

사각용기에서 발생하는 고점성 유체의 슬로싱 유동

박준상*†

Sloshing Flow of Highly-Viscous Fluid in a Rectangular Box

Jun Sang park*†

Abstract A study on the sloshing flow of highly-viscous fluid in a rectangular box was made by both of theoretical approach and experimental visualization method. Assuming a smallness of external forcing to oscillate the container, it was investigated a linear sloshing flow of highly-viscous fluid utilizing asymptotic analysis by Taylor-series expansion as a small parameter $R_e (\ll 1)$, in which R_e denotes Reynolds number. The theory predict that, during all cycles of sloshing, a linear shape of free surface will prevail in a bulk zone and it has confirmed in experiment. The relevance of perfect slip boundary condition, adopted in theoretical approach, to the bulk zone flow at the container wall was tested in experiment. It is found that quasi-steady coated thin film, which makes a lubricant layer between bulk flow and solid wall, is generated on the wall and the film makes a role to perfect slip boundary condition.

Key Words : Dip Coating Flow(딥코팅 유동), Free Surface(자유표면), Slip Condition(미끄럼 조건), Sloshing Flow(슬로싱 유동), Natural Oscillation(고유진동)

1. 서론

자유표면을 갖는 액체를 담고 있는 용기에 주기적인 외부가진이 가해질 때 유발되는 액체의 주기적인 운동이 슬로싱(sloshing)이다. 슬로싱 현상은 많은 자연재해와 공학적인 문제 등이 밀접하게 관련되어있다. 지진에 의한 원유저장탱크 내부유체의 슬로싱 운동 및 이와 연계된 구조물의 유체 유발진동, 항공기나 로켓과 같은 비행체의 비행시 발생하는 연료탱크 내의 연료의 움직임 그리고 LNG 수송선 등이 대양을 향해 할 때 과도에 의해

발생하는 내부 LNG의 움직임 등이 이에 속한다 (1),(2).

특히 외력에 의한 요동이 유체와 유체를 담고 있는 용기의 기하학적인 특성에 의해 정해지는 유체의 공진 주파수와 가까워질수록 슬로싱의 영향은 커지며, 이 경우 시스템의 구조적 안정성 및 연료펌프 등의 오작동으로 인한 항공기 조종안정성에 심각한 문제를 초래할 수 있다.

슬로싱 유동은 자유표면에서 발생하는 웨이브 운동과 밀접한 관계를 가지고 있기 때문에 포텐셜 유동 이론에 기반을 둔 비점성 해석이 이론적인 기반을 제공해왔다. 특히 사각용기에서 발생하는 2차원 슬로싱 문제의 경우는 슬로싱 연구를 위한 표준문제(benchmark problem)로서 광범위한 연구가 진행되어 왔다. 지금까지 이루어진 대표적인

*† School of Mechanical & Automotive Engineering, Halla University
E-mail: jspark@halla.ac.kr

이전 연구들을 살펴보면, Faltinsen⁽³⁾은 수평으로 진동하는 2차원 사각 용기에 대한 선형 해석해 (linear analytical solution)를 얻었으며, Faltinsen & Timokaha⁽²⁾는 유한 깊이의 물이 채워진 사각용기의 비선형 슬로싱에 관한 연구를 다중모드해석방법(multimodal analysis)을 이용하여 수행하였고, Hill⁽⁴⁾은 공진과의 과도기적 거동을 앞서 진행된 연구의 가정을 재설정함으로써 설명하려 했다. 특히, 슬로싱에 대한 연구가 공진주파수 근처에서의 여러가지 유동현상을 규명하기 위해 진행되어 왔으며 Ibrahim⁽¹⁾ 과 Faltinsen & Timokaha⁽²⁾로부터 이들에 대한 광범위한 결과들을 볼 수 있다. 앞에서 언급한 대부분의 선형연구에서는 파동문제를 비점성 유동 가정을 통해 진행했다.

사실 대부분의 슬로싱 문제에서 발생하는 파장과 주기를 고려하면 유동특성에 대한 레이놀즈수가 매우 크기 때문에 대부분의 유동영역에서 발생하는 파동특성은 점성의 영향을 무시할 수 있는 비점성 유동 가정이 적절한 것으로 받아들여진다. 그러나 자유표면의 주기적 파동운동을 성공적으로 예측할 수 있는 비점성 이론도 가진을 위해 외부에서 지속적으로 유입되는 에너지가 유체 내부에 무한히 축적되어야 한다는 물리적으로 불가능한 모순점을 안고 있다. 소산작용을 설명할 수 없는 단점이 존재한다.

