

Multivariate Process Capability Index Using Inverted Normal Loss Function

Hye-Jin Moon · Young-Bae Chung[†]

Department of Industrial and Management Engineering, Incheon National University

역정규 손실함수를 이용한 다변량 공정능력지수

문혜진 · 정영배[†]

인천대학교 산업경영공학과

In the industrial fields, the process capability index has been using to evaluate the variation of quality in the process. The traditional process capability indices such as C_p , C_{pk} , C_{pm} and C_{pm}^+ have been applied in the industrial fields. These traditional process capability indices are mainly applied in the univariate analysis. However, the main streams in the recent industry are the multivariate manufacturing process and the multiple quality characteristics are corrected each other. Therefore, the multivariate statistical method should be used in the process capability analysis. The multivariate process indices need to be enhanced with more useful information and extensive application in the recent industrial fields. Hence, the purpose of the study is to develop a more effective multivariate process index (MC_{pl}) using the multivariate inverted normal loss function. The multivariate inverted normal loss function has the flexibility for the any type of the symmetrical and asymmetrical loss functions as well as the economic information. Especially, the proposed modeling method for the multivariate inverted normal loss function (MINLF) and the expected loss from MINLF in this paper can be applied to the any type of the symmetrical and asymmetrical loss functions. And this modeling method can be easily expanded from a bivariate case to a multivariate case.

Keywords : Multivariate Process Capability Index, Multivariate Analysis, Inverted Normal Loss Function

1. 서 론

최근 기업들의 비즈니스 환경은 점점 까다롭고 다양해져 가는 고객의 요구사항을 만족시켜야만 치열한 시장 경쟁에서 살아남을 수 있게 되었다. 그로 인하여 기업들은 제품의 다양성, 고품질의 규격, 경쟁력 있는 가격 등 여러 생산조건들을 동시에 만족시키고자 기업의 역량을 강화하고 있다. 그리고 이러한 기업의 환경변화들로 인하여 생산공정과 품질관리의 변수들은 복잡하면서도 다양해지고 독립적이기 보다는 서로 연관성을 가지고 있다

고 할 수 있다. 그러기에 지금의 생산 공정과 품질요소들을 관리하기 위해서는 합리적이고도 현실성 있는 유용한 통계적 척도가 요구될 것이다.

생산현장에서 공정능력(Process Capability)이 가지는 의미는 관리상태하에 있을 때 그 공정에서 생산되는 제품의 품질변동이 어느 정도인가를 나타내는 것으로서, 공정의 균일성(Uniformity)을 의미한다. 그리고 공정능력평가를 위해 대표적으로 사용되는 척도가 공정능력지수(Process Capability Index)이다. 공정능력지수는 공정의 변동 과 제품의 규격한계를 정량적으로 비교하여 공정능력을 평가하게 된다. 전통적인 공정능력지수 C_p , C_{pk} 는 품질의 산포 및 공정평균의 치우침만을 고려하여 평가한 반면 목표치로부터 품질 특성치의 변동까지도 고려하여 공정능력을

평가하는 C_{pm} 이 제안되었다[2]. C_{pm}^+ 는 목표치로부터 품질 특성치의 변동을 Taguchi의 이차손실 함수의 기대값을 적용하여 평가하는 척도로써 제안되었다[1]. 그리고 더 나아가 목표치로부터 품질의 변동에 따른 경제적 손실까지도 공정능력 평가에 포함함으로써 보다 유용한 정보력과 폭넓은 응용력을 지닌 다양한 공정능력지수들이 연구되어 왔다.

특히 목표치로부터 품질의 변동에 따른 경제적 손실을 잘 표현해 주는 대표적인 수리모형이 손실 함수(Loss Function)이다. 그리고 Taguchi의 이차 손실함수는 오랫동안 다양한 산업분야에서 사용되어 왔다. 하지만 Taguchi의 이차손실함수는 다음과 같은 한계점을 가지고 있다. 품질 특성치가 규격 내에 있을 때나 규격을 벗어났을 때나 일률적으로 이차함수를 적용하고 있다는 점과 목표치를 중심으로 좌우대칭일 경우에만 잘 설명된다는 점이다.

이러한 한계점을 극복하고자 Spiring은 대안적 손실함수를 제안하였다[13]. Spiring의 손실함수는 목표치로부터 손실에 대한 확률밀도함수의 역함수를 이용하였다. 이로 인하여 생산공정의 현실성을 반영하여 다양한 분포의 형태와 품질특성마다 발생할 수 있는 서로 다른 경제적 손실을 비교적 제약없이 사용할 수 있다는 장점을 가지고 있다.

그리고 최근 생산공정에서 관리해야 할 요인들은 2개 이상으로 다변량 분석(Multivariate Analysis)이 요구된다는 점이다. 또한 생산 및 측정 기술력의 발전과 공정의 자동화 등으로 인하여 생산공정은 더욱더 복잡해지고 수많은 품질요인들이 서로 연관되어 품질 변동에 중요한 영향을 미치고 있다. 그러기에 많은 연구자들은 1개의 품질 특성치만을 고려한 기존의 전통적 공정능력 지수들로 최신의 생산공정을 정확하게 평가하기에는 한계점이 있다고 판단하였고, 2개 이상의 품질변수에 대한 규격과 산포를 고려한 다변량 공정능력지수(Multivariate Capability Index)들이 연구되고 있다.

따라서 본 연구에서는 최신의 산업현장에서 현실적이면서도 보다 유용한 정보들을 가지고 있고 공정상태를 보다 민감하게 감지하고 관리할 수 있는 다변량 공정능력지수를 제안하고자 한다. 경제적 측면의 정보력을 포함하기 위해서 손실 함수를 이용할 것이다. 그리고 손실 함수의 모형은 공정의 다양성을 잘 반영하고 응용력이 뛰어난 Spiring의 대안적 손실함수를 채택하고자 한다. 특히, 목표치로부터 손실이 정규분포를 따를 때 정규분포의 역함수, 즉 역정규분포의 손실함수(Inverted Normal Loss Function)를 이용하여 경제적 손실을 공정능력 평가에 반영할 것이다. 그러면 서로 동시에 여러 변수들을 같이 분석할 수 있는 다변량 분석기법을 이용할 것이다. 또한 목표치를 중심으로 최대손실에 대한 분포의 유형이

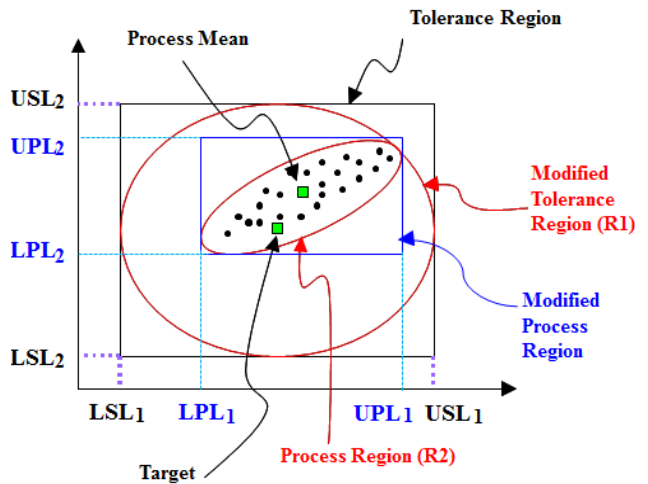
좌우 대칭뿐만 아니라 비대칭일 때도 제약없이 평가가 가능한 유용성 있는 다변량 공정능력지수를 제안하고자 한다.

