The Korean Journal of Applied Statistics (2018) DOI: http://dx.doi.org/10.5351/KJAS.2018.31.5.599
31(5), 599–610

Nonparametric multiple comparison method using aligned method and joint placement in randomized block design with replications

Juwon Hwang[a] · Dongjae Kim[a,1]

[a]Department of Biomedicine · Health Science, The Catholic University of Korea

(Received June 4, 2018; Revised July 18, 2018; Accepted August 30, 2018)

Abstract

The method of Mack and Skillings (*Technometrics*, **23**, 171–177, 1981) is a nonparametric multiple comparison method in a randomized block design with replications. This method is likely to result in loss of information because each block is ranked using the average of observations instead of repeated observations. In this paper, we proposed a new nonparametric multiple comparison method in the randomized block model with replications using an alignment method proposed by Hodges and Lehmann (*The Annals of Mathematical Statistics*, **33**, 482–497, 1962) that extend the joint placement method proposed by Chung and Kim (*Communications for Statistical Applications and Methods*, **14**, 551–560, 2007). In addition, Monte Carlo simulation compared the family wise error rate and power with the parametric method and the nonparametric method.

Keywords: nonparametric, multiple comparison, randomization block model, alignment method, joint placement

1. 서론

세가지 이상의 처리가 있는 경우, 처리 효과 차이의 유무를 알기 위해 연구대상을 동질적인 실험단위끼리 여러 개의 블록으로 구분 한 뒤, 무작위로 각 블록의 한가지 처리 수준에 한 명의 연구대상을 할당하는 랜덤화 블록 계획법(randomized block design)있다. 이러한 블록 설정으로 인해 다른 블록 간에는 다르더라도, 서로 동질적인 같은 블록내에서는 효과적으로 처리효과를 비교할 수 있다. 이때 각각의 처리 수준별 둘이상의 연구 대상을 할당하는 경우를 반복이 있는 랜덤화 블록 계획법이라고 한다 (Song과 Kim, 2015). 실험결과의 정밀성을 유지하기 위해서는 반복실험을 해야한다. 반복이 있는 랜덤화 블록 계획법에서는 각 처리의 효과차이에 관해 판단을 할 뿐, 어떤 처리들 간의 효과가 존재하는지 구별하기 힘들다. 이때 어떤 처리간의 평균 차이가 존재하는지를 알기 위한 비교과정을 다중비교방법(multiple comparison test)이라 한다. 처리 효과 차이 유무를 검정하기 위해서 오차가 서로 독립이고 정규분포를 따르는 확률변수라는 가정이 성립한다면 모수적 방법으로 검정이 가능하다. 하지만 어느 특정한 확률분포를 따른다고 정의할 수 없거나, 모집단에 대한 정보가 없는 경우에 사용시 제1종 오류를 제어하기 힘

[1]Corresponding author: Department of Biomedicine · Health Science, The Catholic University of Korea, 222 Banpo-dero Seocho-gu, Seoul 06591, Korea. E-mail: djkim@catholic.ac.kr

든 문제가 발생할 수 있으므로 제1종 오류를 제어할 수 있는 비모수적 방법을 사용해야 한다 (Song과 Lee, 1995).

모수적 다중비교 방법으로는 Tukey (1953), Student-Newman-Keuls (SNK) (Keuls, 1952), Scheffe (1953) 등이 제안한 다중비교방법들이 있다. Tukey 다중비교는 모든 집단의 수가 동일하면 검정력이 높다는 장점이 있지만 가장 보수적인 방법이라 평균간의 차이가 있다는 결론을 잘 내리지 않는다. SNK 다중비교는 임계값의 결정만 제외한다면 Tukey 다중비교와 동일하다. Scheffe 다중비교는 집단들의 수가 동일하지 않은 경우, 반복이 서로 다른 경우, 평균들이 상관이 있는 경우에도 적용할 수 있는 방법으로 가장 융통성이 있다. 그러나 이러한 일반성의 댓가로 다른 방법들에 비해 검정력이 낮다. 비모수 다중비교 방법으로는 일원배치법에서 Kruskal-Wallis 순위합 다중비교 (Nemenyi, 1963)가 있고, 이원배치법에서 Friedman 순위합 다중비교방법 (Friedman, 1937)과 Mack과 Skillings (1981) 방법, Han과 Kim (2006)이 제안한 방법이 있다. Friedman은 자료가 균형적일때만 사용이 가능하지만 Mack과 Skillings은 자료가 비균형적일 때에도 사용이 가능하다. 이 방법은 Friedman의 방법을 적용한 것으로, 하나의 블록 안에서 관측된 값들의 순위를 사용하여 각 처리에서 블록들의 평균순위의 합을 이용하여 다중비교를 하는 방법이다. 각각의 관측값 대신에 블록 내의 순위를 이용하여 검정하기 때문에 블록 간 정보가 손실될 위험이 있고, 모든 관측값의 정보를 사용하지 않기 때문에 정보가 손실될 수 있다는 단점이 존재한다 (Lee와 Kim, 2012). Han과 Kim이 제안한 다중비교방법은 자료를 정렬시켜 블록효과를 없애 블록 내의 순위가 아닌 자료 전체의 순위를 이용하여 Kruskal-Wallis 순위합 다중비교방법을 적용한 것이다. 이 방법 또한 관측치의 평균 순위를 이용하여 정보 손실이 있을 수 있다.

