한국학교수학회논문집 제 22 권, 제 4 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 22, Number 4, 483-500, December 2019
http://doi.org/10.30807/ksms.2019.22.4.007

중학교 수학교과서와 중학생들의 반 힐레 기하수준에 관한 연구[1)]

강미혜[2)] · 손홍찬[3)]

본 연구에서는 중학교 수학교과서에서 기하 영역의 반 힐레 수준과 학생들의 반 힐레 수준을 비교 분석하였다. 교육과정이 개정되어 오면서 기하 영역에서의 내용은 감소되었지만 반 힐레 수준의 변화는 크지 않았고, 교과서에 제시되어 있는 내용의 기하 수준과 학생의 기하 수준과는 차이가 많이 남을 알 수 있었다. 교과서의 반 힐레 수준은 1학년의 경우 1, 2, 3수준, 2, 3학년의 경우 2, 3, 4수준에 분포되어 있고, 학생의 수준은 1학년의 경우 1수준 이하가 69%, 2, 3학년의 경우 2수준 이하가 각각 73.7%, 47.6%로 나타나 차이가 큼을 알 수 있다. 특히 2, 3학년의 경우 문제에서보다 교과서 본문의 내용의 반 힐레 4수준 비율이 높아 학생에게 어려움을 야기할 수 있음을 알 수 있었다.

주요용어 : 수학교과서, 기하, 반 힐레 수준

Ⅰ. 서론

학교수학에서 유클리드의 기하학을 다루어 온 것에는 많은 논란이 있었다. 2300년 전에 지어진 유클리드 원론은 기하학뿐만 아니라 비율, 홀짝수, 소수, 무리수 등의 내용을 담고 있는 것으로 아리스토텔레스의 논리학을 바탕으로 수학 이론을 정립한 최초의 책인데(이무현, 2002), 수학교육 현장에서는 오랜 동안 엄밀한 논리적 전개로 수학을 통해 두뇌를 도야해야 한다는 입장에서 유클리드 ‘원론’(Elements)의 교육이 주를 이루어 왔으나, 기하의 엄밀성에서 기인하는 복잡성과 난해함, 또는 접근 방법과 유용성의 인식 차이에 따라 학교 교육에서 기하를 어떻게 개선해야 하는 지에 대한 논의는 18세기 이후 줄기차게 지속되어 왔다.

유크리드 기하학은 인류가 실현한 위대한 지적 업적으로 이것의 학문적 교육적 가치를 중시하여야 한다는 것이 전통적 입장이었다. 그런데 이에 반한 여러 주장들이 있었다. Dieudonne는 학교수학에서 유클리드 기하를 추방하고 대신 벡터공간을 다루어야 한다고 주장하였고, Treutlein은 유클리드 기하에 앞서 직관기하를 다루어야 한다고 주장하였다. 또 Clairaut는 유클리드의 원론이 발견과정을 숨기고 있다는 점을 비판하고 대안으로 ‘기하학 원론’을 탐구와 발견에 초점을 맞추어 저술하기도 하였다. 그럼에도 불구하고 유클리드 기하학은 학교에서 의연한 위치를 차지하고 있다(우정호, 2011).

그러다 19세기말 산업혁명으로 새롭게 탄생된 노동자 계급에 대한 실용적인 교육이 요구되면서 고

---

* MSC2010분류: 97U20
1) 이 논문은 제1저자의 2019년 석사학위 논문 일부를 재구성한 것임.
2) 전주 서중학교 교사 (doda2748@naver.com)
3) 전북대학교 교수 (hcson@jbnu.ac.kr), 교신저자

전적 교양교육으로서의 유클리드 기하의 교육은 생활 준비로서의 교육이라는 새로운 요구에 직면하게 되었다. 영국의 페리는 수학교육 근대화 운동 과정에서 수학 교육이 수학 전문가만을 위한 것이 아니고 모든 국민의 발달을 위한 수학교육이어야 함을 강조하면서 유클리드 기하에서 탈피하여 실험기하를 강조하였다. 독일의 클라인도 유클리드 기하는 성인을 위한 책이며 학생의 심리에 적절한 초보적인 기하 지도가 필요함을 역설하며 실용적인 측면과 해석기하를 조기에 도입할 것을 주장하였다. 미국의 무어도 도형그리기, 종이 접기 등을 통해 기하의 조작적 학습의 경험을 제공해야 한다고 주장하였다(황혜정 외, 2016).