이차원 슬로싱 운동에 대한 점성연구는 외력에 의해 슬로싱 유체 내부로 전달된 에너지의 소산에 대한 메카니즘을 밝힌 Keulegan⁽⁵⁾ 와 Mei⁽⁶⁾ 등이 행한 연구가 출발점이다. 이 연구들에서는 자유표면이 용기벽과 만나는 접촉점(contact point) 부근의 좁은 국지영역에서 발생하는 점성소산작용을 통해 기존의 비점성 슬로싱 유동 모형이 해결하지 못한 에너지 평형에 대한 해결책을 제시했다.

슬로싱에 대한 점성의 영향에 대한 이전의 연구 대부분은 점성이 유동에 국지적으로 영향을 미치는 경우에 대한 경우이다. 반면 Wu, Taylor & Greaves⁽⁷⁾가 용기 내부의 유체가 고점성유체일 때 즉, 유동영역 전체에서 내부유체의 점성을 무시할 수 없는 경우에 대한 해석을 통해 점성의 영향을 규명하는 이론을 처음으로 제시했다. 이것이 필자가 이는 범위에서 전 유동영역에서 점성이 압도적인 경우에 대

한 유일한 슬로싱 연구이다. Wu, Taylor & Greaves⁽⁷⁾의 연구를 살펴보면 이론전개 과정에서 용기벽면에서 유동에 대한 다음의 운동학적 조건을 도입했다: (i)벽면 비침투조건(nonpermeable condition): 벽면수직속도 성분에 대한 조건, 즉, $v_n = 0$ 그리고 (ii) 벽면 완전미끄럼조건(perfect slip condition): 벽면평행속도성분에 대한 조건, 즉, $\partial v_s / \partial n = 0$.

상기 언급한 조건(ii)가 물리적으로 적절한가에 대한 의문이 본 연구의 출발점이다. 유체의 점도가 강해지면 벽면에서의 평행방향 유동속도에 대한 조건이 완전 미끄럼조건(perfect slip condition)보다는 접촉조건(noslip condition)에 더 가까이 갈 것으로 일견 예상되기도 하기 때문이다. 물론 이 문제는 자유표면을 갖는 유동의 경우 유체와 벽면이 만나는 접촉점 운동(contact point movement)과도 연결되어 있어 단순한 사고실험으로 결론을 내릴 수는 없다.

따라서 본 논문에서는 조건(ii)에서 언급한 가정의 정당성에 대한 의문을 해결하는데 실험의 초점을 맞추었다. 나아가 과도상태에서 발생하는 자유표면의 고유진동(natural oscillation)모드 감쇄에 대한 Wu, Taylor & Greaves⁽⁷⁾의 이론해석 결과를 확장하여, 본 논문에서는 매우 작은 레이놀즈수($R_e \ll 1$)와 조건(ii)가정 하에 고점성 유체의 경우 슬로싱에서 발생하는 자유표면 형상이 선형형상을 보인다는 것을 선형이론을 통해 밝혔다. 그리고 선형이론과 실험결과를 비교하여 조건(ii)가정의 물리적인 타당성을 규명했다.

2. 실험장치 구성

본 연구의 목적인 고점성 유체의 슬로싱 유동 특성실험을 위해 투명 아크릴로 만든 사각용기를 중력에 수직인 일방향(x -방향)으로 조화운동을 하는 수평교반장치를 구성하였다 (Fig.1). 크랭크와 x -축 방향 직선가이드로 연결된 장치를 가변 직류모터(BLDC)의 회전운동으로 제어하는 교반시스템이다.