Hodges와 Lehmann (1962)은 블록 사이의 정보를 이용하기 위한 방법으로 정렬방법(aligned method)을 제안하였는데, 이 방법은 각 처리의 확률표본에서 각 블록효과인 블록평균을 빼서 정렬자료를 생성하는 방법이다. Oraban과 Wolfe (1982)는 두 처리 간 효과의 차이를 검정하기 위해 위치(placement)를 사용한 비모수 검정법을 제안하였다. 이 방법은 두개의 처리 중 어떠한 한 처리에 대한 상대적인 위치정보를 이용해 처리간 효과의 차이를 검정하는 방법으로 대조군의 표본크기가 처리군의 표본크기보다 큰 경우 더 유용하다고 알려져 있다 (Chung과 Kim, 2007). Chung과 Kim (2007)은 이를 확장해 일원배치법의 경우에 결합위치(joint placement) 방법을 제안하였다. 이 방법은 세 개 이상의 처리효과 차이를 알아보고자 할 경우, 비교하려 하는 확률표본이 포함되 있는 처리군을 제외하고 모든 처리군과 비교하여 상대적인 위치를 이용하여 처리 효과를 검정하는 방법으로 각각의 처리 표본크기가 동일할 때 Kruskal-Wallis 방법과 같게 된다.

본 논문에서는 블록간의 정보를 이용하기 위해서 Hodges와 Lehman (1962)이 제안한 방법인 정렬 방법과, Chung과 Kim (2007)이 일원배치법에 대해 제안한 방법인 결합위치 통계량을 확장하여 반복이 있는 랜덤화 블록 모형에서 비모수적 다중비교 검정법을 제안하였다. Monte Carlo simulation를 통해 모수적 검정법인 Tukey-Kramer (1956) 방법, 비모수적 검정법인 Mack와 Skillings (1981) 방법, 본 논문에서 제안한 방법의 family wise error rate (FWE)와 검정력(power)을 비교하였다.

2. 방법

2.1. 모형 및 가설

처리의 개수가 t개인 반복이 있는 랜덤화 블록 계획법 모형은 다음과 같다.

$$X_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \epsilon_{ijk}, \quad (i = 1, 2, \ldots, t;\ j = 1, 2, \ldots, b;\ k = 1, 2, \ldots, n_{ij}),$$

여기서 X_{ijk}는 i번째 처리에서 j번째 블록의 n_{ij}번째 관측의 반응값이며, μ는 전체 평균, τ_i는 i번째

처리 효과, β_j는 j번째 블록 효과, ϵ_{ijk}는 오차항을 나타내며, 동일한 연속분포를 따르고 서로 독립인 확률변수로 가정한다.

모집단에 대한 구체적인 분포함수를 가정할 수 없을 때, 두 처리의 효과가 동일하다는 귀무가설과 두 처리의 효과가 동일하지 않다는 일반대립가설은 다음과 같다.

$$H_0 : \mu_u = \mu_v \quad \text{versus} \quad H_1 : \mu_u \neq \mu_v \quad (u < v;\ u = 1, 2, \ldots, k-1,\ v = u+1, \ldots, k).$$

2.2. 제안하는 방법

블록 간의 정보를 이용하기 위해서 Hodges와 Lehmann (1962)이 제안한 정렬방법을 이용하여 생성된 정렬자료는

$$X^*_{ijk} = X_{ijk} - \overline{X}_{\cdot j \cdot}$$

이고, 여기서

$$\overline{X}_{\cdot j \cdot} = \sum_{i=1}^{t} \sum_{k=1}^{n_{ij}} X_{ijk} \Big/ \sum_{i=1}^{t} n_{ij}$$

은 각 블록의 효과인 블록평균으로 정의한다.

자료를 정렬시켜 블록효과를 없애 자료 전체에, Chung과 Kim (2007)의 비모수적 도구인 결합위치를 다음과 같이 정의한다.

$$V_{ijk} = \sum_{h=1}^{t} \sum_{\substack{s=1 \\ h \neq i}}^{b} \sum_{k=1}^{n_{ij}} \chi(X^*_{hsk}, X^*_{ijk}), \quad \chi(x, y) = \begin{cases} 1, & x \leq y\text{일 경우}, \\ 0, & \text{그 외}. \end{cases}$$

결합위치 V_{ijk}는 i번째 처리의 관측값을 제외한 혼합표본중에 X^*_{ijk}보다 작거나 같은 관측값의 개수이며, 이를 이용한 결합위치의 처리별 평균 $\overline{V}_{i\cdot\cdot}$은 다음과 같이 정의한다.

여기서 전체 자료수는 $N = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{b} n_{ij}$이다.

$$\overline{V}_{i\cdot\cdot} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{b} n_{ij}} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n_{ij}} V_{ijk}, \quad (j = 1, 2, \ldots, b;\ k = 1, 2, \ldots, n_{ij}).$$

어떤 처리간 평균차이가 존재하는지를 구별하기 위한 다중비교를 위해서, Chung과 Kim (2007)에 의한 결합위치의 처리별 합 $V_{i\cdot\cdot}$과, 각 처리에서 순위합 $R_{ij\cdot}$의 관계로부터 유도한 두 처리별 평균의 차이인 검정통계량 O_{uv}을 다음과 같이 정의한다.

$$O_{uv} = \left(\overline{V}_{u\cdot\cdot} - \overline{V}_{v\cdot\cdot}\right) = \left(\overline{R}_{uj\cdot} - \overline{R}_{vj\cdot}\right) + \frac{(n_{vj} - n_{uj})}{2}$$

두 처리의 Kruskal-Wallis 다중비교 통계량을 다음과 같이 정의한다.

$$D_{uv} = \overline{R}_{uj\cdot} - \overline{R}_{vj\cdot}$$

Dunn (1964)에 의해, 귀무가설 하에서 $\min(n_{uj}, n_{vj})$이 커질 때 표준화된 통계량 $\hat{D}_{uv}$의 분포는 표준정규분포로 수렴한다.

