The Korean Journal of Applied Statistics (2018) DOI: http://dx.doi.org/10.5351/KJAS.2018.31.5.667
31(5), 667–675

The fGARCH(1, 1) as a functional volatility measure of ultra high frequency time series

J. E. Yoon[a] · Jong-Min Kim[b] · S. Y. Hwang[a,1]

[a]Department of Statistics, Sookmyung Women's University;
[b]Statistics Discipline, University of Minnesota-Morris

(Received August 17, 2018; Revised August 22, 2018; Accepted August 22, 2018)

Abstract

When a financial time series consists of daily (closing) returns, traditional volatility models such as autoregressive conditional heteroskedasticity (ARCH) and generalized ARCH (GARCH) are useful to figure out daily volatilities. With high frequency returns in a day, one may adopt various multivariate GARCH techniques (MGARCH) (Tsay, *Multivariate Time Series Analysis With R and Financial Application*, John Wiley, 2014) to obtain intraday volatilities as long as the high frequency is moderate. When it comes to the ultra high frequency (UHF) case (e.g., one minute prices are available everyday), a new model needs to be developed to suit UHF time series in order to figure out continuous time intraday-volatilities. Aue *et al.* (*Journal of Time Series Analysis*, **38**, 3–21; 2017) proposed functional GARCH (fGARCH) to analyze functional volatilities based on UHF data. This article introduces fGARCH to the readers and illustrates how to estimate fGARCH equations using UHF data of KOSPI and Hyundai motor company.

Keywords: fGARCH, ultra high frequency, functional volatility

1. 서론

금융시계열 변동성 연구에서는 하루에 한 개의 일별 종가(daily closing price)로 구성된 시계열을 분석하여 일별변동성(daily volatility)을 제시하는 것이 일반적이다. 일별변동성 모델링은 generalized autoregressive conditional heteroskedasticity (GARCH) 모형 (Bollerslev, 1986)이 널리 이용되며 복잡한 고차의 GARCH 모형보다는 식 (1.1)의 일차 모형이 실제 변동성 측정에 충분하다는 것이 알려져 있다 (Hansen과 Lunde, 2005; Li, 2004, p.100). 금융시계열 분석에서 수익률은 단순수익률이 아닌 로그 수익률(log return)을 의미하며 단순수익률에 비해 수리적 분석에 있어 여러면에서 장점이 있다 (Tsay, 2010, Ch.1). 변동성 연구의 대상은 자산 수익률의 변동성이다. 특정 k-일(day)의 수익률을 y_k라 하고 시점에 의존하는 변동성(조건부 분산)을 σ_k^2라 하자. 즉, $\sigma_k^2 = \mathrm{Var}(y_k|F_{k-1})$ 여기서 F_{k-1}은 $k-1$일까지의 정보 집합이다. 시계열 $\{y_k\}$가 다음 점화식을 가질 때 GARCH(1, 1) 모형이라 부른다.

$$\begin{aligned} y_k &= \sigma_k \epsilon_k, \\ \sigma_k^2 &= \delta + \alpha y_{k-1}^2 + \beta \sigma_{k-1}^2, \end{aligned} \tag{1.1}$$

This research was supported by a grant from the National Research Foundation of Korea (NRF-2018R1A2B2004157).

[1]Corresponding author: Department of Statistics, Sookmyung Women's University, Cheongpa-ro, 47-gil 100, Yongsan-Gu, Seoul 04310, Korea. E-mail: shwang@sookmyung.ac.kr

여기서 $k = 1, 2, \ldots, T$이고 δ, α, β는 모두 비음(non-negative)인 상수이며 $\{\epsilon_k\}$는 평균이 '0'이고 분산이 '1'인 independent and identically distributed (iid) 확률변수 수열이다.

고빈도(high frequency; HF) 자료란 하루에 많은 수의 수익률이 측정된 시계열을 지칭한다. 예를 들어 15분 단위로 관측된 고빈도 자료는 하루 6시간 거래로부터 $n = 24$개의 수익률로 구성된다. 고빈도 금융자료에서는 일중 수익률(intraday return)을 고려하며 일중 수익률은 k일에 n개가 조사되어 $\{y_{k,i}\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$로 나타낸다. 특정 k일의 일간(daily) 수익률 y_k는 n개의 일중 로그 수익률의 합으로 나타낼 수 있다 (Yoon과 Hwang, 2015; Tsay, 2010, Ch.1).

