

# 노이즈 불확실성하에서의 확장칼만필터의 변종들과 코스트 레퍼런스 파티클필터를 이용한 표적추적 성능비교

신명인 · 홍우영<sup>†</sup>

## Performance Comparison of Various Extended Kalman Filter and Cost-Reference Particle Filter for Target Tracking with Unknown Noise

Myoungin Shin · Wooyoung Hong<sup>†</sup>

### ABSTRACT

In this paper, we study target tracking in two dimensional space using a Extended Kalman filter(EKF), various Extended Kalman Filter and Cost-Reference Particle Filter(CRPF), which can effectively estimate the state values of nonlinear measurement equation. We introduce various Extended Kalman Filter which the Unscented Kalman Filter(UKF), the Central Difference Kalman Filter(CDKF), the Square Root Unscented Kalman Filter(SR-UKF), and the Central Difference Kalman Filter(SR-CDKF). In this study, we calculate Mean Square Error(MSE) of each filters using Monte-Carlo simulation with unknown noise statistics. Simulation results show that among the various of Extended Kalman filter, Square Root Central Difference Kalman Filter has the best results in terms of speed and performance. And, the Cost-Reference Particle Filter has an advantageous feature that it does not need to know the noise distribution differently from Extended Kalman Filter, and the simulation result shows that the excellent in term of processing speed and accuracy.

**Key words** : Extended Kalman Filter, Cost-Reference Particle Filter, Target Tracking

### 요 약

본 논문에서는 비선형성을 가지는 측정방정식의 상태값을 효과적으로 추정할 수 있는 확장칼만필터(Extended Kalman Filter/EKF)와 확장칼만필터의 변종들 그리고 코스트 레퍼런스 파티클필터(Cost-Reference Particle Filter/CRPF)를 이용하여 이차원 공간에서 표적추적 성능에 관하여 연구한다. 확장칼만필터의 변종으로 분산점칼만필터(Unscented Kalman Filter/UKF), 중심차분칼만필터(Central Difference Kalman Filter/CDKF), 제곱근 분산점칼만필터(Square Root Unscented Kalman Filter/SR-UKF) 그리고 제곱근 중심차분칼만필터(Square Root Central Difference Kalman Filter/SR-CDKF)를 소개한다. 본 연구에서는 노이즈가 불확실한 표적에 대하여 몬테카를로 시뮬레이션 기법을 이용하여 각 필터들의 평균제곱오차(Mean Square Error/MSE)를 계산하였다. 시뮬레이션 결과 확장칼만필터의 변종들 중에서 제곱근 중심차분칼만필터가 속도와 성능 면에서 가장 우수한 결과를 보여주었다. 코스트 레퍼런스 파티클 필터는 확장칼만필터와 다르게 노이즈의 확률 분포를 알 필요가 없다는 유리한 특성을 가지고 있으며 시뮬레이션 결과 제곱근 중심차분칼만필터보다 처리속도 및 정확도 면에서 우수한 결과를 보여주었다.

**주요어** : 확장칼만필터, 코스트-레퍼런스 파티클필터, 표적추적

\* 이 연구는 해군사관학교 2017년 해양연구소(일부)의 지원을 받아 수행되었습니다.

Received: 18 April 2018, Revised: 2 July 2018,

Accepted: 2 August 2018

<sup>†</sup> Corresponding Author: Wooyoung Hong

E-mail: wyhong@sejong.ac.kr

Dept. of Defense System Engineering, Sejong University, Seoul, Korea

## 1. 서론

무기체계, 기계공학, 신호처리, 이미지 프로세싱 등의 많은 문제들은 시간과 공간이 상호 관련되어 있는 동적 상태 시스템(Dynamic State System/DSS)을 사용하여 모델링하고 설명할 수 있다. 동적 상태 시스템 모델을 기초

로 하여, 시간 또는 공간에서 순차적으로 상태를 추정하기 위한 다수의 접근이 있었고 그 중 칼만필터는 시스템 모델이 선형이고 노이즈가 가우시안인 경우 최적의 결과를 보여주었다(Kalman,1960). 이후 시스템 모델이 비선형인 경우에도 적용이 가능한 확장칼만필터(Extended Kalman Filter /EKF)가 제안되었다. 확장칼만필터는 테일러 시리즈를 이용하여 측정방정식의 평균값과 공분산을 선형화시켜 효과적인 성능을 보여주었다. 그러나 표적의 초기 추정 값이 크게 다를 경우 결과 값이 발산하는 경우가 존재하였고 선형화 단계로 인해 알고리즘 자체가 불안정하였다. 이러한 확장칼만필터의 단점을 극복하기 위해 다수의 확장칼만필터의 변종이 제안되었다.

그 중 시그마 포인트로도 불리는 분산점칼만필터(Unscented Kalman Filter/UKF)는 Julier에 의해 처음 제안되었다(Julier et al, 1995). 확장칼만필터와의 주된 차이점은 비선형 함수의 근사화 방법으로 상태 분포의 평균값 및 공분산을 정확하게 나타내는 시그마 포인트를 사용한다는 것이다. 또 다른 확장칼만필터의 변종은 기존의 테일러급수 대신에 스텔링의 다항식 보간공식과 같은 근사체계를 기반으로 하는 중심차분칼만필터(Central Difference Kalman Filter/CDKF)이다(Ito et al, 2000; Norgaard et al, 2000). 분산점칼만필터와 중심차분칼만필터는 확장칼만필터에 비해 계산이 복잡하지만 수렴성 측면에서 확장칼만필터보다 안정적이다.