$$\hat{D}_{uv} = \frac{D_{uv} - E(D_{uv})}{\sqrt{\mathrm{Var}(D_{uv})}} \xrightarrow{\min(n_{uj}, n_{vj}) \to \infty} N(0, 1).$$

Table 3.1. Results of administering 4 types of medicine

	TRT1	TRT2	TRT3	TRT4
A	42	28	1	24
	44	23	29	9
	36	24	19	22
	13	42		−2
	19	13		15
	22			
B	33	34	11	27
	26	33	9	12
	33	31	7	−5
	21	36	1	16
			−6	15
				12
C	31	3	21	22
	−3	26	1	7
	25	28	9	25
	24	32	3	5
		4		12
		16		

이때 $E(D_{uv})$와 $\mathrm{Var}(D_{uv})$의 식은 다음과 같다.

$$E(D_{uv}) = 0, \qquad \mathrm{Var}(D_{uv}) = \frac{N(N+1)}{12}\left(\frac{1}{n_{uj}} + \frac{1}{n_{vj}}\right)$$

따라서, 검정통계량 O_{uv}의 분포는 귀무가설 하에서 $\min(n_{uj}, n_{vj})$이 커질 때 정규분포로 근사함을 볼 수 있고

$$\frac{O_{uv}}{\sqrt{\mathrm{Var}(O_{uv})}} \xrightarrow{\min(n_{uj},n_{vj})\to\infty} N\left(\frac{(n_{vj}-n_{uj})}{2}, 1\right)$$

이때 $E(O_{uv})$와 $\mathrm{Var}(O_{uv})$의 식은 다음과 같다.

$$E(O_{uv}) = \frac{n_{vj}-n_{uj}}{2}, \qquad \mathrm{Var}(O_{uv}) = \frac{N(N+1)}{12}\left(\frac{1}{n_{uj}} + \frac{1}{n_{vj}}\right).$$

한편, 반복수가 동일한 경우 처리별 표본크기가 같아진다. 이때 검정통계량 O_{uv}과 Kruskal-Wallis 순위합 다중비교 통계량을 비교해보면 상수배의 관계에 놓여있게 되어 검정통계량이 같아지므로, 반복수가 동일할 때 두 검정법은 같은 검정법이 된다.

3. 예시

다음 자료는 3종류의 질병(A, B, C)에 대하여 4그룹으로 랜덤하게 나누어 각 그룹에 다른 치료약을 투여하고 처리 효과를 관측하는 실험에서 얻은 결과는 Table 3.1과 같다 (Song과 Jo, 2002).

Table 3.1 자료에 제안방법의 다중비교를 적용하면 다음과 같다.

우선 블록간의 정보를 이용하기 위해, 블록간 평균을 구한뒤 각각의 값에 블록평균을 뺀 정렬방법을 적용하여 자료를 생성한다. 그 뒤 이를 이용하여 i번째 처리의 관측값을 제외한 혼합표본 중 각각의 관측값보다 작거나 같은 관측값의 개수인 결합위치방법을 적용하여 생성된 자료는 Table 3.2와 같다.

Table 3.2. Results of using aligned method (joint placement)

	TRT1	TRT2	TRT3	TRT4
A	19.74(43)	5.74(29)	−21.26(2)	1.74(21)
	21.74(43)	0.74(25)	6.74(26)	−13.26(5)
	13.74(38)	1.74(26)	−3.26(14)	−0.26(17)
	−9.26(13)	19.74(41)		−24.26(0)
	−3.26(22)	−9.26(12)		−7.26(12)
	−0.26(25)			
B	14.79(39)	15.79(40)	−7.21(11)	8.79(26)
	7.79(33)	14.79(39)	−9.21(9)	−6.21(14)
	14.79(39)	12.79(36)	−11.21(6)	−23.21(0)
	2.79(29)	17.79(40)	−17.21(3)	−2.21(16)
			−24.21(1)	−3.21(16)
				−6.21(14)
C	15.68(39)	−12.32(8)	5.68(24)	6.68(23)
	−18.32(3)	10.68(36)	−14.32(3)	−8.32(12)
	9.68(35)	12.68(36)	−6.32(11)	9.68(27)
	8.68(33)	16.68(40)	−12.32(5)	−10.32(9)
		−11.32(9)		−3.32(14)
		0.68(25)		

결합위치를 적용한 뒤, 결합위치의 처리별 평균을 구하면

$$\overline{V}_1 = \frac{43+43+38+13+22+25+39+33+39+29}{14} = 31,$$
$$\overline{V}_2 = \frac{29+25+26+41+12+40+39+36+40+8+36+36+40+9+25}{15} = 29.47,$$
$$\overline{V}_3 = \frac{2+26+14+11+9+6+3+1+24+3+11+5}{12} = 9.58,$$
$$\overline{V}_4 = \frac{21+5+17+0+12+26+14+0+16+16+14+23+12+27+9+14}{16} = 14.13$$

이다. 다중비교를 위한 기각역은

$$Z_{\frac{\alpha}{k(k-1)}}\sqrt{\frac{N(N+1)}{12}}\sqrt{\frac{1}{n_u}+\frac{1}{n_v}} = 1.73\sqrt{\frac{57(57+1)}{12}}\sqrt{\frac{1}{n_u}+\frac{1}{n_v}}$$