2. 이론적 배경

2.1 다변량 공정능력지수 MC_{pm}

다변량 공정능력지수는 전통적인 단변량 공정능력지수를 벡터화된 모형으로 확장한 개념이라 할 수 있다. 즉, 정규분포일 경우를 기준으로 단변량과 다변량의 특징을 비교해 보면, 분포의 모양은 단변량일 때 종모양(ball-shaped)인 반면 다변량일 때는 타원형(2차원) 또는 타원체(3차원)을 띤다. 확률적 표현에 있어서 단변량일 때는 간격/폭에 의한 길이지만 다변량일 때는 영역/범위로 나타내는 면적 또는 부피로 표현된다.

대표적 다변량 공정능력지수로 C_{pM} 과 MC_{pm} 을 비교하고자 한다[11, 14]. <Figure 1>은 2변량 정규 분포일 때의 규격허용공차($USL_i - LSL_i$)와 공정영역($UPL_i - LPL_i$)을 보여주고 있다.



<Figure 1> Tolerance and Process Regions for Bivariate Case

다변량 공정능력지수는 규격의 허용오차영역과 공정영역의 면적 또는 부피의 비율로써 공정능력을 측정하게 되며, C_{pM} 과 MC_{pm} 의 식은 각각 다음과 같다.

$$C_{pM} = \left[\frac{\text{허용 공차영역의 면적 또는 부피}}{\text{수정 공정영역의 면적 또는 부피}} \right]^{\frac{1}{n}} = \left[\frac{\prod_{i=1}^n (USL_i - LSL_i)}{\prod_{i=1}^n (UPL_i - LPL_i)} \right]^{\frac{1}{n}} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 MC_{pm} &= \frac{\text{수정 규격허용오차영역}(R_1)\text{의 면적 또는 부피}}{\text{공정영역}(R_2)\text{의 면적 또는 부피}} \\
 &= \frac{\text{수정 규격허용오차영역}(R_1)\text{의 면적 또는 부피}}{[(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})^T \Sigma_T^{-1}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}) \leq K(n)]\text{의 면적 또는 부피}} \\
 &= \frac{\text{수정 규격허용오차영역}(R_1)\text{의 면적 또는 부피}}{|\Sigma_T|^{\frac{1}{2}} (\pi K)^{\frac{n}{2}} \left[\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) \right]^{-1}} \\
 &= \frac{\text{수정 규격허용오차영역}(R_1)\text{의 면적 또는 부피}}{|\Sigma_T|^{\frac{1}{2}} (\pi K)^{\frac{n}{2}} \left[\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) \right]^{-1}} \\
 &= |\Sigma_T|^{\frac{1}{2}} (\pi K)^{\frac{n}{2}} \left[\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) \right]^{-1} [1 + (\boldsymbol{\mu}-\mathbf{T})^T \Sigma_T^{-1}(\boldsymbol{\mu}-\mathbf{T})]^{\frac{1}{2}} \quad (2)
 \end{aligned}$$

여기서 n 은 품질 특성치의 수이고, Σ_T 는 평균제공오차 매트릭스, Σ 는 분산-공분산 매트릭스, $\Gamma(\alpha)$ 는 감마분포를 의미한다. $K(n)$ 은 변수가 n 개일 때 χ^2 분포의 99.73 번째 분위수를 의미하며, 이는 “6 σ ”의 개념으로 $\chi^2(n, 0.9973)$ 의 값을 말한다. 이때 $MC_{pm} = 1$ 이면 공정의 평균과 목표치가 일치함을 의미하며 1보다 크거나 같으면 공정능력이 양호하다고 평가할 수 있다.

상기 <Figure 1>과 식 (1)과 식 (2)를 비교해 보면, C_{pM} 은 타원형의 공정영역을 사각형의 영역으로 수정하여 그 면적을 적용하였다면 MC_{pm} 은 사각형의 규격허용오차영역을 실제의 공정영역에 맞추어 타원형으로 수정하여 적용하였다는 차이점을 가지고 있다. 이러한 차이점은 결과적으로 MC_{pm} 이 C_{pM} 보다 목표치로부터 공정평균의 편차를 보다 민감하게 반영하고 있음을 증명 하였다. 따라서 본 연구에서는 MC_{pm} 의 다변량 모형을 응용하고자 한다.

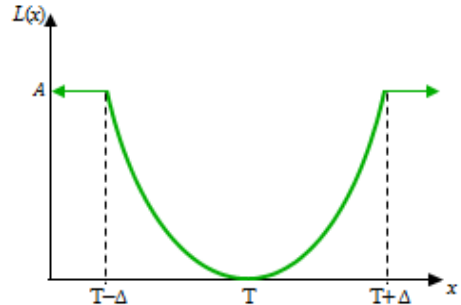
2.2 다변량 역정규 손실함수(MINLF)

다양한 산업분야에서 널리 사용되는 손실함수는 Taguchi의 이차손실함수이다. 이는 품질 특성치 x 가 목표치 T 와 일치하면 손실이 발생하지 않지만 목표 치로부터 편차가 크면 클수록 손실이 증가 한다는 가정하에 이를 이차식으로 근사화한 손실함수이다.

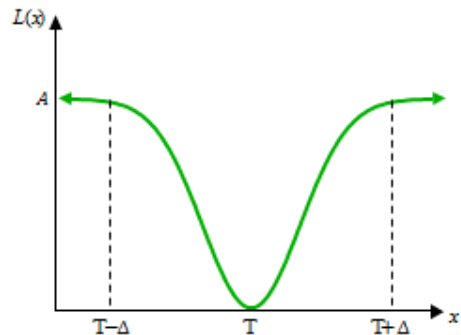
반면 Spiring은 Taguchi의 이차손실함수의 대안 적 손실함수로써 정규분포의 확률밀도함수(p.d.f)의 역함수를 활용한 손실함수를 제안하였고, 이를 역정규 손실함수(INLF : Inverted Normal Loss Function)라고 정의하였다[9, 13].

Taguchi의 이차손실함수에서 규격을 벗어나도 손실이 계속 증가한다는 한계점을 보장한 이차 손실함수 <Figure 2>와 Spiring의 역정규 손실함수 <Figure 3>의 그래프를 비교해 보면 다음과 같다[11]. 이때 $(T-\Delta, T+\Delta)$ 는 소비

자의 허용차 구간이고, 이 구간을 벗어나면 최대손실비용 A 가 발생하게 된다.

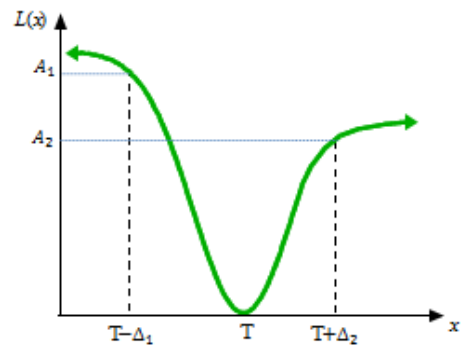


<Figure 2> Modified Quadratic Loss Function



<Figure 3> Symmetric Inverted Normal Loss Function

두 그래프를 비교해 보면, 역정규 손실함수 역시 Taguchi의 이차손실함수의 특징인 손실이 항상 양수의 값을 가지며 $(-\infty, T]$ 구간에서는 감소하고 $[T, \infty)$ 구간에서는 증가하는 성향을 나타내고 있다. 또한 목표치 T 에서 유일한 최소값을 가진다는 손실함수의 대표적 특징을 동일하게 나타내고 있다. 그리고 정규분포의 확률밀도함수의 역함수를 적용함으로써 품질변동에 대한 손실을 보다 합리적으로 설명이 가능하며 다음의 <Figure 4>와 같이 목표치(T)를 중심으로 최대손실(A)에 대하여 대칭과 비대칭 모두일 때 적용이 가능하다는 장점을 가지고 있다.



