Journal for History of Mathematics
Vol. 31 No. 5 (Oct. 2018), 211–222
http://dx.doi.org/10.14477/jhm.2018.31.5.211

Conservation Laws and Symmetry of Differential Equations — stories about E. Noether's Theorem—

보존률과 미분방정식의 대칭성

—뇌터의 정리를 중심으로—

Han Chong-Kyu 한종규

This paper surveys the theory of symmetry group of differential equations. A proof of the simplest version of the Noether's theorem on conservation laws has been presented with examples in the classical mechanics. As a new approach to the conservation laws the theory of characteristic cohomology due to S. H. Wang and others has been presented.

Keywords: Conservation laws, symmetry of differential equations, Noether's theorem; 보존률, 미분방정식의 대칭성, 뇌터 정리.

MSC: 01A55, 01A60, 58J70

1 보존률의 역사적 배경

1.1 1915년

아인슈타인은 괴팅엔 대학에 와서 거의 완성단계에 와 있었던 그의 일반상대성 이론을 여섯번에 걸친 강의로 소개하였는데 여기 힐베르트와 클라인도 참석하고 있었다. 당시 힐베르트는 그의 변분문제의 원리(variational principle)에 입각하여 중력장 방정식을 독립적으로 유도할 수 있었다. 그러면서 일반상대성이론이 에너지 보존법칙에 위배되지 않는가 하는 의문을 제기하여 이 문제를 아인슈타인과 클라인과 함께 토의하다가 불변식론의 전문가인 뇌터를 괴팅엔으로 불러 자문을 구하였다고 한다. 그때까지 뇌터는 에를랑엔 대학에서 박사학위 후 7년간이나 무보수 강사노릇을 하고 있었다. 뇌터는 힐베르트의 의문을 해결해 주었을 뿐 아니라 변분구조의 대칭성으로부터 보존률이 발생한다는 일반적인 사실을 밝히고 보존률의 지표를 구체적으로 계산하게 하는 (constructible) 정리를 발표하였다.

Han Chong-Kyu: Dept. of Applied Math. of Seoul National Univ. E-mail: ckhan@snu.ac.kr
Received on May 10, 2018, revised on Sep. 22, 2018, accepted on Oct. 10, 2018.

뇌터의 보존률 정리는 20세기 이론물리학의 발전에 심대한 영향을 끼쳤다.

1.2 고전역학 범위 안에서

뇌터의 보존률 정리와 일반상대성이론이나 게이지 이론등과의 관련성은 필자의 이해범위 밖에 있다. 필자는 다만 고전역학의 에너지 보존법칙, 각운동량 보존법칙과 열방정식, 파동방정식의 예를 들어 뇌터의 보존률 정리의 가장 소박한 버전 하나를 소개하고자 한다. 이글은 2017년 3월31일 카이스트 정오의 수학산책에서, 그리고 2018년 3월15일 고려대 기하학세미나에서 강의한 내용을 정리한 것이다. 강의를 들어주신 카이스트와 고려대 여러분께 감사를 드린다.

2 뇌터의 보존률

뇌터의 이론에서 보존률이란

$$\mathrm{Div}\,\mathbb{P} = 0 \tag{1}$$

꼴의 편미분 방정식을 의미한다. 좀 더 구체적으로 말하기 위하여 몇가지 기호를 정의하자. $x = (x^1, \ldots, x^p)$를 독립변수, $u = (u^1, \ldots, u^q)$를 종속변수, 함수 $u(x)$의 n계까지의 모든 편미분을 $u^{(n)}$이라 표시하고 $(x, u^{(n)})$들의 집합을 $u(x)$의 n-젵 공간이라 부르자. n-젵의 함수 $P(x, u^{(n)})$에 대한 x^j 방향의 전미분 (total derivative) $D_{x^j}P$이란 연쇄법칙에 의한 미분, 예컨데 $p = q = 1$일 때