이고, 위의 결합위치의 처리별 평균을 이용해 구한 다중비교 통계량은

$$|V_1 - V_2| = |31 - 29.47| = 1.53 < 28.72\sqrt{\frac{1}{14}+\frac{1}{15}} = 10.6727 \Rightarrow \tau_1 = \tau_2,$$
$$|V_1 - V_3| = |31 - 9.58| = 21.42 > 28.72\sqrt{\frac{1}{14}+\frac{1}{12}} = 11.2983 \Rightarrow \tau_1 \neq \tau_3,$$
$$|V_1 - V_4| = |31 - 14.13| = 16.87 > 28.72\sqrt{\frac{1}{14}+\frac{1}{16}} = 10.5104 \Rightarrow \tau_1 \neq \tau_4,$$
$$|V_2 - V_3| = |29.47 - 9.58| = 19.87 > 28.72\sqrt{\frac{1}{15}+\frac{1}{12}} = 11.1232 \Rightarrow \tau_2 \neq \tau_3,$$
$$|V_2 - V_4| = |29.47 - 14.13| = 15.34 > 28.72\sqrt{\frac{1}{15}+\frac{1}{16}} = 10.3219 \Rightarrow \tau_2 \neq \tau_4,$$

Table 4.1. Monte Carlo power and FWE estimates: treatment = 3, block = 5, $n_{1j}=11$, $n_{2j}=12$, $n_{3j}=13$

Dist	τ_1	τ_2	τ_3	TK	MS	O
Normal	0.0	0.0	0.0	0.0323	0.0456	0.0489
	0.0	0.5	0.0	0.1865	0.2107	0.2179
	0.0	1.5	1.0	0.5521	0.8606	0.8084
	0.7	0.0	0.4	0.2796	0.3257	0.3660
	0.8	0.8	0.0	0.4928	0.4889	0.6568
	0.4	0.0	0.4	0.1262	0.1533	0.1674
Exponential	0.0	0.0	0.0	0.0282	0.0474	0.0486
	0.0	0.5	0.0	0.2381	0.3952	0.3475
	0.0	1.5	1.0	0.6109	0.9238	0.8478
	0.7	0.0	0.4	0.3314	0.5481	0.5180
	0.8	0.8	0.0	0.5553	0.7073	0.7630
	0.4	0.0	0.4	0.1569	0.2916	0.2439
Double exponential	0.0	0.0	0.0	0.0299	0.0474	0.0531
	0.0	0.5	0.0	0.1153	0.1747	0.1584
	0.0	1.5	1.0	0.3194	0.7159	0.5994
	0.7	0.0	0.4	0.1706	0.2654	0.2813
	0.8	0.8	0.0	0.2825	0.3728	0.4871
	0.4	0.0	0.4	0.0841	0.1279	0.1295
Cauchy	0.0	0.0	0.0	0.0135	0.0467	0.0348
	0.0	0.5	0.0	0.0224	0.1014	0.0480
	0.0	1.5	1.0	0.0447	0.3938	0.1503
	0.7	0.0	0.4	0.0310	0.1533	0.0977
	0.8	0.8	0.0	0.0358	0.1767	0.1475
	0.4	0.0	0.4	0.0199	0.0863	0.0487

FWE = family wise error rate; TK = Tukey-Kramer's method; MS = Mack and Skillings' method;
O = method using aligned method and joint placement.

$$|V_3 - V_4| = |9.58 - 14.13| = 4.55 < 28.72\sqrt{\frac{1}{12}+\frac{1}{16}} = 10.9676 \Rightarrow \tau_3 = \tau_4$$

이다. 따라서 (약물1 = 약물2), (약물3 = 약물4) 효과 차이는 없지만, (약물1 $\neq$ 약물3), (약물1 $\neq$ 약물4), (약물2 $\neq$ 약물3), (약물2 $\neq$ 약물4) 효과 차이가 있는 것으로 나타났다.

또한, 위 자료를 Mack과 Skillings의 방법을 적용하면, 네 종류의 약물간 효과 차이가 없는 것으로 나타난다. 즉, 제안방법과 Mack과 Skillings의 방법은 결과가 다름을 알 수 있다.

4. 모의실험 계획 및 결과

본 논문에서는 정렬방법 적용 후, 결합위치를 사용한 처리별 평균 통계량을 이용하여 제안한 다중비교 검정법과 기존의 방법들의 FWE와 검정력을 비교하기 위해 SAS프로그램을 이용해 10,000번을 반복하는 Monte Carlo simulation을 시행하였다. 이때 FWE는 모든 귀무가설이 참일 때 적어도 하나의 귀무가설이 기각될 확률이며, 검정력은 거짓인 귀무가설들 중 적어도 하나의 귀무가설을 거짓이라고 채택할 확률이다.

반복이 있는 랜덤화 블록 계획법에서 비교방법으로는 모수적인 방법인 Tukey-Kramer (Kramer, 1956) 방법, 비모수적 방법인 Mack과 Skilling (1981)의 방법을 사용하여 제안방법과 비교하였다. 모집단의

Table 4.2. Monte Carlo power and FWE estimates: treatment = 3, block = 10, n_{1j} = 21, n_{2j} = 22, n_{3j} = 23