유클리드 기하학이 가지는 교수 학습의 어려움은 최근까지도 지속적으로 문제제기 되어왔다. 유클리드 원론을 기본으로 하는 정의, 공리, 정리로 구성되는 기하학의 체계는 수학의 체계를 가장 잘 반영하고 있다는 중요성에도 불구하고 저학년에서는 기하학의 요소들이 제대로 인식되지도 못한 채, 학습자가 가장 어렵게 느끼고 싫어하는 부분으로, 학생들의 마음속에 오히려 수학을 거부하는 경향을 심는 결과를 낳았다(이중권, 2006). 또한, 현재의 중학교 기하 교육이 학생들의 사고 능력을 키워주기보다 주입식 교육에 치중해 있으며 학생들의 수준에 비해 지나치게 엄밀한 기하를 가르침에 따라서 학생들이 기하를 공부할 때, 곤란을 겪도록 하는 문제점을 갖고 있다(김미정, 이종희, 1994).

수학과 교육과정은 학교 수학의 내용과 범위를 결정하는 가장 기본이 되는 문서로 교육과정을 살펴보면 기하 교육이 어떻게 진행되어 왔는지 알 수 있다. 이를 살펴보면 우리나라에서는 최근 교육과정을 개정할 때마다 중학교 기하 영역의 학습량을 주로 감축하고 성취수준을 낮추는 방향으로 개정해왔다.

각 개정 교육과정 기하 부분의 큰 특징을 살펴보면 2007개정 교육과정에서는 도형의 개념을 직관적으로 이해하고 도형의 성질은 직관 또는 연역적 추론에 의해 이해하게 한다고 제시하고 있으며, 기본적으로 기하영역의 목표는 도형의 성질을 습득하는 것과 함께 논리적 사고력의 계발을 중요시하고 있고, 논증은 간단히 다루고 이들 성질을 이해하고 활용하는데 중점을 둔다고 언급하고 있다(교육부, 2007). 2009개정 교육과정은 창의 인성 중심의 교육과정이라고 불리며 학생들의 창의성을 신장시키기 위해서는 학습 부담을 경감시켜 수학 내용과 함께 수학의 방법 지식으로 수학적 과정을 강조해야 한다고 주장하고 있다. 이러한 측면의 하나로 논의된 것 중 하나가 기하학적 성질에 관한 증명에 관한 것이다. 기하학적 성질이 참 임을 밝히기 위해서 이전의 교육과정에서 '증명'이라는 용어로 대표되는 연역적이고 형식적인 논증을 언급했던 것과는 달리 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서는 정당화의 의미로써 '이해하고 설명할 수 있다'라는 표현을 사용하여 다양한 형태의 증명 방법을 제시하는 방향을 언급하고 있다(교육과학기술부, 2011).

2015개정 교육과정에서의 기하영역에서는 내용과 성취수준의 변화는 크게 없지만 복잡한 형식논리 규칙을 이용하는 연역적 정당화 문제를 지양하고, 교실 수업을 교사 중심에서 학생 활동 중심으로 전환하기 위해 구체적인 활동과 탐구 중심으로 교수·학습 방법을 제시하며 공학적 도구나 다양한 도구를 이용하여 도형의 성질을 추론하고 토론하도록 권장하고 있다.

교육과정 개정의 시기마다 교육 내용 적정화를 통한 내용의 경감 추구는 빠지지 않는 주요 사항으로 등장하였다. 그러나 암기식 교육, 문제 풀이 식 교육은 크게 개선되지 못했으며 학생들의 학습 부담 또한 여전하다(한국과학창의재단, 2015). 이는 교육 내용 적정화를 단순히 양적 감축차원에서 접근했기 때문이라고 본다.

그런데 반 힐레 (van Hiele) 이론에 의하면 기하 내용을 이해하는 수준은 학습자마다 다르고 학생의 수준을 또 교사는 잘 이해할 수 있어야 한다. 반 힐레는 연역적 추론이 학생들에게 자연스럽게 발생하지 않는다는 관찰 결과를 토대로 연역적 추론에 대한 신중하고 체계적인 교육의 필요성을 강조하면서, 학생들에게 서로 다른 기하적 사고 수준이 존재함을 알고 이를 분석하였다. 각 수준에는 독특한 언어 구조가 있어서 서로 다른 수준에 있는 사람끼리는 의사소통에 많은 어려움을 겪는다고 주장하였

으며 기하교수에서의 주된 문제는 교사가 학생에게 기대하는 수준과 학생들의 수준의 차이로부터 발생한다고 밝혔다. 이러한 상황을 극복하기 위하여 반 힐레는 교사가 학생의 수준을 파악하고 학생들의 수준에서 지도할 것을 권고하였다.