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} y_{k,i}.$$

일간 수익률의 변동성은 조건부 분산이므로 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\sigma_k^2 = \mathrm{Var}(y_k|F_{k-1}) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(y_{k,i}|F_{k-1}) + 2\sum_{i<j}^{n} \mathrm{Cov}[y_{k,i}, y_{k,j}|F_{k-1}]. \tag{1.2}$$

이 식에서 조건부 공분산을 영으로 가정하면 (즉, 일중 수익률 $\{y_{k,i}\}$이 조건부 iid인 경우) 다음의 근사식을 얻을 수 있다.

$$\sigma_k^2 = \mathrm{Var}(y_k|F_{k-1}) = n\mathrm{Var}(y_{k,1}|F_{k-1}) = \frac{n}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_{k,i} - \bar{y}_k)^2 \approx \sum_{i=1}^{n} y_{k,i}^2.$$

따라서 다음과 같이 정의된 일간 수익률 y_k의 실현변동성(realized volatility; RV_k)은

$$\mathrm{RV}_k = \sum_{i=1}^{n} y_{k,i}^2.$$

일간 수익률 변동성 σ_k^2의 "좋은" 추정량이다. σ_k^2의 추정량으로서 RV_k의 성질에 대해서는 Martens (2002) 및 Hansen과 Lunde (2005)를 참고하기 바라며 RV_k의 국내자료 실증분석에 대해서는 Yoon과 Hwang (2015), 수정된-RV_k에 대해서는 Lee와 Hwang (2017)을 보면 좋을 것이다. 최근에 Kim과 Hwang (2018)은 σ_k^2의 추정량으로서 비대칭-RV_k를 제안하고 국내자료에 적용한 바 있다.

본 연구에서는 n이 무한대로 접근하는 개념인 초고빈도(ultra high frequency; UHF) 자료로 구성된 금융시계열로부터 일간변동성 σ_k^2을 세분화한 일중-변동성(intraday volatility)을 구하고자 한다. 즉, 하루의 변동성을 세분화해 연속적인(continuous) 일중-변동성을 얻고자 하며 일반적인 금융시계열에서는 하루 거래의 시작과 끝이 높은 일중-변동성을 가지며 점심시간 근처가 낮은 일중-변동성을 가지는 것으로 알려져 있다 (Aue 등, 2017; Hörmann 등, 2013; Yoon 등, 2017).

2. 함수적 변동성 모형인 fGARCH(1, 1) 모형 소개

고빈도 자료에서 n이 작은 경우를 먼저 고려하고 다변량-GARCH(multivariate GARCH; MGARCH) 방법론을 적용해 보자. 특정 k-일의 n개 일중 수익률을 $n \times 1$ 벡터로 구성하여 $\mathbf{y_k}$로 표현하자.

$$y_k = (y_{k,1}, \ldots, y_{k,n}), \quad k = 1, 2, \ldots, T.$$

수익률 벡터 $\mathbf{y_k}$는 n변량-GARCH 모형으로 모델링 할 수 있다. 즉,

$$\mathbf{y_k} = \Sigma_k^{\frac{1}{2}} \epsilon_k, \tag{2.1}$$

여기서 Σ_k은 $n\times n$ 양정치 행렬이고 $\epsilon_{\mathbf{k}}$는 $n\times 1$ iid 벡터로 (1) $E(\epsilon_{\mathbf{k}})=0$, (2) $\mathrm{Var}(\epsilon_{\mathbf{k}})=I_n$을 만족한다. 여기서 Σ_k는 변동성 행렬(volatility matrix)로서 조건부 분산-공분산행렬이다.

$$\Sigma_k=\mathrm{Var}(\mathbf{y_k}|F_{k-1}). \tag{2.2}$$

다변량 변동성 분석이란 Σ_k를 파악하는 절차이며 먼저 Σ_k의 대각선 원소들에 대해 GARCH$(1,1)$ 모형을 설정함으로서, 즉, 각각의 대각선 변동성에 대해 모형식

$$\sigma^2_{k,i}=\delta_i+\alpha_i y^2_{k-1,i}+\beta_i\sigma^2_{k-1,i},\quad i=1,2,\ldots,n$$