본 실험에 사용한 사각용기의 크기는 x -방향, y -방향, z -방향으로, 각각, 60mm, 180mm,

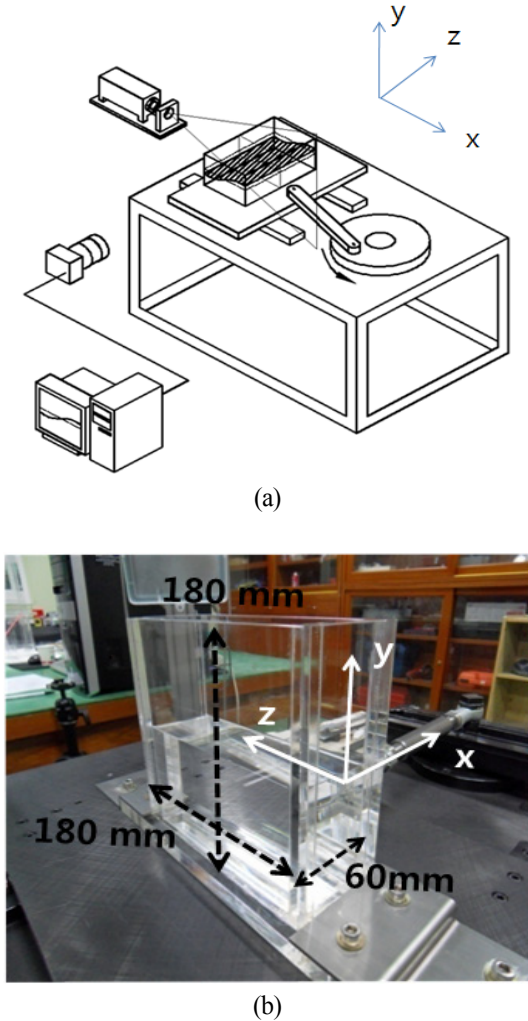


Fig. 1. Experimental system : (a) schematics of the system, (b) scale and coordinate of the container.

180mm 이다. 크랭크 팔의 길이 변화를 통해 용기의 가진진폭(S^*)을 모터 회전수 변화를 통해 가진주파수(f^*)를 설정할 수 있으며, 제작된 실험 장치는 Fig.2에서처럼 정확히 정현파 형태로 x -축방향의 교반운동을 하는 것을 확인했다.

2차원 자유표면 운동분석을 위해 2 Watt 레이저를 원통형 렌즈에 통과시켜 2 mm의 빔 형태로 만들어 고속카메라로 $x-y$ 평면에 대한 이미지를 획득하였다. 이미지는 210 fps의 속도로 촬영하였다^{(8),(9)}.

3. 해석 및 실험

본 연구에서 다루는 문제는 z -축 방향의 유동특성 변화가 없는 $x-y$ 평면에서 발생하는 이차원 슬로싱 문제이다. 외력에 의한 가진력이 작은 경우가 이에 해당한다. 일반적으로 가진의 크기가 강해지면 이차원 슬로싱이 3차원 유동으로 천이하게 된다. 유동특성 변화에 따른 영역선도(regime diagram)는 Ji et al.⁽⁸⁾의 연구에 자세히 나와 있다.

작동유체로 물보다 동점성계수가 100배, 즉, 100cs 인 고점성 실리콘오일을 사용하였다. 밀도 ρ 와 점성계수 μ 를 갖는 유체가 x -방향 폭 $L^*(=60mm)$, y -방향 높이 $H^*(=180mm)$, z -방향 폭 $D^*(=180mm)$ 인 용기에 정지한 초기상태에 액체깊이 $H_0^*(90mm)$ 로 채워져 있는 경우를 고려하자. 이 경우 $H_0^*/L^*=1.5$ 로 침수 조건을 만족하는 물리적으로는 자유표면 운동에 대한 용기바닥 영향이 미미한 경우이다. 그리고 시간에 따른 용기의 운동변위가 $S^* \sin(\pi f^* t^*)$ 인 경우를 생각하자.

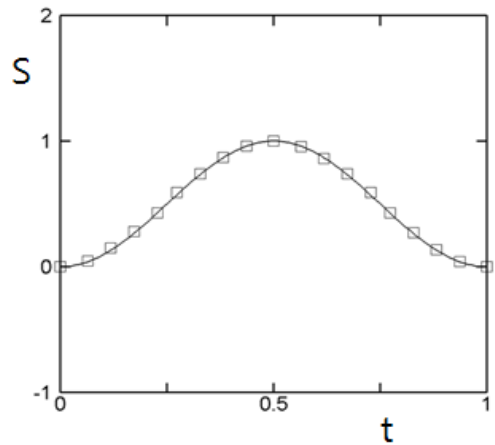


Fig. 2. Comparison of normalized stroke displacement between theory and experiment for a cycle. ($S^*=20mm$, $f^*=2.5Hz$).
 —, sine function; □, experimental data

