East Asian Math. J.
Vol. 34 (2018), No. 4, pp. 359-369
http://dx.doi.org/10.7858/eamj.2018.026

칼레만 부등식의 개선 결과들과 폴야-놉 부등식의 개선

Improved Carleman's Inequality and Improvement of Polya-Knopp's Inequality

권 언 근[1) · 이 진 기[2)]

ABSTRACT. This note, we first show that the famous Carleman's inequality can be improved if we find a positive sequence $\{c_n\}$ such that $c_n \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j\left(\prod_{k=1}^{j} c_k\right)^{\frac{1}{j}}} < e$. Then we list a lot of known results in the literature improving Carleman's inequality by this method. These results can be a good source to a further research for interested students. We next consider about similar improvement of Polya-Knopp's inequality, which is a continuous version of Carleman's inequality. We show by a manner parallel to the case of Carleman's inequality that Polya-Knopp's inequality can be improved if we find a positive function $c(x)$ such that $c(x)\int_x^{\infty} \frac{1}{t\exp\left(\frac{1}{t}\int_0^t \ln c(s)\,ds\right)}dt < e$.
But there are no known results improving Polya-Knopp's inequality by this method. Suggesting to find a new method, we lastly show that there is no nice continuous function $c(x)$ that satisfies the inequality.

Received July 22, 2018; Revised August 13, 2018; Accepted August 27, 2018.
1) 본 논문은 2017학년도 안동대학교 학술연구조성비에 의해 작성됨.
2) 본 논문은 2017년도 정부(미래창조과학부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(2017R1E1A1A03070738).
2) Corresponding author.
2010 Mathematics Subject Classification: 26D15
Key words: Carleman's Inequality, Polya-Knopp's Inequality, Hardy's Inequality

(pISSN 1226-6973, eISSN 2287-2833)

I. 연구의 목적

지금까지도 여러 논문의 연구 주제가 되고 있는 칼레만(Carleman) 부등식은 기하평균의 합과 산술평균과의 관계를 나타내는 부등식으로

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \le e \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n \ge 0)$$

과 같이 표시된다. 이 부등식은 수학뿐만 아니라 다른 학문 분야에서도 폭넓게 활용되고 있는데, 예로써 물리학의 파동방정식 등이다. 칼레만 부등식의 연속형인 폴야-놉(Pólya-Knopp) 부등식은

$$\int_0^{\infty} \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln f(t)\,dt\right) dx \le e\int_0^{\infty} f(t)\,dt \quad (f(x) \ge 0)$$

으로 표시되며, 형태가 유사한 이 두 부등식은 공통적으로 유용성과 확장성 뿐 아니라 쉽게 접근할 수 있다는 단순성을 가지고 있다.

본 연구의 시작은 칼레만 부등식을 개선한(refine) 다수의 결과들이 있는데 반하여, 연속 형인 폴야-높의 부등식을 유사한 형태로 개선한 결과는 문헌상에 발견되지 않음에 주목하면서 부터이다.

이 논문에서는 칼레만 부등식과 폴야-놉 부등식의 이론적 배경을 간략히 소개한 다음, 이들 두 부등식을 개선할 수 있는 일반화한 정리를 소개한다. 먼저 부등식

$$c_n \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j\left(\prod_{k=1}^{j} c_k\right)^{\frac{1}{j}}} < e$$

를 만족하는 양의 수열 $\{c_n\}$이 칼레만 부등식을 개선할 수 있음을 보이고, 이러한 수열 $\{c_n\}$를 찾아서 칼레만 부등식을 개선한 문헌상의 중요 결과들을 살펴본다.