그러나 분산점칼만필터와 중심차분칼만필터는 확장칼만필터에 비해 많은 처리속도를 필요로 하였고 이러한 점을 극복하기 위해 공분산 행렬을 분해하는 대신 행렬 제곱근을 직접 갱신함으로써 계산 효율성과 안정성을 보장하는 제곱근 분산점칼만필터(Square Root Unscented Kalman Filter/SR-UKF)와 제곱근 중심차분칼만필터(Square Root Central Difference Kalman Filter/SR-CDKF)가 제안되었다(Merwe, 2001; Merwe et al, 2004). 제곱근 형태의 필터들은 본래의 필터들과 동일한 수준의 추정 값을 보이는 동시에 처리속도 면에서 우수한 성능을 보여주었다. 이러한 노력에도 불구하고 확장칼만필터의 변종들은 시스템 모델의 노이즈가 비가우시안인 경우 종종 결과 값이 발산하는 경우가 존재하였다.

이후 노이즈에 크게 영향을 받지 않는 파티클필터가 제안되었고 이후 다수의 파티클 필터의 변종들이 제안되었다. 그 중 우수한 성능을 보여주는 코스트 레퍼런스 파티클필터(Cost-Reference Particle Filter/CRPF)는 자코비안을 계산한 필요가 없으므로 비선형 문제에 쉽게 적용이 가능하며 우수한 성능을 보여주었다(Xu,2006; Lim, 2013).

본 논문에서는 확장칼만필터와 확장칼만필터의 변종 4가지 그리고 코스트 레퍼런스 파티클필터에 대한 알고리즘을 설명하고 6가지의 알고리즘을 사용하여 2차원에서 임의의 가속도를 갖는 단일 표적 추적을 반복시뮬레이션을 통해 수행한다. 이를 통해 각 알고리즘에 대한 성능을 평균제곱근오차와 처리속도를 이용하여 비교하고자 한다. 시뮬레이션 시 Bearing과 Range에 각각 3가지의 확률변수를 사용하였으며 각각의 변수들에 대한 평균제곱근 오차값과 시뮬레이션 알고리즘 처리속도를 측정하였다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서 표적의 시스템 모델을 소개하고 3장에서는 서론에서 소개한 6가지 필터의 특징과 알고리즘을 설명한다. 4장에서는 각각의 필터들을 적용한 시뮬레이션을 수행하고 그 결과를 분석한다. 마지막으로 5장에서 결론을 이야기 한다.

## 2. 표적의 시스템 모델

본 논문에는 Figure 1과 같이 이차원 공간에서 임의의 가속도를 갖는 단일 표적을 추적하고자 한다.

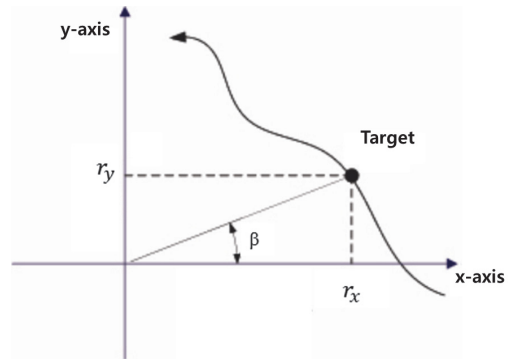


Fig. 1. Range and bearing measurement of target

이차원 공간에서 움직이는 임의의 가속도를 갖는 단일 표적의 상태방정식은 식 (1)과 같다.

$$\begin{bmatrix} r_{x,k} \\ r_{y,k} \\ v_{x,k} \\ v_{y,k} \end{bmatrix}_{s_k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{x,k-1} \\ r_{y,k-1} \\ v_{x,k-1} \\ v_{y,k-1} \end{bmatrix}_{s_{k-1}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{x,k} \\ u_{y,k} \end{bmatrix}_{u_k} \quad (1)$$

여기서  $r, v, u$  그리고  $(x, y)$ 는 각각 표적의 위치, 속도, 가속도 그리고 좌표를 나타낸다.  $T$ 는 샘플링 주기를 의미하며 본 논문에서는 샘플링 주기를  $T=1$ 로 설정하였

다. 또한  $k$ 는 시간 지표를 나타낸다. 위치좌표의 노이즈는 0인 반면에 속도의 상태 노이즈는  $u_k$ 의 랜덤 프로세스에 좌우되며 측정방정식은 식 (2)와 같다.

$$z_k = h[s_k] + w_k = [R_k \ \beta_k]^T + w_k \quad (2)$$

여기서  $R_k$ ,  $\beta_k$  그리고  $w_k$ 는 각각 거리(Range), 각도(Bearing) 그리고 노이즈(Noise)를 의미하며 식 (3)과 같다.

$$R_k = \sqrt{r_{x,k}^2 + r_{y,k}^2}, \quad \beta_k = \arctan \frac{r_{y,k}}{r_{x,k}},$$

$$w_k = [w_{R,k} \ w_{\beta,k}]^T \quad (3)$$

### 3. 필터링 방법

본 장에서는 비선형성을 지니는 표적추적 문제를 해결하기 위해 서론에서 언급한 6가지의 필터들의 간단한 특성과 알고리즘을 설명한다. 확장칼만필터의 변종들의 자세한 설명은 Merwe(2004), 코스트 레퍼런스 파티클필터의 자세한 설명은 Xu(2006)을 참조하기 바란다.

#### 3.1 확장칼만필터

대부분의 통계적 추적 문제에서 추정되는 관심 매개 변수는 시간 또는 공간에서 다양한 통계적 특징을 가지며 변화한다. 이 경우 매개 변수는 순차적으로 추정되어야 하며 매개 변수가 일부 통계적인 방식으로 변하는 것으로 가정하면 매개 변수의 상태는 동적 상태 시스템으로 모델링된다. 칼만필터는 상태 변수의 최적 추정치를 구하는 방법으로 상태변수의 오차를 최적화하는 필터이다. 상태변수 및 측정값들을 반복적으로 계산하는 재귀성을 가지는 것이 특징이며 이를 선형시스템에 적용하였다.