을 가정하고, Σ_k의 비대각 원소들은 일중-수익률간의 동적인 상관관계로 모형화 할 수 있다. 변동성 행렬 Σ_k를 추정하기 위해 여러 방법들이 제안되어 있다 (Tsay, 2010, 2014; Lee와 Hwang, 2017). 미국 JP-Morgan 회사의 RiskMetrics에서 사용하는 비모수적 다변량 지수평활법인 exponentially weighted moving average (EWMA) 점화식은

$$\Sigma_k=0.06\mathbf{y_{k-1}}\mathbf{y^T_{k-1}}+0.94\Sigma_{k-1} \tag{2.3}$$

으로서 위첨자 “T”는 전치행렬을 표현한다. 이외에도 diagonal vectorization (DVEC) 점화식 방법 및 Baba-Engle-Kraft-Kroner (BEKK) 모형식 등이 있다 (Tsay, 2010). 모든 다변량 방법에서 나타나는 문제점인 바, Σ_k를 추정할 때 차원 n이 증가함에 따라 추정할 모수가 급격하게 많아진다는 단점이 있다(이를 “curse of dimensionality”라 부른다). 모수의 개수를 줄인 constant conditional correlation (CCC) 방법과 dynamic conditional correlation (DCC) 모형 및 Cholesky 모형(Cholesky decomposition and volatility modeling) 그리고 차원축소를 목표로 한 주성분방법 등도 있다. 자세한 내용은 Tsay (2010, 2014), Lee와 Hwang (2017) 및 Jin 등 (2017)을 참고하면 좋을 것이다.

이제 n이 큰 (혹은 $n\to\infty$)경우를 생각해 보자. 예를 들면 1분 단위 일중-수익률의 경우 $n=360$이며 최근 계측장비의 발달로 실시간 빅데이터 수익률이 기록/저장/관리되고 있으며 이는 $n\to\infty$ 경우에 해당하는 실시간 “빅데이터” 수익률을 “동시에” 고려할 필요성을 제기하게 되었다. $n\to\infty$ 경우를 초고빈도(ultra high frequency ; UHF) 자료로 명명 한다. 최근에 초고빈도 시계열의 변동성 분석을 위한 함수적(functional) 변동성 모형이 개발되었다 (Aue 등, 2017; Hörmann 등, 2013; Yoon 등, 2017). 시간 매개체 t는 $[0,1]$ 사이의 값을 가지며 일중(intraday)-거래시간을 나타내기로 하자($t=0$은 (거래)시작시간을 그리고 $t=1$은 종료시간을 표시한다). 함수공간(function space) F는 정의역이 $[0,1]$이고 실수 값을 갖는 함수들로 이루어진 함수공간이다. 특히 제곱함수가 적분 가능한 함수로 구성된 공간인 힐버트 공간(Hilbert space)인 $F=L^2([0,1])$를 고려하기로 한다. $F=L^2([0,1])$ 함수공간에서의 원소의 크기(norm)는 $\|f\|^2=\int_0^1 f^2(s)ds$이고 원소 f와 g간의 내적(inner product)은 $\int_0^1 f(s)g(s)ds$이다. “함수적”이라는 용어는 고려하는 확률변수열 및 “모수”들이 함수공간 F의 원소임을 의미한다. 특히 변동성은 양수이므로 비음함수로 구성된 F의 부분집합을 F^+로 표현하며 “모수”들은 F^+의 원소이다. 특정 자산의 k일의 t시점 가격이 $P_k(t)$일 때 “함수적” 수익률 $y_k(t)$는 다음과 같다.

$$\{y_k(t)=P_k(t)-P_k(t-h),\ 1\le k\le T,\ 0\le t\le 1\}, \tag{2.4}$$

여기서 시차 h는 아주 작은 시간 간격으로서 본 연구의 실증분석에서는 $h=1$분(one minute)으로 하였다. Aue 등 (2017)의 functional GARCH (fGARCH$(1,1)$) 모형은 식 (1.1)과 유사하게 다음과 같이 정의된다. 정의역 $t\in[0,1]$에서 정의된 랜덤 함수 수열(sequence of random functions on $t\in[0,1]$) $\{y_k(t),\ 1\le k\le T,\ 0\le t\le 1\}$가 다음의 식을 만족하면 functional GARCH process of order $(1,1)$,

