Journal for History of Mathematics
Vol. 32 No. 6 (Dec. 2019), 281–299
http://dx.doi.org/10.14477/jhm.2019.32.6.281

A Study on the Mathematical Problem Solving Teaching based on the Problem solving approach according to the Intuitive and the Formal Inquiry

직관적 · 형식적 탐구 기반의 문제해결식 접근법에 따른 수학 문제해결 지도 방안 탐색

Lee Daehyun 이대현

Mathematical problem solving has become a major concern in school mathematics, and methods to enhance children's mathematical problem solving abilities have been the main topics in many mathematics education researches. In addition to previous researches about problem solving, the development of a mathematical problem solving method that enables children to establish mathematical concepts through problem solving, to discover formalized principles associated with concepts, and to apply them to real world situations needs. For this purpose, I examined the necessity of problem solving education and reviewed mathematical problem solving researches and problem solving models for giving the theoretical backgrounds. This study suggested the problem solving approach based on the intuitive and the formal inquiry which are the basis of mathematical discovery and inquiry process. And it is developed to keep the balance and complement of the conceptual understanding and the procedural understanding respectively. In addition, it consisted of problem posing to apply the mathematical principles in the application stage.

Keywords: Problem solving, Problem solving approach, Intuitive inquiry, Formal inquiry, Application, Idea sharing; 문제해결, 문제해결 접근법, 직관적 탐구, 형식적 탐구, 적용, 생각 공유.

MSC: 97C30, 97D50 ZDM: D52, D53

1 서론

역사적으로 수학은 문제해결 과정에서 수학적 개념과 원리를 발견하고, 이를 실세계 상황에 적용해 가는 과정을 겪어왔다. 예를 들어, 고대 이집트인들은 자연수로 표현할 수

Lee Daehyun: Dept. of Math. Edu., Gwangju National Univ. of Edu. E-mail: leedh@gnue.ac.kr
Received on Oct. 17, 2019, revised on Dec. 16, 2019, accepted on Dec. 26, 2019.

없는 맥락의 문제를 해결하기 위하여 분수를 도입하였고, 17세기에는 천문학, 무역, 공학 등에서 좀 더 빠르고 정확한 계산을 하기 위하여 로그를 만들었으며, 도박의 승률을 알아내기 위해 확률 개념을 창안하였다. 피타고라스 학파는 직각삼각형의 세 변의 길이 사이의 관계에 관한 문제를 해결하면서 피타고라스 정리를 발견하였고, 이는 훗날에 일반삼각형의 세 변 사이의 관계에 관한 문제해결로 이어지기도 하였다.

수학의 역사를 통해 알 수 있듯이 삶에서 제기되는 문제를 해결하는 과정에서 수학은 발전해 왔으며, 이를 탐구하는 사람들의 수학적 탐구 능력도 함께 발전해 왔다. 인류가 수학을 탐구해 온 문제해결의 역사에 대한 반추는 학교수학에서도 학생들의 문제해결력을 길러주는 데 관심을 가져야 하는 이유이기도 하다. 학생들은 수학 문제해결 경험을 통해 수학적 지식과 수학적 사고력을 길러 급변하는 미래사회에서 부딪치는 여러 상황의 문제를 스스로 해결해 갈 수 있어야 하는 것이다.

이런 면에서 1980년대를 기점으로 수학 문제해결 교육은 문제해결을 통하여 수학 지식을 구성하고, 수학이나 다른 영역에서 제기되는 문제를 해결하며, 문제를 해결하기 위해 다양하고 적절한 전략을 채택하고 적용하고, 문제해결 과정을 모니터링하며 반성하도록 이끌어 왔다 [23]. 또한 수학 문제해결을 통해 교수 · 학습을 촉진시키고자 하는 방안으로 Schroeder & Lester [28]는 문제해결을 통한 교수(teaching via problem solving) 방법을 제시하고도 있다. 이 방법에서는 문제 상황에서 출발하여 가르치고자 의도한 수학적 사실을 학생들이 문제를 해결해 가는 과정에서 체험하고 발견해 가도록 제안하고 있다. 즉, 문제 상황과 문제해결을 통해 가르치고자 하는 수학적 개념, 원리 등을 탐구하고 발견해 가는 과정을 통해 학습이 이루어지도록 의도한 것이다.

수학교육에서 문제해결에 대한 강조에 발맞추어 우리나라에서도 1980년대에 개정 · 고시된 제4차 교육과정에서부터 문제해결에 대한 관심을 지속적으로 표명해 오고 있다 [13]. 예를 들어, 2007 개정 수학과 교육과정에서는 초등학교 수학의 '규칙성과 문제해결' 영역에서 문제해결을 강조하고 있고 [17], 2009 개정 수학과 교육과정에서는 '수학적 과정'의 하나로 문제해결을 제시하고 있다 [18]. 또한, 2015 개정 수학과 교육과정에서는 문제해결을 6가지 '수학 교과 역량'의 하나로 제시하고 있다 [19].

이와 같이 수학교육 연구와 교육과정 등에서 강조하는 수학 문제해결 교육의 중요성에 대한 인식과 이를 학교 현장에 구현하기 위해서는 학생들의 문제해결 능력을 길러 줄 수 있는 현장 중심의 문제해결 지도 방안에 관심을 가질 필요가 있다. 왜냐하면 PISA나 TIMSS와 같은 국제 비교 연구의 자료에 따르면, 교실에서 이루어지는 교수 · 학습 상황이 학생들의 성취도에 영향을 주는 주요 요인의 하나로 제시되기 때문이다 [1]. 또한, 수업에서 강조하는 교육 내용과 방법은 학생들의 수학적 경험과 문제해결 능력에 영향을 끼치기 때문이기도 하다. 만약, 수학을 옳고 그름이 있는 확실함을 다루는 과목으로 인식하며 정해진

절차에 따라 과정을 수행하는 교과로 다루는 교사는 형식화된 수학을 정해진 규칙에 따라 수행하는 방법으로 수학을 가르치려는 경향이 있을 것이다. 이에 반해, 수학적 패턴과 관계를 찾고 개념들을 연결 짓는 것을 중시하는 교사는 현상과 수학을 연결 짓고, 여러 개념을 서로 관계 지으며, 개념과 그에 따른 절차를 서로 연관 짓도록 수학을 지도하려는 경향이 있다 [2]. 이런 면에서 수학을 가르치는 교사는 학생들이 수학적 개념과 절차에 관해 생각하고 탐구하는 문제해결 경험을 제공하여 학생들이 수학적 지식을 탐구하고 발견해 갈 수 있도록 해야 할 것이다.

학생들의 문제해결력을 향상시키려는 그간의 문제해결 지도 방안은 문제를 해결해 가는 과정을 중시하는 단계 이론에 대한 논의가 주를 이루어 왔다. 예를 들어, Wallas [32]의 창의적인 사고 과정 4단계 모델과 과학자들의 문제해결 방법에 기초하여 반성적 사고를 기반으로 제시한 Dewey [3]의 문제해결 5단계 모델이 그렇다. 또한 문제해결 지도의 전형적인 모델로 받아들여지고 있는 Polya [26]의 문제해결 4단계도 문제이해, 계획수립, 계획실행, 반성의 과정으로 이루어져 있다. Fuson 등이 제시하는 개념적 단계 모델에서는 문장제 해결 과정에 필요한 선형적 모델을 제시하고 있는데, 그것은 상황 개념, 수학화 개념, 해결 방법 개념의 3단계 문제해결 모델이다. 이외에도 Gick이 제시하는 문제해결 모델은 문제해결 과정을 표상 구성, 해결 탐색, 해결 실행의 과정으로 제시하고도 있다 [27]. Wolfram [35]은 실세계와 연결된 수학을 강조하면서, 4단계의 수학적 모델링 과정을 강조하였다.