유사한 방법을 적용하여

$$c(x)\int_x^{\infty} \frac{1}{t\exp\left(\frac{1}{t}\int_0^t \ln c(s)\,ds\right)}\,dt < e$$

를 만족하는 양의 함수 $c(x)$를 찾음으로써 폴야-높의 부등식을 개선할 수 있음을 보인다. 칼레만 부등식의 경우와는 반대로 다수의 연속함수가 위 조건을 만족하지 않음을 예를 들어 보인다. 결국 위 조건을 만족하는 일반적 연속함수가 없다는 것을 정리 3.3을 통하여 주장한다. 칼레만 부등식을 확장하는데 사용되어온 기존의 방법을 모사하여 폴야-높 부등식을 더 이상 개선할 수는 없다는 사실로 부터, 이 부등식을 개선할 수 있는 새로운 방법을 열린 문제로 제시한다.

이 논문에서 우리가 다루는 함수란 모두 측도가능한(measurable) 함수를 의미한다.

본 논문은 2장에서 칼레만 부등식과 폴야-놉 부등식의 이론적 배경을 간략히 소개하고 3장에서 두 부등식의 개선 방법과 개선의 실제 및 차이점을 중심으로 한 연구 결과들을 보인 후 4장에서 결론 및 제언으로 맺는다.

II. 이론적 배경

칼레만(1892.7.8~1949.1.11)은 남부 스웨덴 출신의 수학자이다. 그는 1912년 웁살라 대학에서 이학석사 학위를 받았고, 1915년에는 상급석사, 1917년 5월 31일에는 박사학위를 받았다. 1917년 2월 8일 웁살라대학 수학과 강사가 되었고, 1923년 룬드대학, 1924년에는 스톡홀름대학의 교수로 임명되었다. 1927년 미탁-레플러(Mittag-Leffler)의 사망이후, 칼레만은 미탁-레플러 연구소의 첫 소장으로 임명되었다.

1920년대 칼레만은 준해석함수(quasi-analytic function)에 관한 이론을 발전시켰다. Denjoy-Carleman 정리에 대한 증명과정 중 한 단계에서 음이 아닌 실수 a_k 의 수열에 대하여 성립하는 칼레만 부등식

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \le e\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

을 사용하였다(참고문헌 1, 2018, 참조).

칼레만 부등식의 배경은 하디 부등식까지 거슬러 올라간다. 아래 정리 2.1은 하디 부등식의 이산적 형태이다.

정리 2.1 (Hardy, Littlewood & Pólya, 1952, Theorem 326). $p>1$, $a_n>0$, $0<\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p<\infty$ 이면

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^p < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p .$$

정리 2.1에서 a_n^p 을 a_n 으로 치환하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_1^{\frac{1}{p}}+a_2^{\frac{1}{p}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{p}}}{n}\right)^p < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

여기에서 $\lim_{r\to 0}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^r\right)^{\frac{1}{r}} = (\prod_{i=1}^{n} a_i)^{\frac{1}{n}}$ (Hardy, Littlewood & Pólya, 1952, Theorem 3)을 사용하면 $p\to\infty$ 일 때, 아래 칼레만 부등식을 얻을 수 있다. 따라서 칼레만 부등식은 하디부등식의 극한형태이다.

정리 2.2 (Hardy, Littlewood & Pólya, 1952, Theorem 334). $a_n>0$, $0<\sum_{n=1}^{\infty} a_n<\infty$ 이면

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} < e\sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

정리 2.3은 폴야-놉 부등식으로, 칼레만 부등식의 연속형 형태이다. 칼레만 부등식이 하디 부등식의 극한형태임을 하디에게 언급했던 사람이 폴야(Pólya)였고 또한, 정리 2.3의 증명이 놉(Knopp)의 아이디어와 관련이 있어서 칼레만 부등식의 연속형 형태를 폴야-놉 부등식이라고 부르게 되었다(Johansson, Persson & Wedestig, 2003, 참고).

