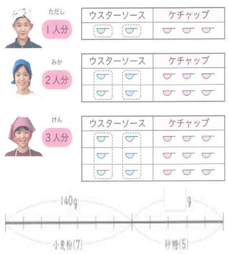
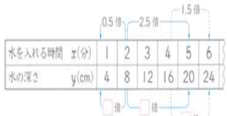
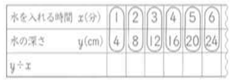
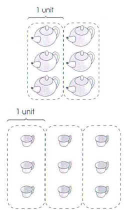
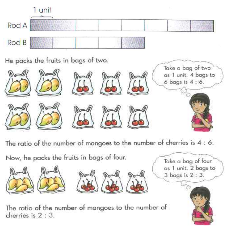
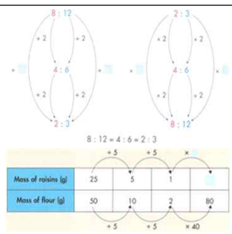
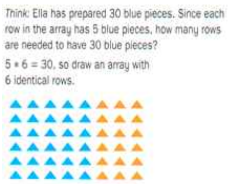
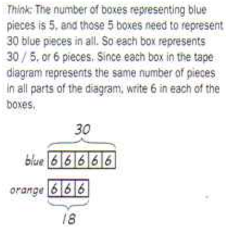
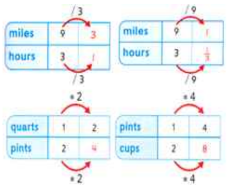
표를 통한 측정 공간의 표현은 비, 비율 및 비례 상황에서 주어진 정보를 구성하고 곱셈 구조(multiplicative structures)를 파악할 수 있는 잠재력을 가지고 있다(Shield & Dole, 2013). 하지만 초등학생들이 비표를 보고 측정 공간 내 또는 측정 공간 간의 분석을 발견하기는 쉽지 않다. 따라서 외국 교과서에서는 비표에 곱셈 화살표를 첨가하여 비례 상황의 구조에 따른 분석을 자세하게 묘사하고 있다. 우리나라 교과서에서도 이러한 보조 화살표를 도입하면 비례 관계인 두 양을 n배하는 과정을 자세히 나타낼 수 있고 이를 통해 비와 비율에 대한 학생들의 곱셈적 이해를 도울 수 있을 것이다.

지금까지 각 나라 교과서 비와 비율 단원의 모델과 그 안에서 발견할 수 있는 곱셈적 사고 및 곱셈 구조에 대해 알아보았다. 분석한 결과를 형식적 측면과 내용적 측면에서 각각 정리하여 나타내면 [표 3], [표 4]와 같다.

[표 3] 형식적 측면에서 분석한 각국 교과서 모델의 예
[Table 1] The textbooks for analysis of this study

<table>
<tr><th rowspan="3"></th><th colspan="5">지도 모델</th></tr>
<tr><th>비형식적 모델</th><th colspan="3">전형식적 모델</th><th>형식적 모델</th></tr>
<tr><th>그림모델</th><th>비표</th><th>이중수직선</th><th>이중테이프 다이어그램</th><th>비례식</th></tr>
<tr><td>한국</td><td>
그림 모델에 수나 양이 정확하게 나타낸 것도 있으나 그렇지 않은 것도 있음.</td><td colspan="3">
단원 전반에 걸쳐 비표를 가장 많이 사용하며 곱셈의 과정을 나타내는 보조 화살표는 없음. 단일테이프 모델도 사용하고 수직선은 없음.</td><td>□ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.
4 : 5=16 : □ 20 : 5=□ : 1
5 : □=60 : 96 □ : 35=3 : 5
문장제로 학생들이 직접 비례식을 세워보도록 지시하며 비례식과 다른 모델이 함께 제시된 경우는 없음. 비례식의 풀이과정을 자세히 나타낸 예는 없음.</td></tr>
<tr><td>일본</td><td>
비교하는 두 양을 간결하게 나타낸 그림 모델이 있음.</td><td colspan="3">
다양한 이중척도모델을 고르게 사용함.</td><td>
비례식의 풀이방법을 자세히 묘사하며 여러 가지 풀이방법을 제시함.</td></tr>
<tr><td>싱가포르</td><td>
주스의 농도가 색의 진하기로 표현된 그림 모델을 사용함.</td><td colspan="3">
단원 전반에 걸쳐 테이프 다이어그램을 가장 많이 사용하며 테이프 다이어그램과 수직선이 결합된 형태도 발견됨. 비표에 보조 화살표가 있음.</td><td>
테이프 다이어그램과 함께 비례식을 제시하며 풀의 과정을 자세하게 설명함.</td></tr>
<tr><td>미국</td><td>
비의 개념 및 비의 표시를 설명하기 위해 그림 모델을 사용했으며 일정 비로 크기를 변화시키는 그림 모델은 도형의 닮음과 연계됨.</td><td colspan="3">
비표를 가장 많이 사용하며 보조 화살표는 있음. 단일수직선과 이중테이프 다이어그램 사용.</td><td>비례 상황의 문제 해결 과정을 자세하게 서술하고는 있으나 비례식을 도입하지는 않음.</td></tr>
</table>