줄여서 fGARCH$(1,1)$ 모형이라고 부른다.

$$
\begin{aligned}
y_k(t) &= \sigma_k(t)\epsilon_k(t), \\
\sigma_k^2(t) &= \delta(t) + (\alpha \circ y_{k-1}^2)(t) + (\beta \circ \sigma_{k-1}^2)(t),
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

여기서 $\{\epsilon_k(t)\}$는 iid한 랜덤 함수의 수열이며 $\delta(t) \in F^+$는 음이 아닌 함수이며 F^+의 원소인 $(\alpha \circ y_{k-1}^2)(t)$과 $(\beta \circ \sigma_{k-1}^2)(t)$는 다음과 같이 정의된다.

$$
(\alpha \circ y_{k-1}^2)(t) = \int_0^1 \alpha(t,s) y_{k-1}^2(s) ds : (\beta \circ \sigma_{k-1}^2)(t) = \int_0^1 \beta(t,s)\sigma_{k-1}^2(s) ds, \tag{2.6}
$$

여기서 $\alpha(t,s)$와 $\beta(t,s)$, $t \in [0,1]$, $s \in [0,1]$는 $L^2[0,1] \times L^2[0,1]$의 원소이며 적분 커널함수(integral kernel function)라 부른다. 함수적 모형인 fGARCH$(1,1)$의 확률론적 성질, 즉, 강정상조건, 에르고딕 조건 및 적률존재 조건 등에 대해서는 Aue 등 (2017) 및 Hörmann 등 (2013)을 참고하면 좋을 것이다. 정의식 (2.4) 및 (2.5)에서 함수적 모형이 아닌 경우인

$$
y_k(t) = y_k : \epsilon_k(t) = \epsilon_k : \sigma_k^2(t) = \sigma_k^2 : \delta(t) = \delta : \alpha(t,s) = \alpha : \beta(t,s) = \beta \tag{2.7}
$$

이면 fGARCH 모형은 전통적인 식 (1.1)의 GARCH 모형이 됨에 주목하기 바란다. 또한 $\beta(t,s)$가 영(zero)-함수인 경우에는 fGARCH$(1,1)$ 모형은 Hörmann 등 (2013)의 fARCH(1)과 동일하다. Yoon 등 (2017)이 지적한 대로 전통적인 GARCH 변동성 모형들이 일일 수익률, 주중 수익률과 같이 비교적 장기적인 주기의 분석에 사용되었던 반면 함수적 변동성 모형은 연속시간(continuous time) 데이터를 이용하고 있으므로 일중 수익률의 연속적인 추론을 할 수 있는 장점이 있다. 또한 실현변동성과 비교했을 때 해당되는 날의 일중-수익률들만 이용하여 구하는 실현변동성/수정실현변동성과 달리 함수적 변동성 모형에서는 해당일과 그 이전의 일중 데이터를 모두 이용하여 변동성을 파악하므로 실현변동성에 비해 데이터 활용도가 높다는 장점이 있다.

함수형 모형 fGARCH$(1,1)$를 파악하는 작업은 함수 $\delta(t) \in F^+$와 연산자 $\alpha(t,s)$와 $\beta(t,s)$를 자료로부터 추정함을 의미한다. 정의역 $[0,1]$에서의 정규직교함수(orthogonal function)들로 이루어진 M-차원 공간(M-dimensional class) $\Phi_M = \{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_M\}$을 고려한다. δ는 Φ_M에 있는 함수들의 선형결합으로 다음과 같이 가정한다.

$$
\delta = \sum_{m=1}^{M} d_m \phi_m.
$$

적분 연산자 $\alpha(t,s)$와 $\beta(t,s)$는 $\Phi_M \times \Phi_M$의 원소(element)라 가정하고 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$
\begin{aligned}
\alpha(t,s) &= \sum_{m,m'=1}^{M} a_{m,m'} \phi_m(t)\phi_{m'}(s), \\
\beta(t,s) &= \sum_{m,m'=1}^{M} b_{m,m'} \phi_m(t)\phi_{m'}(s).
\end{aligned}
$$

함수적 표본(functional sample)으로부터 δ, α, β를 추정하는 문제는 실수 모수(real-valued parameters) 집합 $\{d_m, a_{m,m'}, b_{m,m'} : m, m' = 1, \ldots, M\}$을 추정하는 것으로 볼 수 있다. 추정과정에서 고려하는 정규직교 함수들의 class Φ_M의 선택으로는 일반적으로 퓨리에 기저(Fourier bases)나 B-스플라인 기저(B-spline bases)를 포함하며 웨이블렛(Wavelets) 또한 고려할 수 있다 (Aue 등, 2017, Ch.3).