정리 2.3 (Hardy, Littlewood & Pólya, 1952, Theorem 335). f 가 양의 함수이면

$$\int_0^{\infty}\exp\left\{\frac{1}{x}\int_0^{x}\log f(t)\,dt\right\}dx < e\int_0^{\infty} f(x)\,dx .$$

칼레만 부등식은 여러 수학자들에 의해 매우 다양한 방법으로 증명되어 왔다. 칼레만 부등식에 관한 여러 증명 가운데 폴야의 증명을 살펴보자. 이 증명은 산술기하평균 부등식을 이용한 것으로 간단명료하여 칼레만 부등식의 증명 가운데 가장 많이 사용되고 있는 증명 방법이다(Hardy, Littlewood & Pólya, 1952, p249~250 참고).

$a_i > 0,\quad c_i > 0\ (i = 1, 2, \cdots)$이고 $\sum_{m=1}^{\infty} a_m < \infty$라 하면

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}(a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{c_1 a_1 c_2 a_2 \cdots c_n a_n}{c_1 c_2 \cdots c_n}\right)^{\frac{1}{n}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(c_1 c_2 \cdots c_n)^{-\frac{1}{n}}(c_1 a_1 \cdots c_n a_n)^{\frac{1}{n}} \\
&\le \sum_{n=1}^{\infty}(c_1 c_2 \cdots c_n)^{-\frac{1}{n}}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} c_m a_m \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} c_m a_m \sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{n}(c_1 c_2 \cdots c_n)^{-\frac{1}{n}} .
\end{aligned}$$

여기서 $c_m = \dfrac{(m+1)^m}{m^{m-1}},\ m = 1, 2, \ldots$ 라 두면,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}(a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} &\le \sum_{m=1}^{\infty} c_m a_m \sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{n}(c_1 c_2 \cdots c_n)^{-\frac{1}{n}} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} c_m a_m \sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m} c_m a_m \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m a_m < e\sum_{m=1}^{\infty} a_m .
\end{aligned}$$

이제, 칼레만 부등식의 연속형 형태인 폴야-놉 부등식의 증명(Johansson, Persson &

Wedestig, 2003, 참고)을 살펴보자. 젠센(Jensen) 부등식(또는 연속형 산술기하평균 부등식)을 이용하여 증명하였다. $f(t) \geq 0$이고 $\int_0^\infty f(t)\,dt < \infty$라 하자.

$-\frac{1}{x}\int_0^x \ln t\,dt = -\frac{1}{x}\left[t\ln t - t\right]_0^x = -\ln x + 1$ 이므로

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln f(t)\,dt\right)dx &= \int_0^\infty \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln\frac{tf(t)}{t}\,dt\right)dx \\
&= \int_0^\infty \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln tf(t)\,dt\right)e^{-\frac{1}{x}\int_0^x \ln t\,dt}\,dx \\
&= \int_0^\infty \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln tf(t)\,dt\right)e^{-\ln x+1}\,dx \\
&\leq \int_0^\infty e^{-\ln x+1}\frac{1}{x}\left(\int_0^x tf(t)\,dt\right)dx \qquad (2.1) \\
&= e\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\left(\int_0^x tf(t)\,dt\right)dx \\
&= e\int_0^\infty tf(t)\int_t^\infty \frac{1}{x^2}\,dx\,dt \\
&= e\int_0^\infty f(t)\,dt\,.
\end{aligned}$$

(2.1)에서 젠센 부등식이 사용되었으며, 젠센 부등식에서는 $tf(t)$가 상수일 때 등호가 성립하므로

$$\int_0^\infty \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln f(t)\,dt\right)dx < e\int_0^\infty f(t)\,dt$$

이다.

III. 연구결과

칼레만 부등식과 폴야-놉 부등식은 각각 다음과 같은 방법으로 개선될 수 있다.

정리 3.1. $c = \{c_j\}_{j=1}^\infty$를 모든 j에 대하여

$$d_n(c) = c_n\sum_{j=n}^\infty \frac{1}{j\,G_j(c)} \leq e$$

을 만족하는 양의 수열이라 하자. 여기서 $G_j(c)$는 c의 기하평균, 즉,

$G_j(c) = \left(\prod_{k=1}^j c_k\right)^{\frac{1}{j}}$ 이다. 그러면 모든 양의 수열 $a = \{a_j\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{j=1}^{n} a_j\right)^{\frac{1}{n}} \le \sum_{n=1}^{\infty} d_n(c)\, a_n \le e \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

이다.