이러한 모델들은 문제해결 과정을 몇 개의 단계로 나누어, 각각의 단계에서 일어날 문제해결 활동을 제시함으로써 문제해결력의 향상을 꾀하고 있다. 이에 비해 수학 학습 요소에 초점을 둔 An & Wu [1]의 MSA(Model, Strategy, Application) 모델은 수학의 중요한 핵심인 개념적이고 절차적 이해뿐만 아니라, 적용을 통한 문제해결 지도를 통해 학생들의 수학 능력과 문제해결력 향상을 꾀하기 위한 방안으로 제시되고 있다. 이것은 수학 문제해결의 주요 요소로 다양한 시각적 모델을 찾는 '모델', 절차적이고 계산적인 유창성을 위한 '전략', 그리고 해결한 문제를 실세계에 반영하는 '적용' 의 세 요소로 구성되어 있다. 이 모델은 종전의 단계 모델과는 차별되는 것으로, 수학학습에서 강조되는 개념적 지식과 절차적 지식, 수학적 지식의 응용이라는 핵심 요소를 강조하는 모델로 평가될 수 있다.

이에 덧붙여 수학적 탐구의 근간인 수학적 사고의 두 측면이 명시적으로 강조되는 문제해결 지도 방안을 고려할 필요가 있다. 이것은 수학의 역사를 통해 제시된 문제해결 과정이기도 하기 때문이다 [25]. 즉, 수학 문제해결은 문제해결의 역사를 통해 확인된 문제해결의 중요한 두 축인 직관적 사고와 논리적 사고에 바탕을 둔 문제해결 경험을 통해 수학의 개념적 이해와 절차적 이해가 이루어지도록 할 필요가 있다. 수학 문제해결 과정은 구체물이나 그림과 같은 직관적인 도구를 활용하여 직관적 탐구 과정을 통해 개념적 이해를 추구함과 동시에, 수학 기호나 식과 같은 대수적 기호를 활용하여 논리적 · 형식적 탐구 과정을

통해 절차적 이해를 강조해야 할 필요가 있는 것이다. 이러한 문제해결 지도는 수학의 핵심인 개념적이고 절차적인 내용의 탐구와 이해를 동반하는 교수 · 학습 실제를 반영할 수 있으며, 문제를 해결하는 과정과 결과를 중시할 수 있을 것이다. 이러한 필요에 따라 본 연구에서는 문제해결 교육이 필요한 이유와 역사, 그리고 수학 문제해결 연구 내용과 그간 제시된 문제해결 모델을 살펴보기로 한다. 또한 문제해결을 통해 문제에 내재된 개념과 원리를 통합적으로 이해하도록 하기 위하여 학생들이 문제에 대한 직관적 탐구 과정을 통해 문제에 내재된 개념을 파악하고, 형식적 탐구 과정을 통해 단계적이고 분석적으로 절차를 수행하며, 이를 실생활에 적용하는 기회를 갖는 문제해결식 접근법에 따른 문제해결 지도 방안을 탐색해 보고자 한다.

2 수학 문제해결 교육의 필요성과 역사

지식 정보화 시대를 넘어서 우리 사회는 4차 산업혁명의 시대를 표방하며 급속도로 발달해 가고 있다. 이에 따라 4차 산업혁명 시대의 사회인에게 요구되는 지식도 변화되었는데, 종전의 산업사회에서 '쓰기-계산 능력-읽기 능력-구어적 의사소통 능력' 순으로 지식이 요구되었다면, 현대 사회에서는 '팀워크-문제해결-사람관계 능력-구어적 의사소통 능력' 순으로 필요한 지식이 바뀌어 가고 있다 [2]. 이에 따라 학교교육도 변화를 모색하고 있는데, 2015 개정 수학과 교육과정에서 강조하는 '협력적 문제해결' 도 이러한 시대적 요구를 반영하고 있는 것이다. 또한 학교 교육은 산업 구조의 변화뿐만이 아니라, 다양한 교육 여건의 변화에도 대처할 필요가 있다.

예를 들어, 1980년대 말부터 시작된 해외 동포의 유입으로 2016년 우리나라에 체류하고 있는 외국인은 205만 명 수준에 이르고 있고, 다문화가정 학생들의 숫자도 2014년 기준으로 약 20만 명이 넘고 있다 [9]. 이에 따라 다문화 사회의 수학교육은 다양한 배경을 가진 학생들이 상호 공존할 수 있는 교수 · 학습 환경을 위한 협력적 문제해결 활동과 학생들의 문화와 흥미, 그리고 관심사와 같은 배경 변인을 반영한 환경 및 문제해결 상황을 제시할 필요가 있다.

또 학생들의 학습 수준의 다양성도 고려할 필요가 있는데, 국가 수준의 학업 성취도 결과에 따르면 2013년 우리나라 중학교 3학년 학생들의 우수 학력자 비율은 12.98%, 보통 학력자 비율은 53.41%, 기초학력자 비율은 28.52%를 나타내고 있다 [11]. 특히, 기초학력자 비율은 여전히 높은 수준이며, 수학 교과에서 심각한 개인차는 교과 내용에 대한 이해 부족의 수준을 넘어서 학생들의 정의적 영역에도 영향을 끼치게 된다. 따라서 수학 교실 구성원의 다양성을 반영하고, 학습의 개인차를 극복 할 수 있는 교육 방안을 모색할 필요가 있다. 이것은 단순히 수학적 지식의 전달과 습득의 수준을 넘어서, 다양한 개념과 원리 및 절차를 통합적으로 다루는 수학 문제해결 경험을 통해 수학적 탐구와 이해가 이루어져야

한다는 것과 이를 지원하는 문제해결 교육의 필요성을 강조한다.

학교수학에서 문제해결 교육의 필요성은 그간의 교육 방법에 대한 반성에서 출발할 수 있다. 예를 들면, 학생이 중심이 아닌 교사의 입장에서 다루는 문제해결 수업은 교과서 안의 수학을 교사가 가르치고 학생들이 일정기간 동안 연습을 하면 습득한 지식을 문제해결에 활용할 것이라고 기대한다. 따라서 일정한 학습 활동이 이루어진 후에 그에 대한 확인의 과정으로 문제해결 활동을 하게 된다. 그렇지만 그러한 문제해결 수업에서는 학생들이 문제를 해결하는 다양한 해결 방법을 탐색하고 해결하는 경험이 제한되며, 문제해결이 수업과정과 별개로 다루어질 수 있다.

또, 단편적인 개념과 기능 중심의 수학 수업과 그 결과로 제시되는 문장제와 같은 문제해결 활동은 교과서에서 습득한 지식을 적용하는 단편적인 풀이에 그칠 수 있어 일상에서 부딪치는 다양한 맥락의 문제를 해결할 수 있는 능력에 한계를 보이기도 한다. 이러한 문제해결 관점에서는 수많은 지식이나 기능들을 통합적으로 다루지 못하고, 실생활의 문제를 해결하는 도구로 수학을 활용하지 못하며, 결국에는 정해진 절차에 따라 수행하는 알고리즘 과목으로 수학을 인식하여 연습과 훈련이 최선의 학습 방법이라는 잘못된 인식을 심어 줄 수 있다. 이를 개선하기 위해서는 종전의 협의의 문제해결 관점에서 벗어나, 문제해결 활동이 학생들의 이해에 기반을 두고 진정한 수학적 활동이 이루어지도록 수학학습의 통합된 부분이 되도록 해야 하며, 이러한 활동이 가능하도록 교수 · 학습 환경을 구축하여 실현할 필요가 있다.