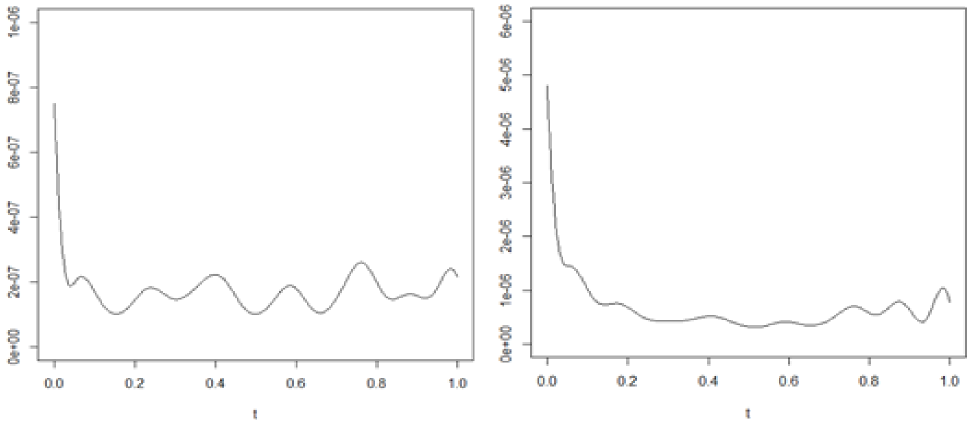

Figure 3.1. Plot of $\delta(t)$: KOSPI (left) and HD-Motor (right).

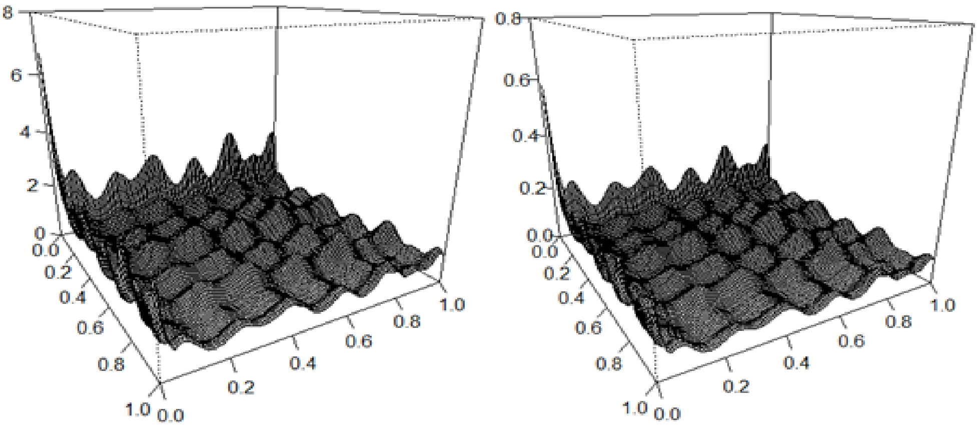

Figure 3.2. KOSPI Plot of $\alpha(t, s)$ (left) and $\beta(t, s)$ (right).

함수적 데이터는 기저 함수(basis function)들의 집합과 이러한 기저 함수들의 선형결합을 정의하는 계수들의 집합으로 구성되었다고 볼 수 있는데 퓨리에 기저 또는 B-스플라인 기저를 이용할 수 있다. 여기서 어떠한 기저 함수를 이용하였는지에 따라 추론 결과가 차이가 있다. 퓨리에 기저 함수는 상수 함수이며 나머지 함수들은 사인(sine)함수와 코사인(cosine)함수들의 짝으로 이루어져 있다. 또 항상 홀수개의 기저 함수를 생성한다는 특징이 있다. 스플라인 방법에서는 기저 함수를 B-스플라인 기저를 이용하는 방법을 사용한다. 본 연구에서 모형 추정은 UC Davis의 Aue 교수께서 제공해준 R코드를 국내 자료에 맞게 수정/조정하여 수행하였으며 이 프로그램에서는 B-스플라인 기저를 이용하여 추정하고 있다.