기본적으로 칼만필터 알고리즘은 예측과 보정의 과정으로 구분되며 초기값 선정, 추정값과 오차공분산 예측, 칼만이득 계산, 추정값 계산 그리고 오차공분산 계산 단계로 이루어져있다. 그러나 본 논문에서 해결하고자 하는 문제와 같이 비선형성을 갖는 경우에는 확장칼만필터를 적용하며 확장칼만필터 역시 기본적인 알고리즘은 평균값과 공분산의 선형화과정을 제외하고는 칼만필터와 동일하다. 또한 추정된 상태가 2장에서 주어진 시스템 모델과 같이 스칼라가 아닌 벡터 시스템인 경우 계산 복잡도가 상대적으로 높은 자코비안(Jacobian) 계산이 필요하다. 확장칼만필터의 알고리즘은 Table 1과 같다.

Table 1. Algorithm of EKF

- Initialize with :	$\hat{x}_0, \ P_0$
- Predict estimate and covariance	$\hat{x}_k^- = f(\hat{x}_{k-1}^-)$ $P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q$
- Calculate Kalman gain	$K_k = P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R)^{-1}$
- Calculate estimate	$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (y_k - h(\hat{x}_k^-))$
- Calculate covariance	$P_k = P_k^- - K_k H_k P_k^-$ where $A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big _{x_{k-1}}, H_k = \frac{\partial h}{\partial x} \Big _{x_k}$

#### 3.2 분산점칼만필터와 중심차분칼만필터

분산점칼만필터의 가장 큰 특징은 이전 상태의 정확한 평균값과 공분산을 반영하는  $L+1$ 개의 시그마 포인트를 이용한다는 것이다. 시간 업데이트 단계에서 무향 변형은 비선형 매핑을 수행하여 샘플 포인트를 생성하는 방식으로 시그마포인트와 시그마포인트에 대한 가중치를 계산한다. 선형화단계를 생략하는 분산점칼만필터의 특성상 확장칼만필터보다 안정적인 결과를 보여준다. Table 2는 분산점칼만필터의 알고리즘을 보여준다.

중심차분칼만필터는 “central difference filter”와 “divided difference filter”에서 파생된 필터로 가장 큰 특징은 테일러 시리즈 대신에 스텔링의 다항식 보간공식(Sterling’s polynomial interpolation formula)을 사용한다. 중심차분칼만필터에서는 분석적 미분이 central divided differences로 대체되었고 미분방정식의 중심차분 구간 사이즈가  $h \geq 1$ 로 정의되었다. 분산점칼만필터에서는  $\kappa, \alpha$  그리고  $\xi$ 의 세 가지 변수를 결정해야하지만 중심차분칼만필터에서는 변수  $h$ 만을 결정하면 되므로 분산점칼만필터에 비해 계산적으로 유리하다. 중심차분칼만필터의 알고리즘은 Table 3에서 확인할 수 있듯이 시그마포인트와 공분산행렬을 구하는 부분을 제외하고는 분산점 칼만필터와 매우 유사하다. 분산점칼만필터의 알고리즘과 중심차분칼만필터의 알고리즘은 Table 2와 Table 3에 나타내었으며 자세한 설명은 Merwe, 2004를 참고하기 바란다.

**Table 2.** Algorithm of UKF(Merwe, 2004)

**- Initialize with:**

$$\hat{x}_0 = E[x_0], P_0 = E[(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T]$$

for  $k \in \{1, \dots, \infty\}$

**- Calculate sigma points:**

$$\chi_{k-1} = [\hat{x}_{k-1} \quad \hat{x}_{k-1} + \gamma\sqrt{P_{k-1}} \quad \hat{x}_{k-1} - \gamma\sqrt{P_{k-1}}]$$

where  $w_0^{(m)} = \frac{\lambda}{\gamma^2}, w_0^{(c)} = \frac{\lambda}{\gamma^2} + (1 - \alpha^2 + \xi),$

$$w_i^{(m)} = w_i^{(c)} = \frac{1}{2\gamma^2}, \quad i = 1, 2, \dots, 2L,$$

$$\lambda = \alpha^2(L + K), \gamma = \sqrt{L + \lambda}, 0 \leq \alpha \leq 1$$

**- Time update:**

$$\chi_{k|k-1} = F[\chi_{k-1}, u_{k-1}]$$

$$\hat{x}_k^- = \sum_{i=0}^{2L} w_i^{(m)} \chi_{i,k|k-1}$$

$$P_k^- = \sum_{i=0}^{2L} w_i^{(c)} [\chi_{i,k|k-1}^* - \hat{x}_k^-][\chi_{i,k|k-1}^* - \hat{x}_k^-]^T + R^v$$

$$\chi_{k|k-1} = [\hat{x}_k^- \quad \hat{x}_k^- + \gamma\sqrt{P_k^-} \quad \hat{x}_k^- - \gamma\sqrt{P_k^-}]$$

$$Y_{k|k-1} = H[\chi_{k|k-1}]$$

$$\hat{y}_k^- = \sum_{i=0}^{2L} w_i^{(m)} Y_{i,k|k-1}$$

**- Measurement update equation:**

$$P_{y_k}^- = \sum_{i=0}^{2L} w_i^{(c)} [Y_{i,k|k-1} - \hat{y}_k^-][Y_{i,k|k-1} - \hat{y}_k^-]^T + R^n$$