한편, 수학 교수 · 학습에서 학생들의 문제해결력을 신장시키기 위한 그간의 노력은 다양한 분야의 연구를 통해 이루어져 왔다. 20세기 들어서면서 시작된 수학 근대화 운동을 필두로 수학교육의 중요성의 강조와 더불어 문제해결에 관한 연구는 형태심리학자들의 인지에 관한 연구로부터 출발했다고 볼 수 있다. 1920년대 중반에 들어서 수학교육자들은 단지 '답을 찾는 것' 이상의 것으로 문제해결을 보기 시작하였고, 문제해결 과정의 일부로 학생들의 '반성적 사고'를 강조하여 문제를 해결하는 학생들이 자신의 생각을 조직하고 반성해야 한다고 생각하였다 그렇지만 문제해결 연구는 산술 문장제를 해결하는 방법이 주를 이루고 있다 [5]. 1960년대 '현대화 운동'의 부정적 결과와 1970년대 '기초로 돌아가기' 운동의 실패는 더욱 문제해결에 대한 강조로 이어지게 되었다. 이런 상황에 Polya의 'How To Solve It'은 문제해결 모델로 주목받기 시작하였고, 학생들의 문제해결력 신장 방안을 탐구하는 데 중요한 자료가 되었다.

특히, 1970년 초부터 수학자들 사이에서는 문제해결에 대한 조직적인 연구가 일어나기 시작하였는데, Kilpatrick, Schoenfeld, Garofalo 등은 수학 문제해결의 대표적인 연구자들이었다. 수학 문제해결 연구 관점과 강조점은 시간의 흐름에 따라 변화되어 왔는데, Lester [12]은 1970년대부터 1990년대에 걸쳐 이루어진 문제해결 관련 연구 분야에 대해

4가지 연대로 구분하여 각 시기의 강조점을 제시하고 있다. 구체적인 강조점을 살펴보면, 성공적인 문제해결자들의 특성을 확인하는 데 초점을 둔 시대, 성공적인 문제해결자와 비성공적인 문제해결자를 비교한 시대, 문제해결에 대한 정서나 신념의 관계 및 메타인지 훈련에 관심을 둔 시대, 문제해결 상황에 있는 사회적인 맥락의 문제해결을 강조한 시대로 구분될 수 있다.

1980년대에 들어서면서 NCTM [21]의 권고로부터 학교 수학교육에서 문제해결이 핵심 대상이 되었다. 그리고 수학교육 연구에서는 학생들의 문제해결력 향상을 위한 연구에 많은 노력을 기울이게 되었고, 수학 문제해결의 강조는 NCTM의 일련의 규준집에서도 찾을 수 있다. NCTM [22]에서는 문제해결을 의사소통, 연결성, 추론과 함께 과정 규준의 하나로 강조하면서 '문제해결은 수학 교육과정의 주된 초점이 되어야 한다. (중략) 문제해결은 개별적인 주체가 아니라, 전체 프로그램 전반에 스며 있으며, 개념과 기능이 학습될 수 있는 상황을 제공하는 하나의 과정이다(p. 23)' 라고 제시하고 있다. 또, NCTM [23]에서는 문제해결을 5가지 과정 규준의 하나로 제시하고, 문제해결을 통하여 수학적 지식을 구성하고 수학이나 다른 맥락에서 제기되는 문제를 해결하며, 문제를 해결하기 위해 다양한 전략을 선택하여 구사하도록 제안하고 있다.

학교수학에서 문제해결에 대한 강조는 CCSSM [31]에서도 8가지 수학적 실천 규준으로 강조하고 있는데, 문제해결에 특히 관련된 주요 내용은 '문제를 이해하고 끈기 있게 해결하라. 추상적으로, 정량적으로 추론하라. 실행 가능한 논쟁을 구성하고 다른 사람의 추론을 비판하여라. 수학적으로 모델을 만들어라.' 등을 들 수 있다(pp. 16–18). 이와 같은 수학교육계에서 제시된 일련의 문서들은 문제해결이 수학 학습의 핵심이면서 문제해결을 통해 학생들의 수학적 능력이 신장되기를 의도한 것이다.

수학 문제해결의 주안점도 변화되어 왔는데, 주요 관심 대상은 발견술, 메타인지, 성공적인 문제해결에 필요한 주요 요인, 문제 만들기, 개방형 문제 등이었다. 최근에는 테크놀로지를 이용한 문제해결 방안이나 수학적 모델링과 같은 주제들이 논의되고 있다. 특히 수학 문제해결 과정에서 모델링은 PISA와 같은 국제비교 연구에서 수학 학습의 가치와 유용성을 인식하고 실천하기 위하여 실생활 맥락 문제 중심으로 중시하고 있다. 예를 들어, PISA 2012 수학 평가틀에서는 학교 수학 경험을 통해 수학적 개념에 대한 이해 및 실제 맥락에서의 수학 활용 능력의 개발을 목표로 하는 수학적 소양을 강조하고 있는데, 이를 위해 '형식화하고, 이용하고, 해석하는' 세 가지 수학적 과정이 포함된 수학적 모델링 과정을 중시하고 있다. 이것은 수학적 소양이 실세계 상황에서 발생하는 문제들의 맥락에서 발생한다는 것과 이를 해결하는 과정을 중시하는 모델링 과정이 포함되어 있음을 의미한다 [30].

수학 문제해결에서 모델링의 강조는 맥락 중심의 문제해결과 같은 적용을 중시하기에

이르렀으며, 이를 위해 학생 스스로 실생활 맥락에서 습득한 지식을 적용해 보는 문제 만들기 활동도 강조되고 있다. 이것은 문제 만들기 활동을 통해 주어진 문제에 대한 분석과 이해를 고조시킬 수 있으며, 이를 통해 학생들의 수학적 능력과 더불어 수학의 가치 인식 및 수학적 흥미를 이끌어 줄 수 있기 때문이다. 또한 새로 개정된 우리나라 교육과정에서도 강조하고 있는 '협력적 문제해결' 활동은 문제해결자 간의 상호 협력을 통한 협력적 문제해결을 강조하고 있는 것이다. 협력적 문제해결을 위해 수학 교실에서 의사소통과 토론의 가치는 더욱 부각되고 있으며, 구성원들이 서로의 문제해결 방법을 공유하고 토론하는 과정을 중시하기에 이르렀다.

우리나라에서도 제4차 교육과정에서부터 문제해결을 강조하기 시작하였다. 제4차 교육과정에서는 '관계' 영역의 하위 요소로 문장제에서 수량 사이의 관계를 알아보고 식으로 나타내어 해결하도록 제시하였다 [13]. 제5차 교육과정에서는 '지도 및 평가 상의 유의점'에 문제해결 지도와 평가에 관한 항목을 명시적으로 제시하였으며 [14], 제6차 교육과정에서는 다시 '관계' 영역에 문제해결이 하위 요소로 설정되면서 구체적인 문제해결 방법을 제시하였고, 문제 만들기에 대해서도 강조하기 시작하였으며, 방법과 평가에도 문제해결을 강조하였다 [15]. 제7차 교육과정에서는 '문자와 식' 영역에 문제해결이 포함되어 여러 가지 문제해결 방법을 제시하였고 [16], 수시 개정 체제로 바뀐 2007 개정 교육과정에서는 '규칙성과 문제해결' 영역에서 여러 가지 문제해결 방법을 제시하여 학생들이 문제해결 방법을 익히고 사용하도록 제안하고 있다 [17]. 이후에 2011과 2015 개정 교육과정에서는 문제해결을 내용 영역에 포함시키지 않고, 수학적 과정과 교과역량의 하나로 강조하고 있다 [18, 19]. 이상과 같이 제4차 교육과정에서부터 수학과 교육과정에 등장한 문제해결은 다루는 영역이나 구체적인 방법에서 차이는 있지만, 수학교육의 궁극적인 목표의 하나로 자리매김해 오고 있음을 알 수 있다.

교육과정에서 문제해결을 강조하면서 우리나라에서도 문제해결에 관한 연구가 나타나기 시작하였는데, 문제해결에 관한 연구를 살펴보면 문제해결력을 신장시키는 교수·학습 방법에 관한 강옥기 외 [6]의 연구를 시작으로 여러 연구들이 이루어져 왔다. 예를 들어, 교과서 및 교육과정에서 문제해결 관련 내용을 분석한 연구(예: [5]), 문제해결 전략 지도에 대한 연구(예: [36]), 문제 만들기에 대한 연구(예: [8]), 학생의 문제해결 과정을 관찰하여 분석한 사례 연구(예: [37]) 등이 이루어졌다. 그간에 이루어진 수학 문제해결에 관한 국내 연구를 분석한 연구에 따르면, 2007 개정 수학과 교육과정이 적용된 해인 2009년 1월부터 2015년 12월까지 7년 동안 우리나라 4개 학회의 7개 발행 학술지에 수록된 논문은 105편이며, 이들 논문의 주제별 내용은 Table 1과 같다 [7].