학생의 수준을 고려한 효율적인 기하 지도를 위해서는 심도 있는 교과서의 분석과 학생의 수준 분석이 필요하다. 지금까지 반 힐레 수준에 관한 국내의 연구로는 제6차 교육과정에서 중학생들의 수준을 분석한 김미정, 이종희(1994)의 연구가 있고, 제6, 7차 교육과정의 중학교 2, 3학년의 교과서의 반 힐레 수준을 분석한 이중권(2006)의 연구가 있다. 또 학생의 반 힐레 수준을 공학적 도구를 활용하여 향상시킬 수 있는 가에 대한 연구로 임현정, 고상숙(2006), Hagar, 류희찬(2006), 그리고 이창연, 황우형(2010)의 연구가 있다.

교사가 학생을 지도할 때 기준이 되는 교과서의 수준과 학생의 수준이 현저히 차이가 나는 것은 바람직하지 않다. 지금까지 기하 교육에서의 어려움을 해소하고자 교육과정을 개정할 때마다 내용을 감축해왔고, 학습목표의 수준을 낮추어 왔지만 내용과 문제에서의 반 힐레 수준이 학생의 수준에 비추어 적절한지, 또 학생의 수준과는 어느 정도 차이가 나는 지에 대한 연구는 적어서 이를 탐구할 필요가 있다.

이를 위해 첫째, 2007개정 교육과정부터 2015개정 교육과정에 해당하는 중학교 1~3학년의 교과서의 기하 영역의 반 힐레 수준을 분석하고 그 변화를 살펴보고자 한다.

둘째, 2015개정교육과정을 반영하는 교과서를 학습하는 중학교 1, 2학년 학생, 2009개정 교육과정을 반영하는 교과서를 학습하는 중학교 3학년을 대상으로 반 힐레 수준을 조사하여 교과서와 학생의 수준의 차이가 있는지를 비교 분석하고 반 힐레 기하 수준의 향상에 도움이 될 수 있는 교수·학습 방법의 방안을 찾고자 한다.

이를 통해 교육 내용의 질적 조화를 통해 학습자들의 기하 학습 부담을 줄이는 것과 함께 의미 있는 학습이 이루어질 수 있도록 장차 교육과정을 개선하고 교과서를 구성하는데 시사점을 제공할 수 있을 것이다.

Ⅱ. 선행연구 고찰

Pierre van Hiele와 그의 아내 Dina van Hiele-Geldof는 1950년대 네덜란드의 연구자이자 수학교사였다. 초임 수학교사였던 반 힐레 부부는 학생들이 기하를 학습하는 데서 겪는 어려움에 주목하면서 그 원인을 밝혀내려고 노력하던 중에 기하 학습 수준 이론을 정립하게 되었다. 이 반 힐레 기하 학습 수준이론은 1957년에 Utrecht 대학에 두 편의 박사학위논문에서 유래하는데, 이 학위논문의 주제인 기하 학습수준이론은 지도교수인 Freudenthal의 수학화 개념에 영향을 받았으며, P.M. van Hiele(1959, 1986, 1999)는 박사학위 논문을 낸 이후 이 이론을 지속적으로 발전시켰다.

반 힐레는 기하 학습에서 학생이 생각하거나 이해하는 데에 다섯 가지 수준이 있다고 보았으며, 그의 이론이 가지는 다섯 가지의 특징과 그리고 한 수준에서 다음 수준으로 넘어가는 다섯 가지 교수 학습 단계를 제시하였다.

다섯 가지 수준은 처음에는 0수준에서부터 4수준까지 명명되었는데 나중에 미국의 연구자들이 모양을 구별하지 못하는 학생의 수준을 0수준으로 명명하기 위하여 0수준에서 4수준을 1수준에서 5수준으로 명명하였다(Senk, 1989). 우리 연구에서도 1수준에서 5수준으로 명명하여 사용하기로 한다. 이 다섯 가지 수준과 이론의 특징 그리고 한 수준에서 다른 수준으로 이행하는 교수 학습 단계는 국내외의 문헌에서 비교적

잘 알려져 있으므로 간략히 약술하기로 한다(Fuys et al, 1988; Usiskin, 1982; 황혜정 외, 2016).