Dist	τ_1	τ_2	τ_3	TK	MS	O
Normal	0.0	0.0	0.0	0.0377	0.0488	0.0489
	0.0	0.5	0.0	0.3575	0.3325	0.3649
	0.0	1.5	1.0	0.8472	0.9862	0.9871
	0.7	0.0	0.4	0.5087	0.4948	0.5541
	0.8	0.8	0.0	0.7878	0.7291	0.8498
	0.4	0.0	0.4	0.2293	0.2313	0.2438
Exponential	0.0	0.0	0.0	0.0375	0.0484	0.0432
	0.0	0.5	0.0	0.3830	0.6359	0.5458
	0.0	1.5	1.0	0.8322	0.9974	0.9894
	0.7	0.0	0.4	0.5342	0.7846	0.7362
	0.8	0.8	0.0	0.7888	0.9022	0.9139
	0.4	0.0	0.4	0.2638	0.4550	0.3671
Double exponential	0.0	0.0	0.0	0.0387	0.0484	0.0482
	0.0	0.5	0.0	0.1951	0.2654	0.2398
	0.0	1.5	1.0	0.5414	0.9207	0.8874
	0.7	0.0	0.4	0.2886	0.3936	0.3925
	0.8	0.8	0.0	0.4774	0.5785	0.6510
	0.4	0.0	0.4	0.1353	0.1840	0.1722
Cauchy	0.0	0.0	0.0	0.0148	0.0474	0.0316
	0.0	0.5	0.0	0.0206	0.3938	0.0510
	0.0	1.5	1.0	0.0432	0.5834	0.2125
	0.7	0.0	0.4	0.0319	0.2012	0.0969
	0.8	0.8	0.0	0.0304	0.2679	0.1527
	0.4	0.0	0.4	0.0199	0.0993	0.0460

FWE = family wise error rate; TK = Tukey-Kramer's method; MS = Mack and Skillings' method; O = method using aligned method and joint placement.

분포는 대칭분포인 정규분포, 이중지수분포, Cauchy분포, 비대칭분포인 지수분포를 고려하였다. 정규분포는 RANNOR함수, 지수분포는 RANEXP함수, Cauchy분포는 RANCAU함수, 이중지수분포는 RANUNI함수를 역변환방법을 적용해 난수를 생성하였다. 처리의 수는 3개와 5개인 경우, 블록의 수는 5개와 10개인 경우를 선택하였고, 블록 내에서 반복수가 다른 경우를 고려해 처리별 표본크기가 모두 다른 경우를 고려하였다. 각 처리별 효과인 τ_i의 설정은 처리의 수가 3개와 5개인 경우, 일정한 패턴을 보이는 경우, 감소하다 증가하는 경우, 증가하다 감소하는 경우, 일정하다가 감소하는 경우, 일정하다가 증가하는 경우 등, 각각 6가지 조합을 다양한 효과 차이의 경우의 수로 설정하여 고려하였다. 블록이 5개이고 처리가 3인 경우는 Table 4.1, 블록이 10개이고 처리가 3개인 경우는 Table 4.2, 블록이 5개이고 처리가 5개인 경우는 Table 4.3, 마지막으로 블록이 10개이고 처리가 5개인 경우에 Table 4.4로 나타내었다.

우선 각 처리의 효과가 동일한 경우에 FWE를 잘 제어하는지를 살펴보면 처리의 수가 3개인 경우, 블록이 5일때, 블록이 10일때의 모든 분포에서 Mack과 Skilling 방법은 0.045에서 0.0488 사이의 값을 가짐으로 잘 제어함을 볼 수 있다. 한편, 제안방법은 Cauchy 분포에서 블록이 5인 경우 0.0348, 블록이 10인 경우 0.0316으로 다른 분포에 비해 보수적이지만, 블록이 5인 경우의 이중지수 분포에서 0.0531값을 제외하고는 0.0432에서 0.0489의 값으로 0.05를 크게 벗어나지 않아 잘 제어함을 볼 수 있다. 하지만 Tukey-Kramer 방법에서는 블록이 5인 경우와 블록이 10인 경우 Cauchy분포를 제외하고도 0.0299에

Table 4.3. Monte Carlo power and FWE estimates: treatment = 5, block = 5, n_{1j} = 11, n_{2j} = 12, n_{3j} = 13, n_{4j} = 14, n_{5j} = 15

Dist	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_4	TK	MS	O
Normal	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0212	0.0482	0.0482
	0.0	0.0	0.5	0.0	0.0	0.1112	0.1541	0.1687
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.8	0.4043	0.4440	0.3238
	0.0	1.0	0.0	1.0	0.0	0.6978	0.7395	0.7877
	0.0	0.5	0.8	1.0	0.0	0.4830	0.5293	0.5800
	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.2994	0.3718	0.2142
Exponential	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0208	0.0483	0.0444
	0.0	0.0	0.5	0.0	0.0	0.1221	0.3348	0.3180
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.8	0.4478	0.7610	0.5935
	0.0	1.0	0.0	1.0	0.0	0.7156	0.9169	0.9206
	0.0	0.5	0.8	1.0	0.0	0.5455	0.8073	0.7858
	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.3648	0.6715	0.4436
Double exponential	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0243	0.0483	0.0501
	0.0	0.0	0.5	0.0	0.0	0.0615	0.1283	0.1258
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.8	0.2032	0.3261	0.2057
	0.0	1.0	0.0	1.0	0.0	0.3796	0.5775	0.6022
	0.0	0.5	0.8	1.0	0.0	0.2425	0.4088	0.4102
	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.1555	0.2894	0.1402
Cauchy	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0140	0.0499	0.0261
	0.0	0.0	0.5	0.0	0.0	0.0091	0.0631	0.0208
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.8	0.0150	0.1258	0.0229
	0.0	1.0	0.0	1.0	0.0	0.0262	0.2651	0.1095
	0.0	0.5	0.8	1.0	0.0	0.0227	0.1859	0.0694
	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.0203	0.1430	0.0238

FWE = family wise error rate; TK = Tukey-Kramer's method; MS = Mack and Skillings' method; O = method using aligned method and joint placement.