$$D_x P(x, u, u') = P_x + P_u u' + P_{u'} u''$$

을 의미한다. (1)에서 $\mathbb{P}(x, u^{(n)}) = (P_1, \ldots, P_p)$는 n-젵의 함수이며

$$\mathrm{Div}\,\mathbb{P} := D_{x^1} P_1 + \cdots + D_{x^p} P_p$$

를 $\mathbb{P}$의 발산(divergence) 이라 부른다. 물리계가 특정한 (연립)편미분방정식

$$F(x, u^{(n)}) = 0, \tag{2}$$

의 해로 정의될 때 (2)의 임의의 해 $u(x)$에 대하여 (1)이 참이면 (1)을 (2)에 대한 보존률이라 부른다. (1)은 (2)이외의 다른 방정식에 대한 보존률이 될 수도 있다. 자명하게 하나의 보존률은 그 자신에 대한 보존률이다. 하나의 보존률로 부터 여러개의 더 포괄적인 보존률이 발생할 수 있다. 화살표 $A \to B$는 "B 는 A의 보존률" 이란 의미라 하면 보존률의 발생과 그들의 관계는 예컨데 아래 도표와 같다.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & \curvearrowleft & & & & \\
\text{물리계(PDE)} & \longrightarrow & \text{보존률} & & & & \\
 & & \curvearrowleft & \searrow & \curvearrowleft & \nearrow & \\
\text{물리계(PDE)} & \longrightarrow & \text{보존률} & \longrightarrow & \text{보존률} & \longrightarrow & \\
 & & & & & & \\
\text{물리계(PDE)} & \nearrow & & \searrow & \curvearrowleft & & \\
 & & & & \text{보존률} & &
\end{array}
$$

2.1 어떤 양이 보존되는가?

보존률 (1)에서 $p = 1$인 경우, 즉 상미방의 경우 독립변수를 t(시간)이라 부른다면

$$D_t P(x, u, u', \ldots,) = 0,$$

즉 P는 시간이 흘러도 불변하는 양이다. 독립변수가 $(t, x^1, \ldots, x^p)$일때 $\mathbb{P} = (T, P_1, \ldots, P_p)$ 라하면 (1)은

$$D_t\ T + D_1 P_1 + \cdots + D_p P_p = 0 \tag{3}$$

이라 쓸 수 있다. (1)의 임의의 해 $u(x)$에 대하여 (3)을 x공간의 영역 U에서 적분하면 발산정리 (divergence theorem)에 의하여

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\int_U T\ dV(x) &= \int_U D_t T\ dV(x) \\
&= -\int_U \mathrm{Div}_x\ (P_1, \ldots, P_p)\ dV(x) \\
&= -\int_{\partial U} (P_1, \ldots, P_p) \cdot \vec{\nu}\ d\sigma(x)
\end{aligned}
$$

이고 양변을 $a \le t \le b$에서 적분하여

$$\int_U T\, dV(x)|_{t=a}\ - \int_U T\, dV(x)|_{t=b} = -\int_a^b \int_{\partial U} (P_1, \ldots, P_p) \cdot \vec{\nu}\ d\sigma(x)\ dt \tag{4}$$

을 얻는다. (4)의 우변은 $(P_1, \ldots, P_p)$의 총 플럭스(flux)이다. (4)의 우변이 영이면 $\int_U T\ dV(x)$가 보존되는 양이다.

2.2 보존률의 예

우리가 학교에서 배우는 미분방정식중 독립변수 t를 포함하는 것들은 대부분 (전부가 아니라면) 보존률이라 생각한다. 그중 4가지 예를 들면

1) 고전역학의 에너지 보존법칙: 2-체문제(2-body problem)의 경우

$$D_t \left(\frac{1}{2} m \dot{\mathbb{X}} \cdot \dot{\mathbb{X}} + U(\mathbb{X}) \right) = 0,$$

단 $\mathbb{X} = (x^1, x^2, x^3), \dot{\mathbb{X}} = (\frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \frac{dx^3}{dt}),\ U(\mathbb{X}) = -\frac{mG}{|\mathbb{X}|},\ m, G$는 상수

2) 고전역학의 각운동량 보존법칙: 2-체문제의 경우

$$D_t(\mathbb{X} \cdot \dot{\mathbb{X}}) = 0.$$

3) $u(t,x,y)$에 대한 파동방정식:

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = \mathrm{Div}(u_t, -u_x, -u_y) = 0$$

4) $u(t,x,y)$에 대한 열방정식:

$$u_t - u_{xx} - u_{yy} = \mathrm{Div}(u, -u_x, -u_y) = 0.$$

등이 있다.

