Journal for History of Mathematics
Vol. 31 No. 4 (Aug. 2018), 183–196
http://dx.doi.org/10.14477/jhm.2018.31.4.183

An approximate method to make Jisuguimundo

지수귀문도를 만드는 근사적 방법

PARK Kyo Sik 박교식

In this study, we propose an approximate method to make Jisuguimundo with magic number 93 to 109. In this method, for two numbers p, q with a relationship of $M = 2p+q$, we use eight pairs of two numbers with sum p and five pairs of two numbers with sum q. Such numbers must be between 1 and 30. Instead of determining all positions of thirty numbers, this method shows that Jisuguimundo with magic number 93 to 109 can be made by determining positions of thirteen numbers $a_i(i = 1, 2, \cdots, 8)$, b_5, $c_i(i = 1, 2, 3, 4)$. Method 1 is used to make Jisuguimundo with magic number 93 to 108, and method 2 is used to make Jisuguimundo with magic number 109.

Keywords: Jisuguimundo; 지수귀문도

MSC: 01A07, 01A25

1 서론

최석정(崔錫鼎, 1646–1715)은 ≪구수략(九數略)≫에서 마법수가 93인 지수귀문도(地數龜文圖) 단 하나(Fig. 1)를 제시하였다 [1]. 그러나 최석정은 그것을 어떻게 만들었는지는 설명하지 않았다. 최석정의 지수귀문도에 대한 논의는 [6]에서 볼 수 있다. 1989년에 마법수가 77∼108인 지수귀문도가 제시되기 전까지는 [2], 새로운 지수귀문도를 만들어 보려는 시도는 거의 없었다. 비교적 최근에 마법수가 77∼109인 지수귀문도가 있다는 것이 알려졌고, 동시에 최대 마법수는 109라는 것도 알려졌다 [3, 4]. 또한, M이 마법수이면 $186-M$도 마법수라는 것이 알려졌다 [4, 6]. 이것은 마법수가 77∼109인 지수귀문도를 만드는 대신 마법수가 77∼93인 지수귀문도 또는 마법수가 93∼109인 지수귀문도를 만드는 것으로 충분하다는 것을 말해준다.

선행 연구에서 이미 77∼109인 지수귀문도가 제시되고 있지만, 그것을 만드는 방법이 제시된 것은 아니다 [4]. 적절한 알고리즘을 이용하여 컴퓨터로 마법수가 77∼108인 지

PARK Kyo Sik: Dept. of Math. Edu., Gyeongin National Univ. of Edu. E-mail: pkspark@gin.ac.kr
Received on Feb. 24, 2018, revised on Aug. 10, 2018, accepted on Aug. 24, 2018.

수귀문도를 만든 것도 있다 [2]. 마법수가 87~99인 경우에 교호법을 이용해서 지수귀문도를 만들 수 있다는 것을 보인 것도 있지만 [5, 7], 이 방법은 마법수가 100~109 (또는 77~86)인 경우에는 적용하기 어렵다. 또, 마법수가 77~109인 지수귀문도를 만드는 근사적 방법이 인터넷에 제시된 바 있고, 더 나아가 그것을 알고리즘으로 하여 컴퓨터로 지수귀문도를 찾을 수 있게 하고 있다 [3]. [2]와 [3]에서 사용한 방법은 기본적으로 지수귀문도를 찾을 때까지 수를 바꾸어 가며 알고리즘을 반복하는 것이다. 그리고 컴퓨터를 사용하여 이 과정을 진행시키고 있다.

본 연구에서는 근사적 방법으로 마법수가 93~109인 지수귀문도를 만든다. 여기서 근사적 방법이라고 한 것은 지수귀문도가 존재하기 위한 필요조건만을 이용하기 때문이다. 이 방법은 $M = 2p + q$의 관계가 있는 두 수 p, q에 대해, 1부터 30까지의 수 중에서 합이 p인 두 수의 짝 8개와 합이 q인 두 수의 짝 5개를 이용하여 마법수가 M인 지수귀문도를 만든다는 점에서 [3]의 방법과 같지 않다.

2 $M = 2p + q$인 p, q를 이용하여 마법수가 되는 조건 찾기

$U = \{1, 2, 3, \cdots, 30\}$일 때, $U = (A \cup A') \cup (B \cup B') \cup C$를 만족하는 서로 분리된 부분집합 A, A', B, B', C를 다음과 같이 정할 수 있다.

$$A = \{a_i | i = 1, 2, \cdots, 8\}, A' = \{a'_i | i = 1, 2, \cdots, 8\}$$
$$B = \{b_i | i = 1, 2, \cdots, 5\}, B' = \{b'_i | i = 1, 2, \cdots, 5\}$$
$$C = U - (A \cup A') - (B \cup B') = \{c_i | i = 1, 2, 3, 4\}$$

임의의 $a_i \in A$, $a'_i \in A'$, $b_i \in B$, $b'_i \in B'$에 대해 $a_i + a'_i = p$, $a_i + a_j \neq p$, $a'_i + a'_j \neq p$, $b_i + b'_i = q = M - 2p$, $b_i + b_j \neq q$, $b'_i + b'_j \neq q$ (단, $i \neq j$) 라고 하자. 그러면 서로 다른 a_i, a_j, a_k, a_l에 대해 다음이 성립한다. 이것은 집합 A의 어느 네 수에 대해서도 성립해야 하는 필요조건이다.

$$4p - (27 + 28 + 29 + 30) \leq a_i + a_j + a_k + a_l \leq 27 + 28 + 29 + 30 \text{ 즉,}$$
$$4p - 114 \leq a_i + a_j + a_k + a_l \leq 114 \cdots ①$$

이제 a_i, a'_i, b_i, b'_i, c_i를 Fig. 2 및 Fig. 3과 같이 배열하면, 다음은 분명하다:

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 465 - 4M - q \cdots ②$$

합이 p인 두 수의 짝이 8개이므로 $17 \leq p \leq 45$이지만, M이 마법수이면 $186 - M$도 마법수이므로 $2(62 - p) + (62 - q) = 186 - (2p + q) = 186 - M$에서, 다음의 경우만 생각하면 된다:

$$31 \leq p \leq 45$$

이때 합이 p인 두 수의 짝이 8개 이상이 된다. 따라서 먼저 합이 p인 두 수의 짝을 모두

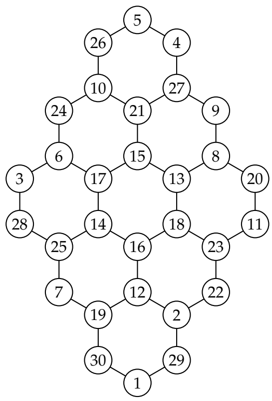

Figure 1

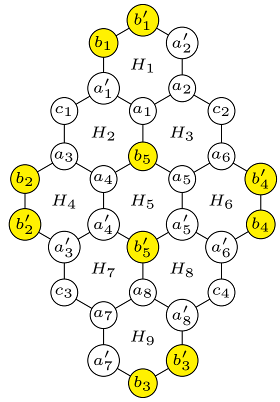

Figure 2. Notation 1

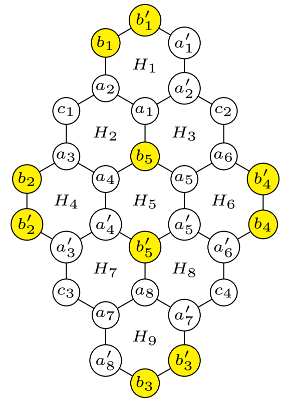

Figure 3. Notation 2

만들고, 이 중에서 8개를 선택한다. $p = 30 + n(1 \le n \le 15)$이라고 하면, 합이 p인 두 수의 짝은 다음으로 나타내어진다:

$$15 - \left[\frac{n}{2}\right] \quad ([x]\text{는 } x\text{를 넘지 않는 최대 정수})$$

이 중에서 8개를 택하면, 그 수들의 집합이 $A \cup A'$이 된다. 다음으로 $U - (A \cup A')$에 속하는 14개의 수 중에서 합이 q인 두 수의 짝 5개의 집합 $B \cup B'$과 $C = U - (A \cup A') - (B \cup B') = \{c_i | i = 1, 2, 3, 4\}$를 만들 수 있어야 한다. 그러나 합이 p인 두 수의 짝 8개와 합이 q인 두 수의 짝 5개를 만들 수 있다고 해서 지수귀문도의 존재가 보장되지는 않는다.

Fig. 2를 이용하는 근사적 방법을 '방법 1'이라고 부르기로 한다. Fig. 3은 Fig. 2를 약간 수정한 것이다. Fig. 3을 이용하는 근사적 방법을 '방법 2'라고 부르기로 한다. 방법 1을 이용하여 마법수가 93∼108인 지수귀문도를 만들 수 있고, 방법 2를 이용하여 마법수가 109인 지수귀문도를 만들 수 있다.

3 방법 1을 이용한 지수귀문도 만들기

Fig. 2에서 4개의 육각형 H_2, H_3, H_7, H_8의 각각의 6개의 수의 합이 M이 되도록 배열할 수 있으면 M은 마법수가 된다. 이 4개의 육각형에서 각각 다음을 알 수 있다:

$$\begin{aligned} &H_2\text{에서} \quad (a_3 + a_4) + b_5 + c_1 = M - p \cdots ③ \\ &H_7\text{에서} \quad (a_3' + a_4' + a_7 + a_8) + b_5' + c_3 = M \\ &H_3\text{에서} \quad (a_1 + a_2 + a_5 + a_6) + b_5 + c_2 = M \\ &H_8\text{에서} \quad (a_5' + a_6') + b_5' + c_4 = M - p \cdots ④ \end{aligned}$$

위의 두 식과 아래의 두 식을 각각 더해 다음 식을 얻을 수 있다:

$$\begin{aligned} (a_7 + a_8) + (c_1 + c_3) &= M - p \cdots ⑤ \\ (a_1 + a_2) + (c_2 + c_4) &= M - p \cdots ⑥ \end{aligned}$$

또, 이 두 식과 ②에서 다음 식을 얻을 수 있다:

$$\alpha = (a_1 + a_2) + (a_7 + a_8) = 7M - (465 + 4p) \cdots ⑦$$

한편, ④를 정리하면 다음을 얻을 수 있다:

$$(a_5 + a_6) + b_5 = p + c_4 \cdots ⑧$$

이제 다음과 같은 단계를 거쳐 ①, ②, ③, ⑤, ⑥, ⑦, ⑧을 만족하도록 a_i, b_i, c_i를 정할 수 있으면 $M = 2p + q$를 마법수로 하는 지수귀문도를 만들 수 있다. a_i가 결정되면 그에 대응하는 a_i'도 결정되며, b_i가 결정되면 그에 대응하는 b_i'도 결정된다.

[단계 1] p, q, M의 값을 정하고, $A \cup A'$, $B \cup B'$도 정한다. 그러면 C는 정해진다.

[단계 2] c_i의 값을 정하고, ⑤를 만족시키는 a_1, a_2의 값과 ⑥을 만족시키는 a_7, a_8의 값을 찾는다. 이때 $a_1 + a_2$의 값을 만족하는 a_1, a_2의 값을 구하는 것이므로, 그 두 값은 교환가능하다. 마찬가지로 a_7, a_8의 값도 교환가능하다. 또, α의 값은 ①을 만족시켜야 한다.

[단계 3] b_5의 값을 정하고, ③을 만족시키는 a_3, a_4의 값과 ⑧을 만족시키는 a_5, a_6의 값을 찾는다. 이때 $a_3 + a_4$의 값을 만족하는 a_3, a_4의 값을 구하는 것이므로, 그 두 값은 교환가능하다. 마찬가지로 a_5, a_6의 값도 교환가능하다.

[단계 4] b_1, b_2, b_3, b_4의 값은 $B \cup B' - \{b_5, b_5'\}$에서 임의로 선택하여 정할 수 있다.