<Figure 4> Asymmetric Inverted Normal Loss Function

실제 공정 데이터의 분포에 대한 확률밀도 함수를 $f(x)$ 라 하고, 손실함수에 이용되는 목표치에 대한 확률 밀도함수를 $g(x, T)$ 로 나타낸다. 따라서 역함수에 의한 손실함수 $L(x)$ 는 함수 $g(x, T)$ 의 역함수를 취한 식(3)과 같이 나타낼 수 있으며 그의 기대값 $E[L(x)]$ 은 다음의 식(4)와 같다.

$$L(x) = A \left[1 - \frac{g(x, T)}{m} \right] \tag{3}$$

$$E[L(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} A \left[1 - \frac{g(x, T)}{m} \right] f(x) dx \tag{4}$$

여기서 m 은 함수 $g(x, T)$ 가 최대로 도달할 수 있는 값으로 품질 특성치 x 가 목표치 T 와 일치할 때 최대값을 가지게 된다. 따라서 $x = T$ 일 때의 $g(x, T)$ 값이 m 의 값이 된다.

그리고 상기 식 (3)과 식 (4)는 실제 공정 데이터의 분포가 정규분포, 감마분포, 베타분포 등 다양성에 따라 해당 분포에 대한 확률밀도함수 $f(x)$ 와 손실함수에 이용되는 목표치에 대한 확률밀도함수를 $g(x, T)$ 를 적용하여 활용할 수도 있다[9, 12].

본 연구에서는 공정데이터가 정규분포를 따른다는 가정하에서 다음과 같이 수식을 전개하고자 한다.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$$g(x, T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\gamma} \exp\left\{-\frac{(x-T)^2}{2\gamma^2}\right\}$$

여기서 상기 손실함수 $L(x)$ 의 식 (3)에 $g(x, T)$ 식과 $m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\gamma}$ 을 대입하면 식 (5)와 같다.

$$\begin{aligned} L(x) &= A \left[1 - \frac{g(x, T)}{m} \right] \\ &= A \left[1 - \exp\left\{-\frac{(x-T)^2}{2\gamma^2}\right\} \right] \end{aligned} \tag{5}$$

그리고 기대손실 $E[L(x)]$ 은 다음과 같다[13].

$$\begin{aligned} E[L(x)] &= A \int_{-\infty}^{\infty} L(x) f(x) dx \\ &= A \left[1 - \frac{\gamma}{\sqrt{\sigma^2 + \gamma^2}} \exp\left\{-\frac{(\mu-T)^2}{2(\sigma^2 + \gamma^2)}\right\} \right] \end{aligned} \tag{6}$$

목표치 T 를 중심으로 $(-\infty, T]$ 구간과 $[T, \infty)$ 구간에서 비대칭 손실함수 $L(x)$ 은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$L(x) = \begin{cases} A_1 \left[1 - \exp\left\{-\frac{(x-T)^2}{2\gamma^2}\right\} \right], & x < T \\ A_2 \left[1 - \exp\left\{-\frac{(x-T)^2}{2\gamma^2}\right\} \right], & x \geq T \end{cases} \tag{7}$$

이때 기대손실 $E[L(x)]$ 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E[L(x)] &= \int_{-\infty}^T A_1 L(x) f(x) dx + \int_T^{\infty} A_2 L(x) f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^T A_1 \left[1 - \exp\left\{-\frac{(x-T)^2}{2\gamma^2}\right\} \right] f(x) dx \\ &\quad + \int_T^{\infty} A_2 \left[1 - \exp\left\{-\frac{(x-T)^2}{2\gamma^2}\right\} \right] f(x) dx \end{aligned} \tag{8}$$

다변량 모형을 벡터로 확장하면 다변량 역정규 손실함수(MINLF : Multivariate Inverted Normal Loss Function)를 구할 수 있으며, 손실함수 $L(\mathbf{X}, \mathbf{T})$ 와 기대손실 $E[L(\mathbf{X}, \mathbf{T})]$ 은 다음과 같다.

$$L(\mathbf{X}, \mathbf{T}) = A \left[1 - \frac{g(\mathbf{X}, \mathbf{T})}{m} \right] \tag{9}$$

$$E[L(\mathbf{X}, \mathbf{T})] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} A \left[1 - \frac{g(\mathbf{X}, \mathbf{T})}{m} \right] f(\mathbf{X}) dx \tag{10}$$

본 연구범위에 따른 다변량 정규분포의 확률 밀도 함수 $f(\mathbf{X})$ 와 손실함수에 이용되는 목표치에 대한 확률밀도함수 $g(\mathbf{X}, \mathbf{T})$ 는 다음과 같다.

$$f(\mathbf{X}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})\right\}$$

$$g(\mathbf{X}, \mathbf{T}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Lambda|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{X}-\mathbf{T})^T \Lambda^{-1}(\mathbf{X}-\mathbf{T})\right\}$$

상기 $f(\mathbf{X})$ 와 $g(\mathbf{X}, \mathbf{T})$ 를 대입하면 역정규 손실 함수 $L(\mathbf{X}, \mathbf{T})$ 와 기대손실 $E[L(\mathbf{X}, \mathbf{T})]$ 은 다음과 같다[6].

$$\begin{aligned} L(\mathbf{X}, \mathbf{T}) &= A \left[1 - \frac{g(\mathbf{X}, \mathbf{T})}{m} \right] \\ &= A \left[1 - \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{X}-\mathbf{T})^T \Lambda^{-1}(\mathbf{X}-\mathbf{T})\right\} \right] \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} E[L(\mathbf{X}, \mathbf{T})] &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} A L(\mathbf{X}, \mathbf{T}) f(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \\ &= A \left[1 - \frac{|\Lambda^{-1} + \Sigma^{-1}|^{1/2}}{|\Sigma|^{1/2}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\mu}^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} + \mathbf{T}^T \Lambda^{-1} \mathbf{T})\right\} \right. \\ &\quad \left. \times \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\mu}^T \Sigma^{-1} + \mathbf{T}^T \Lambda^{-1})(\Lambda^{-1} + \Sigma^{-1})^{-1}(\Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} + \Lambda^{-1} \mathbf{T})\right\} \right] \end{aligned} \tag{12}$$

3. 연구모형

3.1 기호

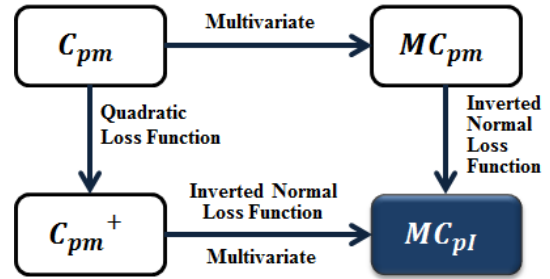
- \mathbf{X} : 표본 품질 특성치 벡터($\mathbf{X}' = x_i = x_1, x_2, \dots, x_n$)
- $\boldsymbol{\mu}$: 공정 평균벡터($\boldsymbol{\mu}' = \mu_i = \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$)
- \mathbf{T} : 목표치 벡터($\mathbf{T}' = T_i = T_1, T_2, \dots, T_n$)
- n : 품질 특성치의 수
- i : 품질 특성치($i = 1, 2, \dots, n$)
- A_j : 목표치 T_i 중심으로 특성치 x_i 의 비대칭 구간에서 최대 손실($j = 1, 2, \dots, 2^n$)
- Σ : 분산-공분산 매트릭스
- Σ^{-1} : 분산-공분산 매트릭스 역행렬
- Σ_T : 평균제공오차(MES) 매트릭스
- D : 목표치로부터 공정평균의 편차
- A : 척도모수(scaling parameter) 매트릭스
- $K(n)$: $\chi^2(n, 0.9973)$ 의 값
- $\Gamma(\alpha)$: 감마함수
- $L(\mathbf{X}, \mathbf{T})$: 목표치 \mathbf{T} 에 대한 표본벡터 \mathbf{X}_i 의 손실함수
- $E[L(\mathbf{X}, \mathbf{T})]$: 목표치 \mathbf{T} 에 대한 표본벡터 \mathbf{X}_i 의 기대손실