정리 3.1의 증명. 산술기하평균 부등식과 합의 순서를 바꾸는 푸비니(Fubini)의 정리를 사용하면

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{j=1}^{n} a_j\right)^{\frac{1}{n}} &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\prod_{j=1}^{n} c_j a_j}{\prod_{j=1}^{n} c_j}\right)^{\frac{1}{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{G_n(ca)}{G_n(c)} \\ &\le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,G_n(c)}\sum_{j=1}^{n} c_j\, a_j = \sum_{j=1}^{\infty} c_j\, a_j \left[\sum_{n=j}^{\infty}\frac{1}{n\,G_n(c)}\right] \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} d_j(c)\, a_j \le e \sum_{j=1}^{\infty} a_j\end{aligned}$$

이 성립한다.

정리 3.2. $c:(0,\infty)\to R$ 을 모든 x 에 대하여

$$d_c(x) := c(x)\int_x^{\infty}\frac{1}{t\,G_c(t)}\,dt \le e \tag{3.1}$$

을 만족하는 양의 함수라 하자. 여기서 $G_c(t)$ 는 c 의 기하평균, 즉, $G_c(t) = \exp\left(\frac{1}{t}\int_0^t \ln c(s)\,ds\right)$ 이다. 그러면 모든 양의 함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\int_0^{\infty}\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln f(t)\,dt\right)dx \le \int_0^{\infty} d_c(x) f(x)\,dx \le e\int_0^{\infty} f(x)\,dx$$

이다.

정리 3.2의 증명.

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln f(t)\,dt\right)dx &= \int_0^{\infty}\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln\frac{c(t)f(t)}{c(t)}\,dt\right)dx \\ &= \int_0^{\infty}\frac{G_{cf}(x)}{G_c(x)}\,dx \\ &\le \int_0^{\infty}\frac{1}{x\,G_c(x)}\int_0^x c(t)f(t)\,dt\,dx \\ &= \int_0^{\infty} c(t)f(t)\int_t^{\infty}\frac{1}{x\,G_c(x)}\,dx\,dt \\ &= \int_0^{\infty} d_c(t)f(t)\,dt \le e\int_0^{\infty} f(t)\,dt\end{aligned}$$

이다. 이제, 두 부등식의 개선 결과를 구체적으로 살펴보자. 칼레만 부등식의 증명에서

살펴본 것처럼 폴야는 c_j 를 $c_j = j\left(1+\frac{1}{j}\right)^j = \frac{(j+1)^j}{j^{j-1}}$ 로 정해서, $G_j(c) = j+1$, $d_n(c) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$ 를 얻었으며, 지금까지 알려진 대부분의 칼레만 부등식의 개선은 폴야의 증명 방법을 이용하여 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \le g(x) < e$ 를 만족하는 $g(x)$ 를 찾음으로써 이루어졌다. 다수의 학자들이 이러한 방법을 통하여 칼레만 부등식을 개선하였다. 지금까지 연구되어 온 내용은 [표 1]을 통해 살펴볼 수 있다.