제1수준의 학생들은 도형의 겉모양으로 도형을 인식한다. 또 도형의 이름을 붙일 수 있지만 도형의 성질에 주목하지는 않는다. 이 수준을 시각적 인식수준(Visualization)이라고 한다. 학생들은 만일 흔히 볼 수 있는 평행사변형과 달리 바늘 모양의 기다란 평행사변형이 주어진다면 이것을 평행사변형으로 부르기를 꺼려한다. 도형의 일반성이나 관계를 파악하지 못하는 특징을 가진다.

제2수준의 학생들은 도형의 구성 요소와 구성 요소들 사이의 관련성을 분석하고, 경험적으로 종이를 접어보거나 측정해봄으로써 도형의 성질을 발견할 수 있다. 이 수준은 분석적 인식 수준(Analysis)이라 하고, 이때 인식의 대상은 도형이 된다.

제3수준의 학생들은 여러 도형을 특징짓는 성질을 확인하고 성질들에 의해 도형의 포함관계를 이해하고 도형을 위계적으로 분류할 수 있다. 이 수준은 추상적 인식 수준(Abstraction)이라 하고, 이때 인식의 대상은 도형의 성질들이 된다.

제4수준의 학생들은 무정의 용어, 정의, 공리 그리고 정리의 차이점을 이해할 수 있다. 이 수준은 형식적 연역 수준(Deduction)이라 하고, 이때 인식의 대상은 명제가 된다. 학생들은 정리를 연역적으로 증명할 수 있으며 정리들 사이의 관계를 설정할 수 있다.

제5수준은 대개 전문적인 수학자가 갖출 수 있는 수준으로 서로 다른 공리 체계에서 정리를 설정할 수 있으며, 이 체계들을 분석하고 비교할 수 있다. 이 수준은 엄밀한 수학적 수준(Rigor)이라 하고, 이때 인식의 대상은 논리가 된다.

반 힐레 이론은 먼저 구소련에 의해 주목받았는데, 1960년대에 구소련의 학자들에 의해 연구되고 교육과정에 반영된 후에 미국에도 영향을 미치기 시작하여 1980년대에는 미국에서도 반 힐레 이론이 연구되기 시작하였다. 미국에 가장 먼저 반 힐레 이론을 소개한 사람은 Wirszup이고, NCTM의 “Standards”에 영향을 미쳤다(Surhone et al, 2010 ; Usiskin, 1982).

미국에서는 반 힐레 수준의 존재성, 수준의 성질, 수준의 이동, 그리고 반 힐레 모델에서의 교육과정 분석에 관한 연구가 수행되었고(Fuys, Geddes & Tischler, 1988), 학생의 반 힐레 수준, 학습 후의 반 힐레 수준 변화 등이 연구되었다(Usiskin, 1982). 특히 Usiskin(1982)은 반 힐레 수준 검사를 위해 검사지를 고안하였다. 또 학생의 사고 과정을 기술하는데 반 힐레 수준은 유용하며 학생의 행동에 의해 수준을 특징지울 수 있는지 등에 관한 연구에서 그 결과가 비교적 긍정적임이 보였다(Burger, Shaughnessy, 1986). Primasatya, Jatmiko(2018)은 초등학교 5학년을 대상으로 한 최근의 연구에서 반 힐레 이론을 적용한 멀티미디어 기하 환경에서 학습한 학생이 그렇지 않은 학생에 비해 기하의 사고 능력이 낫다는 결론을 내리고 있다. 이 외에도 다양한 연구 결과들이 발표되고 있다

지금부터는 반 힐레기하 수준 이론과 관련하여 중학교 교과서 수준 분석, 학생의 수준 분석, 기하 수준을 향상시키기 위한 방안의 측면에서 실시된 선행연구를 살펴보고자 한다.

먼저 반 힐레 기하 수준 이론에 근거하여 중학교 교과서 수준 분석과 학생의 수준 분석에 대한 연구를 살펴보면 다음과 같다.

김미정, 이종희(1994)는 6차교육과정의 중학교 1, 2, 3학년을 대상으로 반 힐레 수준을 검사하였으며 임상면담을 통해 기하 수준과 수준의 진보를 파악하고자 하였다. 이 연구에서는 증명을 처음 배우는 중학교 2학년들의 약 93.6%, 중학교 3학년 학생들의 약 74.8%가 수준 2이하에서 사고하는 것으로 나타났는데, 이것은 학생들이 증명을 이해하는데 어려움을 갖게 되므로 증명을 도입하기 전에 비형식적인 기하 내용을 다루어주는 것이 바람직하다고 제시하였다. 또한, 학생들이 갖는 어려움을 제거하고 기하 수준을 향상시킬 수 있는 적절한 지도 내용 및 방법을 지속적으로 연구해야 할 것이라고 제안하였다.