3.2 다변량 공정능력 지수 MC_{pI} 모형

본 연구모형에 근간으로 적용하기 위해 채택한 다변량 공정능력지수 MC_{pm} 은 규격범위와 목표치로부터 공정의 산포를 비교한 다변량 공정능력 지수로써 단변량의 C_{pm} 과 동일한 개념을 가지고 있으면서 벡터로 확장한 다변량 공정능력지수이다.

MC_{pm} 모형에 경제적 측면을 반영할 수 있는 품질손실 함수를 적용하기 위한 연구모형의 논리적 근거는 단변량 공정능력지수 C_{pm} 으로부터 이차 손실함수의 기대값을 적용한 C_{pm}^+ 를 도출한 것과 같은 방식으로 전개하고자 한다. 즉, C_{pm}^+ 는 단변량 C_{pm} 에서 목표로부터 공정 산포(σ) 대신 Taguchi의 이차손실함수의 기대값을 응용한 공정능력 지수라 할 수 있다. 따라서 MC_{pm} 모형에 목표로부터 공정의 산포값 대신 다변량의 역정규 손실함수를 적용할 것이다. 역정규 손실함수를 이용함으로써 다수의 품질 특성치마다 서로 다른 손실비용을 반영하고 그로 인한 손실함수의 형태가 대칭 또는 비대칭 구조에 의한 분석의 제약성을 받지 않는 모형을 연구하는데 초점을 두었다.

따라서 본 연구는 첫째로 다수의 품질 특성치를 고려한 다변량 공정능력분석을 목적으로 한다. 둘째는 공정에서의 경제적 손실척도로써 역정규 손실함수를 적용한 다변량 공정능력분석에 있다. 실제 생산현장에서 유용한 정보력을 가지면서 손실함수의 형태에 따른 제약성 없이 용이한 다변량 공정능력 분석을 목적으로 한다.



<Figure 5> Modeling Method of MC_{pI}

상기 <Figure 5>는 본 연구모형을 위한 모델링 방법론을 나타내고 있다. 기존의 이론적 배경을 바탕으로 하여 다변량의 MC_{pm} 모형으로부터 목표치를 고려한 공정의 산포 대신에 다변량 정규분포의 역함수를 이용한 손실함수의 기대값을 적용한 공정능력지수 MC_{pI} 모형을 제시하고자 한다.

우선 제안하고자 하는 다변량 공정능력지수 모형의 기초모형이 되는 MC_{pm} 의 식 (2)에서 본 연구의 초점에 되는 부분은 다음의 식과 같다.

$$MC_{pm} = \frac{\text{수정 규격허용오차영역의 면적 또는 부피}}{|\Sigma_T|^{\frac{1}{2}} (\pi K)^{\frac{n}{2}} \left[\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) \right]^{-1}} \quad (13)$$

상기 식 (13)에서 평균제공오차매트릭스 Σ_T 는 아래의 구조식에서 설명해 주듯이 공정평균이 목표치로부터 얼마나 떨어져 있는가에 대한 편차를 의미하며, 이는 손실함수가 가지는 특징으로도 동일하게 설명이 되는 부분이다.

$$\begin{aligned} \Sigma_T &= E[(\mathbf{X} - \mathbf{T})(\mathbf{X} - \mathbf{T})'] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbf{X}_i - \mathbf{T})(\mathbf{X}_i - \mathbf{T})' \\ &= \Sigma + (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{T})(\boldsymbol{\mu} - \mathbf{T})' \end{aligned}$$

이러한 특징을 기반으로 하여 앞에서 설명한 것과 같이 C_{pm} 의 산포 대신 C_{pm}^+ 는 이차손실 함수의 기대값 $E[L(x)]$ 을 적용했듯이 MC_{pm} 의 평균제공오차 매트릭스 Σ_T 대신에 다변량 역정규 손실함수(MINLF)의 기대손실 $E[L(\mathbf{X}, \mathbf{T})]$ 을 대입 하는 방법으로써 다변량 공정능력지수 MC_{pI} 모형을 다음과 같이 제안한다.

$$MC_{pI} = \frac{\text{수정 규격허용오차영역의 면적 또는 부피}}{|E[L(\mathbf{X}, \mathbf{T})]|^{\frac{1}{2}} (\pi K)^{\frac{n}{2}} \left[\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) \right]^{-1}} \quad (14)$$

상기 식 (14)의 연구모형에서 중요한 입력변수는 다변량의 기대손실 $E[L(\mathbf{X}, \mathbf{T})]$ 이다.

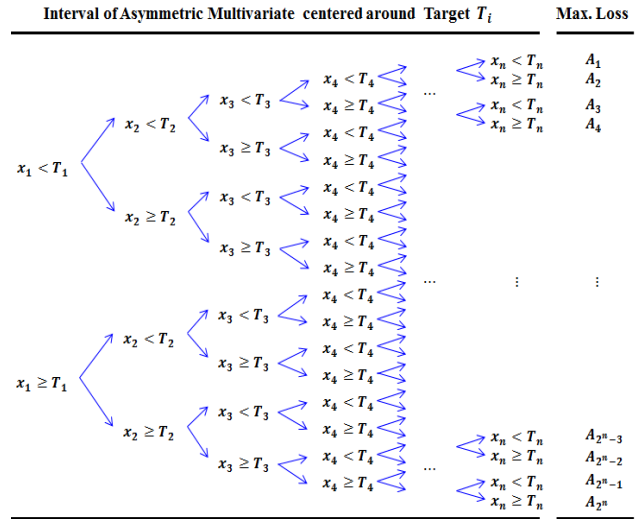
다변량인 MC_{pl} 의 구조식에 맞추어 분모의 기대 손실 $E[L(\mathbf{X}, \mathbf{T})]$ 역시 다변량의 모형으로 확장 하여 정의하는 것이 필요하다. 또한 손실함수의 형태, 즉 대칭과 비대칭 구조를 모두 설명할 수 있는 일반화된 다변량 역정규 손실함수(MINLF)의 수리적 모델을 정의하고자 한다.