[표 4] 내용적 측면에서 분석한 각국 교과서 모델의 예
[Table 1] The textbooks for analysis of this study

	비례에 대한 곱셈적 사고		비례 상황의 구조에 따른 비례추론	
	다중묶음관점	변동부분관점	측정 공간 내의 분석	측정 공간 사이의 분석
한국	지수와 효정이가 조개를 1 : 2로 나누어 가지면 각자 가지게 되는 조개의 수는 얼마인지 알아보시오. ● 1 : 2의 의미를 생각하며 표를 완성하시오. 전체 조개 수 3 6 9 12 15 지수의 조개 수 1 2 3 효정이의 조개 수 2 4 6 다중묶음관점이나 변동부분관점이 직접적으로 나타난 부분은 없으나 비표를 활용하여 비례에 대한 곱셈적 사고를 지도할 수 있음. 이를 위해서는 그림 모델이나 이중수직선, 이중테이프 모델을 추가로 활용할 필요가 있음.		 측정 공간 내 또는 측정 공간 사이의 분석이 명시된 부분은 없으나 비표에 보조 화살표를 활용하여 비례 상황의 구조에 따른 비례추론을 위와 같이 재구성할 수 있음.	
일본	 이중수직선에 나타난 다중묶음관점을 확인할 수 있음.	 그림모델과 수직선에서의 변동부분관점.	 비표와 보조 화살표를 통해 나타난 측정 공간 사이의 분석.	 비표와 묶음 표시를 통해 나타난 측정 공간 사이의 분석. 비례상수가 $y \div x$로 표현되기도 함.
싱가포르	 '1 Unit'을 도입하는 단원 초반에서는 다중묶음관점을 사용함.	 이 후 단원의 전반에 걸쳐 변동부분관점을 적극적으로 채택함.	 동치비 생성과정과 비표의 보조화살표에서 측정 공간 내의 분석 확인.	구체적으로 측정 공간 사이의 분석이 드러난 바는 없으며 비표와 보조 화살표를 사용하여 재구성할 수 있음.
미국	 그림모델을 통해 다중묶음관점을 표현함.	 이중테이프 다이어램을 통해 확인할 수 있는 변동부분관점.	 단위 비율을 구하는 과정이나 단위 변환을 하는 과정에서 나타나는 측정 공간 내의 분석	

V. 결론 및 제언

본 연구는 4개국의 초등학교 수학 교과서 비와 비율 단원에서 어떠한 모델을 사용하고 있는지 알아보고, 비례에 대한 곱셈적 사고와 비례 상황의 구조에 따른 분석이 교과서 모델에 어떻게 나타나 있는지 살펴보았다. 연구의 결과를 통해 다음과 같은 결론 및 논의를 제시하고자 한다.