이 기간에 걸쳐 이루어진 문제해결 관련 논문은 문제해결력을 신장시키는 교수·학습 방법에 관한 논문의 비율이 제일 높으며, 문제해결 과정에서 인지 과정을 분석한 연구가 그

연구 주제	논문 수(편)	비율(%)
문제해결의 일반적 이해에 관한 고찰	10	9.5
문제해결 과정에서 인지과정 분석에 관한 연구	31	29.5
문제해결력을 신장시키는 교수 · 학습 방법에 관한 연구	36	34.3
문제해결에 관한 심리학적 현상에 관한 연구	7	6.7
문제해결에서 전략에 의한 문제유형 분류에 관한 연구	15	14.3
문제해결 학습의 평가방안에 관한 연구	1	1.0
문제해결에서 직관의 역할에 관한 연구	5	4.8
계	105	100.0

Table 1. Distribution of the research topics; 연구 주제별 분포 [7, p. 833]

다음을 차지하고 있다. 문제해결에 관한 논문 중에서 문제해결력을 신장시키는 교수 · 학습 방법에 관한 논문의 비율이 높은 것은 문제해결력 신장을 위한 다양한 시도가 이루어져 왔음을 의미한다. 그렇지만 문제해결력을 신장시키기 위한 교수 · 학습 방안의 연구들은 문제 만들기 활동이나 개별화 방안, 문제해결 전략 지도와 같은 특정 방법에 한정하여 그 효과를 분석하는 연구가 주를 이루어 왔다. 따라서 학교 현장에서 수업의 맥락을 반영하면서 수학 학습 내용을 충실히 익히고, 이를 실생활에 적용할 수 있는 문제해결 지도 방안을 모색할 필요가 있다.

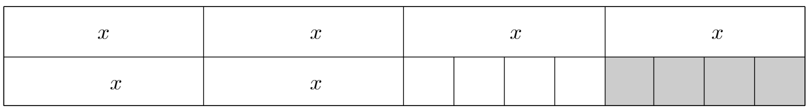
3 수학 문제해결 연구와 모델 고찰

이 장에서는 수학 문제해결 지도 방안을 탐색하기 위해서 문제해결에 관한 심리학 연구와 수학교육 연구 및 그간에 제시된 문제해결 모델 등을 살펴보았다. 먼저, 문제해결에 관한 심리학 연구는 학생들이 산술 문제를 해결하기 위해 필요한 본드(bond)를 선택하고 이를 강화시키기 위해 적절한 보상과 연습이 따라야 한다고 주장하는 '행동주의 심리학'에서 출발한다. 행동주의 심리학에서는 행동이 변화될 때 학습은 이루어진다는 것과 정해진 규칙을 반복적으로 연습하고 훈련하여 자극-반응의 습관을 강화함으로써 빠른 계산과 정확성을 추구하는 데 주안점을 두었다. 이로 인해 학생들을 창의적이고 능동적으로 사고하도록 이끄는 데에는 충분하지 않다는 비판을 받기도 하였지만, 여전히 절차적 지식을 중시하는 계산 기능의 숙달이 필요한 수학 문제해결에는 유효하다는 평가이다.

또한 수학 교수 · 학습은 절차적 탐구 방법과 더불어 개념적 이해를 통해 의미 있는 탐구 과정이 되어야 한다. '형태심리학'은 문제해결 과정에 통찰(insight)을 중시하였는데, Wertheimer [33]은 평행사변형 넓이를 구하는 예시를 통해 절차만을 중시한 학습의 문제점을 제시하면서 개념적 이해를 강조하였다. 여기에서 '개념적 이해'란 문제 구조에 기반을 두고 문제에 내재된 개념의 근원을 찾아 가는 것을 의미하며, 형태심리학에서는 문제에 대한 직관적 탐구 과정을 통해 문제를 파악하고 해결해 가는 과정을 중시하였다.

심리학 연구의 초반에 이루어진 두 분야는 수학 문제해결 학습에서 강조할 '절차'와 '개

념'을 각각 주요 핵심 주제로 삼고 있다는 특징이 있다. 이를 강조하기 위해서 수학 문제해결 지도에서는 그림이나 유추, 모형과 같은 직관적 도구를 활용하여 문제를 재구성함으로써 즉각적으로 문제를 해결할 수 있는 직관적 탐구 과정과 단계적이고 절차적으로 문제를 해결하는 형식적 탐구 과정을 통해 개념과 절차를 동시에 중시하는 문제해결 지도 방안을 모색할 수 있다. 한 가지 예시로 일차방정식 $4x = 2x + 8$을 해결하기 위하여 연산과 등식의 성질을 이용하여 문제해결의 절차를 단계적으로 수행할 수 있는 반면에, 저울 유추를 통해 구하거나 아래 그림과 같은 시각적 표현을 통해 $x = 4$를 직관적으로 구할 수 있다.



1990년대부터 수학교육 현장에서 강조되기 시작한 구성주의는 학습이 실제적인 환경에서 발생한다고 보고, 학생들 스스로 수학적 지식을 탐구해 가는 학생 중심의 수학 학습을 강조하고 있다. 구성주의 관점에 따르면, 수학 문제해결에서는 학생들이 능동적으로 문제를 탐구하고 다양한 해결책을 모색하여 해결하며, 자신의 방법을 동료 학생들과 공유하고, 또한 동료 학생들의 생각과 방법을 경청하고, 이에 대해 토론하는 교실 환경을 중시해야 한다는 시사점을 얻을 수 있다.

다음으로 수학 문제해결 과정을 중시한 학자들의 견해를 살펴볼 필요가 있는데, 특히 문제해결의 역사에서 제기되는 수학적 사고의 두 줄기인 직관적 사고와 논리적 사고의 상보성에 관심을 가질 필요가 있다. 일찍이 Poincaré [25]는 그의 자서전적 저서에서 직관과 논리의 중요성과 상보성을 언급하고 있는데, 직관은 창의적인 활동에서 해결 방향을 설정해 주는 힘이지만 직관만으로는 수학에서 요구하는 엄밀성을 보장할 수 없기 때문에 논리의 힘이 필요하다고 보았다. 이에 대해 Hadamard [4]는 무의식과 의식의 여러 층이 존재하는데, 의식에서 멀리 있는 상태를 직관적 정신이라 하고, 의식과 충분히 가까운 곳에 있는 상태를 논리적 정신이라고 하였다. 이러한 관점에서 Poincaré의 견해는 무의식에서 개발된 아이디어를 의식 속으로 이끌어 내는 연계 과정을 중시한 것으로 해석할 수 있는 것이다.

Wittmann [34]은 수학적 탐구 과정에서 수학적 사고를 직관적 사고(intuitive thinking)와 반영적 사고(reflective thinking)로 구분하고, 수학적 지식의 생성 과정에서 두 사고의 역할과 상보성을 강조하였다. 그는 직관적이고 실험적인 활동을 통한 직관적 추론과 체계적이고 연역적인 방법을 통한 형식적 추론이 수학적 탐구와 이론 생성에 중요한 역할을 한다고 하였다. 여기에서 직관적 추론 활동은 대상에 대하여 도형과 같은 직접적인 방법으로 진행되며, 연역적 추론 활동은 일반적인 관계나 절차의 명확한 형식화를 추구한다. 이 둘의 상보성 문제는 수학적 지식의 생성 · 발달 과정에서 두 가지 모두 각자의 역할과

기능을 해야 하며, 이들의 조화로운 균형이 필요함을 의미한다.