3. 실증 분석 예제

본 절에서는 함수형 변동성 모형인 fGARCH(1, 1) 모형 적용 과정을 예시하고자 한다. 자료 분석 코드는 Aue 등 (2017)의 제 1저자인 Aue 교수(UC Davis)가 제공해 준 R코드를 수정하여 수행했음을 밝혀두는 바이다. R의 “fda” 패키지의 B-스플라인 방법을 이용하여 기저 함수를 추정하였으며 20개의 기저 함수, 4차 함수를 이용하는 큐빅 스플라인(Cubic spline) 함수를 이용하였다. 그 후 “DEoptim”,

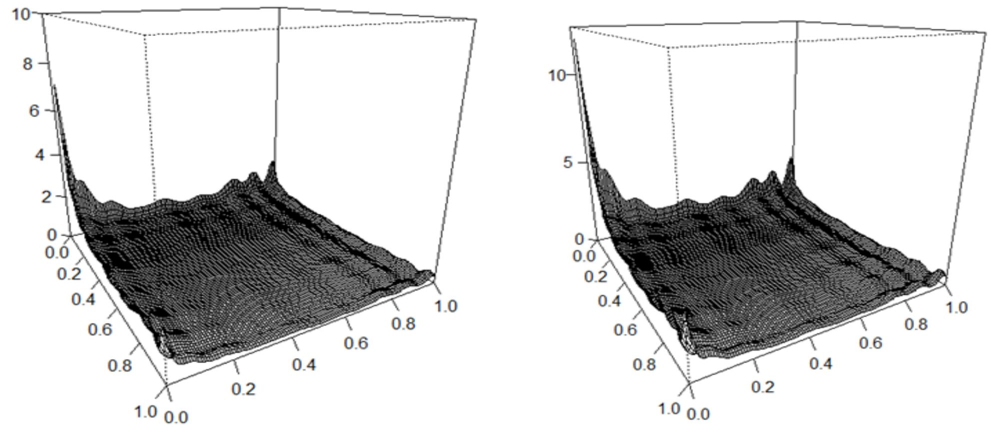

Figure 3.3. HD-Motor Plot of $\alpha(t,s)$ (left) and $\beta(t,s)$ (right).

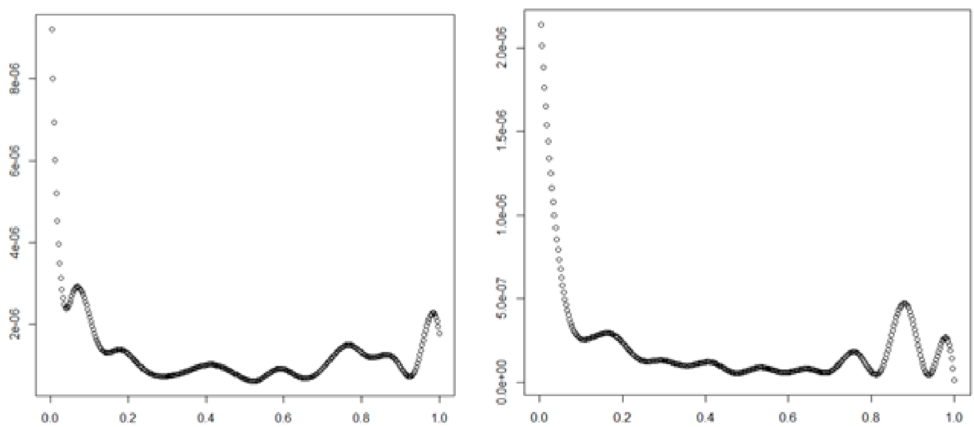

Figure 3.4. Plot of $\delta(t)$: HD-Motor Data Set-I (left) and Data Set-II (right).

"expm", "matrixcalc", "compiler" 패키지를 이용하여 δ 함수와 α, β 연산자를 추정하였다.