이중권(2006)은 7차교육과정의 중학교 1학년, 6차 교육과정의 중학교 2, 3학년교과서 각 1종씩을 비교 분석하였으며 중학교 1, 2, 3학년을 대상으로 반 힐레 Level Test를 실시하였다. 1학년의 교과서의

수준은 대부분 1~3수준에 해당되어있고, 2학년의 교과서 수준은 3, 4수준, 3학년의 경우는 2~4수준에 해당한다고 밝혔으며, 반 힐레의 이론상 2, 3학년의 수준이 맞지 않게 구성되어있다고 하였다. 또한 반 힐레 수준 검사 결과 1학년의 71.5%가 제 0수준과 제 1수준에 몰려있으며, 2학년의 경우 제 2수준과 제 3수준이 각각 20.35%, 19.47%로 비율이 상승하였지만 1수준이하의 학생이 59.9%로 상당수 학생이 제 4수준을 이해하기에는 무리가 따를 것이라고 하였다. 3학년의 경우 3수준 이상이 되는 학생이 전체의 22.39%로 제 3수준 이상의 사고력을 요하는 2학년의 과정을 제대로 이해한 학생의 비율이 매우 적음을 밝혀내었다. 따라서 반 힐레의 수준에 맞는 교육과정이 내용 구성이 구체적으로 끊임없이 모색되어야 할 것이라고 제안하였다.

최민정・손홍찬(2016)은 2009개정교육과정의 중학교 3학년을 대상으로 상위권집단과 하위권집단을 구분하여 반 힐레 Level Test를 실시하였다. 상집단의 경우 1수준 15.6%, 2수준은 37.3%, 3수준은 41%이고 4수준 이상에 해당하는 학생은 없는 것으로 조사되었으며, 하집단의 경우 1수준 미달이 18%, 1수준 38%, 준2수준은 19%, 2수준은 26%, 준3수준 이상에 해당하는 학생은 없는 것으로 나타났다고 하였다. 이에 상・하 두집단 사이에 반 힐레 수준의 차이가 크게 나타남으로써 하집단을 위한 적절한 교재의 구성이 필요하며, 교수・학습 방법도 실험 관측을 통하여 기하적 성질을 귀납적으로 유추하는데 중점을 두고 엄밀한 연역적 증명은 지양할 필요가 있다고 제안하였다.

반 힐레 수준을 향상시키고자 하는 연구에서 이창연, 황우형(2010)은 GSP를 이용하여 수업을 한 결과 평균적으로 약 1개 수준이 증가하였다고 밝혔으며, Hagar, 류희찬(2008)은 3수준에 도달하지 못한 학생에게 GSP를 이용하여 정사각형을 평행사변형으로 분류할 수 있다고 주장한 바 있다. 또 임현정, 고상숙(2006)은 GeoGebra를 수업에 접목시킴으로써 기하적 사고수준의 향상을 가져왔다고 밝혔다. 이와 같이 공학적 도구는 반 힐레 수준의 상승을 도울 수 있으므로 이를 활용한 교재를 개발할 필요가 있음을 시사한다.

Ⅲ. 연구 방법

반 힐레에 따르면 한 수준에서 다음 수준으로의 발전은 생물학적 성숙이나 발달에는 거의 의존하지 않으며, 교수·학습 과정에서의 교육 내용과 방법에 더 많이 의존하므로 학교의 기하 교육 활동이 원활하게 수행될 수 있는지의 여부를 판단하기 위해서는 수학과 교육과정의 학습 내용에 대한 구체적인 분석이 선행되어야 한다.

현재 교육과정을 살펴보면 중학교 1, 2학년은 2015교육과정이 적용된 교과서를 사용하고 있고 중학교 3학년은 2009개정 교육과정이 적용된 교과서를 사용하고 있다. 이와 같이 교육과정이 변화하는 과도기에 놓여있으므로 이전 2009개정 교육과정과 2015개정교육과정을 함께 분석할 필요가 있다.

본 연구는 기하영역을 중심으로 2007개정교육과정부터 2015개정교육과정에서 교과서의 반 힐레 수준을 분석하였다. 또한 학생들의 기하적 사고의 반 힐레 수준을 분석하였다.