3.1 선형해석

외력에 의한 요동이 작은 이차원 선형슬로싱 문제에 대한 지배방정식은,

$$t = f^* t^*, x = x^*/L^*, y = y^*/L^*, u = u^*/\delta f^* L^*, \\ v = v^*/\delta f^* L^*, p = (p^* + \rho^* g y^*)/\delta \rho^* (f^* L^*)^2, \\ \text{의 무차원 변수를 도입하여}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R_e} \nabla^2 u, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{R_e} \nabla^2 v, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

와 같이 쓸 수 있다. 여기서 u 와 v 는 각각 x 및 y 방향 속도성분, p 는 환산압력(reduced pressure), ρ 는 액체의 밀도, $\delta (= \pi S^*/L^*)$ 는 가진 강도를 나타내는 비선형 파라미터, 레이놀즈수 $R_e = f^* L^{*2}/\nu$ 그리고 첨자 *는 차원변수를 의미한다. 수식에 사용된 좌표계는 Fig. 1에서와 같이 직교 좌표계이며 원점은 자유표면의 중앙에 위치한다.

본 문제에 연관된 운동학적(kinematic) 경계조건은 다음과 같다 :

$$(i) x = \pm 0.5 \text{에서 } u = \cos(\pi t), \partial v/\partial x = 0, \quad (4)$$

$$(ii) y = -1.5 \text{에서 } v = 0, \partial u/\partial z = 0, \quad (5)$$

$$(iii) y = h \text{에서 } \partial h/\partial t = v, \quad (6)$$

위식에서 h 는 무차원 자유표면 높이를, u, v 는 각각 x, y 방향의 무차원 속도를 의미한다. 여기서 언급해야 할 사실은 벽면 경계조건으로 Wu, Taylor & Greaves⁽⁷⁾와 같은 완전미끄럼 조건을 사용한다는 것이다.

이제 슬로싱이 시작된 후 초기 과도상태가 지나고 유동이 안정화된 준정상 상태를 유동을 고려하자. 그러면 유동해석에서 초기조건에 대한 고려는 필요없게 된다.

$$\Pi = \Pi_0 + R_e \Pi_1 + R_e^2 \Pi_2 + \dots, \quad (7)$$

여기서 Π 는 유동변수를 의미한다.

식(7)을 식(1)-(6)에 대입하고 각 차수별 지배방정식과 경계조건을 만족하는 해를 구하면 다음과 같다.

(1) 0-차해

식(1)-(3)으로부터 0-차 지배방정식은,

$$\nabla^2 u_0 = 0, \quad (8)$$

$$\nabla^2 v_0 = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0, \quad (10)$$

이고, 관련 경계조건은 식(4)-(5)로부터

$$(i) u_0 = \cos(\pi t), \partial v_0/\partial x = 0 \quad (x = \pm 0.5), \quad (11)$$

$$(ii) v_0 = 0, \partial u_0/\partial z = 0 \quad (y = -1.5), \quad (12)$$

$$(iii) \partial h_0/\partial t = v_0 \quad (y = h_0), \quad (13)$$

이다.

0-차해를 구하면

$$u_0 = \cos(\pi t), v_0 = p_0 = h_0 = 0, \quad (14)$$

이다.

(2) 1-차해

식(1)-(3)으로부터 1-차 지배방정식은,

$$\nabla^2 u_1 = \frac{\partial u_0}{\partial t}, \quad (15)$$

$$\nabla^2 v_1 = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0, \quad (17)$$

이고, 관련 경계조건은 식(4)-(5)로부터

(i) $u_1 = 0, \partial v_0 / \partial x = 0 \quad (x = \pm 0.5),$ (18)

(ii) $v_1 = 0, \partial u_1 / \partial z = 0 \quad (y = -1.5),$ (19)

(iii) $\partial h_1 / \partial t = v_1 \quad (y = h_0),$

$$u_1 = \frac{\partial u_0}{\partial t} (x^2 - 0.25) = -\pi \sin(\pi t) (x^2 - 0.25),$$
 (20)

$$v_1 = -2x(y + 1.5) \frac{\partial u_0}{\partial t} = -2\pi \sin(\pi t) x (y + 1.5).$$
 (21)

결과적으로 자유표면의 높이, h_1 는

$$h_1(x, y = h, t) = \int v dt \approx 3 \cos(\pi t) x,$$
 (22)

와 같이 된다.