①과 ⑦을 이용하여 $93 \le M \le 108$일 때 p의 값의 범위를 구할 수 있지만, 이것은 지수귀문도가 존재할 범위를 나타내는 것일 뿐, 그 존재를 보장하는 것은 아니다. $M = 109$일 때, $31 \le p \le 45$의 어느 값에 대해서도 $\alpha > 114$가 되어 ①을 만족시키지 않는다. 여기서는 위의 단계에 따라 지수귀문도를 만드는 예를 제시하기로 한다. 각각 한 개의 예를 제시했지만, 실제로는 합이 p인 두 수의 짝 8개와 합이 q인 두 수의 짝 5개를 어떻게 선택하느냐에 따라 다양한 지수귀문도를 만들 수 있다.

$M = 93$인 지수귀문도

$p = 31$인 두 수의 짝 8개와 $q = 31$인 두 수의 짝 5개를 각각 다음과 같이 택할 수 있다.

$$p = 31 : (30, 1), (29, 2), (28, 3), (27, 4), (26, 5), (25, 6), (21, 10), (20, 11)$$
$$q = 31 : (24, 7), (23, 8), (22, 9), (19, 12), (18, 13)$$

그러면 $C = \{14, 15, 16, 17\}$이다. $c_1 = 14$, $c_2 = 15$, $c_3 = 16$, $c_4 = 17$이라고 하자. ⑤와 ⑥에서 각각 $a_1 + a_2 = 30$, $a_7 + a_8 = 32$를 만족시키도록 $a_1 = 1$, $a_2 = 29$, $a_7 = 28$, $a_8 = 4$를 찾을 수 있다. $b_5 = 22$라고 하자. ③과 ⑧에서 각각 $a_3 + a_4 = 26$, $a_5 + a_6 = 26$을 만족시키도록 $a_3 = 20$, $a_4 = 6$, $a_5 = 21$, $a_6 = 5$를 찾을 수 있다. 그러면 Fig. 4와 같이 마법수가 93인 지수귀문도를 만들 수 있다.

$M = 94$ 인 지수귀문도

$p = 31$인 두 수의 짝 8개와 $q = 32$인 두 수의 짝 5개를 각각 다음과 같이 택할 수 있다.

$$p = 31 : (30, 1), (29, 2), (28, 3), (27, 4), (26, 5), (25, 6), (24, 7), (23, 8)$$
$$q = 32 : (22, 10), (21, 11), (20, 12), (19, 13), (18, 14)$$

그러면 $C = \{9, 15, 16, 17\}$이다. $c_1 = 17$, $c_2 = 15$, $c_3 = 9$, $c_4 = 16$이라고 하자. ⑤와 ⑥에서 각각 $a_1 + a_2 = 32$, $a_7 + a_8 = 37$을 만족시키도록 $a_1 = 7$, $a_2 = 25$, $a_7 = 8$, $a_8 = 29$를 찾을 수 있다. $b_5 = 14$라고 하자. ③과 ⑧에서 각각 $a_3 + a_4 = 32$, $a_5 + a_6 = 33$을 만족시키도록 $a_3 = 5$, $a_4 = 27$, $a_5 = 3$, $a_6 = 30$을 찾을 수 있다. 그러면 Fig. 5와 같이 마법수가 94인 지수귀문도를 만들 수 있다.

$M = 95$ 인 지수귀문도

$p = 31$인 두 수의 짝 8개와 $q = 33$인 두 수의 짝 5개를 각각 다음과 같이 택할 수 있다.

$$p = 31 : (23, 8), (22, 9), (21, 10), (20, 11), (19, 12), (18, 13), (17, 14), (16, 15)$$
$$q = 33 : (30, 3), (29, 4), (28, 5), (27, 6), (26, 7)$$

그러면 $C = \{1, 2, 24, 25\}$이다. $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 25$, $c_4 = 24$라고 하자. ⑤와 ⑥에서 각각 $a_1 + a_2 = 38$, $a_7 + a_8 = 38$을 만족시키도록 $a_1 = 15$, $a_2 = 23$, $a_7 = 17$, $a_8 = 21$을 찾을 수 있다. $b_5 = 26$이라고 하자. ③과 ⑧에서 각각 $a_3 + a_4 = 37$, $a_5 + a_6 = 29$를 만족시키도록 $a_3 = 18$, $a_4 = 19$, $a_5 = 9$, $a_6 = 20$을 찾을 수 있다. 그러면 Fig. 6과 같이 마법수가 95인 지수귀문도를 만들 수 있다.

$M = 96$ 인 지수귀문도

$p = 32$인 두 수의 짝 8개와 $q = 32$인 두 수의 짝 5개를 각각 다음과 같이 택할 수 있다.

$$p = 32 : (27, 5), (26, 6), (25, 7), (24, 8), (23, 9), (22, 10), (21, 11), (20, 12)$$
$$q = 32 : (30, 2), (29, 3), (28, 4), (19, 13), (18, 14)$$

그러면 $C = \{1, 15, 16, 17\}$이다. $c_1 = 16$, $c_2 = 1$, $c_3 = 15$, $c_4 = 17$이라고 하자. ⑤와 ⑥에서 각각 $a_1 + a_2 = 46$, $a_7 + a_8 = 33$을 만족시키도록 $a_1 = 22$, $a_2 = 24$, $a_7 = 12$, $a_8 = 21$을 찾을 수 있다. $b_5 = 14$라고 하자. ③과 ⑧에서 각각 $a_3 + a_4 = 34$, $a_5 + a_6 = 35$를 만족시키도록 $a_3 = 7$, $a_4 = 27$, $a_5 = 9$, $a_6 = 26$을 찾을 수 있다. 그러면 Fig. 7과 같이 마법수가 96인 지수귀문도를 만들 수 있다.

$M = 97$ 인 지수귀문도

$p = 33$인 두 수의 짝 8개와 $q = 31$인 두 수의 짝 5개를 각각 다음과 같이 택할 수 있다.

$$p = 33 : (25, 8), (24, 9), (23, 10), (22, 11), (21, 12), (20, 13), (19, 14), (18, 15)$$

$q = 31 : (30, 1), (29, 2), (28, 3), (27, 4), (26, 5)$

그러면 $C = \{6, 7, 16, 17\}$이다. $c_1 = 16$, $c_2 = 6$, $c_3 = 7$, $c_4 = 17$이라고 하자. ⑤와 ⑥에서 각각 $a_1 + a_2 = 41$, $a_7 + a_8 = 41$을 만족시키도록 $a_1 = 18$, $a_2 = 23$, $a_7 = 19$, $a_8 = 22$를 찾을 수 있다. $b_5 = 28$이라고 하자. ③과 ⑧에서 각각 $a_3 + a_4 = 20$, $a_5 + a_6 = 22$를 만족시키도록 $a_3 = 8$, $a_4 = 12$, $a_5 = 9$, $a_6 = 13$을 찾을 수 있다. 그러면 Fig. 8과 같이 마법수가 97인 지수귀문도를 만들 수 있다.