첫째, 비와 비율 지도에 다양한 시각적 모델의 활용이 필요하다. 현재 우리나라 교과서는 비표를 주로 사용하고 있으며 이 외에는 거의 문장제로 이루어져 있다. Webb, Boswinkel, Dekker(2008)는 학생들이 형식적인 수학 개념을 이해하기 위해서는 수학적 표현을 다양하게 경험해보아야 한다고 주장했으며, 국내 여러 연구(김경선, 박영희, 2007; 김숙진, 2011; 정영옥, 2015; 서은미, 방정숙, 이지영, 2017) 역시 다양한 시각적 모델을 활용한 비와 비율 수업을 권고하고 있다. 본 연구의 교과서 분석 결과 역시 여러 선행연구와 일맥상통하며 차기 교과서 비와 비율 단원에 충분한 시각적 모델이 제공될 필요성이 있음을 제언한다. 또한 각 나라별로 비와 비율 지도에 주로 사용하는 모델을 살펴본 결과 한국과 미국은 비표, 일본은 이중수직선, 싱가포르는 이중테이프 다이어그램을 주로 사용하는 것으로 나타났다. 이러한 모델들이 과연 우리나라 학생들에게도 효과적일지, 그리고 각 모델을 사용할 때 어떠한 맥락과 방법으로 제시하는 것이 좋을지 심도 있는 논의가 필요하다고 제언한다.

둘째, 비와 비율 단원의 모델에 비례에 대한 곱셈적 사고인 다중묶음관점과 변동부분관점을 구체적으로 표현할 필요가 있다. 현재 우리나라 교과서에서 비례에 대한 곱셈적 사고가 지도 모델에 구체적으로 표현된 사례는 없다. Beckmann과 Izsak(2015)이 제시한 비례에 대한 곱셈적 사고이자 두 가지 양적 관점인 다중묶음관점과 변동부분관점은 비와 비율에 대한 여러 선행연구(Vergnaud, 1988; Behr, Harel, Post & Lesh, 1993; Confrey & Smith, 1994; Kaput & West, 1994; Lobato & Ellis, 2010; Ben-Chaim, Keret, Ilany, 2012; Lamon, 2012)들을 종합, 발전시킨 것이며 곱셈 및 나눗셈, 비례 관계를 모두 포함한다. 따라서 비와 비율 개념 및 비례추론 발달을 위한 전통적이면서도 핵심이 되는 아이디어라고 할 수 있다. 하지만 현재 우리나라 교과서에서는 이에 대한 구체적인 표현이 없기 때문에 학생들이 스스로 곱셈적 사고를 발견하고 이를 발전시켜 나가는 것은 매우 어려운 일이다. 여기에 수나 양을 정확하게 묘사되지 않은 삽화, 단순 빈칸 채우기 식의 비표, 풀이가 생략된 문장제가 학생들의 비례추론을 더욱 어렵게 만들고 있다. 외국의 교과서에서는 그림모델과 수직선, 테이프 다이어그램에 다중묶음관점과 변동부분관점이 구체적으로 나타나 있으며 모델의 표현이나 문제의 풀이과정 또한 자세하고 정확하여 학생들의 비례추론을 제대로 돕고 있다. 이러한 외국의 사례를 참고하여 차기 교과서에서는 정확하고 자세한 모델 제시를 통해 비례에 대한 곱셈적 관점을 분명히 나타낼 것을 제언한다.

셋째, 비표와 보조 화살표를 활용하여 측정 공간 내 또는 측정 공간 사이의 비례추론을 균형 있게 다룰 필요가 있다. Vergnaud(1988)에 따르면 학생들이 비례 문제를 효과적으로 해결하려면 비례 구조의 유사성을 파악해야 하는데, 이를 위해서는 비례 상황의 수학적 구조를 강조하여 제시할 필요가 있다. 우리나라 교과서는 비례 상황의 구조를 표현하는 데 효과적인 모델인 비표를 많이 활용하고 있음에도 불구하고 보조화살표의 부재로 그 효과성을 제대로 발휘하지 못하고 있다. 다만 비표를 해석하는 과정에서 교사나 학생들이 자율적으로 비례 상황의 구조를 해석할 뿐인데, 이는 결코 쉬운 일이 아니다. 반면 외국의 교과서는 우리나라보다 더 적은 양의 비표를 사용하고 있으면서도 보조화살표를 적극 활용하여 곱의 관계를 정확하게 제시하고 측정 공간 내 또는 측정 공간 사이의 비례추론을 나타냄으로서 비표의 효용성을 극대화하고 있다. 따라서 본 연구는 차기 교과서의 비표에서는 보조화살표를 적극 활용하여 비례 상황의 수학적 구조를 강조하여 제시할 것을 제언한다.