연도	수학자	칼레만 부등식의 개선	관련 논문
1998	Y. Bicheng L. Debnath	$\sum_{k=1}^{\infty}(a_1a_2\cdots a_k)^{\frac{1}{k}} < e\sum_{k=1}^{\infty}\left[1-\frac{1}{2(k+1)}\right]a_k$	[4]
1999	Y. Ping S. Guozheng	$\sum_{k=1}^{\infty}(a_1a_2\cdots a_k)^{\frac{1}{k}} < e\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k+\frac{1}{5}}\right)^{-\frac{1}{2}}a_k$	[5]
2001	Kim	$\sum_{k=1}^{\infty}(a_1a_2\cdots a_k)^{\frac{1}{k}} < e\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k+\frac{8}{41}}\right)^{-\frac{1}{2}}a_k$	[6]
2001	Yang	$\sum_{k=1}^{\infty}(a_1a_2\cdots a_k)^{\frac{1}{k}}$ $< e\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2(k+1)}-\frac{1}{24(k+1)^2}-\frac{1}{48(k+1)^3}\right)a_k$	[7]
2001	Yuan	$\sum_{k=1}^{\infty}(a_1a_2\cdots a_k)^{\frac{1}{k}} \le e\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{\beta}{k}\right)}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\alpha}}a_k$ 단, $0 \le \alpha \le \frac{1}{\ln 2}-1$, $0 \le \beta \le 1-\frac{2}{e}$, $e\beta + 2^{1+\alpha} = e$	[8]
2007	Liu Zhu	$\sum_{k=1}^{\infty}(a_1a_2\cdots a_k)^{\frac{1}{k}} < e\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2ck+\frac{4c}{3}+\frac{1}{2}}\right)^{c}a_k$ 단, $c \ge \frac{\sqrt{6}}{4}$	[9]

[표 1] $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 의 값을 이용한 칼레만 부등식의 개선

이제, 유사한 방법으로 칼레만 부등식의 연속형인 폴야-놉 부등식이 개선될 수 있는지에 대하여 살펴보자. 폴야-놉 부등식을 개선시킬 수 있는 방법 중 우리의 방법은 식

(3.1)에서 등호가 아닌 부등식, 즉 $d_c(x) := c(x)\int_x^\infty \frac{1}{t\,G_c(t)}\,dt < e$ 를 만족하는 $c(x)$를 찾는 것이다. $d_c(x) < e$ 인 $c(x)$를 얻을 수 있는지 몇 가지 시도를 해보자.

먼저, 폴야-놉 부등식의 증명에서 살펴보면 $c(t)$를 $c(t) = t$ 로 정해서 $G_c(t) = \frac{t}{e}$, $d_c(x) = e$ 가 얻어짐을 알 수 있다. 잘 알려진 연속함수들, 예를 들어 t^n을 $c(t)$로 사용해 보아도 폴야-놉 부등식은 개선되지 않음을 다음과 같이 알 수 있다: $c(t) = t^a$, $a > 0$, 일 경우,

$$G_c(t) = \exp\left(\frac{1}{t}\int_0^t \ln c(s)\ ds\right) = \exp\left(\frac{1}{t}\int_0^t a\ln s\ \ ds\right) = e^{a\ln t - a} = \left(\frac{t}{e}\right)^a = e^{-a}c(t)$$

가 되어

$$d_c(x) = c(x)\int_x^\infty \frac{1}{t\,G_c(t)}\,dt = x^a\int_x^\infty \frac{1}{t}\frac{e^a}{t^a}\,dt = e^a x^a\left[-\frac{1}{at^a}\right]_x^\infty = \frac{e^a}{a}$$

이며, 일반적으로 $e^x \geq x+1$ 이므로 $\frac{e^a}{a} \geq e$ 되어 폴야-놉 부등식은 개선되지 않음을 알 수 있다.

이제 한 걸음 더 나아가 보자. 아래의 [표 2]에서 알 수 있듯이 $d_c(x) < e$ 의 조건을 만족하는 함수는 쉽게 발견되지 않는다.