3 미분방정식의 대칭성

주어진 미방의 해를 해로 보내는 변환들의 집합을 미방의 대칭군이라 부른다. 독립변수 x와 종속변수 u의 공간 $\{(x,u)\}$의 벡터장

$$V := \sum_{j=1}^{p} \xi^j(x,u)\frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{\alpha=1}^{q} \phi_\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha} \tag{5}$$

의 흐름(flow)

$$\exp tV, \quad |t| \le \epsilon$$

이 대칭군이면 이 벡터장을 무한소 대칭(infinitesimal symmetry)이라 부른다. 무한소 대칭들의 집합은 리 대수를 이룬다. 그러나 미방의 대칭성을 해의 존재와 무관하게 정의하기 위하여 0-젵 $\{(x,u)\}$의 변환을 n-젵공간 (n은 불특정 양정수)으로의 연장(prolongation)을 생각한다. 즉 0-젵공간의 변환 g는 n-젵공간의 변환 $\mathrm{pr}\, g$로 아래와 같이 자명하게 연장된다. 즉 한 점에서의 n-젵 $(x_0, u_0^{(n)})$를 미분값으로 갖는 임의의 함수 $u = f(x)$를 택하여 $(g \circ f)(x,u)$의 n-젵로 대응시킨다. 마찬가지로 0-젵공간의 벡터장은 n-젵공간의 벡터장으로 연장된다. 즉

$$\mathrm{pr}\, V := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{pr} \exp tV.$$

미분방정식 (2)로 정의된 $(x, u^{(n)})$ 공간의 부분다양체를 젵-해집합이라 부르자. (x,u)의 변환 g의 연장 $\mathrm{pr}\, g$가 젵–해집합을 그 자신으로 보내는 그런 g의 집합을 (2)의 대칭군이라 부른다. 그리고 $\mathrm{pr}\, V$의 흐름이 젵-해집합을 불변으로 하면, 즉 젵-해집합에 접하면 V를 (2)의 무한소대칭이라 부른다. 여기에 간단히 서술한 미방의 대칭성은 리(Sophus Lie)의 점대칭(point symmetry)의 개념이다. 미방의 대칭성의 개념은 아래 순서로 진화해 갔다.

- ✓ 리의 점대칭
- ✓ 카르탕 (E. Cartan, 1869-1951) 의 내부대칭(internal symmetry)
- ✓ 뇌터 (E. Noether) 의 일반화된 대칭

✓ 미분작용소로서의 대칭성

그리고 이 글의 끝부분에 소개할 미방의 특성 코호몰로지류로 정의된 보존률도 교묘하게 숨겨진 대칭성이라 말할 수 있을 것이다.

벡터장 (5)의 성분 (ξ^j, ϕ_α)에 대하여

$$Q_\alpha := \phi_\alpha - \sum_{j=1}^{p} \xi^j u_j^\alpha$$

라 두고 계산상의 편의를 위하여 형식적인 벡터장과 그 연장

$$V_Q := \sum_{\alpha=1}^{q} Q_\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

$$\mathrm{pr}\, V_Q := \sum_J (D_J Q_\alpha) \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} \tag{6}$$

를 도입하면

$$\mathrm{pr}\, V = \mathrm{pr}\, V_Q + \sum_{j=1}^{p} \xi^j D_j \tag{7}$$

이 성립한다. 벡터장의 연장계산으로 (7)을 보일 수 있다 (참고문헌 [4] §2.3 참조).

3.1 변분 대칭성

변분문제란 적분

$$\mathcal{L}(u) := \int L(x, u^{(n)})dx, \qquad \text{단 } dx := dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^p \tag{8}$$

을 최소로 하는 함수 $u(x)$를 구하는 문제이다. 변문문제의 임계 함수 $u(x)$는 오일러-라그랑주 방정식

$$E_\alpha L := \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} + \sum_{|J|=1}^{n} (-D)^J \frac{\partial L}{\partial u_J^\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, q \tag{9}$$

를 만족한다. 여기서 $J = (j_1, j_2, \cdots)$는 다중지표, $(-D)^J := \cdots(-D_{x^{j_2}})(-D_{x^{j_1}})$ 등이다.