서 0.0387 사이의 값을 가지므로 다른 방법들에 비해 보수적인 방법임을 알 수 있다. 처리의 수가 5개인 경우, 블록이 5일때와 블록이 10일때의 모든 분포에서 Mack과 Skilling 방법은 0.0482에서 0.0503 사이의 값을 가지고, 제안방법 또한 Cauchy분포를 제외하고는 0.05 근방으로 잘 제어함을 볼 수 있다. Tukey-Kramer 방법은 앞서 언급한 바와 같이 블록이 5인 경우와 블록이 10인 경우 Cauchy분포를 제외하고도 0.0208에서 0.0333 사이의 값을 가지므로 모든 분포에서 가장 보수적인 방법임을 알 수 있다. Mack과 Skilling 방법은 블록의 수가 증가할수록, 처리의 수가 증가할수록 FWE가 0.05 근처로 근사해짐을 볼 수 있다. 반면, 제안한 방법의 FWE는 블록의 수가 증가할수록, 처리의 수가 증가할수록 Mack과 Skilling 방법에 비해 대체적으로 보수적인 경향을 보임을 알 수 있다.

다음으로 검정력을 살펴보면, 처리의 수가 3개인 경우, 정규분포에서 블록이 5인 경우의 큰 폭으로 증가했다가 감소하는 패턴을 제외하고는 블록이 5인 경우, 블록이 10인 경우 모두 제안방법의 검정력이 가장 높았다. 지수분포에서는 블록이 5인 경우, 블록이 10인 경우 모두 대부분의 패턴에서 Mack과 Skilling의 방법, 제안방법, Tukey-Kramer 방법 순으로 검정력이 높았지만, 일정하다가 감소하는 패턴에는 제안방법의 검정력이 가장 높았다. 이중지수분포에서는 블록이 5인 경우, 증가하다 감소하는 우산형 패턴들을 제외하고 감소하다 증가하는 패턴들과 일정하다 감소하는 패턴에서 제안방법, Mack과 Skilling 방법, Tukey-Kramer 방법 순으로 높았다. 또한 블록이 10개인 경우, 일정하다 감소하는 패턴

Table 4.4. Monte Carlo power and FWE estimates: treatment = 5, block = 10, n_{1j} = 21, n_{2j} = 22, n_{3j} = 23, n_{4j} = 24, n_{5j} = 25

Dist	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_4	TK	MS	O
Normal	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0316	0.0503	0.0492
	0.0	0.0	0.5	0.0	0.0	0.2959	0.3092	0.3244
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.8	0.7455	0.7238	0.6645
	0.0	1.0	0.0	1.0	0.0	0.9639	0.9545	0.9672
	0.0	0.5	0.8	1.0	0.0	0.8742	0.8547	0.8759
	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.5971	0.5911	0.4715
Exponential	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0305	0.0503	0.0427
	0.0	0.0	0.5	0.0	0.0	0.2875	0.6380	0.5720
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.8	0.7479	0.9689	0.9149
	0.0	1.0	0.0	1.0	0.0	0.9545	0.9978	0.9971
	0.0	0.5	0.8	1.0	0.0	0.8670	0.9836	0.9737
	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.6169	0.8966	0.7434
Double exponential	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0333	0.0503	0.0456
	0.0	0.0	0.5	0.0	0.0	0.1408	0.2342	0.2187
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.8	0.4162	0.5638	0.4538
	0.0	1.0	0.0	1.0	0.0	0.7199	0.8615	0.8597
	0.0	0.5	0.8	1.0	0.0	0.5403	0.7120	0.6912
	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.3117	0.4580	0.3034
Cauchy	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0172	0.0471	0.019
	0.0	0.0	0.5	0.0	0.0	0.0111	0.0989	0.0231
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.8	0.0181	0.2340	0.0352
	0.0	1.0	0.0	1.0	0.0	0.0291	0.4541	0.1387
	0.0	0.5	0.8	1.0	0.0	0.0260	0.3265	0.0862
	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.0225	0.1982	0.0288

FWE = family wise error rate; TK = Tukey-Kramer's method; MS = Mack and Skillings' method; O = method using aligned method and joint placement.

에서 제안방법이 가장 높았으며 그 외의 패턴들에서는 Mack과 Skilling 방법, 제안방법, Tukey-Kramer 방법 순으로 높았다. 특히 크게 감소하다 증가하는 패턴에서는 Mack과 Skilling 방법이 0.3936, 제안방법이 0.3925로 근소한 차이가 났음을 알 수 있다. Cauchy분포인 경우에는 블록이 5인 경우, 블록이 10인 경우 모두 Mack과 Skilling 방법, 제안방법, Tukey-Kramer 방법 순으로 가장 높은 검정력을 가짐을 알 수 있다. 이때 제안방법과 Tukey-Kramer 방법이 Mack과 Skilling 방법에 비해 훨씬 검정력이 낮은 이유는 FWE를 살펴 봤을때 제안방법과 Tukey-Kramer 방법이 보수적인 경향을 보임으로 그로 인해 검정력에 영향을 끼쳤을 것이라고 볼 수 있다.