$M = 98$인 지수귀문도

$p = 33$인 두 수의 짝 8개와 $q = 32$인 두 수의 짝 5개를 각각 다음과 같이 택할 수 있다.

$p = 33 : (27, 6), (26, 7), (25, 8), (24, 9), (23, 10), (22, 11), (21, 12), (20, 13)$

$q = 32 : (30, 2), (29, 3), (28, 4), (18, 14), (17, 15)$

그러면 $C = \{1, 5, 16, 19\}$이다. $c_1 = 16$, $c_2 = 1$, $c_3 = 5$, $c_4 = 19$라고 하자. ⑤와 ⑥에서 각각 $a_1 + a_2 = 45$, $a_7 + a_8 = 44$를 만족시키도록 $a_1 = 22$, $a_2 = 23$, $a_7 = 20$, $a_8 = 24$를 찾을 수 있다. $b_5 = 15$라고 하자. ③과 ⑧에서 각각 $a_3 + a_4 = 34$, $a_5 + a_6 = 37$을 만족시키도록 $a_3 = 7$, $a_4 = 27$, $a_5 = 12$, $a_6 = 25$를 찾을 수 있다. 그러면 Fig. 9와 같이 마법수가 98인 지수귀문도를 만들 수 있다.

$M = 99$인 지수귀문도

$p = 42$인 두 수의 짝 8개와 $q = 15$인 두 수의 짝 5개를 각각 다음과 같이 택할 수 있다.

$p = 42 : (30, 12), (29, 13), (27, 15), (26, 16), (25, 17), (24, 18), (23, 19), (22, 20)$

$q = 15 : (14, 1), (11, 4), (10, 5), (9, 6), (8, 7)$

그러면 $C = \{2, 3, 21, 28\}$이다. $c_1 = 2$, $c_2 = 21$, $c_3 = 28$, $c_4 = 3$이라고 하자. ⑤와 ⑥에서 각각 $a_1 + a_2 = 43$, $a_7 + a_8 = 27$을 만족시키도록 $a_1 = 13$, $a_2 = 20$, $a_7 = 12$, $a_8 = 15$를 찾을 수 있다. $b_5 = 4$라고 하자. ③과 ⑧에서 각각 $a_3 + a_4 = 51$, $a_5 + a_6 = 41$을 만족시키도록 $a_3 = 25$, $a_4 = 26$, $a_5 = 18$, $a_6 = 23$을 찾을 수 있다. 그러면 Fig. 10과 같이 마법수가 99인 지수귀문도를 만들 수 있다.

$M = 100$인 지수귀문도

$p = 43$인 두 수의 짝 8개와 $q = 14$인 두 수의 짝 5개를 각각 다음과 같이 택할 수 있다.

$p = 43 : (30, 13), (29, 14), (28, 15), (27, 16), (26, 17), (25, 18), (24, 19), (23, 20)$

$q = 14 : (12, 2), (11, 3), (10, 4), (9, 5), (8, 6)$

그러면 $C = \{1, 7, 21, 22\}$이다. $c_1 = 1$, $c_2 = 22$, $c_3 = 21$, $c_4 = 7$이라고 하자. ⑤와 ⑥에서 각각 $a_1 + a_2 = 28$, $a_7 + a_8 = 35$를 만족시키도록 $a_1 = 13$, $a_2 = 15$, $a_7 = 17$, $a_8 = 18$

을 찾을 수 있다. $b_5 = 11$이라고 하자. ③과 ⑧에서 각각 $a_3 + a_4 = 45$, $a_5 + a_6 = 39$를 만족시키도록 $a_3 = 16$, $a_4 = 29$, $a_5 = 19$, $a_6 = 20$을 찾을 수 있다. 그러면 Fig. 11과 같이 마법수가 100인 지수귀문도를 만들 수 있다.

$M = 101$ **인 지수귀문도**

$p = 43$인 두 수의 짝 8개와 $q = 15$인 두 수의 짝 5개를 각각 다음과 같이 택할 수 있다.

$p = 43 : (30, 13), (29, 14), (28, 15), (27, 16), (26, 17), (25, 18), (24, 19), (23, 20)$

$q = 15 : (12, 3), (11, 4), (10, 5), (9, 6), (8, 7)$

그러면 $C = \{1, 2, 21, 22\}$이다. $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 21$, $c_4 = 22$라고 하자. ⑤와 ⑥에서 각각 $a_1 + a_2 = 34$, $a_7 + a_8 = 36$을 만족시키도록 $a_1 = 16$, $a_2 = 18$, $a_7 = 13$, $a_8 = 23$을 찾을 수 있다. $b_5 = 12$라고 하자. ③과 ⑧에서 각각 $a_3 + a_4 = 45$, $a_5 + a_6 = 53$을 만족시키도록 $a_3 = 17$, $a_4 = 28$, $a_5 = 24$, $a_6 = 29$를 찾을 수 있다. 그러면 Fig. 12와 같이 마법수가 101인 지수귀문도를 만들 수 있다.

$M = 102$ **인 지수귀문도**

$p = 43$인 두 수의 짝 8개와 $q = 16$인 두 수의 짝 5개를 각각 다음과 같이 택할 수 있다.

$p = 43 : (30, 13), (28, 15), (27, 16), (26, 17), (25, 18), (24, 19), (23, 20), (22, 21)$

$q = 16 : (14, 2), (12, 4), (11, 5), (10, 6), (9, 7)$

그러면 $C = \{1, 3, 8, 29\}$이다. $c_1 = 8$, $c_2 = 29$, $c_3 = 3$, $c_4 = 1$이라고 하자. ⑤와 ⑥에서 각각 $a_1 + a_2 = 29$, $a_7 + a_8 = 48$을 만족시키도록 $a_1 = 13$, $a_2 = 16$, $a_7 = 22$, $a_8 = 26$을 찾을 수 있다. $b_5 = 5$라고 하자. ③과 ⑧에서 각각 $a_3 + a_4 = 46$, $a_5 + a_6 = 39$를 만족시키도록 $a_3 = 18$, $a_4 = 28$, $a_5 = 19$, $a_6 = 20$을 찾을 수 있다. 그러면 Fig. 13과 같이 마법수가 102인 지수귀문도를 만들 수 있다.