식(22)의 결과는 슬로싱에 의한 자유표면 형상이 비점성 유체의 경우 조화함수 형태의 정지파(standing wave) 형상인데 반해 고점성 유체의 경우 자유표면의 형상이 선형(직선)적으로 나타나는 정지파라는 것을 보여준다 (Fig. 3).

물리적인 관점에서 살펴보면 유체의 점도가 매우 큰 경우 유체사이에 작용하는 상호작용이 전 영역에 걸쳐 동시에 나타난다. 따라서 0-차해에서 볼 수 있듯이 유체가 동일위상으로 마치 고체처럼 용기와 같은 위상으로 운동한다. 그러나 1-차해에서는 0-차해의 관성력에 의해 발생하는 압력의 영향으로 유체의 수직방향 운동을 발

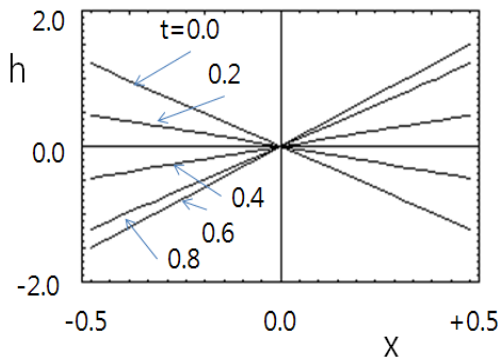


Fig. 3. Time history of free surface profile for a cycle

생시키고 이것이 식(22)와 같이 선형정지파 형태의 자유표면 운동을 발생시킨다. 이 사실은 다음 장에 기술되는 실험결과를 통해 다시 확인할 것이다.

3.2 실험결과

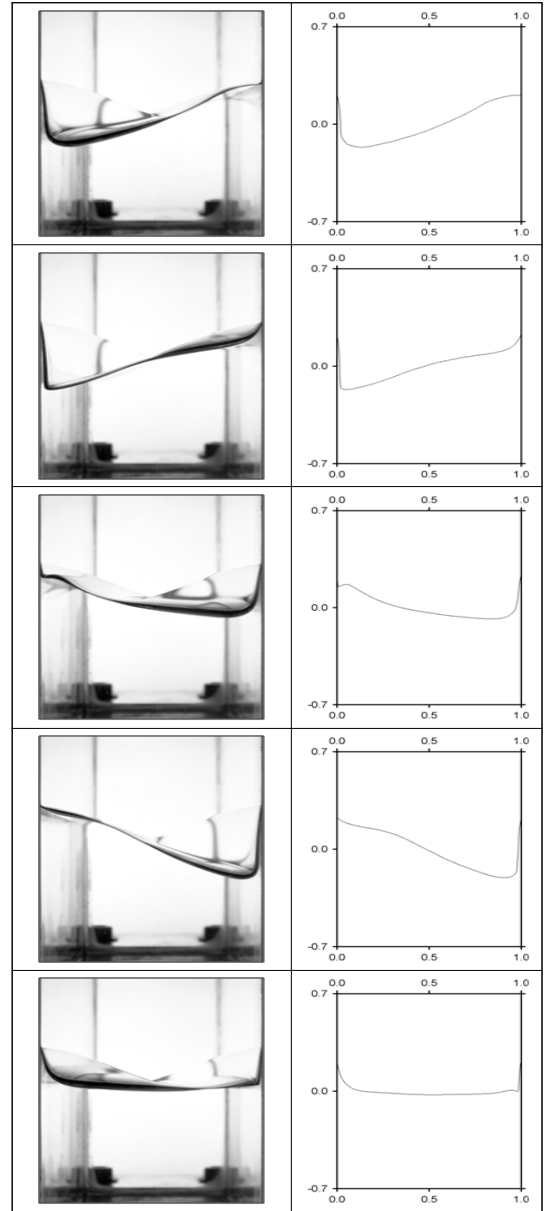


Fig. 4. Free surface waves for a cycle when $S^* = 20mm$ and $f = 2.5Hz$. From the top frame, times, t , are 0.0, 0.2, 0.4, 0.6 and 0.8.