$$P_{x_k}^- = \sum_{i=0}^{2L} w_i^{(c)} [\chi_{i,k|k-1} - \hat{x}_k^-][Y_{i,k|k-1} - \hat{y}_k^-]^T$$

$$\kappa_k = P_{x_k}^- P_{y_k}^-^{-1}$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + \kappa_k (y_k - \hat{y}_k^-)$$

$$P_k = P_k^- - \kappa_k P_{y_k}^- \kappa_k^T$$

where  $R^V$ =process noise covariance

$R^n$ =measurement noise covariance

**Table 3.** Algorithm of CDKF(Merwe, 2004)

**- Initialize with:**

$$\hat{x}_0 = E[x_0], P_0 = E[(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T]$$

for  $k \in \{1, \dots, \infty\}$

**- Calculate sigma points:**

$$\chi_{k-1} = [\hat{x}_{k-1} \quad \hat{x}_{k-1} + h\sqrt{P_{k-1}} \quad \hat{x}_{k-1} - h\sqrt{P_{k-1}}]$$

where  $w_0^{(m)} = \frac{h^2 - L}{h^2}, w_i^{(m)} = \frac{1}{2h^2}$

$$w_i^{(c_1)} = \frac{1}{4h^2}, w_i^{(c_2)} = \frac{h^2 - 1}{4h^2}, i = 1, 2, \dots, 2L$$

**- Time update:**

$$\chi_{k|k-1} = F[\chi_{k-1}, u_{k-1}]$$

$$\hat{x}_k^- = \sum_{i=0}^{2L} w_i^{(m)} \chi_{i,k|k-1}$$

$$P_k^- = \sum_{i=0}^{2L} [w_i^{(c)} (\chi_{i,k|k-1} - \chi_{L+i,k|k-1})^2 + w_i^{(c_2)} (\chi_{i,k|k-1} + \chi_{L+i,k|k-1} - 2\chi_{0,k|k-1})^2] + R^v$$

$$\chi_{k|k-1}^* = [\hat{x}_k^- \quad \hat{x}_k^- + h\sqrt{P_k^-} \quad \hat{x}_k^- - h\sqrt{P_k^-}]$$

$$Y_{k|k-1} = H[\chi_{k|k-1}^*]$$

$$\hat{y}_k^- = \sum_{i=0}^{2L} w_i^{(m)} Y_{i,k|k-1}$$

**- Measurement update equation:**

$$P_{y_k}^- = \sum_{i=0}^{2L} [w_i^{(c)} (Y_{i,k|k-1} - Y_{L+i,k|k-1})^2 + w_i^{(c_2)} (Y_{i,k|k-1} + Y_{L+i,k|k-1} - 2Y_{0,k|k-1})^2] + R^n$$

$$P_{x_{\partial k}}^- = \sqrt{w_1^{(c_1)} P_k^-} [Y_{1:L,k|k-1} - Y_{L+1:2L,k|k-1}]^T$$

$$\kappa_k = P_{x_{\partial k}}^- P_{y_k}^-^{-1}$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + \kappa_k (y_k - \hat{y}_k^-)$$

$$P_k = P_k^- - \kappa_k P_{y_k}^- \kappa_k^T$$

where  $R^V$ =process noise covariance

$R^n$ =measurement noise covariance

본 연구에서는 분산점칼만필터에서  $L = 4$ ,  $\alpha = 0.1$  그리고  $\xi = 2$ 로 중심차분칼만필터에서  $h = \sqrt{3}$ 로 설정하였다. 그러나 여기서 설정한 중심차분칼만필터의  $h$ 값이 항상 최적인 것은 아니다(Lim et al,2017).

### 3.3 제공근 분산점칼만필터와 제공근 중심차분칼만필터

분산점칼만필터 및 중심차분칼만필터에서 시그마포인트의 값을 업데이트하기 위해서는 공분산 행렬의 제공근 행렬을 계산하는 것이 필수적이다. 출레스키분해(Cholesky Factorization/CF)는 상태 공분산이 양의 값이라는 조건에서 공분산 행렬의 제공근 행렬을 계산하는데 효율적인 방법이지만 이는 계산적으로 복잡하다. 그러나 제공근 형태의 분산점칼만필터 및 중심차분칼만필터는 출레스키분해에 의해 공분산 행렬의 제공근 행렬을 계산하지 않고 수정된 출레스키 인수 업데이트(Cholesky Factor Update/CFU)를 이용하기 때문에 인수분해과정을 필요로 하지 않는다.

이러한 제공근 형태의 분산점칼만필터와 중심차분칼만필터는 QR Decomposition, 출레스키 인수 업데이트, 최소제곱법(Least square)의 총 3단계의 프로세스가 추가되어 계산적으로는 복잡하지만 출레스키분해를 이용하는 방식보다 속도면에서 우수하며 안정적인 결과를 보여준다. 제공근 분산점칼만필터와 제공근 중심차분칼만필터의 알고리즘은 Table 4와 Table 5와 같다.

### 3.4 코스트 레퍼런스 파티클필터

코스트 레퍼런스 파티클필터는 상태 및 측정방정식의 노이즈 분포에 대한 사전 정보가 필요하지 않다는 특징이 있다. 코스트 레퍼런스 파티클필터를 적용하기 위해서는 알고리즘 내에서 파티클의 품질 측정값으로 사용되는 비용함수(Cost function)와 위험함수(Risk function)를 정의할 필요가 있다. 비용함수는 추정치와 재샘플링(Resampling) 단계의 모호성을 피하기 위해 Strictly convex해야 하며 위험 함수는 알고리즘의 실제 구현을 위해 계산이 간단해야 한다.