그런데 직관적 사고와 논리적 사고가 발현되기 위해서는 수학적 기호의 도움이 필요한데, 직관적 사고는 시각적인 기호나 모델을 통해 나타나기가 용이하며, 논리적 사고는 언어-대수적 기호를 활용함으로써 기능을 하게 된다. 이에 Skemp [29]는 수학에서 이용되는 기호 체계를 시각적 기호와 언어-대수적 기호로 나누어 제시하고 있는데, 시각적 기호는 직관적이고 통합적이며 전체적인 구조를 명시하는 데 적절하며, 다이어그램이나 기하학적 도형들이 그 예에 해당된다. 또한 언어-대수적인 기호는 논리적이고 분석적이며 세부적인 구조와 관련이 있으며, 문자나 식 등을 이용한다. 이런 관점에서 수학 문제해결 지도 방안에서는 직관적 사고에 기반을 둔 직관적 탐구 단계와 논리적 사고 과정에 기반을 둔 형식적 탐구 단계의 상보성을 강조할 필요가 있으며, 직관적 탐구 단계에서는 시각적 기호를, 형식적 탐구 단계에서는 언어-대수적인 기호를 이용하여 문제를 해결해 가도록 지도할 필요가 있다.

한편, 학생들의 수학 문제해결 능력 향상을 위한 그간의 문제해결에 관한 연구는 문제를 해결해 가는 과정에 따라 각 단계에서 수행될 주요 활동을 제시한 단계 이론이 주를 이루었다. 그 중에서 대표적인 문제해결 모델로 인정되는 Polya [26]의 문제해결 4단계는 문제이해, 계획수립, 계획실행, 반성의 과정으로 이루어져 있다. 이 모델은 문제해결을 지원하기 위해 각 단계에 필요한 질문과 권고 형태의 대화체로 이루어져 있는데, 학생들이 각 과정에 제시된 사고 전략에 따라 문제를 해결해 가도록 의도되어 있다. Wallas [32]의 준비(preparation), 부화(incubation), 발현(inspiration), 검증(verification)으로 이어지는 문제해결 4단계 모델은 창의적인 사고 과정 모델로 제시된 단계적인 모형이고, 반성적 사고를 강조한 Dewey [3]도 과학자들의 문제해결 방법에 기초하여 어려움을 감지하는 단계, 반성 활동을 통해 문제를 더 명백하게 정의하는 단계, 가능한 해결 대안의 출현 단계, 가능한 해결책을 분석하는 단계, 실험을 통해 해결책을 검증하는 단계로 문제해결 모델을 제시하고 있다.

Fuson 등이 제시하는 개념적 단계 모델은 덧셈과 뺄셈 문장제 해결과 관련하여 상황 개념, 수학화 개념, 해결 방법 개념의 3단계로 진행되는 문제해결 활동을 제시하고 있는데 [27], 상황 개념에서는 문제에 제시된 용어의 의미를 파악하고, 각 문장의 의미를 파악하기 위해 대상, 상황, 시간-공간의 관계 등을 통합한다. 이 경우에는 문제 상황을 자신의 말로 재 진술하거나, 그림으로 그려보면서 문장제와 실생활 지식을 관련시키는 것이다. 다음 단계는 문제에 제시된 수와 미지수에 초점을 두고 상황을 수학화해야 한다. 특히, 문제 상황을 수학적 연산으로 나타내기 위하여 연산을 모델화해야 한다. 이 경우에는 문제 상황을 수학적 표현으로 나타내기 위하여 손가락이나 구체물 등으로 수를 나타내어 보아야 한다. 마지막 단계에서는 해결 방법을 계획하고 실행하는 것이다. 이 단계에서는 해결 방법을 도

출하고 해결 방법에 대한 검토와 반성이 이루어져야 한다. Fuson 등이 제시하는 이 모델은 산술 문제를 해결하는 단계에 주로 초점이 맞추어져 있으며, 학생들이 실생활의 문장제를 해결하는 상황에서 구체에서 추상으로 나아가는 일련의 단계로 문제해결 과정을 제시하고 있는 것이다.

Gick이 제시하는 문제해결 모델은 학생들이 주어진 문제와 기존의 문제를 관련지을 수 있는 스키마의 구성 여부에 초점을 두고 문제해결 과정을 표상 구성, 해결 탐색, 해결 실행의 과정으로 제시하고 있다 [27]. 만약 주어진 문제와 기존 지식의 관련성이 파악되면 문제해결에 필요한 정보를 가지는 스키마에 의해 해결 탐색의 과정이 필요 없이 해결 실행의 과정으로 나아갈 수 있을 것이다. 그렇지만 문제에 관한 스키마가 활성화 되지 않으면 해결 탐색의 과정을 거치면서 해결을 실행하게 된다. 이 모델에서는 주어진 문제가 이전에 해결한 문제와 동일한 해결 구조를 가지는 스키마를 찾는 것이 중요하다는 것과 문제해결에서 유추적 사고를 강조하는 것으로 해석할 수 있다.

이 외에도 Wolfram [35]은 계산만의 수학을 벗어나서 실세계와 연결된 수학을 강조하면서, 수학적 문제해결 과정을 '문제 설정하기-실세계 상황을 수학 모델로 바꾸기-계산하기-수학 모델을 원래의 실세계 상황으로 바꾸고 정당화하기' 와 같이 4단계로 제시하며 수학적 모델링 과정을 강조하기도 하였다. 특히 문제해결에서 모델링은 NCTM [22]에서도 찾을 수 있고, PISA 2012에서는 학생들의 수학적 소양을 평가하기 위한 과정으로도 제시하고 있다. PISA 2012 평가틀에서는 학생들의 수학 개념에 대한 이해 및 실제 맥락에서의 수학 활용 능력의 개발을 위해 맥락에서 문제를 형식화하여 수학 문제로 변형하고 수학적 개념, 원리, 절차를 이용하여 해를 구하고, 이를 원래의 문제에 해석하는 세 과정이 순차적으로 진행되도록 제시하고 있다 [30]. 이러한 문제해결에서 주안점은 실세계 맥락의 문제를 모델링하여 해결할 수 있는가에 주안점이 주어져 있다.

앞에서 제시한 몇 가지 문제해결 모델들은 문제해결 과정을 몇 단계로 나누어 각각의 단계에서 구체적으로 어떤 일이 일어나는가에 초점을 두고 구성되어 있으며, 학생들은 단계적으로 문제를 해결해 감으로써 문제해결에 성공을 경험할 수 있도록 구안된 것이다. 이에 비해 An & Wu [1]가 제시하는 MSA(Model, Strategy, Application) 문제해결 접근법은 수학적 개념을 보여줄 수 있는 다양한 시각적 모델을 찾는 모델(Model)의 발견, 절차적이고 계산적인 유창성을 위한 전략(Strategy) 개발, 그리고 실세계 문장제를 풀기 위한 적용(Application)의 과정으로 구성되어 수학의 개념적이고 절차적 이해뿐만 아니라, 적용을 통한 문제해결 지도를 통해 학생들의 수학 능력과 문제해결력 향상을 꾀하기 위한 방안으로 제시되고 있다. 이 모델은 일련의 단계 모델에 비해 문제해결의 초점을 수학적 개념과 절차 및 적용하는 데 둔다는 특징이 있다. 즉, 이 모델은 수학 교실에서 다루는 학습 내용을 개념적이고 절차적인 이해가 가능하도록 설계되어 문제해결을 통해 수학학습이

가능하도록 구안된 장점을 가진다. 여기에 덧붙여 수학적 사고의 두 축인 직관적 사고와 논리적 사고를 근간으로 개념적이고 절차적인 이해가 가능하도록 수학적 사고 중심의 문제해결 지도 방안을 모색하는 것도 필요하다. 이것은 수학적 개념과 절차의 이해가 수학적 사고를 통해 이루어지며, 수학의 역사를 통해 이루어진 문제해결의 과정을 반영할 필요에 의한 것이다.