$M = 103$ **인 지수귀문도**

$p = 44$인 두 수의 짝 8개와 $q = 15$인 두 수의 짝 5개를 각각 다음과 같이 택할 수 있다.

$p = 44 : (30, 14), (29, 15), (28, 16), (27, 17), (26, 18), (25, 19), (24, 20), (23, 21)$

$q = 15 : (13, 2), (12, 3), (11, 4), (10, 5), (9, 6)$

그러면 $C = \{1, 7, 8, 22\}$이다. $c_1 = 7$, $c_2 = 1$, $c_3 = 22$, $c_4 = 8$이라고 하자. ⑤와 ⑥에서 각각 $a_1 + a_2 = 50$, $a_7 + a_8 = 30$을 만족시키도록 $a_1 = 21$, $a_2 = 29$, $a_7 = 14$, $a_8 = 16$을 찾을 수 있다. $b_5 = 9$라고 하자. ③과 ⑧에서 각각 $a_3 + a_4 = 43$, $a_5 + a_6 = 43$을 만족시키도록 $a_3 = 17$, $a_4 = 26$, $a_5 = 19$, $a_6 = 24$를 찾을 수 있다. 그러면 Fig. 14와 같이 마법수가 103인 지수귀문도를 만들 수 있다.

$M = 104$인 지수귀문도

$p = 44$인 두 수의 짝 8개와 $q = 16$인 두 수의 짝 5개를 각각 다음과 같이 택할 수 있다.

$p = 44 : (30, 14), (29, 15), (28, 16), (27, 17), (26, 18), (25, 19), (24, 20), (23, 21)$

$q = 16 : (13, 3), (12, 4), (11, 5), (10, 6), (9, 7)$

그러면 $C = \{1, 2, 8, 22\}$이다. $c_1 = 1$, $c_2 = 8$, $c_3 = 22$, $c_4 = 2$라고 하자. ⑤와 ⑥에서 각각 $a_1 + a_2 = 50$, $a_7 + a_8 = 37$을 만족시키도록 $a_1 = 20$, $a_2 = 30$, $a_7 = 16$, $a_8 = 21$을 찾을 수 있다. $b_5 = 13$이라고 하자. ③과 ⑧에서 각각 $a_3 + a_4 = 46$, $a_5 + a_6 = 33$을 만족시키도록 $a_3 = 19$, $a_4 = 27$, $a_5 = 15$, $a_6 = 18$을 찾을 수 있다. 그러면 Fig. 15와 같이 마법수가 104인 지수귀문도를 만들 수 있다.

$M = 105$인 지수귀문도

$p = 44$인 두 수의 짝 8개와 $q = 17$인 두 수의 짝 5개를 각각 다음과 같이 택할 수 있다.

$p = 44 : (30, 14), (29, 15), (28, 16), (27, 17), (26, 18), (25, 19), (24, 20), (23, 21)$

$q = 17 : (13, 4), (12, 5), (11, 6), (10, 7), (9, 8)$

그러면 $C = \{1, 2, 3, 22\}$이다. $c_1 = 1$, $c_2 = 3$, $c_3 = 22$, $c_4 = 2$라고 하자. ⑤와 ⑥에서 각각 $a_1 + a_2 = 56$, $a_7 + a_8 = 38$을 만족시키도록 $a_1 = 26$, $a_2 = 30$, $a_7 = 17$, $a_8 = 21$을 찾을 수 있다. $b_5 = 11$이라고 하자. ③과 ⑧에서 각각 $a_3 + a_4 = 49$, $a_5 + a_6 = 35$를 만족시키도록 $a_3 = 20$, $a_4 = 29$, $a_5 = 16$, $a_6 = 19$를 찾을 수 있다. 그러면 Fig. 16과 같이 마법수가 105인 지수귀문도를 만들 수 있다.

$M = 106$인 지수귀문도

$p = 45$인 두 수의 짝 8개와 $q = 16$인 두 수의 짝 5개를 각각 다음과 같이 택할 수 있다.

$p = 45 : (30, 15), (29, 16), (28, 17), (27, 18), (26, 19), (25, 20), (24, 21), (23, 22)$

$q = 16 : (14, 2), (13, 3), (12, 4), (11, 5), (10, 6)$

그러면 $C = \{1, 7, 8, 9\}$이다. $c_1 = 1$, $c_2 = 8$, $c_3 = 7$, $c_4 = 9$라고 하자. ⑤와 ⑥에서 각각 $a_1 + a_2 = 44$, $a_7 + a_8 = 53$을 만족시키도록 $a_1 = 17$, $a_2 = 27$, $a_7 = 30$, $a_8 = 23$을 찾을 수 있다. $b_5 = 14$라고 하자. ③과 ⑧에서 각각 $a_3 + a_4 = 46$, $a_5 + a_6 = 40$을 만족시키도록 $a_3 = 20$, $a_4 = 26$, $a_5 = 16$, $a_6 = 24$를 찾을 수 있다. 그러면 Fig. 17과 같이 마법수가 106인 지수귀문도를 만들 수 있다.

$M = 107$인 지수귀문도

$p = 45$인 두 수의 짝 8개와 $q = 17$인 두 수의 짝 5개를 각각 다음과 같이 택할 수 있다.