코스트 레퍼런스 파티클필터에서 비용함수는 측정값 품질의 척도이며 식 (4) 또는 (5)와 같이 표현된다.

$$C(s_{0:k}|z_{1:k}, \lambda) = \lambda C(s_{0:k-1}|z_{1:k-1}, \lambda) + \Delta C(s_k|z_k) \quad (4)$$

Table 4. Algorithm of SR-UKF(Merwe, 2004)

---

**- Initialize with:**

$$\hat{x}_0 = E[x_0], S_0 = chol\{E[(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T]\}$$

for  $k \in \{1, \dots, \infty\}$

**- Sigma point calculation and time update:**

$$\chi_{k-1} = [\hat{x}_{k-1} \quad \hat{x}_{k-1} + \gamma S_k \quad \hat{x}_{k-1} - \gamma S_k]$$

$$\chi_{k|k-1} = F[\chi_{k-1}, u_{k-1}]$$

$$\hat{x}_k^- = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(m)} \chi_{i,k|k-1}^*$$

$$S_k^- = qr([\sqrt{W_1^{(c_1)}} (\chi_{1:2L,k|k-1}^* - \hat{x}_k^-) \quad \sqrt{R^n}])$$

$$S_k^- = cholupdate\{S_k^-, \chi_{0,k}^* - \hat{x}_k^-, w_0^{(c)}\}$$

$$\chi_{k|k-1} = [\hat{x}_k^- \quad \hat{x}_k^- + \gamma S_k^- \quad \hat{x}_k^- - \gamma S_k^-]$$

$$Y_{k|k-1} = H[\chi_{k|k-1}]$$

$$\hat{y}_k^- = \sum_{i=0}^{2L} w_i^{(m)} Y_{i,k|k-1}$$

**- Measurement update equation:**

$$S_{y_k} = qr([\sqrt{W_1^{(c_1)}} (Y_{1:2L,k|k-1} - \hat{y}_k^-) \quad \sqrt{R^n}])$$

$$S_{y_k}^- = cholupdate\{S_k^-, Y_{0,k} - \hat{y}_k^-, w_0^{(c)}\}$$

$$P_{x_{k|k}} = \sum_{i=0}^{2L} w_i^{(c)} [\chi_{i,k|k-1} - \hat{x}_k^-][Y_{i,k|k-1} - \hat{y}_k^-]^T$$

$$\kappa_k = (P_{x_{k|k}} / S_{y_k}^T) / S_{y_k}$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + \kappa_k (y_k - \hat{y}_k^-)$$

$$U = \kappa_k S_{y_k}^-$$

$$S_k = cholupdate\{S_k^-, U, -1\}$$

where  $R^V$ =process noise covariance  
 $R^n$ =measurement noise covariance

---

$$C_k^{(i)} = \lambda C_{k-1}^{(i)} + \Delta C_k^{(i)} \quad (5)$$

여기서  $\lambda$ 는 이전 파티클의 기여량을 적응적으로 변할 수 있는 망각계수(Forgetting factor)이고  $\Delta C_k$ 는 측정값  $z_k$ 가 주어졌을 때  $s_k$ 의 정확도는 나타내는 증분 비용함수(Incremental cost function)이며  $q \geq 1$ 일 때,  $\|z_k - h(s_k)\|^q$ 에 의해 계산된다. 비용 기반의 랜덤 측정값은 파티클 및 관련 비용(Particle and associated costs) 집합  $\chi_k = \{s_k^{(i)}, C_k^{(i)}\}_{i=1}^N$ 으로 표현되며 여기서 N은 사

**Table 5.** Algorithm of SR-CDKF(Merwe, 2004)

**- Initialize with:**

$$\hat{x}_0 = E[x_0], S_0 = chol\{E[(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T]\}$$

for  $k \in \{1, \dots, \infty\}$

**- Sigma point calculation and time update:**

$$\chi_{k-1} = [\hat{x}_{k-1} \quad \hat{x}_{k-1} + hS_k \quad \hat{x}_{k-1} - hS_k]$$

$$\chi_{k|k-1} = F[\chi_{k-1}, u_{k-1}]$$

$$\hat{x}_k^- = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(m)} \chi_{i,k|k-1}$$

$$S_k^- = qr([\sqrt{W_1^{(c_1)}} (\chi_{1:L,k|k-1}^x - \chi_{L+1:2L,k|k-1}^x)$$

$$\sqrt{W_1^{(c_2)}} (\chi_{1:L,k|k-1}^x + \chi_{L+1:2L,k|k-1}^x - 2\chi_{0,k|k-1}^x)$$

$$S^v])$$

**- Calculate sigma points for measurement update:**

$$\chi_{k|k-1}^* = [\hat{x}_k^- \quad \hat{x}_k^- + hS_k^- \quad \hat{x}_k^- - hS_k^-]$$

**- Measurement update equation:**

$$Y_{k|k-1} = H[\chi_{k|k-1}^*]$$

$$\hat{y}_k^- = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(m)} Y_{i,k|k-1}$$

$$S_{y_k}^- = qr([\sqrt{W_1^{(c_1)}} (Y_{1:L,k|k-1} - Y_{L+1:2L,k|k-1})$$

$$\sqrt{W_1^{(c_2)}} (Y_{1:L,k|k-1} + Y_{L+1:2L,k|k-1} - 2Y_{0,k|k-1})$$

$$S^m])$$

$$P_{x_k y_k} = \sqrt{W_1^{(c_1)}} S_k^- [Y_{1:L,k|k-1} - Y_{L+1:2L,k|k-1}]^T$$

$$\kappa_k = (P_{x_k y_k} / S_{y_k}^T) / S_{y_k}^-$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + \kappa_k (y_k - \hat{y}_k^-)$$

$$U = \kappa_k S_{y_k}^-$$

$$S_k = cholupdate\{S_k^-, U, -1\}$$

where  $R^V$  = process noise covariance

$R^n$  = measurement noise covariance

**Table 6.** Algorithm of CRPF(Xu, 2006; Lim, 2013)

**- Initialization:**

Generate  $s_0^{(i)} \sim p_0(s_0)$ , and assign the cost  $C_0^{(i)} = 0$ , and initialize  $\sigma_0^{2,(i)}$  for  $i = 1, \dots, M$