실증분석에는 KOSPI 지수와 KOSPI 종목인 현대차(HD-Motor)주가 (고빈도)자료를 이용하였다. 2010년 1월 5일부터 2015년 6월 30일까지 1,349일의 자료이며 개장시간 동안 1분 간격으로 조사된 고빈도 자료를 이용하였다. 1분 단위에 해당하는 시간간격은 1/360이다. 기호 $P_k(t)$를 k일의 시각 t에서의 주가라고 하면 $y_k(t) = \log P_k(t) - \log P_k(t-h)$로 수익률을 계산하였으며 $h = 5/360$로 하여 5분 간격 수익률을 이용하여 추정하였다.

Figures 3.1–3.3는 KOSPI, 현대차 자료의 추정결과인 $\delta(t)$와 연산자 $\alpha(t,s)$와 $\beta(t,s)$이다. Figure 3.1에서 두 자료 모두 비슷한 $\delta(t)$의 일중(intraday) 움직임을 볼 수 있으며 t가 0 또는 1에 가까울 때 값들이 다소 커지는데, 실제로 개장시간과 폐장시간 근처에서 변동성이 큰 점을 반영하는 결과이다. Figure 3.2의 KOSPI 연산자 추정값도 t와 s가 0 또는 1에 가까울 때 값들이 더 큰 경향이 있음을 볼 수 있다. Figure 3.3의 HD-Motor 연산자 추정에서 특이한 점은 거의 모든 t와 s 시간대에 연산자가 상수(flat)한 것으로 보아 전통적인 GARCH 모형에 상수항만 함수 $\delta(t)$인 간결한 모형으로 보아도 좋을 것으로 판단한다 (식 (2.7) 참고).

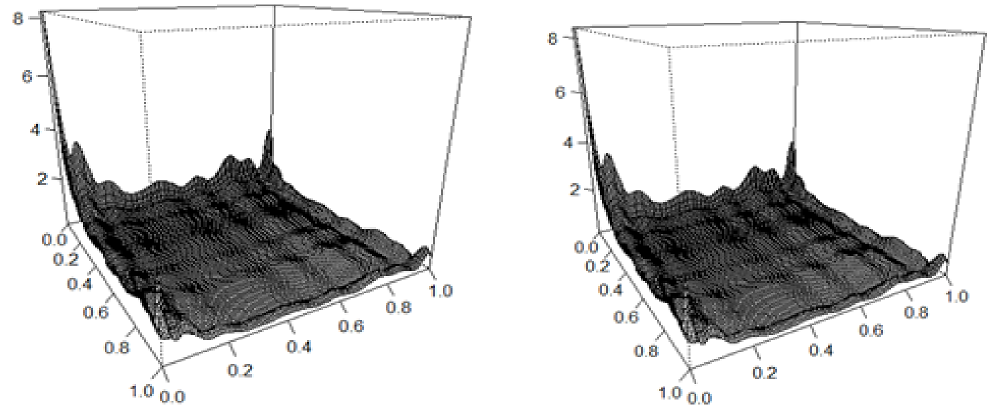

Figure 3.5. (Data Set-I) HD-Motor $\alpha(t, s)$ (left) and $\beta(t, s)$ (right).

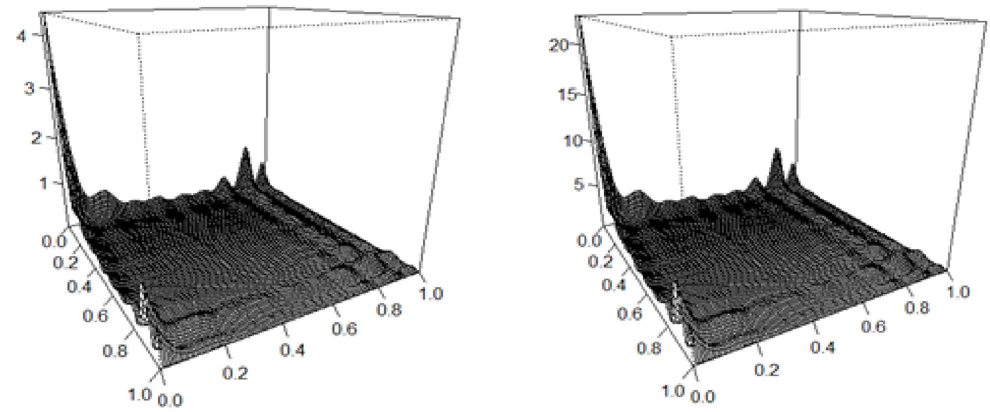

Figure 3.6. (Data Set-II) HD-Motor $\alpha(t, s)$ (left) and $\beta(t, s)$ (right).