$c(x)$	$G_c(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln c(s)\,ds\right)$	$d_c(x) = c(x)\int_x^\infty \frac{1}{t\,G_c(t)}\,dt$	$d_c(x) < e?$
$x^a,\quad a>0$	$\left(\frac{x}{e}\right)^a$	$\frac{e^a}{a}$	No
$1+x$	$\frac{1}{e}(1+x)^{\frac{1+x}{x}}$	$e(1+x)\int_x^\infty \frac{1}{t}(1+t)^{-\frac{1+t}{t}}\,dt$	No
$\frac{1+x}{x}$	$\frac{1}{x}(1+x)^{\frac{1+x}{x}}$	$\frac{1+x}{x}\int_x^\infty (1+t)^{-\frac{1+t}{t}}\,dt$	No
$(1+x)\exp\left(\frac{x}{x+1}\right)$	$1+x$	$(1+x)\left(\ln\frac{1+x}{x}\right)\exp\left(\frac{x}{x+1}\right)$	No
x^x	$x^{\frac{x}{2}}e^{-\frac{x}{4}}$	$x^x\int_x^\infty \frac{1}{t}t^{-\frac{t}{2}}e^{\frac{t}{4}}\,dt$	No
$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	...	...	No

[표 2] $d_c(x) < e$를 이용한 폴야-놉 부등식의 개선 여부

한편, 논리적 방법을 이용하여 $c(x)$가 일반적 함수가 아님을 다음과 같이 알 수 있다.

정리 3.3. $c(x)$는 $c:[0,\infty)\to[0,\infty)$인 연속함수이고 $q(x):=\dfrac{x}{c(x)}$도 $[0,\infty)$에서 연속이라 하자. 만약 모든 x에 대하여

$$d_c(x):=c(x)\int_x^\infty \frac{1}{t\,G_c(t)}\,dt < e \tag{3.2}$$

이면 $q(x)$는 $[0,\infty)$에서 최솟값을 가질 수 없다. 여기서

$$G_c(t)=\exp\left(\frac{1}{t}\int_0^t \ln c(s)\,ds\right)$$

이다.

정리 3.3의 증명. $c'(s)=\dfrac{c(s)}{s}$ 라 두면

$$\begin{aligned} G_c(t) &= \exp\left(\frac{1}{t}\int_0^t \ln c(s)\,ds\right) = \exp\left(\frac{1}{t}\int_0^t \ln sc'(s)\,ds\right) \\ &= \frac{t}{e}\exp\left(\frac{1}{\mathrm{t}}\int_0^{\mathrm{t}} \ln c'(s)\,ds\right) = \frac{t}{e}\exp\left(-\frac{1}{\mathrm{t}}\int_0^{\mathrm{t}} \ln \frac{1}{c'(s)}\,ds\right) \\ &= \frac{t}{e}G_{\frac{1}{c'}}(t)^{-1} \end{aligned}$$

이고, $q=\dfrac{1}{c'}$ 라 두면

$$\begin{aligned} d_c(x) &= c(x)\int_x^\infty \frac{1}{t\,G_c(t)}\,dt = e\,c'(x)x\int_x^\infty \frac{1}{t^2}G_{\frac{1}{c'}}(t)\,dt \\ &= e\,\frac{1}{q(x)}\cdot x\int_x^\infty \frac{1}{t^2}G_q(t)\,dt = e\,\frac{1}{q(x)}\cdot x\int_x^\infty \frac{1}{t^2}G_q(t)\,dt \end{aligned}$$

이 되어 $d_c(x)<e$는 아래와 동치이다.

$$x\int_x^\infty \frac{1}{t^2}G_q(t)\,dt < q(x). \tag{3.3}$$

여기서, $x\displaystyle\int_x^\infty \frac{1}{t^2}\,dt=1$이므로 위 식의 왼쪽은 G_q의 (x,∞) 위의 한 산술평균이다. 만약, $q(x)$의 최솟값이 $[0,\infty)$에서 존재한다고 가정하면 $q(x_0)=\min_{x\in[0,\infty)}q(x)$되는 $x_0\in[0,\infty)$가 존재한다. 이 경우, 모든 t에 대하여

$$G_q(t)=\exp\left(\frac{1}{t}\int_0^t \ln q(s)\,ds\right) \ge \exp\left(\frac{1}{t}\int_0^t \ln q(x_0)\,ds\right)=q(x_0)$$

이므로

$$q(x_0)=x_0\int_{x_0}^\infty \frac{1}{t^2}q(x_0)\,dt \le x_0\int_{x_0}^\infty \frac{1}{t^2}G_q(t)\,dt$$

이고 이는 (3.3)에 의하여 $q(x_0) < q(x_0)$라는 모순을 낳는다. 따라서, 모든 x에 대하여 (3.3)를 만족하면서 $(0,\infty)$에서 최솟값을 가지는 연속함수 $q(x)$는 존재하지 않는다.