**Recursive update for  $k = 1, \dots, K$**

**- Compute:** (for  $i = 1, \dots, K$ )

$$R_k^{(i)} = \lambda C_{k-1}^{(i)} + \|z_k - h[g(s_{k-1}^{(i)})]\|^q \text{ for } q \geq 1, \text{ and}$$

$$\text{PMF, } \hat{\pi}_k^{(i)} \propto \mu(R_k^{(i)}) = \frac{1}{(R_k^{(i)} - \min\{R_k^{(i)}\}_{i=1}^M + \delta)^\beta}$$

**- Selection, or resampling**

$$\hat{\chi}_{k-1} = \{s_{k-1}^{(i)}, \hat{C}_{k-1}^{(i)}\}_{i=1}^M \text{ according to } \hat{\pi}_k^{(i)}$$

where “ $\hat{\phantom{x}}$ ” denotes resampled version of the particle set.

**- Particle propagation** (for  $i = 1, \dots, M$ )

$$s_k^{(i)} \sim p_k(s_k | \hat{s}_{k-1}^{(i)}) = N(g(s_{k-1}^{(i)}), \sigma_{k-1}^{2,(i)} I_{[s]})$$

where  $N(a, b^2)$  denotes a Gaussian distribution with the mean of  $a$  and variance of  $b^2$ ,

$$\sigma_k^{2,(i)} = \frac{k}{k-1} \sigma_{k-1}^{2,(i)} + \frac{\|s_k^{(i)} - g(s_{k-1}^{(i)})\|^2}{k \times \dim[x]}$$

**- Compute the cost** (for  $i = 1, \dots, M$ )

$$C_k^{(i)} = \lambda C_{k-1}^{(i)} + \|z_k - h(s_k^{(i)})\|^q \text{ and normalized PMF,}$$

$$\pi_k^{(i)} \propto \mu_2(C_k^{(i)}) = \frac{1}{(C_k^{(i)} - \min\{C_k^{(i)}\}_{i=1}^M + \delta)^\beta}$$

where  $\alpha, \beta > 0$ .

**- Estimation**

$$s_k = s_k^{mean} = \sum_{i=1}^M \pi_k^{(i)} s_k^{(i)}$$

용된 파티클의 개수이다.

또한 위험함수는 식 (6)과 같이 정의된다.

$$R(s_{k-1}|z_k) = \Delta C(E[s_k|z_k]) = \Delta C(g(s_{k-1})|x_k) \quad (6)$$

위험함수는 측정값  $z_k$ 가 주어졌을 때  $s_k$ 의 적절성을 나타내며 비용 증가분  $\Delta C_k^{(i)}$ 의 예측값이다. 그러면 식 (7)과 같이 예측비용함수(Predictive cost function)를 정의할 수 있다.

$$R_k^{(i)} = \lambda C_{k-1}^{(i)} + R(s_{k-1}^{(i)}|z_k) \quad (7)$$

확률질량함수(Probability mass function)는 위험함수에 의해  $\delta, \beta > 0$ 에 대해 식 (8)과 같이 계산된다.

$$\hat{\pi}_k^{(i)} \propto \mu_1(R_k^{(i)}) = \frac{1}{R_k^{(i)} - \min\{R_k^{(i)}\}_{i=1}^N + \delta^\beta} \quad (8)$$

위에서 정의된 매개 변수들을 사용하여 알고리즘은 위험평가, 재샘플링, 입자 전파(Particle propagation)단계, 시간에 따른 비용 업데이트를 반복한다. 자세한 알고리즘은 Table 6에 표현하였으며 알고리즘에 대한 상세한 설명은 Xu(2006)를 참고하기 바란다.

#### 4. 시뮬레이션 실행 및 결과 분석

본 장에서는 앞에서 언급한 필터들을 적용한 표적추적 시뮬레이션을 통해 각 필터들의 성능을 추정값의 오차와 처리속도 면에서 비교한다. 샘플링 주기  $T=1$ 로 설정하였으며 표적의 초기 상태값은  $[10 \ -5 \ -0.2 \ 0.2]^T$ , 초기 추정값은  $[5 \ 5 \ 0 \ 0]^T$ 로 가정하였다. 측정방정식의 Bearing 노이즈값은 0.01, 0.1, 1 그리고 Range 노이즈값은 0.1, 1, 10으로 설정하였고 각각의 경우에 대해 표준정규분포를 따르는 랜덤값을 곱하여 시뮬레이션을 수행하였으며 코스트 레퍼런스 파티클필터의 파티클의 개수  $N=100, 300, 500$ 로 설정하였다.