4 문제해결식 접근법에 따른 문제해결 지도 방안

이 장에서는 수학의 개념적 이해와 절차적 이해가 가능하도록 하고 이를 유사한 문제나 실생활에 적용해 가는 적용 과정을 강조하는 문제해결 지도를 위해 수학적 발견 및 탐구 과정의 기본인 '직관적 탐구' 단계와 '형식적 탐구' 단계를 거치는 문제해결 접근법에 따른 문제해결 지도 방안을 탐색해 보았다. 이 방안에는 개념적 이해와 절차적 이해, 이를 위한 직관적 탐구와 형식적 탐구가 중요함을 제시한다. 먼저, 개념적 지식은 정의, 관계, 성질, 정리, 공식들을 이해하는 지식이며, 이는 문제해결에 필요한 절차를 선택하는 데에도 중요하다. 또한 절차적 지식은 유연하고 정확하며 효과적이고 적절하게 절차를 수행하는 능력을 가리킨다. 개념적 지식과 절차적 지식은 상호 유기적으로 관련될 필요가 있는데, 개념적 이해를 바탕으로 절차적 지식이 구성될 필요가 있으며, 절차적 융통성은 개념적 이해에 도움을 주는 계산적 기술과 개념간의 관계를 구성할 수 있다. 그리고 직관적 탐구와 형식적 탐구 단계는 수학의 발견 및 탐구 과정은 직관적 탐구 과정과 이를 형식화하는 과정의 연속이라는 사실에 근거한다 [34, 25]. 이 단계를 통해 획득하는 개념적 지식과 절차적 지식은 수학 교수·학습 상황에서 중시되어야 할 핵심 요소인 것이다. 수학에서 개념적 지식과 절차적 지식의 상호 보완적 관계의 중요성은 여러 문헌에서도 강조하고 있는데, NCTM [22]에서는 연결성에서 개념적 지식과 절차적 지식의 연결을 강조하면서 다양한 개념이나 절차의 표상을 서로 관련지을 수 있도록 제안하고 있다. 또 CCSSM [31]에서도 수학 학습에서 개념적 지식과 절차적 지식의 균형 있는 이해를 통해 수학적 이해가 이루어지도록 제안하고 있다. 구체적으로 CCSSM [31]에서는 규준의 주요 원리로 엄밀성(rigor)을 들고 있는데, 이를 위해 개념적 이해, 절차적 기술과 능숙함, 적용을 들고 있다. 개념적 이해의 수준은 단지 답을 얻는 방법을 넘어서, 개념을 파악하고 문제를 해결함으로써 핵심적인 수학 개념에 대한 깊이 있는 이해를 입증하고 새로운 상황에 수학을 적용하며, 자신의 이해를 말하고 쓸 수 있음을 의미한다. 만약 학생들이 충분한 개념적인 이해가 없다면 절차에 치중하는 결과를 초래할 것이며, 수학 실천(mathematical practice)에도 참여하기가 어려울 것이다.

절차적 지식과 개념적 지식의 강조와 상호 보완적 관계를 문제해결을 통해 실현되도록 하기 위하여 이들을 추구할 수 있는 문제해결 지도 방안이 필요하다. 이를 위해 문제

(Problem) 제시, 개념적 지식을 탐구하는 직관적 탐구(Intuitive inquiry) 단계, 절차적 지식을 탐구하는 형식적 탐구(Formal inquiry) 단계, 그리고 문제해결을 통해 획득한 지식을 실생활에 응용하는 적용(Application) 단계를 요소로 문제해결 지도 방안을 모색할 수 있다. 이들 요소로 구성된 문제해결 지도 체계는 Figure 1과 같이 구성할 수 있으며, 각각의 역할과 의미는 다음과 같다.

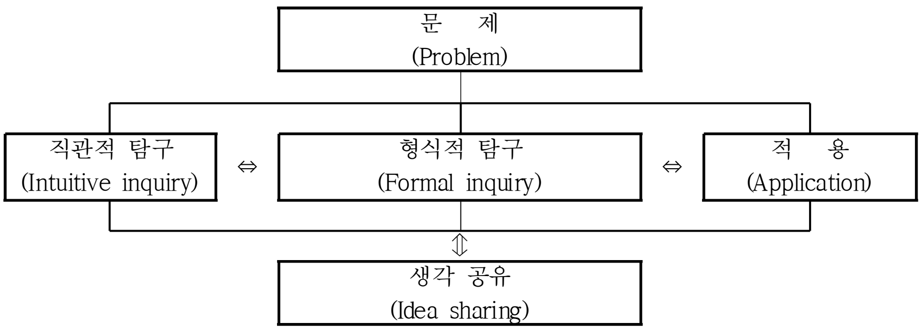


Figure 1. Component and structure of problem solving teaching method(P-IFA); 문제해결 지도 방안(P-IFA)의 구성 요소 및 작용 구조도

· 문제(Problem): 문제는 수학 수업에서 다루어질 수 있는 모든 유형의 문제를 아우르며, 수식 문제뿐만이 아니라 문장제나 일상 상황을 다룬 맥락 문제 등이 포함된다. 특히 문제해결자의 폭넓은 사고 과정을 이끌어 내고 수학의 가치와 유용성을 인식시키기 위해서는 문장제나 일상의 맥락 문제를 제시하는 것이 바람직하다.

· 직관적 탐구(Intuitive inquiry): 직관적 탐구 단계에서는 문제에 대한 개념적 이해를 위해 문제 상황을 구체물로 표현하거나 그림으로 모델링할 수도 있고, 기존의 문제해결 경험이나 비형식적 지식으로부터 통찰을 통해 즉각적으로 문제를 해결하도록 한다.

· 형식적 탐구(Formal inquiry): 형식적 탐구 단계에서는 문제를 해결하는 수학적 원리를 적용하여 해를 발견하는 단계이다. 이 단계에서는 문제해결에 필요한 원리나 알고리즘을 찾아내고 이를 적용하여 해를 발견하기 때문에 절차적 지식의 올바른 적용이 요구된다.

· 적용(Application): 적용 단계에서는 문제해결을 통해 경험한 수학적 원리를 활용하여 주어진 문제와 유사한 문제를 만들어 해결해 보거나, 실생활 상황에 적용해 보는 단계이다. 이 과정을 통해 수학의 실생활 적용 가능성을 경험하고 수학적 사고력 함양 및 수학이 일상의 문제를 해결하는 도구임을 인식하여 수학의 가치와 유용성을 체험하도록 하는 데 가치가 있다.

문제를 해결하는 방법은 학생들마다 다를 수 있기 때문에 학생들 간에 문제해결 방법과 생

각을 공유하는 것은 타인의 문제해결 방법을 경험하고 이해함으로써 사고의 폭을 넓히고, 다양한 문제해결 방법을 체험할 수 있다는 측면에서 가치가 있다. 이런 면에서 문제해결 과정에 서로의 생각을 공유(Idea sharing)하도록 하는 것은 중요하다. 우리나라 교육과정에서도 문제해결 역량의 5가지 하위 요소의 하나로 제시하는 협력적 문제해결은 '균형 있는 책임 분담과 상호작용을 통해 집단적으로 문제해결을 수행하는 능력 [10, p. 39]' 을 의미하며, 서로의 생각을 공유하는 것은 문제해결력의 향상을 위해 필요한 것이다. 문제해결식 접근법에 따른 문제해결 지도 방안을 실제 수업에 적용하기 위하여 문제가 제시되고, 학생들은 문제 상황을 이해하여야 한다. 학생들은 문제를 확인하고 문제에서 구하려는 것과 주어진 것을 알고, 용어의 뜻을 파악하며, 문제에 나타난 조건이 무엇인지, 조건들 사이에는 어떤 관계가 있는지를 파악해야 한다. 이를 통해 문제해결의 방향을 설정해야 한다.

다음 단계는 직관적 탐구 단계와 형식적 탐구 단계로 이루어진다. 직관적 탐구 단계에서는 문제 상황을 구체물로 표현하거나 그림을 그려서 이해하고, 기존에 해결했던 유사한 문제해결 경험이나 비형식적 지식을 활용해도 된다. 이를 통해 문제에 내재된 변인 간의 관계를 명확히 이해하고 이를 바탕으로 문제를 해결하는 것이다. 형식적 탐구 단계에서는 문제에 주어진 정보를 조직하거나 변인들의 관계에 주목하여 수식으로 형식화하여 단계적이고 절차적으로 문제를 해결하게 된다.