Fig.4에서 한 주기 동안의 자유표면 형상변화에 대한 순간사진(left column)과 명암구분에 대한 데이터 처리를 통한 자유표면 프로파일(right column) 그래프를 보여준다. 이 그림의 결과는, 작동유체를 물보다 동점성계수가 100배 큰 $\nu (= \mu/\rho) = 100cs$ 실리콘오일을 이용하여, 실험파라미터 $S^* = 20mm$, $f^* = 2.5Hz$, 즉, x -축방향으로 용기를 변위 $S^* \sin(\pi f^* t^*)$ 로 주기적으로 교반시킨 경우에 대한 것이다. 이 경우 용기의 크기척도 $L^* = 60mm$ 를 기준으로 계산한 본 실험의 특성 레이놀즈수를 계산하면

$$R_e \left(= \frac{f^* L^{*2}}{\nu} \right) \cong 300, \quad (23)$$

이다.

따라서 실험결과를 3.1절에서 수행한 이론과 직접적인 양적비교하기에는 다소 무리가 있는 실험영역이다. 이론에서 섭동해석을 위한 테일러 전개 파라미터가 레이놀즈수(R_e) 인 것을 감안하면 양적비교를 위해 물리적으로 타당한 실험 레이놀즈수가 1보다 작은 값이어야 한다. 따라서 이론으로부터 얻은 결과를 실험결과와 정성적으로 비교할 수밖에 없다.

Fig.4에서 볼 수 있듯이 슬로싱에서 발생하는 자유표면 운동은 벽면 근처를 제외한 대부분의 유동영역에서 선형형태의 운동을 한다. 자유표면 형상이 3.1절의 선형이론에서처럼 완전한 직선형태가 아닌 것은 실험에서 수행한 용기가진의 강도가 $\delta (= \pi S^*/L^*) \approx \pi/3$ 와 같이 유한한 값이기 때문에 발생한 비선형효과로 판단된다. 현상학적 관점에서 바라보면 Fig.4의 결과는 유체의 점성이 매우 커지면 대부분의 유동영역에서 발생하는 유체의 흐름(bulk flow)는 점도에 의한 유체상호간의 밀접한 상관관계로 인해 동일위상 모드로 움직인다. 그리고 고정된 시간관점에서 바라보면 유체전체가 외부가진에 의한 일정한 수평방향 가속도를 받게 되고 이로 인해 발생하는 수평방향 압력구배에 대응하는 x 에 비례하는 수직방향 포텐셜 에너지가 발생하고 결과적

으로 x 에 선형적으로 비례하는 자유표면의 형상을 발생시킨다. 이것은 3.1절의 이론에서 밝힌 사실과 잘 일치하는 결과이다.

이제 3.1절의 이론해석과 Wu, Taylor & Greaves⁽⁷⁾의 연구에서 채택한 벽면 완전미끄럼조건에 대해 논의해보자. Fig.4의 결과를 살펴보면 슬로싱 운동 중 좌, 우 벽면 근처에서는 얇은 유막이 존재하고 벌크유동(bulk flow)에서 발생하는 자유표면이 유막가장자리를 수직방향으로 오르내리면서 주기적인 운동을 하는 것을 알 수 있다. 실험결과에서 볼 수 있듯이 고점성 유체의 슬로싱의 경우, 내부 벌크유동(bulk flow)은 벽면과 직접 만나지 않고 슬로싱 초기 벽면에 형성되는 준정상상태의 유막에 의해 벽면과 분리되어 유막가장자리를 따라 수직으로 오르내리는 운동을 한다. 따라서 벽면에서의 벌크유동에 대한 경계조건을 물리적으로 점착조건(no-slip condition) 보다는 미끄럼조건(slip condition)에 가깝게 변화시킨다. 이것이 앞서 언급한 벽면 완전미끄럼조건을 채택한 이론해석 결과가 유용하게 만든 메카니즘이다.

벽면 근처에서 형성되는 유막은 평판을 액체 속에 수직으로 담근 후 일정한 속도로 위로 끌어낼 때 발생하는 딥코팅(dip coating)유동에 대한 Landau - Levich 문제에서 발생하는 흐름과 유사하다. 이 문제는 본 논문의 연구범위를 넘어서기 때문에 여기서는 더 이상 논의하지 않는다.