각 알고리즘의 성능비교를 위해 몬테카를로 시뮬레이션을 실행하였는데 표적 추적 시뮬레이션을 각각의 확률 변수에 대해 3000번 시행하여 각 알고리즘들의 평균제곱근오차(Mean Square Error)값을 계산하였다. 몬테카를로 시뮬레이션에 필요한 확률 변수로는 속도의 노이즈, 즉

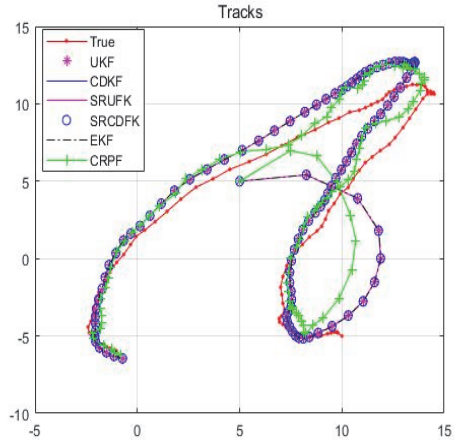


Fig. 2. Example of Simulation

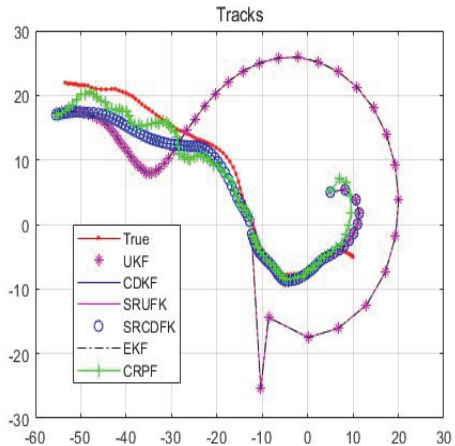


Fig. 3. Example of Simulation

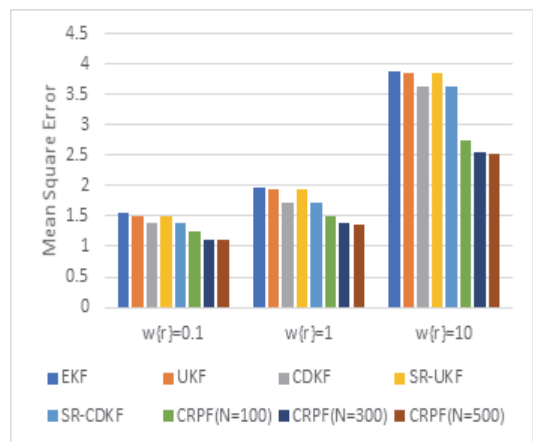


Fig. 4. Mean Square Error( $w_\beta = 0.01$ )

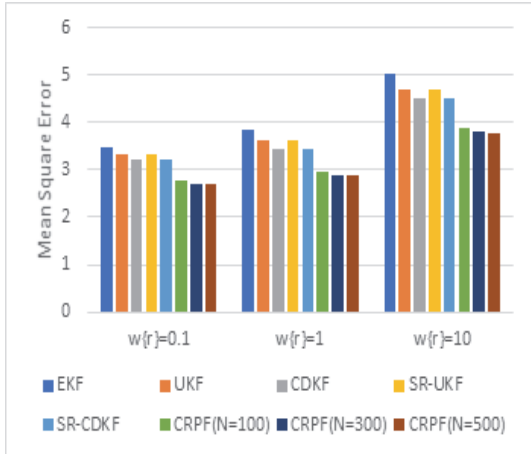


Fig. 5. Mean Square Error( $w_\beta = 0.1$ )

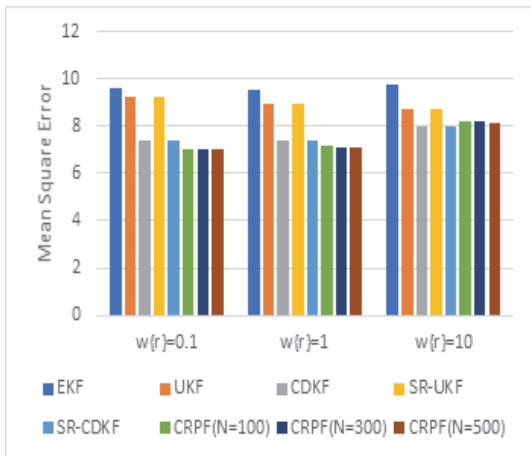


Fig. 6. Mean Square Error( $w_\beta = 1$ )

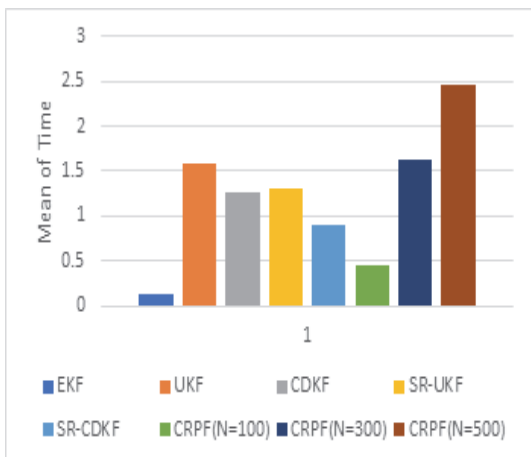


Fig. 7. Mean of Time

가속도를 변수로 사용하였고 변수의 값은 위에서 설정한 Bearing과 Range의 노이즈 값과 같다. 시뮬레이션은 매트랩 프로그램을 이용하였으며 실험 결과에 대해 평균제곱근오차값과 각 알고리즘들의 프로세스 수행시간을 측정하였다.