공간 $\{(x, u)\}$의 변환 g로 변수변환하여도 (9)의 피적분함수 L의 형태가 바뀌지 않는 g들의 집합을 변분문제의 대칭군이라 부른다. 변분문제의 대칭군은 오일러-라그랑주 방정식의 대칭군의 부분군이다. $\{(x, u)\}$공간의 벡터장 V가 무한소 변분대칭 (infinitesimal variational symmetry) 이라 함은 1-매개변수군

$$\exp tV, \quad |t| \le \epsilon,$$

가 변분대칭군임을 의미한다. 벡터장 (5)가 변분문제 (1)의 무한소 변분대칭이 될 필요충분조건은

$$(\mathrm{pr}\, V)L + L \,\mathrm{Div}\, \xi = 0 \tag{10}$$

이다. (10)의 첫항은 젵공간의 함수 L에 대한 젵공간의 벡터장 $\mathrm{pr}\, V$ 방향으로의 미분이고 두번째 항은 독립변수 x 공간의 벡터장 ξ의 발산에 L을 곱한 제트공간의 함수이다. 벡터장의 연장 계산으로 (10)를 보일수 있다 (참고문헌 [4]의 정리 4.12 참조).

3.2 뇌터의 정리

변분문제의 대칭군의 차원만큼 오일러-라그랑주 방정식의 보존률이 존재한다. 일반적으로 $\mathrm{Div}\,\mathbb{P} = 0$가 연립미방 $E_\alpha = 0, \alpha = 1, \dots, q$의 보존률이면 이와 동치인 보존률 $\mathrm{Div}\,\tilde{\mathbb{P}} = 0$과 젵공간의 함수 $(Q_1, \dots, Q_q)$가 존재하여

$$\mathrm{Div}\,\tilde{\mathbb{P}} = \sum_{\alpha=1}^{q} Q_\alpha E_\alpha$$

가 성립한다. 이때 $(Q_1, \dots, Q_q)$을 보존률의 지표(characteristic)라 부른다. 뇌터 정리의 점대칭 버전은 다음과 같이 서술된다.

정리 1: 미지함수 $u(x)$, $u = (u^1, \dots, u^q)$, $x = (x^1, \dots, x^p)$에 대한 변분문제 $\int L(x, u^{(n)})dx$에 대하여 무한소 변분대칭

$$V = \sum_{j=1}^{p} \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{\alpha=1}^{q} \phi_\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

가 존재한다고 하자. 각 $\alpha = 1, \dots, q$에 대하여 $Q_\alpha := \phi_\alpha - \sum_{j=1}^{p} \xi^j u_j^\alpha$라 두면 $(Q_1, \dots, Q_q)$는 오일러-라그랑주 방정식 $E_\alpha(L) = 0, \alpha = 1, \dots, q$의 보존률의 지표이다. 즉 p개의 젵공간의 함수 $\mathbb{P} = (P_1, \dots, P_p)$가 존재하여

$$\mathrm{Div}\ \mathbb{P} = \sum_{\alpha=1}^{q} Q_\alpha\ E_\alpha(L) \tag{11}$$

이 성립한다.

3.3 뇌터 정리의 증명

V는 무한소 변분대칭이므로 (10)에 의하여

$$\begin{aligned}
0 &= (\mathrm{pr}\,V)L + L\,\mathrm{Div}\,\xi, \quad (7)\text{에 의하여} \\
&= (\mathrm{pr}\,V_Q)L + \sum_{j=1}^{p} \xi^j (D_j L) + L\ \ \mathrm{Div}\,\xi, \\
&\qquad \text{마지막 두 항은 미분의 곱의 공식에 의하여} \\
&= (\mathrm{pr}\,V_Q)L + \mathrm{Div}(L\xi), \\
&\qquad (6)\text{에 의하여} \\
&= \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_{|J|=0}^{n} (D_J Q_\alpha) \frac{\partial L}{\partial u_J^\alpha} + \mathrm{Div}(L\xi), \\
&\qquad \text{첫항은 미분의 곱의 공식에 의하여} \\
&= \sum_{\alpha=1}^{q} Q_\alpha \sum_{|J|=0}^{n} (-D)_J \frac{\partial L}{\partial u_J^\alpha} + \text{다른 항들} + \mathrm{Div}(L\xi),
\end{aligned} \tag{12}$$