넷째, 교과서 모델을 통해 학생들이 다양한 비례추론 전략을 탐색할 수 있도록 구체적인 지도방안

을 마련할 필요가 있다. Lobato와 Ellis(2010)에 따르면 학생들은 비를 형성하고 비례추론 하는 과정에서 네 가지 중요한 전략 변화를 겪게 된다. 첫째는 하나의 양에서 두 개의 양으로 주의를 기울이는 것, 둘째는 덧셈비교에서 곱셈비교로 나아가는 것, 셋째는 합성단위 전략에서 곱셈 전략으로 변화하는 것, 넷째는 합성단위의 반복에서 동치인 비를 세우는 것이다. 학생들이 이러한 비례추론 전략을 충분히 경험하기 위해서는 세심하고 정확하게 표현된 모델들로 잘 짜여진 교과서가 제공되어야하며, 이를 제대로 활용할 수 있도록 교사의 적절한 안내와 지도가 필요하다. 나아가 비와 비율 모델 해석에 능숙하고 비례추론에 뛰어난 학생들이 구사하는 전략은 무엇이며 일반 학생들과는 어떠한 차이점이 있는지 비교 분석해 볼 필요가 있다.

Stacey(2003)는 낮은 절차적 복잡성과 의미 없는 반복, 수학적 추론이 부재한 수업을 '얕은 교수 증후군(shallow teaching syndrome)'이라 하였으며, 수학적 개념과 표현이 부족한 일부 교과서들이 이러한 얕은 교수 증후군을 부추기는 원인이 되고 있다고 지적했다. 본 연구가 비교 분석한 여러 나라 교과서의 비와 비율 모델이 차기 교과서의 정확하고 세심한 모델 구성 및 제시에 도움이 되기를 기대한다.

참 고 문 헌

교육부 (2015a). 수학 6-1. 서울: 천재교육.

Ministry of Education (2015a). *Elementary mathematics 6-1.* Seoul: Chunjae Education.

교육부 (2015b). 수학 6-2. 서울: 천재교육

Ministry of Education (2015b). *Elementary mathematics 6-2.* Seoul: Chunjae Education.

김경선, 박영희 (2007). 초등학생의 비례적 추론 지도에 관한 연구. 학교수학, 9(4), 447-466.

Kim, K. S. & Park, Y. H. (2007). A study on the proportional reasoning instruction for elementary school children. *School Mathematics, 9*(4), 447-466.

김숙진(2011). 초등학교 학생들의 비례 추론 능력에 시각적 표현이 미치는 영향 - 5, 6학년을 대상으로. 경인교육대학교 교육대학원 초등수학교육학전공 석사학위논문.

Kim, S. J. (2011). A study on the effects of visual representation on elementary school students' proportional reasoning ability - with a focus on the fifth and sixth graders. Major in Elementary Mathematics Education, Graduate School of Education, Gyeongin National University of Education.

박정숙 (2009). 학생의 비례추론의 분석 모형과 특성 분석. 서울대학교 대학원 수학교육과 수학교육전공 박사학위논문.

Park, J. S. (2009). Analyzing the models and the characteristics of students' proportional reasoning. Major in Mathematics Education, The Graduate School, Seoul National University.

서은미, 방정숙, 이지영 (2017). 시각적 모델을 활용한 비례 추론 수업 분석. 수학교육학연구, 27(4), 791-810.

Seo, E. M., Pang, J. S., & Lee, J. Y. (2017). An analysis of lessons to teach proportional reasoning with visual models - focused on ratio table, double number line, and double tape diagram. *Journal of Educational Research in Mathematics, 27*(4), 791-810.

임재훈, 이형숙 (2015). 비례 추론을 돕는 시각적 모델에 대하여: 초등 수학 교과서의 비례식과 비례배분 실생활 문제를 대상으로. 수학교육학연구, 25(2), 189-206.

Yim, J. H., & Lee, H. S. (2015). Visual representations for improving proportional reasoning in solving word problems. *Journal of Educational Research in Mathematics, 25*(2), 189-206.

장혜원, 박혜민, 김주숙, 임미인, 유미경, 이화영 (2017). 비례식과 비례배분에 대한 초등 수학 교과서 비교 분석. 학교수학, 19(2), 229-248.