$p = 45 : (30, 15), (29, 16), (28, 17), (27, 18), (26, 19), (25, 20), (24, 21), (23, 22)$

$$q = 17 : (14, 3), (13, 4), (12, 5), (11, 6), (10, 7)$$

그러면 $C = \{1, 2, 8, 9\}$이다. $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 8$, $c_4 = 9$라고 하자. ⑤와 ⑥에서 각각 $a_1 + a_2 = 51$, $a_7 + a_8 = 53$을 만족시키도록 $a_1 = 25$, $a_2 = 26$, $a_7 = 29$, $a_8 = 24$를 찾을 수 있다. $b_5 = 14$라고 하자. ③과 ⑧에서 각각 $a_3 + a_4 = 47$, $a_5 + a_6 = 40$을 만족시키도록 $a_3 = 17$, $a_4 = 30$, $a_5 = 18$, $a_6 = 22$를 찾을 수 있다. 그러면 Fig. 18과 같이 마법수가 107인 지수귀문도를 만들 수 있다.

$M = 108$ 인 지수귀문도

$p = 45$인 두 수의 짝 8개와 $q = 18$인 두 수의 짝 5개를 각각 다음과 같이 택할 수 있다.

$$p = 45 : (30, 15), (29, 16), (28, 17), (27, 18), (26, 19), (25, 20), (24, 21), (23, 22)$$
$$q = 18 : (14, 4), (13, 5), (12, 6), (11, 7), (10, 8)$$

그러면 $C = \{1, 2, 3, 9\}$이다. $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 3$, $c_4 = 9$라고 하자. ⑤와 ⑥에서 각각 $a_1 + a_2 = 52$, $a_7 + a_8 = 59$를 만족시키도록 $a_1 = 27$, $a_2 = 25$, $a_7 = 30$, $a_8 = 29$를 찾을 수 있다. $b_5 = 13$이라고 하자. ③과 ⑧에서 각각 $a_3 + a_4 = 49$, $a_5 + a_6 = 41$을 만족시키도록 $a_3 = 28$, $a_4 = 21$, $a_5 = 19$, $a_6 = 22$를 찾을 수 있다. 그러면 Fig. 19와 같이 마법수가 108인 지수귀문도를 만들 수 있다.

4 방법 2를 이용한 지수귀문도 만들기

방법 1을 사용해서는 $M = 109$인 경우의 지수귀문도를 만들 수 없다. 여기서는 $M = 109$인 경우의 지수귀문도를 만들기 위해 Fig. 3을 이용한다. 여기서는 $p = 45$인 경우만 생각하기로 한다. 즉, Fig. 3에서 $a_i + a_i' = 45$, $b_i + b_i' = q = M - 90$이다. 이제 4개의 육각형 H_2, H_3, H_7, H_8의 각각의 6개의 수의 합이 M이 되도록 배열할 수 있으면 M은 마법수가 된다. 이 4개의 육각형에서 각각 다음을 알 수 있다:

$$\begin{aligned}
H_2\text{에서} \quad & (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + b_5 + c_1 = M \cdots ⑨ \\
H_7\text{에서} \quad & (a_3' + a_4' + a_7 + a_8) + b_5' + c_3 = M \\
H_3\text{에서} \quad & (a_1 + a_2' + a_5 + a_6) + b_5 + c_2 = M \cdots ⑩ \\
H_8\text{에서} \quad & (a_5' + a_6' + a_7' + a_8) + b_5' + c_4 = M
\end{aligned}$$

위의 두 식과 아래의 두 식을 각각 더해 다음 식을 얻을 수 있다:

$$(a_1 + a_8) + (a_2 + a_7) + (c_1 + c_3) = M, (a_1 + a_8) - (a_2 + a_7) + (c_2 + c_4) = M - 90$$

이 두 식을 더한 것과 ②에서 다음 식을 얻을 수 있다:

$$a_1 + a_8 = \frac{1}{2}(7M - 645) \cdots ⑪$$

또, 이 두 식을 같은 변끼리 빼면 다음 식을 얻을 수 있다. 이때 $c_2+c_4 \neq c_1+c_3$이어야 하고, $(c_2+c_4)-(c_1+c_3)$은 짝수이어야 한다:

$$a_2+a_7 = 45+\frac{1}{2}\{(c_2+c_4)-(c_1+c_3)\}\cdots ⑫$$

여기서 $7M-645$가 짝수려면 $7M$이 홀수이어야 하고, 따라서 M이 홀수이어야 한다. 그런데 $31 \leq a_1+a_8 \leq 59$에서 $62 \leq 2(a_1+a_8) \leq 118$이므로 $62 \leq 7M-645 \leq 118$, 즉, $707 \leq 7M \leq 763$이다. 이것을 풀면 $101 \leq 7M \leq 109$이다. 이때 $M=105$이면 $a_1+a_8 = 45$가 되어 $a_i+a_j \neq 45$라는 조건에 맞지 않는다. 따라서 $M = 101, 103, 107, 109$이다. 이제 다음과 같은 단계를 거쳐 a_i, b_i, c_i를 정할 수 있으면 $M = 2\times 45+q$는 마법수가 된다. a_i가 결정되면 그에 대응하는 a_i'도 결정되며, b_i가 결정되면 그에 대응하는 b_i'도 결정된다.

[단계 1] q, M의 값을 정하고, $A\cup A'$, $B\cup B'$도 정한다. 그러면 C는 정해진다.

[단계 2] c_i의 값을 정하고, ⑪을 만족시키는 a_1, a_8의 값과 ⑫를 만족시키는 a_2, a_7의 값을 찾는다. 이때 a_1+a_8의 값을 만족하는 a_1, a_8의 값을 구하는 것이므로, 그 두 값은 교환가능하다. 마찬가지로 a_2, a_7의 값도 교환가능하다. 또, α의 값은 ①을 만족시켜야 한다.

[단계 3] b_5의 값을 정하고, ⑨를 만족시키는 a_3, a_4의 값과 ⑩을 만족시키는 a_5, a_6의 값을 찾는다. 이때 a_3+a_4의 값을 만족하는 a_3, a_4의 값을 구하는 것이므로, 그 두 값은 교환가능하다. 마찬가지로 a_5, a_6의 값도 교환가능하다.

[단계 4] b_1, b_2, b_3, b_4의 값은 $B\cup B'-\{b_5, b_5'\}$에서 임의로 선택하여 정할 수 있다.

$M=109$인 지수귀문도

$p=45$인 두 수의 짝 8개와 $q=19$인 두 수의 짝 5개를 각각 다음과 같이 택할 수 있다.