이 성립한다. 마지막 줄에서 "다른 항들" 이란 곱의 미분 $v'u = (uv)' - uv'$ 계산시 발생한 $(uv)'$들의 총체인데 이들의 합은 어떤 제트공간의 함수들 $\mathbb{A} := (A_1, \ldots, A_p)$에 대한 $\mathrm{Div}\,\mathbb{A}$ 꼴로 쓸 수 있다. 또한 (12)의 마지막 줄 첫항의 두번째 인수는 오일러-라그랑주 방정식 (9)의 우변이므로 (12)로부터

$$\sum_{\alpha=1}^{q} Q_\alpha E_\alpha(L) + \mathrm{Div}(\mathbb{A} + L\xi) = 0 \tag{13}$$

를 얻는다. 이제 $\mathbb{P} := -(\mathcal{A} + L\xi)$라 둠으로 (11) 을 얻는다. □

4 2체문제에 관한 뉴턴 운동방정식과 변분대칭성

$\mathbb{R}^3$의 원점에 질량 1의 물체가 고정되어 있고 질량 m의 제2의 물체가 위치 $\mathbb{X} = (x^1, x^2, x^3)$에 있다고 하자. $\mathbb{X}(t)$에 대한 변분문제

$$\mathcal{A}(\mathbb{X}(t)) := \int \underbrace{(1/2\ m\dot{\mathbb{X}} \cdot \dot{\mathbb{X}} - U(\mathbb{X}))}_{L}\, dt, \quad \text{단 } U(\mathbb{X}) = -\frac{mG}{|\mathbb{X}|} \tag{14}$$

을 생각하자. (14)를 $\mathbb{X}(t)$에 대한 액션(action)이라 부른다. 액션을 최소로 하는 $\mathbb{X}(t)$는 각 $\alpha = 1, 2, 3$에 대하여 오일러-라그랑주 방정식

$$E_\alpha(L) := -\frac{\partial U}{\partial x^\alpha} - m\ddot{x}^\alpha = 0, \qquad \text{단} \quad \frac{\partial U}{\partial x^\alpha} = \frac{mG}{|\mathbb{X}|^2}\frac{x^\alpha}{|\mathbb{X}|} \tag{15}$$

을 만족한다. (15)는 만유인력에 의한 운동법칙, 즉 뉴턴의 운동방정식이다. 일견하여 알 수 있는 변분대칭성이 두가지 있다. 그 하나는 시간좌표의 평행이동 $t \mapsto t + a$, 무한소변환으로는 $\frac{\partial}{\partial t}$인데 이 변분대칭성은 에너지 보존법칙에 해당한다. 다른 하나는 공간좌표의 회전 $\mathbb{X} \mapsto A\mathbb{X}$, 여기서 $\mathbb{X}$는 열(column)벡터, $A \in SO(3)$이고 무한소변환으로는

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \phi_\alpha(\mathbb{X})\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \quad \text{단} \ \left[\frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^\beta}\right] \in so(3) \tag{16}$$

인데 이 변분대칭성은 각운동량 보존법칙에 대응된다.

4.1 에너지 보존법칙

뇌터 정리(정리1)의 증명을 따라 2체문제의 에너지 보존법칙을 이끌어 내보자. 시간축의 평행이동을 생성하는 무한소 변환 $\frac{\partial}{\partial t}$에 대하여는 $\xi = 1$, $Q_\alpha = -\dot{x}^\alpha$, $V_Q = \sum_{\alpha=1}^{3}(-\dot{x}^\alpha)\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$, 이므로 이를 (12) 의 네번째 등식

$$\sum_{\alpha=1}^{q}\sum_{|J|=0}^{n}(D_J Q_\alpha)\frac{\partial L}{\partial u_J^\alpha} + \mathrm{Div}(L\xi) = 0$$

에 적용하면

$$\sum_{\alpha=1}^{3}\left(-\dot{x}^\alpha\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - \ddot{x}^\alpha\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\right) + D_t L = 0 \tag{17}$$