처리수가 5개인 경우, 정규분포에서 완만하다가 크게 증가하는 패턴과 일정한 간격으로 증가하는 패턴에서 블록5개인 경우에는 Mack과 Skilling 방법, Tukey-Kramer방법, 제안방법 순으로 검정력이 높았으며, 블록이 10개인 경우에는 Tukey-Kramer 방법, Mack과 Skilling 방법, 제안방법 순으로 검정력이 높았다. 이를 제외한 나머지 패턴들에서는 제안방법의 검정력이 가장 높음을 알 수 있다. 지수분포에서는 블록이 5인 경우 일정하게 증가와 감소를 반복하는 패턴에서 제안방법, Mack과 Skilling 방법, Tukey-Kramer 방법 순으로 높은 검정력을 가졌으며, 블록이 10인 경우에는 Mack과 Skilling 방법이 0.9978 제안방법이 0.9971로 매우 근소한 차이를 가짐을 알 수 있다. 그 외의 패턴에서는 Mack과 Skilling 방법, 제안방법, Tukey-Kramer 방법 순으로 검정력이 높음을 알 수 있다. 이중지수분포에서

블록이 5인 경우 일정하게 증가와 감소를 반복하는 패턴과 증가하다 정점을 찍고 큰 폭으로 감소하는 패턴에서 제안방법, Mack과 Skilling 방법, Tukey-Kramer 방법 순으로 높은 검정력을 가졌으며, 그 외의 패턴에서는 Mack과 Skilling 방법이 가장 높았다. 블록이 10인 경우 모든 패턴에서 Mack과 Skilling 방법이 가장 높았지만 일정하게 증가와 감소를 반복하는 패턴에서는 Mack과 Skilling 방법이 0.8615, 제안방법이 0.8597로 매우 근소한 차이를 가짐을 알 수 있다. Cauchy분포의 경우에는 블록이 5인 경우, 블록이 10인 경우 모두 Mack과 Skilling 방법, 제안방법, Tukey-Kramer 방법 순으로 높은 검정력을 가짐을 알 수 있다. 이 또한 위에서 언급한 같은 이유로 나온 결과로 볼 수 있다. 검정력에서는 블록의 수가 증가할수록, 처리의 수가 증가할수록 FWE가 Mack과 Skilling 방법에 비해 제안방법이 보수적임에도 불구하고, 제안방법의 검정력이 가장 좋았던 패턴에서는 항상 좋거나 Mack과 Skilling 방법과 근소한 차이를 가짐을 알 수 있다.

5. 결론 및 고찰

본 논문에서는 반복이 있는 랜덤화 블록 계획법에서 비모수적 다중비교 방법으로 정렬방법과 결합위치를 이용한 다중비교 통계량을 제안하였다. 이 통계량은 Hodges와 Lehmann (1962)이 제안한 정렬방법을 이용하여 블록간의 정보를 이용한 뒤, Chung과 Kim (2007)이 제안한 결합위치를 확장하여 처리별 평균순위를 이용하였다. 제안방법을 모수적 방법인 Tukey-Kramer 방법과 비모수적 방법인 Mack과 Skilling 방법의 FWE와 검정력을 정규분포, 지수분포, 이중지수분포, Cauchy분포에서 Monte Carlo Simulation을 통해 비교하였다. 각 처리별 효과인 τ_i의 설정은 처리의 수가 3개와 5개인 경우의 다양한 효과 차이인 6가지 조합 경우의 수로 설정하여 고려하였고, 블록 내에 반복수가 다른 경우를 고려해 처리별 표본크기가 모두 다른 경우를 설정하였다.

모의실험 결과를 살펴보면 Tukey-Kramer 방법은 다른 방법들에 비해 매우 보수적인 방법으로 FWE가 낮게 나옴을 알 수 있었고, Mack과 Skilling 방법은 모든 분포에서 0.05 근처로 잘 제어함을 볼 수 있었다. 또한 제안한 방법은 Cauchy분포에서 보수적이지만 정규분포, 지수분포, 이중지수분포에서는 0.05 근처로 잘 제어함을 볼 수 있었다. Mack과 Skilling 방법은 블록의수가 증가할수록, 처리의 수가 증가할수록 FWE가 0.05 근처로 근사해짐을 볼 수 있었지만, 제안한 방법의 FWE는 Mack과 Skilling 방법에 비해 대체적으로 보수적인 경향을 보임을 알 수 있었다. 검정력을 보면, 처리가 3인 경우에 블록의 수와 관계없이 정규분포에서는 대부분의 패턴에서 제안방법이 기존의 방법들 보다 높은 검정력을 보였다. 또한 효과 차이가 0.8 간격으로 일정하다가 감소하는 패턴에서는 Cauchy분포를 제외하고 블록의 수와 분포에 관계없이 제안방법의 검정력이 가장 높았다. 처리수가 5인 경우에 블록의 수와 관계없이 정규분포에서 처리 효과가 완만하다가 0.8로 크게 증가하는 패턴과 일정하게 0.2 간격으로 증가하는 패턴을 제외하고 대부분의 패턴에서 제안방법이 기존의 방법들에 비해 높은 검정력을 보였다. 처리효과 차이가 1로 일정하게 증가와 감소를 반복하는 패턴에서 블록이 5인 경우 Cauchy분포를 제외하고 제안방법이 항상 검정력이 높았으며, 블록이 10인 경우에는 Cauchy분포를 제외하고 지수분포와 이중지수분포에서 Mack과 Skilling 방법과 제안방법의 검정력이 매우 비슷하게 나타났다. 블록의 수가 증가할수록, 처리의 수가 증가할수록 FWE가 Mack과 Skilling 방법에 비해 제안방법이 보수적임에도 불구하고, 제안방법의 검정력이 가장 좋았던 패턴에서는 항상 좋거나 Mack과 Skilling 방법과 근소한 차이를 가짐을 알 수 있었다.