$p=45 : (30,15),(29,16),(28,17),(27,18),(26,19),(25,20),(24,21),(23,22)$

$q=19 : (14,5),(13,6),(12,7),(11,8),(10,9)$

그러면 $C=\{1,2,3,4\}$이다. $c_1=1$, $c_2=3$, $c_3=2$, $c_4=9$라고 하자. ⑪과 ⑫에서 각각 $a_1+a_2=59$, $a_7+a_8=47$을 만족시키도록 $a_1=29$, $a_2=19$, $a_7=28$, $a_8=30$을 찾을 수 있다. $b_5=13$이라고 하자. ⑨과 ⑩에서 각각 $a_3+a_4=47$, $a_5+a_6=38$을 만족시키도록 $a_3=23$, $a_4=24$, $a_5=18$, $a_6=20$을 찾을 수 있다. 그러면 Fig. 20과 같이 마법수가 109인 지수귀문도를 만들 수 있다.

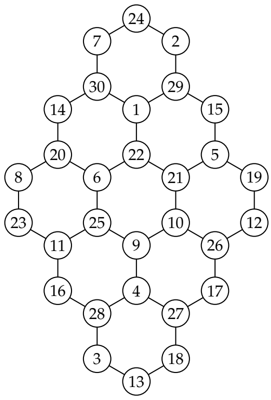

Figure 4. $p = 31,\ M = 93$

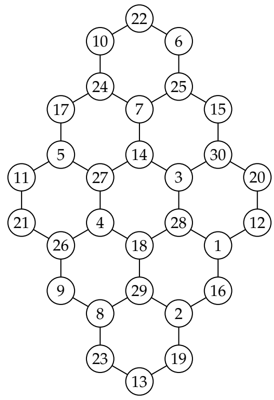

Figure 5. $p = 31,\ M = 94$

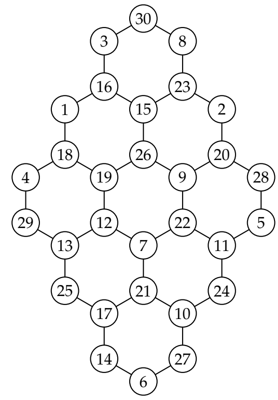

Figure 6. $p = 31,\ M = 95$

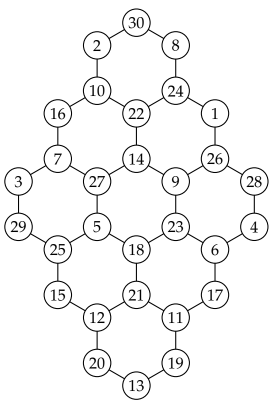

Figure 7. $p = 32,\ M = 96$

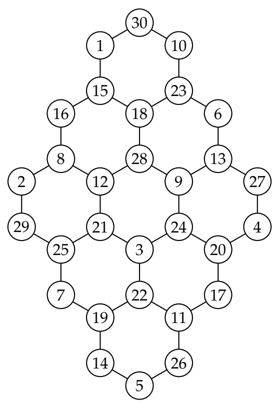

Figure 8. $p = 33,\ M = 97$

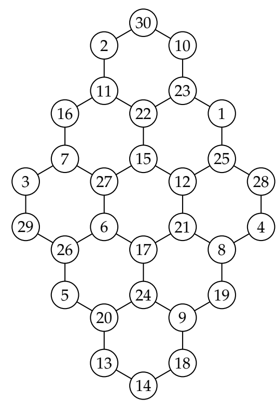

Figure 9. $p = 33,\ M = 98$

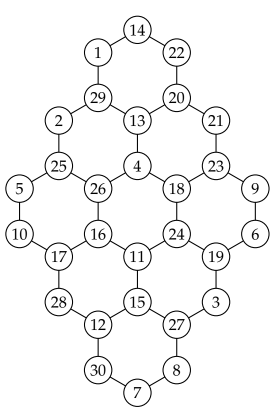

Figure 10. $p = 42,\ M = 99$

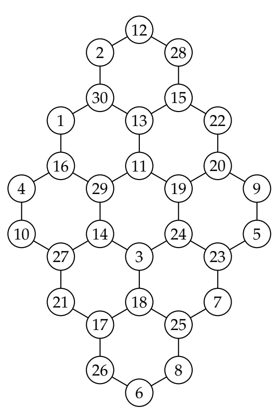

Figure 11. $p = 43,\ M = 100$

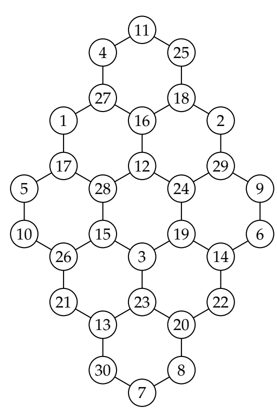

Figure 12. $p = 43,\ M = 101$

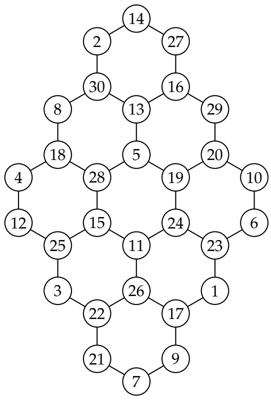

Figure 13. $p = 43,\ M = 102$

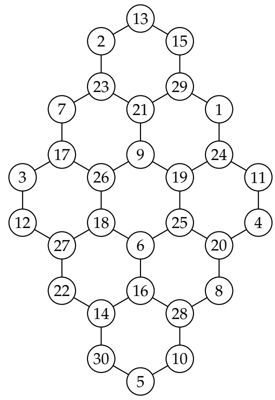

Figure 14. $p = 44,\ M = 103$

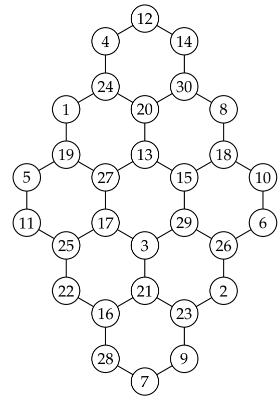

Figure 15. $p = 44,\ M = 104$

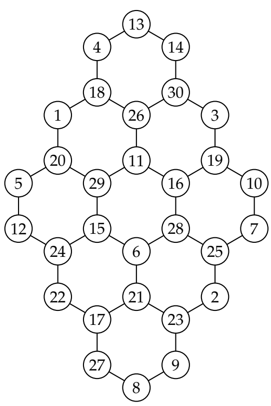

Figure 16. $p = 45,\ M = 105$

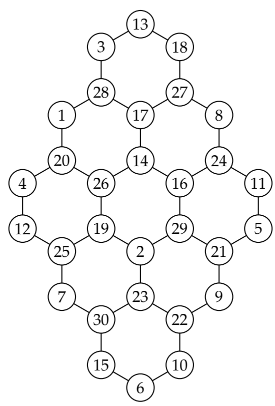

Figure 17. $p = 31,\ M = 106$

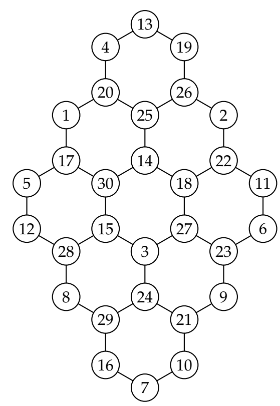

Figure 18. $p = 45,\ M = 107$

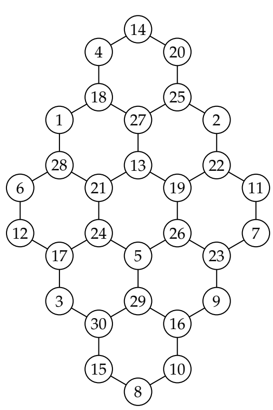

Figure 19. $p = 45,\ M = 108$

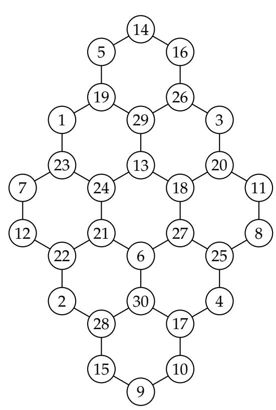

Figure 20. $p = 19,\ M = 109$

5 결론

본 연구에서는 마법수가 93부터 109까지인 지수귀문도를 만드는 근사적 방법을 제시하고 있다. 이 방법에서는 기본적으로 $M = 2p + q$의 관계가 있는 두 수 p, q에 대해, 1부터 30까지의 수 중에서 합이 p인 두 수의 짝 8개와 합이 q인 두 수의 짝 5개를 이용한다. 이들 두 수의 짝을 Fig. 2 및 Fig. 3과 같이 배열하면 5개의 육각형 H_1, H_4, H_5, H_6, H_9의 각각의 6개의 수의 합이 M이라는 것은 분명하다. 따라서 남은 4개의 육각형 H_2, H_3, H_7, H_8의 각각의 6개의 수의 합이 M이 되도록 배열할 수 있으면 M은 마법수가 된다.