이 된다. 합산기호안의 두번째 항 $\ddot{x}^\alpha \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}$ 은 곱의 미분공식에 의하여

$$D_t\left(\dot{x}^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\right) - \dot{x}^\alpha D_t\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\right)$$

이므로 이를 (17)에 대입하면

$$\sum_{\alpha=1}^{3}(-\dot{x}^\alpha)\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - D_t\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\right)\right)}_{E_\alpha(L)} + D_t\underbrace{\left(\sum_{\alpha=1}^{3}(-\dot{x}^\alpha)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} + L\right)}_{-P} = 0 \tag{18}$$

이 된다. (14)의 L로부터 P를 계산하면 불변량 P는

$$\frac{1}{2}m\sum_{\alpha=1}^{3}(\dot{x}^\alpha)^2 + U(\mathbb{X}),$$

즉 에너지이다.

4.2 각운동량 보존법칙

같은 요령으로 각운동량 보존법칙을 이끌어 내보자. 변분문제 (14)에 대하여 등각속도 회전운동의 속도벡터 $V := -x^2\dfrac{\partial}{\partial x^1} + x^1\dfrac{\partial}{\partial x^2}$는 무한소 대칭이다. 이 경우 $\xi(t,\mathbb{X}) = 0$, $\phi_1(t,\mathbb{X}) = -x^2$, $\phi_2(t,\mathbb{X}) = x^1$, $\phi_3(t,\mathbb{X}) = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} Q_1(t,\mathbb{X},\dot{\mathbb{X}}) &= -x^2 \\ Q_2(t,\mathbb{X},\dot{\mathbb{X}}) &= x^1 \\ Q_3(t,\mathbb{X},\dot{\mathbb{X}}) &= 0 \end{aligned}$$

이다. 이 경우 (12)의 네번째 등식은 두번째 항이 영이어서

$$-x^2\frac{\partial L}{\partial x^1} + x^1\frac{\partial L}{\partial x^2} + (-\dot{x}^2)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^1} + \dot{x}^1\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^2} = 0 \tag{19}$$

이 된다. (19)의 세번째 항과 네번째 항의 합은 미분의 곱의 공식에 의하여

$$D_t\left(-x^2\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^1}\right) + x^2 D_t\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^1}\right) + D_t\left(x^1\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^2}\right) - x^1 D_t\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^2}\right)$$

이 되므로 (19)는

$$\begin{aligned} &-x^2\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial x^1} - D_t\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^1}\right)\right)}_{E_1(L)} + x^1\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial x^2} - D_t\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^2}\right)\right)}_{E_2(L)} \\ &+ D_t\underbrace{\left(-x^2\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^1} + x^1\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^2}\right)}_{-P} = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

이 된다. 보존되는 양은 P이다. 각운동량 $mV \times \dot{V}$의 방향은 x^3-축 방향이며 크기는 $P = m(x^2\dot{x}^1 - x^1\dot{x}^2)$이다. 무한소 회전운동의 다른 두 생성원 즉 $W := -x^3\dfrac{\partial}{\partial x^2} + x^2\dfrac{\partial}{\partial x^3}$, $X := -x^1\dfrac{\partial}{\partial x^3} + x^3\dfrac{\partial}{\partial x^1}$에 대하여도 같은 이유로 각운동량이 보존된다.

5 미분아이디얼과 특성 코호몰로지

5.1 미분아이디얼

이제 우리는 보존률에 대한 새로운 접근방법 [1, 2]를 [5]을 통해서 필자가 이해한 만큼을 소개하고자 한다. 먼저 미분방정식에 대응하는 외대수(exterior algebra)의 미분 아이디얼 (differential ideal)을 정의하겠다. M^m을 m차원의 연결, 유향(oriented)다양체, 혹은 한 기준점 근방의 작은 열린 구(open ball)라 하자. 정수 $k = 0, 1, \ldots, m$에 대하여 Ω^k를 M 위의 모든 미분 k-형식 (differential k-form)의 집합이라 하자 (Ω^0는 M 위의 C^∞ 실함수의 집합). 집합 $\Omega^* := \bigoplus_{k=0}^m \Omega^k$는 대수적 연산 $\wedge$와 외미분(exterior differentiation)연산 d와 함께 외대수 (exterior algebra)를 이룬다.