IV. 결론 및 제언

식 (3.3)으로부터 $q(x)$는
"모든 x에 대하여 연속함수 $q(x)$의 각 기하평균의 (또 다른 한) 산술평균이
$q(x)$보다 작은 함수"
이다. 그러한 일반적인 연속함수는 쉽게 존재하지 않음을 짐작할 수 있다.

이로부터, 잘 알려진 정리 3.1에서의 칼레만 부등식의 확장방법이 폴야-놉 부등식에는 쉽게 적용되지 않음을 알 수 있다. 한편, (Kwon, 2018)와 (Carleson, 1954)에서 이용된 Carleson의 부등식은 폴야-놉 부등식과 칼레만 부등식을 동시에 확장한 형태로 볼 수 있다. 폴야-놉 부등식을 개선할 수 있는 새로운 방법에 대한 탐색도 흥미로운 연구 주제로 보인다.

일반적 함수의 경우 복잡한 계산과정에 따르는 시간과 노력을 절약하는 방법으로는 문제의 본질을 논리적으로 접근하는 방법 외에 컴퓨터의 힘을 빌려 가능성을 예상하고 접근하는 방법 외에 생각해 볼 수 있다. 그래픽 소프트웨어(예를 들어 Desoms 등)를 사용하여 개형을 그려 보는 것도 쉽지는 않지만 그러한 함수를 발견하는 기초 자료로 활용할 수 있다.

참고문헌

[1] Retrieved March 4, 2018 from ⟨http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Carleman.html⟩.

[2] G. H. Hardy, J. E. Littlewood & G. Pólya, Inequalities. *Cambridge University Press,* London15(239)(1952).

[3] Maria Johansson, Lars-Erik Persson & Anna Wedestig, Carleman's inequality - history, proofs and some new generalizations. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 4(3)(2003), Article 53, 1-19.

[4] Yang Bicheng & Lokenath Debnath, Some inequalities involving the constant e, and an application to Carleman's inequality. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 223(1998), 347-353.

[5] Yan Ping & Sun Guozheng, A strengthened Carleman's inequality. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 240(1999), 290-293.

[6] Young-Ho Kim, On Carleman's inequality and its improvement. *The Korean Journal of Computational & Applied Mathematics*, 8(3)(2001), 1021-1026.

[7] Xiaojing Yang, On Carleman's inequality. *Journal of Mathematical Analysis and*

Applications 253(2001), 691-694.
[8] Bao-Quan Yuan, Refinements of Carleman's inequality. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 2(2)(2001), Article 21.
[9] Haiping Liu & Ling Zhu, New strengthened Carleman's inequality and Hardy's inequality. *Journal of Inequalities and Applications*, 2007, Article ID 84104.
[10] E. G. Kwon, Extension of Hölder's inequality (Ⅰ). *Bull. Austral. Math. Soc*, 51(1995), 369-375.
[11] E. G. Kwon, On Carlesons inequality, *Journal of Inequalities and Applications* 2018:91, https://doi.org/10.1186/s13660-018-1682-2.
[12] Carleson, A proof of an inequality of Carleman, *Proc. Amer. Math. Soc*. 5(1954), 932-933.

Kwon Ern Gun
Department of Mathematics Education, Andong National University,
Andong 760-749, Korea
E-mail : egkwon@anu.ac.kr

Lee Jinkee
Department of Mathematics, Pusan National University,
Busan 609-735, Korea
E-mail : jklee235@pusan.ac.kr