Chang, H. W., Park, H. M., Kim, J. S., Lim, M. I., Yu, M. G., & Lee, H. Y. (2017). A comparative analysis of proportional expression and proportional distribution in elementary mathematics textbooks. *School Mathematics, 19*(2), 229-248.

장혜원, 임미인, 유미경, 박혜민, 김주숙, 이화영 (2017). 비와 비율에 대한 초등 수학 교과서 비

교 분석. 한국초등수학학회, 21(1), 135-160.

Chang, H. W., Lim, M. I., Yu, M. G., Park, H. M., Kim, J. S., & Lee, H. Y. (2017). A comparative analysis of ratio and rate in elementary mathematics textbooks. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea, 21*(1), 135-160.

정영옥 (2015). 초등학교에서 비례 추론 지도에 관한 논의. 수학교육학연구, 25(1), 21-58.

Chong, Y. O. (2015). Teaching proportional reasoning in elementary school mathematics. *Journal of Educational Research in Mathematics, 25*(1), 21-58.

정은실(2010). 초등학교 수학 교과에서의 비례 추론에 대한 연구. 수학교육학연구, 23(4), 505-516.

Jeong, E. S. (2010). Study on proportional reasoning in elementary school mathematics. *Journal of Educational Research in Mathematics, 23*(4), 505-516.

藤井齊亮 外. (2015a). 新しい算數 5下. 東京: 東京書籍.

藤井齊亮 外. (2015b). 新しい算數 6上. 東京: 東京書籍.

藤井齊亮 外. (2015c). 新しい算數 6下. 東京: 東京書籍.

青水靜海 外. (2015). れくれく算數 6上. 啓林館

小山正孝 外. (2015a). 小學算數 6年上. 日本文敎出板.

小山正孝 外. (2015b). 小學算數 6年下. 日本文敎出板.

Primary Mathematics Project Team (2015a). *Primary Mathematics 5A Textbook*. Singapore: Marshall Cavendish Education.

Primary Mathematics Project Team (2015b). *Primary Mathematics 6A. Textbook*. Singapore: Marshall Cavendish Education.

Beckmann, S., & Izsak, A. (2015). Two perspectives on proportional relationships: Extending complementary origins of multiplication in Terms of quantities. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(1), 17-38.

Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1993). Rational numbers: Toward a semantic analysis —emphasis on the operator construct. *Rational numbers: An integration of research*, 13-47.

Bell et al. (2015). *Everyday Mathematics 4, Grade 6, Student Reference Book*. McGraw-Hill Education.

Broekman, H., Van der Valk, T., & Wijers, M. (2000). Teacher knowledge needed to teach ratio and proportion in secondary school mathematics : on using the ratio table. http://www.fisme.science.uu.nl/bps/artikelen/ratiotable.htm

Collars, C., Koay, P. L., Lee, N. H., Ong, B. L., & Tan, C. S. (2015a). *Shaping Maths Coursebook 5A*. Singapore: Marshall Cavendish Education.

Collars, C., Koay, P. L., Lee, N. H., Ong, B. L., & Tan, C. S. (2015b). *Shaping Maths Coursebook 6A*. Singapore: Marshall Cavendish Education.

Common Core Standards Writing Team (2011). Progressions for the Common Core State Standards in Mathematics (draft): 6-7, Ratio and proportional relationships. https://commoncoretools.files.wordpress.com/2012/02/ccss_progression_rp_67_2011_11_12_corrected.pdf

Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics, 26*(2-3), 135-164.

Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(1), 66-86.

Gravemeijer, K.P.E. (1994). *Developing Realistic Mathematics Education*, Freudenthal Institute, Utrecht, The Netherlands.

Kaput, J. J., & West, M. M. (1994). *Missing-value proportional reasoning problems: Factors affecting informal reasoning patterns*. New York, VA: State University of New York Press.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Küchemann, D., Hodgen, J., & Brown, M. (2011). Using the double number line to model multiplication. *Paper presented at Seventh*

Annual Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Rzeszów, Poland.

Küchemann, D., Hodgen, J., & Brown, M. (2014). The use of alternative double number lines as models of ratio tasks and as models for ratio relations and scaling. *Proceedings of the 8th British Congress of Mathematics Education (BCME8)* (pp. 231-238). BSRLM: University of Nottingham.

Chong, L. C., Soon, D, S., & Lian, T. K., (2015a) *Discover Maths 5A Textbook.* Singapore: Pan Pacific.