최대손실 A에 대하여 대칭적 손실함수라면 앞에서의 식 (11)과 식 (12)에 대입하여 구할 수 있다. 하지만 비대칭의 경우에는 우선적으로 다변량의 특성치 x_i 마다 목표치 T_i 를 중심으로 비대칭을 이루는 구간의 전개와 해당 구간에서의 최대손실 비용 A_j 에 대하여 정의가 필요하다. 구간을 나누는 기준은 손실함수의 특징인 목표치 T_i 일 때 손실값 0(zero)을 중심으로 규격 상한선(USL)과 하한선(LSL) 범위 내에서 품질 특성치 x_i 들 간에 연계된 구간들을 구분하여 전개하면 <Figure 6>과 같다. 그리고 각 구간에서 발생하는 최대손실비용 A_j 의 값은 생산현장으로부터 규정된 손실비용을 기반으로 한 정해진 상수값으로 가정한다. <Figure 6>의 구간은 역정규 손실함수의 기대값 $E[L(\mathbf{X}, \mathbf{T})]$ 을 구하는 정적분의 구간이 된다. 또한 <Figure 6> 방법에 의해 구한 손실함수와 기대손실은 대칭과 비대칭 모두 사용할 수 있는 일반화된 구조식을 도출할 수 있기 때문에 응용범위가 넓어질 수 있고 사용이 용이하다는 정점을 가지고 있다.

따라서 <Figure 6>의 구간전개방식에 따라 대칭 비대칭 구조를 망라한 역정규 손실함수 $L(\mathbf{X}, \mathbf{T})$ 와 기대손실 $E[L(\mathbf{X}, \mathbf{T})]$ 은 다음과 같다.

$$L(\mathbf{X}, \mathbf{T}) = \begin{cases} A_1 \left[1 - \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{X} - \mathbf{T})^T \Lambda^{-1} (\mathbf{X} - \mathbf{T}) \right\} \right], & x_1 < T_1, x_2 < T_2, \dots, x_n < T_n \\ A_2 \left[1 - \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{X} - \mathbf{T})^T \Lambda^{-1} (\mathbf{X} - \mathbf{T}) \right\} \right], & x_1 < T_1, x_2 < T_2, \dots, x_n \geq T_n \\ \vdots & \vdots \\ A_{2^{n-1}} \left[1 - \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{X} - \mathbf{T})^T \Lambda^{-1} (\mathbf{X} - \mathbf{T}) \right\} \right], & x_1 \geq T_1, x_2 \geq T_2, \dots, x_n < T_n \\ A_{2^n} \left[1 - \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{X} - \mathbf{T})^T \Lambda^{-1} (\mathbf{X} - \mathbf{T}) \right\} \right], & x_1 \geq T_1, x_2 \geq T_2, \dots, x_n \geq T_n \end{cases} \quad (15)$$

$$E[L(\mathbf{X}, \mathbf{T})] = \int_{-T_1}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{T_n} A_1 L(\mathbf{X}, \mathbf{T}) f(\mathbf{X}) d\mathbf{X} + \int_{-\infty}^{T_1} \dots \int_{T_n}^{\infty} A_2 L(\mathbf{X}, \mathbf{T}) f(\mathbf{X}) d\mathbf{X} + \dots + \int_{-T_1}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{T_n} A_{2^{n-1}} L(\mathbf{X}, \mathbf{T}) f(\mathbf{X}) d\mathbf{X} + \int_{-\infty}^{T_1} \dots \int_{T_n}^{\infty} A_{2^n} L(\mathbf{X}, \mathbf{T}) f(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \quad (16)$$



<Figure 6> Modeling Method of Asymmetric Interval for MC_{pl}

본 연구의 시뮬레이션을 위한 범위와 가정은 다음과 같다.

- (1) 품질 특성치는 망목특성이며, 연속적인 값을 가진다.
- (2) 공정데이터는 다변량 정규분포(Multivariable Normal Distribution)을 따른다.
- (3) 대칭일 때와 비대칭일 때 모두를 고려한다.
- (4) 목표치로부터 공정평균에 치우침이 있는 경우와 치우침이 없는 경우 모두 고려한다.
- (5) 척도 매트릭스(Scaling matrix)에서 λ 는 공정 파라미터가 규격한계선에 있을 때 손실이 90%일 때를 기준으로 한다($\lambda_i = 0.233 \times$ 규격공차 $_i$).
- (6) 구간별 최대손실비용 A_j 은 기업으로부터 정해진 상수 값이다.
- (7) 시뮬레이션 분석에 사용한 프로그램은 MATLAB R2015b 이다.

본 연구모형의 시뮬레이션은 2변량(Bivariable)과 3변량(Three-variable)일 때의 모형으로 분석 하고자 한다.

1) 2변량 모형(Bivariable)

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{USL} = \begin{bmatrix} USL_1 \\ USL_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{LSL} = \begin{bmatrix} LSL_1 \\ LSL_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & \lambda_1 \lambda_2 \epsilon \\ \lambda_2 \lambda_1 \epsilon & \lambda_2^2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho \sigma_1 \sigma_2 \\ \rho \sigma_2 \sigma_1 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}' = [A_1, A_2, A_3, A_4]$$

2변량의 역정규 손실함수와 기대손실은 다음과 같다.

$$L(\mathbf{X}, \mathbf{T}) = \begin{cases} A_1 \left[1 - \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{X}-\mathbf{T})^T \Lambda^{-1}(\mathbf{X}-\mathbf{T})\right\} \right], \\ \quad LSL_1 < x_1 < USL_1, LSL_2 < x_2 < T_2 \\ A_2 \left[1 - \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{X}-\mathbf{T})^T \Lambda^{-1}(\mathbf{X}-\mathbf{T})\right\} \right], \\ \quad T_1 < x_1 < USL_1, LSL_2 < x_2 < T_2 \\ A_3 \left[1 - \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{X}-\mathbf{T})^T \Lambda^{-1}(\mathbf{X}-\mathbf{T})\right\} \right], \\ \quad LSL_1 < x_1 < T_1, T_2 < x_2 < USL_2 \\ A_4 \left[1 - \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{X}-\mathbf{T})^T \Lambda^{-1}(\mathbf{X}-\mathbf{T})\right\} \right], \\ \quad LSL_1 < x_1 < USL_1, LSL_2 < x_2 < USL_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E[L(\mathbf{X}, \mathbf{T})] &= \int_{LSL_1}^{T_1} \int_{LSL_2}^{T_2} A_1 L(\mathbf{X}, \mathbf{T}) f(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \\ &\quad + \int_{LSL_1}^{T_1} \int_{T_2}^{USL_2} A_2 L(\mathbf{X}, \mathbf{T}) f(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \\ &\quad + \int_{T_1}^{USL_1} \int_{LSL_2}^{T_2} A_3 L(\mathbf{X}, \mathbf{T}) f(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \\ &\quad + \int_{T_1}^{USL_1} \int_{T_2}^{USL_2} A_4 L(\mathbf{X}, \mathbf{T}) f(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \\ &= \int_{LSL_2}^{T_2} \int_{LSL_1}^{T_1} A_1 L(x_1, x_2) f(x_1, x_2) dx_2 dx_1 \\ &\quad + \int_{LSL_1}^{T_1} \int_{T_2}^{USL_2} A_2 L(x_1, x_2) f(x_1, x_2) dx_2 dx_1 \\ &\quad + \int_{T_1}^{USL_1} \int_{LSL_2}^{T_2} A_3 L(x_1, x_2) f(x_1, x_2) dx_2 dx_1 \\ &\quad + \int_{T_1}^{USL_1} \int_{T_2}^{USL_2} A_4 L(x_1, x_2) f(x_1, x_2) dx_2 dx_1 \end{aligned}$$

2) 3변량 모형(Three-Variable)