문제해결 과정은 일반적으로 직관적 탐구 단계를 거쳐 형식적 탐구 단계로 발전해 갈 수 있지만, Figure 1에서 보는 바와 같이 선형적으로 이루어지는 것은 아니다. 즉, 문제 상황에 따라, 또는 학생들의 접근 방식에 따라 두 과정은 상호 작용하는 구조로 이루어질 수 있는 것이다. 예를 들어, 직관적 탐구 단계를 거치지 않고 수식을 활용하여 형식적인 문제해결이 이루어질 수도 있고, 형식적인 문제해결이 이루어진 다음에 개념적 이해를 위해 구체물이나 그림으로 확인하는 과정을 거칠 수도 있는 것이다.

마지막으로 적용 단계에서는 문제해결에 필요한 수학적 지식을 확인하고 이를 활용하기 위해 새로운 문제를 만들어 해결해 보거나, 실세계 상황에 적용하는 활동을 포함한다. 특히, 문제를 만들어 보는 적용 단계는 다양한 맥락에서 수학을 형식화하고, 이용하고, 해석하는 개인적인 능력인 수학 소양을 기르는 과정이다. 즉, 문제해결을 통해 얻은 경험을 바탕으로 새로운 실생활 맥락의 문제를 만들어 봄으로써 실세계에서 수학의 역할을 인식하고, 현상을 기술하고 설명하며 예측하기 위해 수학적 추론과 수학적 개념, 절차, 사실, 도구를 사용하도록 하는 것이다 [24].

수학 문제해결 수업에서 이를 활용하기 위한 한 가지 방안으로 학생들의 문제해결 과정을 도울 수 있는 '문제해결 활동지'를 Figure 2와 같이 제시할 수 있다. 학생들은 이 활동지를 이용하여 3가지 문제해결 방법을 구사할 수 있을 것이다.

한편, 이 방안은 학생들이 수학을 의미 있게 접근할 수 있도록 의도된 문제해결식 접근

문제:		
직관적 탐구 과정 (구체물이나 그림을 이용하거나, 즉각적으로 떠오르는 방법을 이용하여 풀어보시오.)	형식적 탐구 과정 (수학 기호나 용어, 식을 이용하여 단계적으로 풀어보시오.)	적용 과정 (새로운 문제를 만들어 풀어보거나, 문제 상황을 실세계에 적용할 수 있는 방법을 써보시오.)

Figure 2. Worksheet for problem solving; 문제해결 활동지

법이지만, 예비교사 교육에도 활용할 수 있는 모델이 될 수 있다. 이것은 미래에 수학을 가르칠 예비교사들의 경우에 수학을 가르치는 데 요구되는 교과 내용 지식 측면에서 수학 내용을 스스로 탐구해 보고 해결해 보는 경험을 통하여 수학 내용에 대한 이해력을 기르는 데 도움을 줄 수 있을 것이다. 또한 가르칠 주제에 대한 교수법적 내용 지식 측면에서 학생들이 문제를 어떻게 해결해 갈 것인가에 대한 이해를 위해 학생들의 수학을 미리 경험해 보는 '사고실험'이 가능한 모델이기도 한 것이다.

5 결론 및 제안

문제해결은 수학 교수 · 학습의 본질이면서 학교 수학의 핵심이기도 하다. 새수학 운동의 보완책으로 대두된 1970년대의 기초 · 기본 교육의 강조는 학교 수학에서 기초 · 기본에 대한 공통 내용을 추출하는 데 집중하였고, 많은 연구가들과 단체들은 공통된 핵심어로 '문제해결'을 제시하였다. 문제해결이 강조되면서 이에 관한 많은 유형의 연구들이 나타나게 되었지만, 학생들의 문제해결력을 길러주려는 목적은 동일하였다.

그간의 문제해결 연구에서 강조되어 온 것들은 메타인지, 개방형 교수법, 문제 만들기, 협력적 문제해결, 문제해결에 테크놀로지의 이용, 정의적 측면의 강조 등과 같은 학생들의 문제해결력 향상을 위한 방법적 측면의 기법이었다. 이에 덧붙여, 수학 교수 · 학습 과정에서 문제해결을 통해 수학의 개념적 지식과 절차적 지식을 함양하도록 이끌어 주는 문제해결 지도 방안이 필요하다. 개념적 지식과 절차적 지식은 수학 학습을 통해 학생들이 획득해야 할 궁극적인 교과의 목표이기 때문이다.

본 연구에서 수학 문제해결 과정을 통해 학생들의 수학 학습을 조장하고 이를 통해 학생들이 배워야 하는 수학 내용을 학습할 수 있는 문제해결식 접근법에 따른 문제해결 지도 방안을 탐색하였다. 즉, 수학 교수 · 학습 과정을 통해 수학적 개념을 이해하고, 이를 바탕으로 수학적 절차를 수행하도록 개념적 지식과 절차적 지식의 연결성을 강조하고, 이를 유사한 문제나 실생활 상황에 적용하는 문제해결 지도 방안을 모색하였다. 이를 위해 수학 문제해결 교육이 필요한 이유와 역사를 고찰하였고, 수학 문제해결에 관한 연구와 그간 연구자들에 의해 제시된 문제해결 모델을 살펴보았다.

다음으로는 주어진 문제를 시작으로 직관적 탐구, 형식적 탐구, 적용의 3요소로 구성된 문제해결 구성 요소에 따라 직관적 탐구 단계를 통한 개념적 이해와 형식적 탐구 단계를 통해 절차적 이해가 가능한 문제해결식 접근법에 따른 문제해결 지도 방안을 제안하였다. 적용 단계에서는 문제해결을 통해 경험한 수학적 원리를 활용하여 주어진 문제와 유사하거나 실생활 속의 문제를 스스로 만들어 해결해 보도록 하였다. 문제해결 과정에는 학생들 간에 서로의 문제해결 방법과 생각을 공유하는 과정을 강조하였으며, 생각을 공유하면서 자신의 문제해결 방법을 반성하고 음미해 볼 수 있는 기회를 갖도록 제안하였다. 문제해결 과정은 선형적 과정으로 이루어지는 것이 아니라, 문제 상황에 따라, 또는 학생들의 접근 방식에 따라 서로 상호 작용하는 구조로 이루어지도록 제안하였다.

본 연구에서 제안한 문제해결 지도 방안은 단계적으로 제시하는 문제해결 모델과는 달리, 문제해결 경험을 통해 수학학습에서 추구할 개념적 지식과 절차적 지식의 개발을 목적으로 하며, 이를 위해 직관적 탐구 단계와 형식적 탐구 단계를 유기적으로 경험하도록 제시하였다. 문제해결을 통해 개념적 지식과 절차적 지식을 구성하도록 제안하는 방안은 우리나라 초등학교 수학 교사용 지도서에서 제시하는 수학 수업 모형을 아우를 수 있다. 예를 들어, 원리 탐구 학습 모형은 '문제 상황 제시-수학적 원리의 필요성 인식-수학적 원리가 내재된 조작 활동-수학적 원리의 형식화-수학적 원리 익히기 및 적용'의 과정을 거치도록 제안하고 있는바 [20, p. 87], 수학적 원리의 필요성 인식과 수학적 원리가 내재된 조작 활동을 통해 문제의 의미를 파악하고 다양한 방법으로 해결해 보는 개념적 이해의 과정인 직관적 탐구 단계와 형식화 과정에서 알고리즘을 발견하여 적용하는 절차적 과정을 수행하는 형식적 탐구 단계를 거치는 것이다.