Chong, L. C., Soon, D, S., & Lian, T. K., (2015b) *Discover Maths 6A Textbook.* Singapore: Pan Pacific.

Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: Connecting content and children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(1), 41-61.

Lamon (2012). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding—Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers.* New York, VA: Routledge.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 93-118). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lobato, J., & Ellis, A. B. (2010). *Developing essential understanding of ratios, proportions, and proportional reasoning for teaching mathematics:* Grades 6-8. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

National Mathematics Advisory Panel. (2008). *Foundations for success: The final report of the National Mathematics Advisory Panel.* Washington, DC: U.S. Department of Education. http://www2.ed.gov/about/bdscomm/list/mathpanel/report/final-report.pdf

Shield, M., & Dole, S. (2013) Assessing the potential of mathematics textbooks to promote deep learning. *Educational studies in mathematics, 82*(2), 183-199.

Stacey, K. (2003). Do mathematics textbooks cultivate shallow teaching? Applying the TIMMS video study criteria to Australian Eight-grade mathematics textbooks. *Mathematics Education Research Journal, 20*(1), 82-107.

Streefland, L. (1985). Search for the roots of ratio: Some thoughts on the long term learning process (towards... a theory). *Educational Studies in Mathematics, 16*(1), 75-94.

Sumarto, S. N. (2013). Design Research on Mathematics Education : Ratio Table in Developing The Students' Proportional Reasoning. Palembang: Sriwijaya University.

Treffers, A. & Goffree, F. (1985). Rational analysis of realistic mathematics education - the Wiskobas program. *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 2,* 97-121.

Treffers, A.: 1987, Three Dimensions. *A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction - The Wiskobas Project*, Reidel Publishing Company, Dordrecht, The Netherlands.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (1995). A representional model in a long term learning process - the didactical use of models in Realistic Mathematics Education. paper presented at the AERA conference, San Francisco, CA.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2002). Realistic Mathematics Education as work in progress. in F.L. Lin (ed.), *Common Sense in Mathematics Education - Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on*

Mathematics Education, Taipei, Taiwan, National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan, 1-42.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics, 54,* 9-35.

Van de Walle, J. A. (2008). 수학을 어떻게 가르칠 것인가. (남승인, 서찬숙, 최진화, 강영란, 홍우주, 배혜진 외 역) 서울: 경문사. (영어 원작은 2004년 출판).

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative Structures. *Number concepts and operations in middle grades* (pp. 141-161). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Webb, D. C., Boswinkel, N., & Dekker, T. (2008). Beneath the tip of the iceberg: Using representations to support student understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School, 14*(2), 110-113.

The Comparison and Analysis of Models on Ratio and Rate in Elementary Mathematics Textbooks : Centering on Multiplicative Perspectives on Proportional Relationships and the Structure of Proportion Situations

Park, Sun Young
The Graduate School of Korea National University of Education
250 Taeseongtabyeon-ro Cheongju, Chungbuk, 28173 Korea
E-mail : parksy0816@naver.com

Lee, Kwangho†
Korea National University of Education
250 Taeseongtabyeon-ro Cheongju, Chungbuk, 28173 Korea
E-mail : paransol@knue.ac.kr

This study investigated the models of four countries' elementary mathematics textbooks in Ratio and Rate and identified how multiplicative perspectives on proportional relationships and the structure of proportion situations are reflected in the textbooks. For this, textbooks of 5th and 6th grade textbooks in Korea Japan, Singapore and U.S. are compared and analyzed. As a result, we can find multiplicative perspectives on proportional relationships and the structure of proportion situations on pictorial models, ratio tables, double number lines and double tape diagrams. Also, the development of Japanese textbooks from multiple batches perspectives to variable parts perspectives and the examples of the use with two models together implied the connection and union of two multiplicative perspectives. Based on these results, careful verification and discussion for the next textbook is needed to develop students' proportional reasoning and teach some effective reasoning strategies. And this study will provide the implication for what kinds of and how visual models are presented in the next textbook.

* ZDM Classification : C13
* MSC2000분류 : 97C90
* Key Words : Ratio, Rate, Proportional Relationship, Model, Multiplicative Perspectives, The Structure of Proportion Situations
† Corresponding Author