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{USL} = \begin{bmatrix} USL_1 \\ USL_2 \\ USL_3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{LSL} = \begin{bmatrix} LSL_1 \\ LSL_2 \\ LSL_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & \lambda_1 \lambda_2 \epsilon & \lambda_1 \lambda_3 \epsilon \\ \lambda_2 \lambda_1 \epsilon & \lambda_2^2 & \lambda_2 \lambda_3 \epsilon \\ \lambda_3 \lambda_1 \epsilon & \lambda_3 \lambda_2 \epsilon & \lambda_3^2 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho \sigma_1 \sigma_2 & \rho \sigma_1 \sigma_3 \\ \rho \sigma_2 \sigma_1 & \sigma_2^2 & \rho \sigma_2 \sigma_3 \\ \rho \sigma_3 \sigma_1 & \rho \sigma_3 \sigma_2 & \sigma_3^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}' = [A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8]$$

3변량의 역정규 손실함수와 기대손실은 다음과 같다.

$$L(\mathbf{X}, \mathbf{T}) = \begin{cases} A_1 \left[1 - \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{X}-\mathbf{T})^T \Lambda^{-1}(\mathbf{X}-\mathbf{T})\right\} \right], \\ \quad LSL_1 < x_1 < T_1, LSL_2 < x_2 < T_2, LSL_3 < x_3 < T_3 \\ A_2 \left[1 - \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{X}-\mathbf{T})^T \Lambda^{-1}(\mathbf{X}-\mathbf{T})\right\} \right], \\ \quad LSL_1 < x_1 < T_1, LSL_2 < x_2 < T_2, T_3 < x_3 < USL_3 \\ A_3 \left[1 - \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{X}-\mathbf{T})^T \Lambda^{-1}(\mathbf{X}-\mathbf{T})\right\} \right], \\ \quad LSL_1 < x_1 < T_1, T_2 < x_2 < USL_2, LSL_3 < x_3 < T_3 \\ A_4 \left[1 - \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{X}-\mathbf{T})^T \Lambda^{-1}(\mathbf{X}-\mathbf{T})\right\} \right], \\ \quad LSL_1 < x_1 < T_1, T_2 < x_2 < USL_2, T_3 < x_3 < USL_3 \\ A_5 \left[1 - \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{X}-\mathbf{T})^T \Lambda^{-1}(\mathbf{X}-\mathbf{T})\right\} \right], \\ \quad T_1 < x_1 < USL_1, LSL_2 < x_2 < T_2, LSL_3 < x_3 < T_3 \\ A_6 \left[1 - \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{X}-\mathbf{T})^T \Lambda^{-1}(\mathbf{X}-\mathbf{T})\right\} \right], \\ \quad T_1 < x_1 < USL_1, LSL_2 < x_2 < T_2, T_3 < x_3 < USL_3 \\ A_7 \left[1 - \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{X}-\mathbf{T})^T \Lambda^{-1}(\mathbf{X}-\mathbf{T})\right\} \right], \\ \quad T_1 < x_1 < USL_1, T_2 < x_2 < USL_2, LSL_3 < x_3 < T_3 \\ A_8 \left[1 - \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{X}-\mathbf{T})^T \Lambda^{-1}(\mathbf{X}-\mathbf{T})\right\} \right], \\ \quad T_1 < x_1 < USL_1, T_2 < x_2 < USL_2, T_3 < x_3 < USL_3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E[L(\mathbf{X}, \mathbf{T})] &= \int_{LSL_1}^{T_1} \int_{LSL_2}^{T_2} \int_{LSL_3}^{T_3} A_1 L(\mathbf{X}, \mathbf{T}) f(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \\ &\quad + \int_{LSL_1}^{T_1} \int_{LSL_2}^{T_2} \int_{T_3}^{USL_3} A_2 L(\mathbf{X}, \mathbf{T}) f(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \\ &\quad + \int_{LSL_1}^{T_1} \int_{T_2}^{USL_2} \int_{LSL_3}^{T_3} A_3 L(\mathbf{X}, \mathbf{T}) f(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \\ &\quad + \int_{LSL_1}^{T_1} \int_{T_2}^{USL_2} \int_{T_3}^{USL_3} A_4 L(\mathbf{X}, \mathbf{T}) f(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \\ &\quad + \int_{T_1}^{USL_1} \int_{LSL_2}^{T_2} \int_{LSL_3}^{T_3} A_5 L(\mathbf{X}, \mathbf{T}) f(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \\ &\quad + \int_{T_1}^{USL_1} \int_{LSL_2}^{T_2} \int_{T_3}^{USL_3} A_6 L(\mathbf{X}, \mathbf{T}) f(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \\ &\quad + \int_{T_1}^{USL_1} \int_{T_2}^{USL_2} \int_{LSL_3}^{T_3} A_7 L(\mathbf{X}, \mathbf{T}) f(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \\ &\quad + \int_{T_1}^{USL_1} \int_{T_2}^{USL_2} \int_{T_3}^{USL_3} A_8 L(\mathbf{X}, \mathbf{T}) f(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{LSL_1}^{T_1} \int_{LSL_2}^{T_2} \int_{LSL_3}^{T_3} A_1 L(x_1, x_2, x_2) f(x_1, x_2, x_3) dx_3 dx_2 dx_1 \\
 &+ \int_{LSL_1}^{T_1} \int_{LSL_2}^{T_2} \int_{T_3}^{USL_3} A_2 L(x_1, x_2, x_2) f(x_1, x_2, x_3) dx_3 dx_2 dx_1 \\
 &+ \int_{LSL_1}^{T_1} \int_{T_2}^{USL_2} \int_{LSL_3}^{T_3} A_3 L(x_1, x_2, x_2) f(x_1, x_2, x_3) dx_3 dx_2 dx_1 \\
 &+ \int_{LSL_1}^{T_1} \int_{T_2}^{USL_2} \int_{T_3}^{USL_3} A_4 L(x_1, x_2, x_2) f(x_1, x_2, x_3) dx_3 dx_2 dx_1 \\
 &+ \int_{T_1}^{USL_1} \int_{LSL_2}^{T_2} \int_{LSL_3}^{T_3} A_5 L(x_1, x_2, x_2) f(x_1, x_2, x_3) dx_3 dx_2 dx_1 \\
 &+ \int_{T_1}^{USL_1} \int_{T_2}^{USL_2} \int_{T_3}^{USL_3} A_6 L(x_1, x_2, x_2) f(x_1, x_2, x_3) dx_3 dx_2 dx_1 \\
 &+ \int_{T_1}^{USL_1} \int_{T_2}^{USL_2} \int_{LSL_3}^{T_3} A_7 L(x_1, x_2, x_2) f(x_1, x_2, x_3) dx_3 dx_2 dx_1 \\
 &+ \int_{T_1}^{USL_1} \int_{T_2}^{USL_2} \int_{T_3}^{USL_3} A_8 L(x_1, x_2, x_2) f(x_1, x_2, x_3) dx_3 dx_2 dx_1
 \end{aligned}$$

4. 수치 예

다음의 수치 예는 4가지의 공정조건에 대하여 품질 특성치들 간의 상관계수(correlation coefficient)가 변할 때 단변량과 다변량의 모형을 비교하고자 한다.