정의 1: Ω^*의 부분대수 I가 다음 조건들을 만족할 때 미분 아이디얼(*differential ideal*), 혹은 닫힌 아이디얼 (*closed ideal*)이라 부른다.

i) $I \wedge \Omega^* \subset I$

ii) 임의의 원소 $\phi \in I$를 성분별로 분해하여 $\phi = \sum_{k=0}^m \phi_k$, 단 $\phi_k \in \Omega^k$, 이면 각 ϕ_k는 I의 원소이다 (동질성 조건, *homogeneity condition*).

iii) $dI \subset I$.

위의 두 번째 조건으로부터 I는 양방 아이디얼, 즉 $\Omega^* \wedge I \subset I$이다. 뿐만 아니라 $I = \bigoplus_{k=0}^m I^k$, 단 $I^k = I \cap \Omega^k$와 같이 직합으로 표현되며

$$dI^k \subset I^{k+1}, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1$$

임을 알 수 있다.

미지함수 $u(x)$, $u = (u^1, \ldots, u^q)$, $x = (x^1, \ldots, x^p)$, 에 대한 임의의 (연립)미분방정식의 해를 구하는 문제는 이 미방에 대응하는 미분 아이디얼 I의 p-차원 적분다양체 (integral manifold)를 구하는 문제와 동치이다. 예를 들어 두 공간변수 (x, y)에 관한 열방정식

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} \tag{21}$$

을 생각하자. 이를 미분아이디얼로 표현하기 위하여 2-젵공간

$$M \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{13} = \{(t, x, y, u, u_t, u_x, u_y, u_{tt}, u_{tx}, u_{ty}, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})\}$$

의 외대수 $\Omega^*(M)$에서 다음과 같은 한개의 0–형식과 네개의 1–형식들로 생성된 닫힌 아이디얼 I_h를 생각하자.

$$\begin{aligned}
0-\text{형식}: \quad & u_t - u_{xx} - u_{yy} \\
1-\text{형식}: \quad & du - u_t dt - u_x dx - u_y dy, \\
& du_t - u_{tt} dt - u_{tx} dx - u_{ty} dy, \\
& du_x - u_{xt} dt - \cdots, \\
& du_y - \cdots
\end{aligned}$$

열방정식 (21)의 해 $u(t,x,y)$를 구한다는 것은 열방정식에 해당하는 미분 아이디얼 I_h의 3차원 적분다양체 중

$$dt \wedge dx \wedge dy \neq 0, \qquad \text{(독립조건, independence condition)}$$

을 만족하는 적분다양체

$$(t,x,y) \mapsto (t,x,y,u(t,x,y),u_t(t,x,y),\cdots,u_{yy}(t,x,y))$$

를 구하는 문제와 같다.

5.2 특성 코호몰로지로서의 보존률

미분 다양체 M^m, 외대수 Ω^*, 미분 아이디얼 I는 위와 같을 때 $dI^k \subset I^{k+1}$이므로 드람 복합체

$$\xrightarrow{d} \Omega^{k-1} \xrightarrow{d} \Omega^k \xrightarrow{d} \Omega^{k+1} \xrightarrow{d}$$

는 상모듈(quotient module)수준의 복합체

$$\xrightarrow{\hat{d}} \Omega^{k-1}/I^{k-1} \xrightarrow{\hat{d}} \Omega^k/I^k \xrightarrow{\hat{d}} \Omega^{k+1}/I^{k+1} \xrightarrow{\hat{d}} \tag{22}$$

를 정의한다. 복합체 (22)의 k-번째 코호몰로지 모듈은

$$H^k(M,I) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ker } \hat{d}/\text{Im } \hat{d}$$

이다. $H^k(M,I)$, $k=1,\ldots,m,$을 미분 아이디얼 I의 특성 코호몰로지 (characteristic cohomology)라 부른다. 하나의 k-형식 ϕ가 $H^k(M,I)$의 영이 아닌 하나의 코호몰로지 클라스의 대표원이라 함은 $d\phi \in I^{k+1}$이고 $\phi \notin I^k$임을 의미한다. I가 미분방정식에 대응하는 미분 아이디얼일 경우에 $H^k(M,I)$의 원소를 위수 k의 보존률 (conservation law of degree k)이라 부른다.