수행 프로그램의 안정성을 보기 위해 HD-Motor 전체 고빈도 자료를 전반부와 후반부로 나누어서 각각 적합 시켜보았다. 전반부 자료(Data Set-I)는 2010년 1월 5일–2012월 9월 21일의 총 675일 자료이며 후반부 자료(Data Set-II)는 2012년 9월 24일–2015월 6월 30일의 674일로 구성된 자료이다. Figure 3.4에서 현대차 전반부, 후반부 자료의 $\delta(t)$는 전체자료 Figure 3.1 (right)과 유사한 패턴을 보인다. 또한 연산자 $\alpha(t, s)$와 $\beta(t, s)$의 추정 결과인 Figure 3.5와 Figure 3.6도 전체 자료 Figure 3.3과 크게 상이해 보이지 않는다.

Acknowledgement

Many thanks to Professor Alexander Aue (UC Davis, USA) for providing us with the program code for fGARCH(1, 1).

References

Aue, A., Horváth, L., and Pellatt, D. F. (2017). Functional generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Time Series Analysis*, **38**, 3–21.

Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, **31**, 307–327.

Hansen, P. R. and Lunde, A. (2005). A forecast comparison of volatility models: does anything beat a GARCH $(1, 1)$?, *Journal of Applied Econometrics*, **20**, 873–889.

Hörmann, S., Horváth, L., and Reeder, R. (2013). A functional version of the ARCH model, *Econometric Theory*, **29**, 267–288.

Jin, M. K., Yoon, J. E., and Hwang, S. Y. (2017). Choice of frequency via principal component in high-frequency multivariate volatility models, *The Korean Journal of Applied Statistics*, **30**, 747–757.

Kim, J. Y. and Hwang, S. Y. (2018). A threshold-asymmetric realized volatility for high frequency financial time series, *The Korean Journal of Applied Statistics*, **31**, 205–216.

Lee, G. J. and Hwang, S. Y. (2017). Multivariate volatility for high-frequency financial series, *The Korean Journal of Applied Statistics*, **30**, 169–180.

Li, W. K. (2004). *Diagnostic Checks in Time Series*, Chapman & Hall/CRC, New York.

Martens, M. (2002). Measuring and forecasting S&P 500 index-futures volatility using high-frequency data, *Journal of Futures Markets*, **22**, 497–518.

Tsay, R. S. (2010). *Analysis of Financial Time Series* (3rd ed), John Wiley & Sons, New York.

Tsay, R. S. (2014). *Multivariate Time Series Analysis : With R and Financial Application*, John Wiley & Sons, New York.

Yoon, J. E. and Hwang, S. Y. (2015). Volatility computations for financial time series : high frequency and hybrid method, *The Korean Journal of Applied Statistics*, **28**, 1163–1170.

Yoon, J. E., Kim, J. M., and Hwang, S. Y. (2017). Functional ARCH (fARCH) for high-frequency time series : illustration, *The Korean Journal of Applied Statistics*, **30**, 983–991.

함수적 변동성 fGARCH(1, 1)모형을 통한 초고빈도 시계열 변동성

윤재은[a] · 김종민[b] · 황선영[a,1]

[a]숙명여자대학교, [b]미네소타대학교

(2018년 8월 17일 접수, 2018년 8월 22일 수정, 2018년 8월 22일 채택)

요 약

초고빈도(ultra high frequency; UHF)시계열의 함수적 변동성 측정을 위한 최신 기법인 함수적 변동성 functional GARCH : fGARCH(1, 1) 모형을 소개하고 설명하였다. 실증분석을 위해 R-code fGARCH(1, 1) 프로그램을 KOSPI/현대차 초고빈도 수익률 자료에 적합하여 예시하였다.

주요용어: 함수적 변동성, 초고빈도 시계열, 함수적-GARCH 모형

본 연구는 한국연구재단의 지원에 의해 수행한 연구입니다 (NRF-2018R1A2B2004157).

[1]교신저자: (04310) 서울특별시 용산구 청파로47길 100, 숙명여자대학교 통계학과.
E-mail: shwang@sookmyung.ac.kr