4.1 2변량(Bivariate)

4.1.1 대칭일 때

(1) 치우침이 없을 때 ($\mu = \mathbf{T}$)

$T_1 = 5.5, T_2 = 5.5, x_1 \sim N(5.5, 0.8), x_2 \sim N(5.5, 1.0), LSL_1 = 2.5, USL_1 = 8.5, LSL_2 = 2.5, USL_2 = 8.5, \mathbf{A}' = [1, 1, 1, 1], \lambda_1 = 1.398, \lambda_2 = 1.398, \epsilon = 0.65$

<Table 1> Comparison between Univariate and Bivariate Cases in Symmetrical Situation ($\mu = \mathbf{T}$)

No	Correlation	ρ	Univariate		Bivariate	
			C_{pm}^+		MC_{pm}	MC_{pI}
			x_1	x_2	(x_1, x_2)	(x_1, x_2)
1	none	0	3.354	3.000	0.851	1.175
2	weak	0.38	3.354	3.000	0.920	1.250
3	moderate	0.51	3.354	3.000	0.989	1.292
4	high	0.88	3.354	3.000	1.791	1.525
5	very high	0.99	3.354	3.000	6.034	1.680

(2) 치우침이 있을 때 ($\mu \neq \mathbf{T}$)

$T_1 = 5.5, T_2 = 5.5, x_1 \sim N(6.5, 0.8), x_2 \sim N(3.5, 1.0), LSL_1 = 2.5, USL_1 = 8.5, LSL_2 = 2.5, USL_2 = 8.5, \mathbf{A}' = [1, 1, 1, 1], \lambda_1 = 1.398, \lambda_2 = 1.398, \epsilon = 0.65$

<Table 2> Comparison between Univariate and Bivariate Cases in Symmetrical Situation ($\mu \neq \mathbf{T}$)

No	Correlation	ρ	Univariate		Bivariate	
			C_{pm}^+		MC_{pm}	MC_{pI}
			x_1	x_2	(x_1, x_2)	(x_1, x_2)
1	none	0	2.236	1.342	0.340	0.818
2	weak	0.38	2.236	1.342	0.304	0.802
3	moderate	0.51	2.236	1.342	0.296	0.796
4	high	0.88	2.236	1.342	0.277	0.778
5	very high	0.99	2.236	1.342	0.273	0.773

4.1.2 비대칭일 때

(1) 치우침이 없을 때 ($\mu = \mathbf{T}$)

$T_1 = 5.5, T_2 = 5.5, x_1 \sim N(5.5, 0.8), x_2 \sim N(5.5, 1.0), LSL_1 = 2.5, USL_1 = 8.5, LSL_2 = 2.5, USL_2 = 8.5, \mathbf{A}' = [1, 2, 3, 4], \lambda_1 = 1.398, \lambda_2 = 1.398, \epsilon = 0.65$

<Table 3> Comparison between Univariate and Bivariate Cases in Asymmetrical Situation ($\mu = \mathbf{T}$)

No	Correlation	ρ	Univariate		Bivariate	
			C_{pm}^+		MC_{pm}	MC_{pI}
			x_1	x_2	(x_1, x_2)	(x_1, x_2)
1	none	0	1.677	1.500	0.851	0.746
2	weak	0.38	1.677	1.500	0.920	0.794
3	moderate	0.51	1.677	1.500	0.989	0.821
4	high	0.88	1.677	1.500	1.791	0.970
5	very high	0.99	1.677	1.500	6.034	1.069

(2) 치우침이 있을 때 ($\mu \neq \mathbf{T}$)

$T_1 = 5.5, T_2 = 5.5, x_1 \sim N(6.5, 0.8), x_2 \sim N(3.5, 1.0), LSL_1 = 2.5, USL_1 = 8.5, LSL_2 = 2.5, USL_2 = 8.5, \mathbf{A}' = [1, 2, 3, 4], \lambda_1 = 1.398, \lambda_2 = 1.398, \epsilon = 0.65$

<Table 4> Comparison between Univariate and Bivariate Cases in Asymmetrical Situation ($\mu \neq \mathbf{T}$)

No	Correlation	ρ	Univariate		Bivariate	
			C_{pm}^+		MC_{pm}	MC_{pI}
			x_1	x_2	(x_1, x_2)	(x_1, x_2)
1	none	0	1.118	0.671	0.340	0.543
2	weak	0.38	1.118	0.671	0.304	0.528
3	moderate	0.51	1.118	0.671	0.296	0.522
4	high	0.88	1.118	0.671	0.277	0.500
5	very high	0.99	1.118	0.671	0.273	0.491

상기 2변량의 대칭과 비대칭 경우를 비교해 보면, 치우침이 없을 때 MC_{pm} 은 상관계수가 1에 가까워지면 공정능력을 과대평가하고 있는 반면 MC_{pI} 는 과대평가 없이 안정된 공정능력의 평가 결과를 보여주고 있다. 또한 MC_{pm} 은 다양한 손실비용(A)을 반영하지 못하고 대칭일 때나 비대칭일 때 동일한 공정능력 값을 나타내지만 MC_{pI} 는 다양한 손실비용(A)을 공정능력에 반영하고 있음을 확인할 수 있다. 그리고 MC_{pm} 과 MC_{pI} 모두 치우침이 있을 때 보다는 없을 때 더 나은 공정능력 결과값을 보여주고 있다.

4.2 3변량(Three-Variate)

4.2.1 대칭일 때

(1) 치우침이 없을 때($\mu = T$)

$T_1 = 5.5, T_2 = 10.0, T_3 = 7.5, x_1 \sim N(5.5, 0.8), x_2 \sim N(10.0, 1.5), x_3 \sim N(7.5, 1.0), LSL_1 = 2.5, USL_1 = 8.5, LSL_2 = 2.5, USL_2 = 8.5, LSL_3 = 2.5, USL_3 = 8.5, \mathbf{A}' = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], \lambda_1 = 1.398, \lambda_2 = 1.398, \lambda_3 = 1.398, \epsilon = 0.65$

<Table 5> Comparison between Univariate and Three-variate Cases in Symmetrical Situation($\mu = T$)

No	ρ	Univariate			Three-variate	
		C_{pm}^+			MC_{pm}	MC_{pI}
		x_1	x_2	x_3	(x_1, x_2, x_3)	(x_1, x_2, x_3)
1	0	3.354	2.268	3.000	1.735	1.505
2	0.38	3.354	2.268	3.000	2.142	1.603
3	0.51	3.354	2.268	3.000	2.492	1.655
4	0.88	3.354	2.268	3.000	8.704	2.039
5	0.99	3.354	2.268	3.000	100.532	2.389

(2) 치우침이 있을 때($\mu \neq T$)

$T_1 = 5.5, T_2 = 10.0, T_3 = 7.5, x_1 \sim N(4.5, 0.8), x_2 \sim N(8.0, 1.5), x_3 \sim N(9.0, 1.0), LSL_1 = 2.5, USL_1 = 8.5, LSL_2 = 2.5, USL_2 = 8.5, LSL_3 = 2.5, USL_3 = 8.5, \mathbf{A}' = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], \lambda_1 = 1.398, \lambda_2 = 1.398, \lambda_3 = 1.398, \epsilon = 0.65$

<Table 6> Comparison between Univariate and Three-variate Cases in Symmetrical Situation($\mu \neq T$)

No	ρ	Univariate			Three-variate	
		C_{pm}^+			MC_{pm}	MC_{pI}
		x_1	x_2	x_3	(x_1, x_2, x_3)	(x_1, x_2, x_3)
1	0	2.236	1.279	1.664	0.648	1.462
2	0.38	2.236	1.279	1.664	0.653	1.450
3	0.51	2.236	1.279	1.664	0.697	1.444
4	0.88	2.236	1.279	1.664	1.253	1.421
5	0.99	2.236	1.279	1.664	4.227	1.415

4.2.2 비대칭일 때

(1) 치우침이 없을 때($\mu = T$)