추후의 연구로는 본 연구에서는 개발한 문제해결식 접근법에 따른 문제해결 지도 방안을 활용하여 수학 교실에 적용해 보고, 학생들의 수학 학습 결과를 분석하여 그 효과를 확인해 볼 필요가 있다. 문제에 따라 학생들이 제시하는 직관적 탐구 과정과 형식적 탐구 과정, 이들의 상호 보완적 이해 과정에 대한 분석도 필요하다. 또한 문제해결 과정에서 나타나는 교실 토론 문화와 구성원 간의 상호 작용의 양상도 분석할 필요가 있다. 더불어 예비교사 교육 과정에 이 방안을 활용하여 교사교육의 방안으로서 활용 가능성을 타진하고 그 방안도 모색할 필요도 있을 것이다.

References

1. S. An, Z. Wu, *Teaching Elementary and Middle School Mathematics Using the MSA Approach: Model, Strategy, and Application*, CA: Education for All, 2017.
2. J. Boaler, *Mathematical Mindsets: Unleashing Students' Potential Through Creative Math*, Inspiring Messages and Innovative Teaching, CA: Jossey-Bass, 2016.
3. J. Dewey, *How we think*, D. C. Heath and Co, 1933.

4. J. Hadamard, *An essay on the psychology of invention in the mathematical field*, Priceton university press, Princeton, 1945.
5. Jeong E. S., Reconsideration of teaching mathematics problem solving in elementary school, *Journal of elementary mathematics education in Korea* 19(2) (2015), 123–141. 정은실, 초등학교 수학과 문제해결 교육 재고, 한국초등수학교육학회지, 19(2) (2015), 123–141.
6. Kang O. K. et al, *A Improving Study on the Teaching Method for Mathematics Problem Solving*, Seoul: KEDI Research Report RR 85-9, 1985. 강옥기 외, 수학과 문제해결력 신장을 위한 수업방법 개선 연구, 서울: 한국교육개발원 연구보고 RR 85-9, 1985.
7. Kim H. M., An analysis of the research trend in Korea regarding mathematical problem solving, *Journal of Learner-Centered Curriculum and Instruction* 16(8) (2016), 831–850. 김혜미, 수학 문제해결에 관한 국내 연구 동향 분석, 학습자중심교과교육연구, 16(8) (2016), 831–850.
8. Kim J. K., Lim M. G., An effect coming to the problem solving ability from the problem posing activity by presenting the problem situation, *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea*, 5 (2001), 77–98. 김준겸, 임문규, 문제 상황 제시에 따른 문제만들기 활동이 문제해결력에 미치는 영향, 한국초등수학교육학회지 5 (2001), 77–98.
9. Kim S. J., A study on multi-cultural society in Korea: Focusing on multi-cultural policy, Social Capital and Corruption, *Korean corruption studies review* 23(1) (2018), 95–120. 김수진, 한국 다문화사회에 관한 고찰: 다문화정책, 사회적 자본, 부패 중심으로, 한국부패학회보, 23(1) (2018), 95–120.
10. KOFAC, Developmental Research of 2015 Revised Mathematics Curriculum Draft Ⅱ, KOFAC Research Report DB15120005, 2015. 한국과학창의재단, 2015 개정 수학과 교육과정 시안 개발 연구 Ⅱ, 한국과학창의재단 연구보고서 DB15120005, 2015.
11. Lee I. H. et al, A Study on the Development of the 2014 National Assessment of Educational Achievement(NAEA), KICE RRE 2014-5-1, 2014. 이인호 외, 2014년 국가수준 학업성취도 평가 출제 연구, 한국교육과정평가원 RRE 2014-5-1, 2014.
12. F. K. Lester, Musings about mathematical problem-solving research: 1970-1994, *Journal for Research in Mathematics Education* 25(6) (1994), 660–675.
13. Ministry of Culture and Education, Elementary Curriculum, Ministry of Culture and Education Notice 442, 1981. 문교부, 국민학교 교육과정, 문교부 고시 제442호, 1981.
14. Ministry of Culture and Education, Elementary Curriculum, Ministry of Culture and Education Notice 87-9, 1987. 문교부, 국민학교 교육과정, 문교부 고시 제87-9호, 1987.
15. Ministry of Education, Elementary Curriculum, Ministry of Education Notice 1992-16, 1992. 교육부, 국민학교 교육과정, 교육부 고시 제1992-16호, 1992.
16. Ministry of Education, Mathematics Curriculum, Ministry of Education Notice 1997-15, 1997. 교육부, 수학과 교육과정, 교육부 고시 제1997-15호, 1997.
17. Ministry of Education and Human Resource, Mathematics Curriculum, Ministry of Education and Human Resource Notice 2007-79, 2007. 교육인적자원부, 수학과 교육과정, 교육부 고시 제2007-79호, 2007.
18. Ministry of Education, Science and Technology, Mathematics Curriculum, Ministry of Education, Science and Technology Notice 2011-361, 2011. 교육과학기술부, 수학과 교육과정, 교육과학기술부 고시 제2011-361호, 2011.

19. Ministry of Education, Mathematics Curriculum, Ministry of Education Notice 2015-74, 2015. 교육부, 수학과 교육과정, 교육부 고시 제2015-74호, 2015.
20. Ministry of Education, Mathematics Teacher's Guide 1-1, Cheonjae Education, 2017. 교육부, 수학 교사용 지도서 1-1, 천재교육, 2017.
21. National Council of Teachers of Mathematics, An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s, Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc., 1980.
22. National Council of Teachers of Mathematics, Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc., 1989.
23. National Council of Teachers of Mathematics, Principles and Standards for School Mathematics, Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc., 2000.
24. OECD, PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy, Paris: OECD, 2013.
25. H. Poincaré, *La Valeur de la Science*, 1905. 김형보 역, 과학의 가치, 서울: 단대출판부, 1983.
26. G. Polya, *How to solve it*, Vol. 2, New York: Doubleday, 1957.
27. S. K. Reed, *Word Problems-Research and Curriculum Reform*, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 1999.
28. T. L. Schroeder, F. K. Jr. Lester, *Developing understanding in mathematics via problem solving*, In P. R. Trafton, A. P. Shulte(Eds.), New Directions for Elementary School Mathematics(pp. 31–42), Reston, VA.: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc., 1989.
29. R. R. Skemp, *The Psychology of Learning Mathematics: Vol 2*, Harmonsworth: Penguin, 1986.
30. Song M. Y. et al, OECD Programme for International Students Assessment: Analyzing PISA 2012 Results, KICE RRE 2013-6-1, 2013. 송미영 외, OECD 국제 학업성취도 평가 연구: PISA 2012 결과 보고서, 한국교육과정평가원 연구보고 RRE-2013-6-1, 2013.
31. The California Department of Education, Mathematics Framework for California Public Schools-Kindergarten through Grade Twelve-, The California Department of Education, 2015.
32. G. Wallas, *The Art of Thought*, Harcourt Brace, 1926.
33. M. Wertheimer, Productive Thinking, New York: Harper & Brothers published, 1945. 矢田部達郎 譯, 生産的 思考, 岩波現代叢書, 1952.
34. E. Wittmann, The complementary roles of intuitive and reflective thinking in mathematics teaching, *Educational Studies in Mathematics* 12(3) (1981), 389–397.
35. C. Wolfram, Teaching kids real mathematics with computers, Retrieved from https://www.ted.com/talks/conrad_wolfram_teaching_kids_real_math_with_computers, 2010.
36. Yang E. K., Whang W. H., Relationship between mathematical learning styles and the selection of mathematical problem solving strategies, *The Mathematical Educa-*

tion 44(4) (2005), 565–586. 양은경, 황우형, 수학 학습유형과 문제 해결 전략, 수학교육, 44(4) (2005), 565–586.

37. You Y. J., Park M. K., An analysis of the children's scaffolding processes in mathematical problem solving, *Journal of elementary mathematics education in Korea* 13(1) (2009), 75–95. 유연진, 박만구, 초등수학 문제해결 활동에서 나타나는 아동 간 스캐폴딩 과정 분석, 한국초등수학교육학회지, 13(1) (2009), 75–95.