5.3 열량보존의 법칙

열방정식 (21)의 변분구조에 대응되는 미분 아이디얼 I_h의 특성 코호몰로지 $H^k(M,I_h)$를 생각하자. 2-형식

$$\phi := u\,dx \wedge dy - u_x dy \wedge dt - u_y dt \wedge dx$$

은 그 자신은 I_h^2의 원소가 아니면서

$$d\phi = (u_t - u_{xx} - u_{yy})\,dt \wedge dx \wedge dy \in I^3$$

이므로 $H^2(M,I_h)$의 영 아닌 코호몰로지 클라스를 대표한다. 즉 위수 2의 보존률이다. ϕ의 물리적인 의미를 보기 위하여 t-축의 폐구간 $t_1 \leq t \leq t_2$와 xy-평면의 유계영역 $\mathcal{R}$의 곱 $[t_1,t_2] \times \mathcal{R}$에서 $d\phi$의 적분을 생각하자.

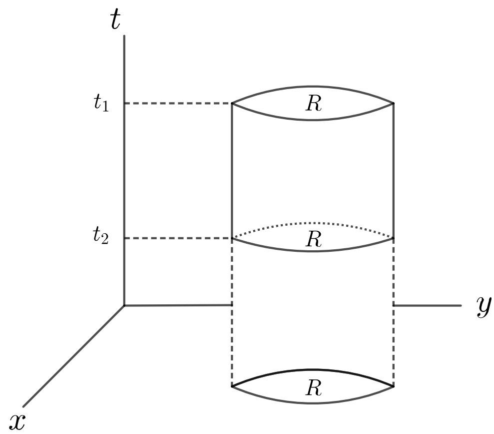

Figure 1. Heat quation

스토크스 정리를 사용하기 위하여 위의 영역의 경계면의 방향을

$$\underbrace{\text{윗면 } \mathcal{R}}_{t=t_2} - \underbrace{\text{아랫면 } \mathcal{R}}_{t=t_2} + \underbrace{[t_1, t_2] \times \partial\mathcal{R}}_{\text{옆면}}$$

로 준다. $u(t, x, y)$가 열방정식의 해이면 $d\phi(x, u^{(1)}) = 0$. 이어서 스토크스 정리에 의하여

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{[t_1,t_2]} \iint_{\mathcal{R}} d\phi \\ &= \iint_{\text{윗면 } \mathcal{R}} \phi - \iint_{\text{아랫면 } \mathcal{R}} \phi + \iint_{[t_1,t_2]\times\mathcal{R}} \phi \end{aligned} \tag{23}$$

을 얻는다. (23)의 둘째 줄: 윗면과 아래면의 $\mathcal{R}$에서는 $dt = 0$이므로 $\phi = udx \wedge dy$이고 옆면에서는 dx와 dy가 독립이 아니므로 $dx \wedge dy = 0$. 이어서 (23)은

$$0 = \iint_{\text{윗면}} u\, dx \wedge dy - \iint_{\text{아랫면}} u\, dx \wedge dy + \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\partial\mathcal{R}} -u_x dy + u_y dx \right) dt \tag{24}$$

이 된다. 마지막 항은 $t_1 \le t \le t_2$ 사이에 바깥으로 나가는 열의 플럭스의 총량을 의미한다. 따라서 (24)는 열량 보존의 법칙이다.

References

1. R. BRYANT and P. GRIFFITHS, Characteristic cohomology of differential systems I, General theory, *Jour. Amer. Math. Soc.* (8) (1995), 507–597
2. R. BRYANT and P. GRIFFITHS, Characteristic cohomology of differential systems II, Conservation laws for a class of parabolic equations, *Duke Math. J.* 78 (1995), 531–676.
3. E. NOETHER, Invariante Variationsprobleme, *Nachr. König. Gesell. Wissen. Göttingen, Math.-phys. Kl.* (1918), 235–257. (발표 3년후 출판됨.) English translation: *Transport Theory and Stat. Phys.* (1) (1971), 186–207.

4. P. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, 2nd Ed. Springer-Verlag, 1993.
5. S.-H. Wang, *Conservation laws from EDS point of view,* Seoul N. Univ. Lecture-note, 2007.