본 논문에서 제안한 방법은 처리 수와 블록의 수에 상관없이 정규분포에서는 기존방법들보다 대부분의 검정력이 높음을 기대할 수 있다. 특히 처리가 3일 때 일정하다 감소하는 패턴, 처리가 5일때 일정하게 증가와 감소를 반복하는 패턴에서는 제안방법이 Mack과 Skilling 방법과 비슷하거나 더 높게 나타날 것으로 기대된다. 기존의 방법인 Mack과 Skiling 방법에 비해 모든 면에서 우월하다고 말할 수 없지만,

Mack과 Skiling 방법은 각각 관측 값 대신에 블록 내의 순위를 이용하여 검정하기 때문에 블록 간 정보가 손실될 위험이 있고, 모든 관측값의 정보를 사용하지 않으므로 정보의 손실이 발생할수 있다. 하지만 제안한 방법에서는 블록간의 정보를 이용하는 정렬방법과, 모든 처리군과 비교하여 상대적인 위치를 사용하는 결합위치 방법을 이용하기 때문에 기존 방법의 단점을 보완하였다는 점에서 의미있는 차별성이 있다고 생각할 수 있다.

추후 반복이 있는 랜덤화 블록 모형에서 다중비교에 관한 연구가 진행된다면 Cauchy분포에서 FWE가 보수적인 결론을 내리는 부분과 정규분포에서는 제안한 방법의 검정력이 대부분 가장 높지만 외에 분포에서는 전체적으로 기존 비모수 방법보다 낮은 검정력을 가지므로 추후에 더 보완해야 할 것으로 보인다.

References

Chung, T. S. and Kim, D. J. (2007). Nonparametric method using placement in one-way layout, *Communications for Statistical Applications and Methods*, **14**, 551–560.

Dun, O. J. (1964). Multiple comparisons using rank sums, *Technometrics*, **6**, 241–252.

Friedman, M. (1937). The use of ranks to avoid the assumption of normality implicit in the analysis of variance, *Journal of the American Statistical Association*, **32**, 675–701.

Han, J. U. and Kim, D. J. (2006). Nonparametric multiple comparison procedure using alignment method under randomized block design, *The Korean Journal of Applied Statistics*, **19**, 555–564.

Hodges, J. L. and Lehmann, E. L. (1962). Rank methods for combination of independent experiments in analysis of variance, *The Annals of Mathematical Statistics*, **33**, 482–497.

Keuls, M. (1952). The use of the "studentized range" in connection with an analysis of variance, *Euphytica*, **1**, 112–122.

Kramer, C. Y. (1956). Extension of multiple range tests to group means with unequal numbers of replications, *Biometrics*, **12**, 307–310.

Kruskal, W. H. and Wallis, W. A. (1952). Use of ranks in one-criterion variance analysis, *Journals of the American Statistical Association*, **47**, 583–621.

Lee, E. and Kim, D. (2017). Nonparametric procedures using alignment method and joint placement in a randomized block design with replications, *The Korean Journal of Applied Statistics*, **30**, 291–299.

Lee, M. H. and Kim, D. J. (2012). Nonparametric method using an alignment method in a randomized block design with replications, *Communications for Statistical Applications and Methods*, **19**, 77–84.

Mack, G. A. and Skillings, J. H. (1981). On the use of a Friedman-type statistic in balanced and unbalanced block designs, *Technometrics*, **23**, 171–177.

Nemenyi, P. (1963). Distribution-free multiple comparisons (Ph. D. thesis), Princetion University.

Orban, J. and Wolfe, D. A. (1982). A class of distribution-free two-sample tests based on placements, *Journal of the American Statistical Association*, **77**, 666–671.

Scheffe, H. (1953). A method for judging all contrasts in the analysis of variance, *Biometrika*, **40**, 87–104.

Song, H. and Kim, D. (2015). *Understanding Statistics*, Cheong Moon Gak, Seoul.

Song, H. and Lee, H. (1995). *Design of Clinical Experiments using SAS*, Free Academy, Seoul.

Song, M. and Jo, S. (2002). *Analysis of Statistical Data using SAS*, Free Academy, Seoul.

Tukey, J. W. (1953). *The Problem of Multiple Comparisons*, Unpublished dotted notes, Princeton University, 396.

반복이 있는 랜덤화 블록 모형에서 정렬방법과 결합위치를 이용한 비모수 다중비교법

황주원[a] · 김동재[a,1]

[a]가톨릭대학교 의생명 · 건강과학과

(2018년 6월 4일 접수, 2018년 7월 18일 수정, 2018년 8월 30일 채택)

요 약

반복이 있는 랜덤화 블록 모형(randomized block design with replications)에서 비모수 다중비교 방법으로는 Mack과 Skillings (*Technometrics*, **23**, 171–177, 1981) 방법이 있다. 이 방법은 각 블록의 처리에서 반복된 관측값 대신 관측값들의 평균을 이용해 순위를 매기기 때문에 정보의 손실이 발생할 가능성이 있다. 이를 보완하기 위해 본 논문에서는 Hodges와 Lehmann (*The Annals of Mathematical Statistics*, **33**, 482–497, 1962)이 제안한 정렬방법과 Chung과 Kim (*Communications for Statistical Applications and Methods*, **14**, 551–560, 2007)이 제안한 결합위치 검정법을 확장하여 반복이 있는 랜덤화 블록 모형에서 새로운 비모수 다중비교 방법을 제시하였다. 또한 몬테카를로 모의실험(Monte Carlo simulation)을 통해 모수적 방법과 기존의 비모수적 방법과의 family wise error rate (FWE)와 검정력을 비교하였다.

주요용어: 비모수, 다중비교, 랜덤화 블록 모형, 정렬방법, 결합위치

[1]교신저자: (06591) 서울 서초구 반포대로 222, 가톨릭대학교 의생명·건강과학과. E-mail: djkim@catholic.ac.kr