Figure 2,3은 시뮬레이션의 예를 보여준다. Figure 2처럼 상대적으로 표적을 잘 추적하는 경우 외에도 Figure 3처럼 표적을 잃어버리는 경우도 존재한다. Figure 4~6은 노이즈 변화에 따른 필터들의 평균제곱근오차값을 보여준다. 각도와 거리에 대한 노이즈가 상승할수록 평균제곱근오차가 상승하는 것을 볼 수 있으며 확장칼만필터와 확장칼만필터의 변종들 중에는 대부분의 경우 중심차분칼만필터와 제곱근 중심차분칼만필터가 우수한 성능을 보여주는 것을 알 수 있다. 이는 분산점칼만필터와 중심차분칼만필터 그리고 제곱근 형태의 필터들은 시그마포인트를 이용한 방식으로 비선형문제에 대해 확장칼만필터에 비해 수렴성 측면에서 안정적이기 때문이며 중심차분칼만필터가 분산점칼만필터에 비해 더 좋은 결과를 보여주는 이유는 시그마포인트를 이용한 방식의 특성상 최적의 성능을 위해  $\alpha, \xi, \kappa$  그리고  $h$ 와 같은 매개 변수의 프로세스를 필요로 하는데 3가지의 매개 변수를 사용해야 하는 분산점칼만필터와 다르게 중심차분칼만필터는 오직 하나의 매개 변수만 선택하면 되기 때문에 분산점칼만필터보다 우수한 성능을 보여준다.

코스트 레퍼런스 파티클 필터의 경우 파티클의 개수에 따라 알고리즘 성능의 차이가 존재한다는 것을 알 수 있으며 본 논문에서 수행한 가정에서는 파티클의 개수  $N=100$ 인 경우에도 타 필터들과 비교하였을 때 우수한 결과를 보여줌을 알 수 있다.

Figure 7은 각 필터들에 대한 프로세스 시간을 비교한 것이다. 결과에서 볼 수 있듯이 제곱근 형태의 분산점칼만필터 및 중심차분칼만필터는 본래의 필터들과 동일한 성능을 보여주면서도 프로세스 처리속도가 크게 감소한다는 사실을 알 수 있다. 이는 제곱근 형태의 필터들은 행렬분해단계를 콜레스키 인수 업데이트 방식으로 대체하기 때문에 제곱근 형태가 아닌 알고리즘과 동일한 수치적 결과를 보여주면서 처리속도면에서 효율적인 결과를 보여준다.

또한 코스트 레퍼런스 파티클의 경우 파티클에 개수에 따라 프로세스 수행시간이 비례하여 증가하며  $N=300, 500$ 인 경우에는 타 필터들에 비해 오히려 프로세스 처리속도가 증가한다는 것을 알 수 있다. 따라서 시뮬레이션 시행 시 코스트 레퍼런스 파티클 필터의 파티클 개수를



정확도와 처리속도를 고려하여 적절하게 설정해야한다.

## 5. 결론

본 논문에서는 확장칼만필터와 확장칼만필터의 변종들(분산점 칼만필터, 중심차분 칼만필터, 제공근 분산점 칼만필터, 제공근 중심차분 칼만필터) 그리고 코스트 레퍼런스 파티클필터를 사용하여 2차원 공간에서 무작위로 움직이는 표적을 추적하는 시뮬레이션을 시행하였다.

거리와 각도의 노이즈가 불확실하게 주어졌다고 가정한 후 각각의 필터들을 적용하였을 때 확장칼만필터의 변종들 중에서는 제공근 중심차분 칼만필터가 가장 우수한 성능을 보여주었으며 코스트 레퍼런스 파티클필터는 추적 성능 및 프로세스 처리속도면에서 확장칼만필터의 변종들보다 우수한 결과를 보여주는 것을 확인하였다.

## References

K.Ito and K. Xiong (2000) "Gaussian filters for nonlinear filtering problem", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(5), 910-927

S.J. Julier, J. K. Uhlmann and H. F. Durrant-Whyte (1995) "A new approach for filtering nonlinear systems", *Proceedings of the American Control Conference*, 3, 1628-1632

R. E. Kalman (1960) "A new approach to linear filtering and prediction", *Transactions of the ASME-Journal of Basic Engineering*, 82, 35-45

J. Lim (2013) "A target tracking base on bearing and range measurement with unknown noise statistic", *Journal of Electrical Engineering and Technology*, 8(6), 1520-1529

J. Lim, M. Shin and W. Hwang (2017) "Variants of extended Kalman filtering approaches for Bayesian tracking", *International Journal of Robust and nonlinear Control*, 27(2), 319-346

R. Van der Merwe and E. A. Wan (2001) "The Square-root unscented Kalman filter for state and parameter-estimation". *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 6, 3461-3464

R. Van der Merwe (2004) "Sigma-point Kalman filters for probabilistic inference in dynamic state-space models", *Science & Engineering, Oregon health & Science University, Portland*

M. Norgaard, N. Poulsen and O. Rayn (2000) "New developments in state estimation for nonlinear systems", *Automatica*, 36(11)

S. Xu, (2006) "Particle filtering for systems with unknown noise probability distribution", *Electrical and Computer Engineering, Stony Brook University*



**신 명 인** (myoungin@sju.ac.kr)

2010 고려대학교 학사(수학)  
 2013 고려대학교 석사(응용수학)  
 2013~ 2017 해군사관학교 수학과 수학교관  
 2015~ 2017 해군사관학교 수학과 조교수  
 2017 고려사이버대학교 학사(전기전자공학)  
 2017~ 현재 세종대학교 국방시스템공학과 박사과정(수중음향 및 신호처리)

관심분야 : 칼만필터, 압축센싱 신호처리, Hyperbolic conservation law



**홍 우 영** (wyhong@sejong.ac.kr)

1982 해군사관학교 전자공학과 학사  
 1985 연세대학교 전자공학과 석사  
 1991 미국 University of Minnesota 전기공학과 박사  
 1985~ 2013 해군사관학교 교수  
 1997~ 2000 미국 해군사관학교 교환교수  
 2013~ 현재 세종대학교 국방시스템공학과 교수

관심분야 : 수중음향 신호처리, 무기체계 효과도 분석