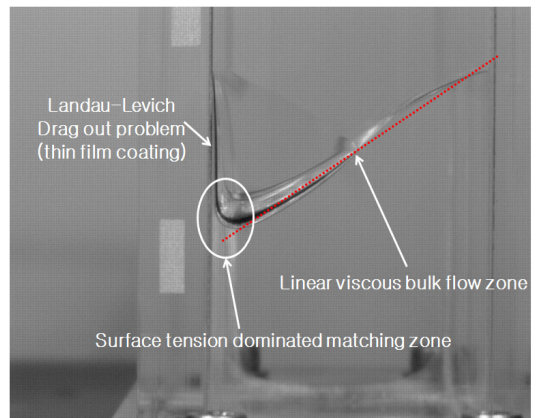


Fig. 5. Zonal demarcation of free surface in sloshing wave of a highly viscous fluid

실험 결과를 요약하면 고점성 유체의 슬로싱은 자유표면에서 발생하는 슬로싱파(sloshing wave)가 Fig. 5에서처럼 3영역으로 구분된다 : 첫째, 벽면 미끄럼 경계조건을 적용할 수 있는 대부분의 유동영역을 차지하는 선형점성 벌크유동 영역 (linear viscous bulk flow zone); 둘째, 벽면 근처 "Landau - Levich drag out problem"과 유사한 준정상 얇은 유막영역; 셋째, 유막과 선형파가 만나는 표면장력의 영향이 큰 천이영역.

4. 결론

(1) 심수조건에서 고점도 유체의 슬로싱에 대한 이론해석을 통해 벌크유동(bulk flow)에서 발생하는 자유표면형상이 선형인 것을 밝히고, 물보다 동점성계수가 100배 큰 실리콘오일을 이용하여 $Re = 300$ 에 대한 실험을 통해 이론결과를 확인했다.

(2) 실험을 통해 고점성 유체의 슬로싱 문제에서는 벽면 근처에서 발생하는 준정상 유막이 벌크유동에 대한 벽면에서의 미끄럼 경계조건을 가능하게 한다는 것을 밝히고, 이 메커니즘이 본 논문과 Wu, Taylor & Greaves⁽⁷⁾에서 도입한 벽면 미끄럼 경계조건 가정을 정당화 한다는 것을 보였다.

(3) 슬로싱 유동 전주기 동안 자유표면에서 형성되는 슬로싱파는 3영역 - 선형점성과 벌크 유동영역, 벽면 유막영역 및 앞서의 두 영역이 만나는 천이영역 - 으로 나뉘는 것을 보였다.

REFERENCE

- 1) Ibrahim, R. A., 2005, Liquid Sloshing Dynamics, Cambridge Univ. Press.
- 2) Faltinsen, O. M. and Timokha, A. N. 2009, Sloshing, Cambridge Univ. Press.
- 3) Faltinsen, O. M., 1974, "A nonlinear theory of sloshing in rectangular tanks," J. Ship Res., Vol. 18, No. 4, pp.1224-241.
- 4) Hill, D. F., 2003, "Transient and steady state amplitude of forced waves in rectangular basins,"

- Phys. Fluid, Vol. 15, No. 6, pp.1576-1587.
- 5) Keulegan, G. H., 1959, "Energy dissipation in standing waves in rectangular basins," J. Fluid Mech., Vol.6, pp.33-50.
- 6) Mei, C. C., 1976, "Power extraction from water waves," J. Ship Res. Vol. 20, pp.63-66.
- 7) Wu, G. X., Taylor, R. E. and Greaves, D. M., 2001, "The effect of viscosity on the transient free-surface waves in a two-dimensional tank," J. Engr. Math., Vol. 40, pp.77-90.
- 8) Ji, Y. M., Shin, Y. S., Park, J. S. and Hyun, J. M., 2012, "Experiments on non-resonant sloshing in a rectangular tank with large amplitude lateral oscillation," Ocean Engr., Vol. 50, pp.10-22.
- 9) Ji, Y. M. and Park, J. S., 2019, "Sloshing flow patterns in a rectangular container by unidirectional horizontal excitation," The KSFM J. of Fluid Machinery, Vol. 22, No. 2, pp.38-45.