$T_1 = 5.5, T_2 = 10.0, T_3 = 7.5, x_1 \sim N(5.5, 0.8), x_2 \sim N(10.0, 1.5), x_3 \sim N(7.5, 1.0), LSL_1 = 2.5, USL_1 = 8.5, LSL_2 = 2.5, USL_2 = 8.5, LSL_3 = 2.5, USL_3 = 8.5, \mathbf{A}' = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8], \lambda_1 = 1.398, \lambda_2 = 1.398, \lambda_3 = 1.398, \epsilon = 0.65$

<Table 7> Comparison between Univariate and Three-variate Cases in Asymmetrical Situation($\mu = T$)

No	ρ	Univariate			Three-variate	
		C_{pm}^+			MC_{pm}	MC_{pI}
		x_1	x_2	x_3	(x_1, x_2, x_3)	(x_1, x_2, x_3)
1	0	1.186	0.802	1.061	1.735	0.710
2	0.38	1.186	0.802	1.061	2.142	0.756
3	0.51	1.186	0.802	1.061	2.492	0.780
4	0.88	1.186	0.802	1.061	8.704	0.961
5	0.99	1.186	0.802	1.061	100.532	1.126

(2) 치우침이 있을 때($\mu \neq T$)

$T_1 = 5.5, T_2 = 10.0, T_3 = 7.5, x_1 \sim N(4.5, 0.8), x_2 \sim N(8.0, 1.5), x_3 \sim N(9.0, 1.0), LSL_1 = 2.5, USL_1 = 8.5, LSL_2 = 2.5, USL_2 = 8.5, LSL_3 = 2.5, USL_3 = 8.5, \mathbf{A}' = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8], \lambda_1 = 1.398, \lambda_2 = 1.398, \lambda_3 = 1.398, \epsilon = 0.65$

<Table 8> Comparison between Univariate and Three-variate Cases in Asymmetrical Situation($\mu \neq T$)

No	ρ	Univariate			Three-variate	
		C_{pm}^+			MC_{pm}	MC_{pI}
		x_1	x_2	x_3	(x_1, x_2, x_3)	(x_1, x_2, x_3)
1	0	0.791	0.452	0.588	0.648	0.911
2	0.38	0.791	0.452	0.588	0.653	0.900
3	0.51	0.791	0.452	0.588	0.697	0.898
4	0.88	0.791	0.452	0.588	1.253	0.908
5	0.99	0.791	0.452	0.588	4.227	0.921

3변량의 시뮬레이션 결과 역시 2변량일 때와 동일한 특징들을 나타내고 있다. 특히 변수가 증가한 3변량 분석에서 MC_{pm} 은 대칭과 비대칭의 치우침이 없을 때 상관계수가 1에 가까워지면 급격하게 과대평가하고 있으나 MC_{pI} 는 안정된 평가결과값을 보여주고 있다.

5. 결론

본 연구에서 제시하는 역정규 손실함수를 이용한 다변량 공정능력지수 MC_{pI} 를 기존의 단변량 및 다변량 공정능력지수와 비교한 결과 다음과 같다.

2변량 및 3변량 모두 MC_{pm} 은 상관계수가 1에 가까워지면 과대평가되는 반면 MC_{pl} 은 상관계수의 변화에 따른 결과값들이 크게 과대평가되지 않고 있다. 그리고 각각의 단변량 C_{pm}^+ 와 다수의 특성들을 동시에 분석한 다변량 MC_{pl} 를 비교해 보아도 상관관계에 대하여 로버스트한 결과들을 보여주고 있다. 또한 현실적으로 품질 특성치마다 발생하는 손실이 일률적이지 않기 때문에 서로 다른 손실비용을 적용할 필요가 있다. 이러한 측면에서 MC_{pm} 은 경제적 손실 정도를 반영하지 못하는 반면 MC_{pl} 은 다변량간에 발생하는 다양한 손실비용을 반영하여 공정능력을 평가하고 있다. 그리고 손실비용의 증감에 따른 민감성도 가지고 있다.

MC_{pl} 은 공정의 관리상태나 공정의 조건변화에 따라 민감한 공정능력 평가결과를 보여주고 있다. 상기 시뮬레이션에서 4가지 경우의 공정조건들을 비교해 보면, 치우침 있을 때보다는 치우침이 없을 때가 더 좋은 성향을 나타내고, 비대칭의 손실비용이 클 때 보다는 대칭의 손실비용이 작을수록 더 좋은 결과값을 나타내 주고 있다. 또한 본 연구에서 제시한 방법론에 따라 역정규분포의 손실함수와 기대손실을 적용하게 되면 대칭일 때나 비대칭일 때 모두 유연성 있게 사용할 수 있다는 것과 다변량으로의 확장성이 용이하다는 장점을 가지고 있다.

References

- [1] Boyles, R.A., The Taguchi Capability index, *Journal of Quality Technology*, 1991, Vol. 23, No. 1, pp. 17-26.
- [2] Chan, L.K., Chung, S.W., and Spiring, F.A., A New Measure of Process Capability : Cpm, *Journal of Quality Technology*, 1988, Vol. 20, No. 3, pp. 162-175.
- [3] Chung, Y.B. and Kim, Y.S., Comparison and Application of Process Capability indices, *Journal of Society of Korea Industrial and Systems Engineering*, 2007, Vol. 30, No. 4, pp. 182-189.
- [4] Chung, Y.B. and Mun, H.J., A Study on Process Capability Index using Reflected Normal Loss Function, *Journal of The Korean Society for Quality Management*, 2002, Vol. 30, No. 3, pp. 66-78.
- [5] Chung, Y.B., A Multivariate Process Capability Index using Expected Loss, *Journal of Society of Korea Industrial and Systems Engineering*, 2005, Vol. 28, No. 4, pp. 116-123.
- [6] Drain, D. and Gough, A.M., Applications of the Upside-Down Normal Loss, *IEEE Transactions on Semiconductor Manufacturing*, 1996, Vol. 9, No. 1, pp. 143-145.
- [7] Hashemi, S.J., Ahmed, S., and Khan, F., Operational loss modeling for process facilities using multivariate loss functions, *Chemical Engineering Research and Design*, 2015, Vol. 104, pp. 333-345.
- [8] Khan, F., Wang, H., and Yang, M., Application of loss functions in process economic risk assessment, *Chemical Engineering Research and Design*, 2016, Vol. 111, pp. 371-386.
- [9] Leung, B.P.K. and Spiring, F.A., Some Properties of the Family of Inverted Probability Loss Functions, *Quality Technology & Quantitative Management*, 2004, Vol. 1, No. 1, pp. 125-147.
- [10] Mun, H.J. and Chung, Y.B., A Study on Multivariate Process Capability Index using Quality Loss Function, *Journal of Society of Korea Industrial and Systems Engineering*, 2002, Vol. 25, No. 2, pp. 1-10.
- [11] Shahriari, H., Hubele, N.F., and Lawrence, F.P., A multivariate process capability vector, *Proceeding of the 4th Industrial Engineering Research Conference*, Institute of Industrial Engineers, 1995, pp. 304-309
- [12] Spiring, F.A. and Yeung, A.S., A General Class of Loss Functions with Industrial Applications, *Journal of Quality Technology*, 1998, Vol. 30, No. 2, pp. 152-162.
- [13] Spiring, F.A., The Reflected Normal Loss Function, *Canadian Journal of Statistics*, 1993, Vol. 21, pp. 321-330.
- [14] Taam, W., Subbaiah, P., and Liddy, J.W., A Note on Multivariate Capability Indices, *Journal of Applied Statistics*, 1993, Vol. 20, pp. 339-351.

ORCID

Hye-Jin Moon | <http://orcid.org/0000-0002-2477-6669>

Young-Bae Chung | <http://orcid.org/0000-0003-4259-6677>