이 방법은 Fig. 2 및 Fig. 3에서 30개의 수의 위치를 모두 정하는 대신, 13개의 수 즉, $a_i(i = 1, 2 \cdots, 8)$, b_5, $c_i(i = 1, 2, 3, 4)$의 위치를 정하는 것으로 지수귀문도를 만들 수 있다는 것을 말해준다. 먼저 Fig. 2을 이용하는 방법 1을 통해 마법수가 93부터 108까지인 지수귀문도를 만드는 방법을 제시하였다. 다음으로 Fig. 3을 이용하는 방법 2를 통해 $p = 45$인 경우에 마법수가 109인 지수귀문도를 만드는 방법을 제시하였다.

컴퓨터를 사용하여 지수귀문도를 찾을 때의 효율성은 알고리즘에 좌우되므로, 정교한 알고리즘을 고안하는 것이 중요하다. 본 연구에서 제시하는 방법도 지수귀문도를 찾을 수 없으면 다시 [단계 1]∼[단계 4]로 되돌아가야 한다는 점에서 이러한 알고리즘의 하나로 볼 수 있다. 그리고 컴퓨터를 사용하여 빠르게 지수귀문도를 찾을 수 있을 것이다.

References

1. CHOI Seok-Jeong, *GuSuRyak* (translated by Jeong Hae-Nam, Huh Min), Kyo-Woo-Sa, 2006. 최석정, 구수략 – 조선시대 산학총서, 정해남, 허민 옮김, 교우사, 2006.
2. KIM Dong Jin, OH Yung Hwan, Properties and solution-finding algorithm of Jisuguimundo (Turtle-shape Diagram), *Proceedings of Korea Information Science Society* 16(1) (1989), 405–408. 김동진, 오영환, 지수귀문도의 특성 및 해를 구하는 알고리즘, 한국정보과학회 봄 학술발표회 논문집 16(1) (1989), 405–408.
3. KIM Young Joon, http://www.cyberschool.co.kr/, 2012.
4. KWON Gyunuk et al, A study on solutions of Jisuguimundo using the range of magic sums, *Journal for History of Mathematics* 27(2) (2014), 111–125. 권균욱 외, 합의 범위를 이용한 지수귀문도 해의 탐구, *Journal for History of Mathematics* 27(2) (2014), 111–125.
5. PARK Kyo Sik, A study of making Jisuguimundo as a problem solving task for elementary students, *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea* 15(1) (2011), 77–13. 박교식, 초등학생을 위한 문제해결 과제로서의 지수귀문도의 해결 방안 연구, 한국초등수학교육학회지 15(1) (2011), 77–93.
6. PARK Kyo Sik, A study on finding topics for the application of storytelling method in mathematics education: centered on Jisuyongyukdo and Jisuguimundo, *Journal of the Korean School Mathematics Society* 15(1) (2012), 155–169. 박교식, 수학교육에서의 스토

리텔링 방식 적용을 위한 소재 연구: 지수용육도와 지수귀문도를 중심으로, 한국학교수학회논문집 15(1) (2012), 155–169.

7. Park Kyo Sik, A study on finding solutions of Jisuguimundo with magic number 87, 93, and 99 using alternating method, *Journal for History of Mathematics* 30(2) (2017), 71–86. 박교식, 마법수가 87, 93, 99인 지수귀문도의 해를 구하는 방안에 관한 연구, 한국수학사학회지, 30(2) (2017), 71–86.