1. 연구 대상 및 절차

가. 분석대상

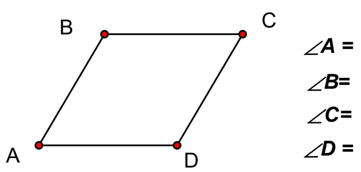
(1) 중소도시 J시 지역의 중학교 수학교과서로 사용 빈도가 높은 A, B, C 세 출판사의 1~3학년 기하영역을 분석대상으로 선정하였다.

(2) 중소도시의 3개의 중학교 1, 2, 3학년 3학급씩 총 810명을 연구대상으로 하였다. D중학교 1, 2, 3학년 3학급씩, E중학교 1, 2, 3학년 3학급씩, F중학교 1, 2, 3학년 3학급씩을 대상으로 1학년 총 268명, 2학년 총 270명, 3학년 총 282명으로 총 810명을 대상으로 반 힐레 수준을 측정하였다.

2. 검사도구

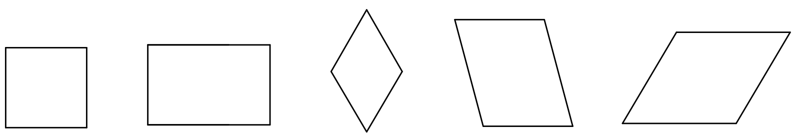
가. 교과서의 반 힐레 수준 검사 기준

교과서는 핵심 내용과 그에 따른 예제와 문제로 구분되어 있다. 이를 분석할 때에는 문항 자체의 수준과 지도서에 제시된 모범답안에서 제시된 내용을 바탕으로 수준을 분석하였다. 이를 위해 반 힐레 Level test에서 제시되는 문항의 유형과 David Fuy의 주장을 기준으로 교과서를 분석하였다. 같은 평행사변형에 관한 문제라 할지라도 묻는 내용과 방법에 따라 다양한 수준으로 나타날 수 있다. 예를 들어 David Fuy는 "평행사변형에서 대각의 크기가 같다."는 사실을 각각 다른 수준에서 어떻게 경험될 수 있는 지를 다음과 같은 기준으로 분석하였다(David Fuy, p450~451; 강문봉 · 김현미, 1998 재인용). David Fuy는 다음과 같이 그림을 주고 평행사변형의 각을 측정을 통해서 알아보는 것을 제 1수준의 예로 들었다.



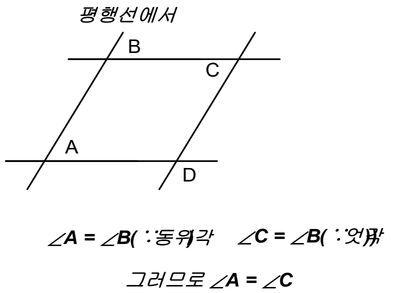
[그림Ⅲ-1] 제 1수준 문항의 예

제 2수준 문항의 예로는 어떤 평행사변형에서도 마주보는 각의 크기는 같다는 것을 알아보기 위해 학생들에게 다양한 평행사변형을 경험하도록 하는 것이다.



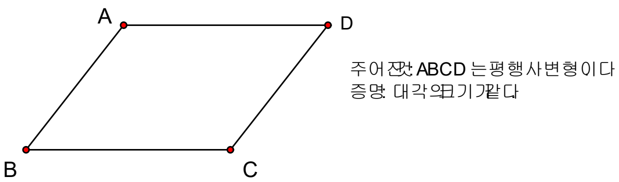
[그림Ⅲ-2] 제 2수준 문항의 예

제 3수준의 예로는 학생들은 왜 대각이 같은지를 설명하기 위해 전에 발견한 성질, 예를 들면 엇각, 동위각이 같다는 성질을 사용한다.



[그림Ⅲ-3] 제 3수준 문항의 예

제 4수준의 예에서 학생들은 대각의 크기가 같다는 것을 보이기 위해 공리, 정의, 이전에 증명된 이론을 사용하여 연역적 추론을 한다.



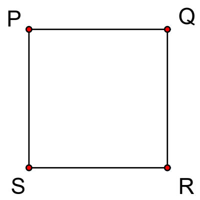
[그림Ⅲ-4] 제 4수준 문항의 예

나. 학생의 반 힐레 수준 검사 기준

학생의 반 힐레 수준을 검사하는데 사용한 도구는 미국 Chicago대학에서 Usiskin(1982)이 개발한 5지 선다형 25문항 중 21~25번을 제외한 20문항으로 구성된 반 힐레 수준 검사지이다.

이 반 힐레 수준 검사지는 반 힐레 의 각 수준에 해당하는 5개씩의 문항으로 구성되어 있다. 본래 21번~25번 문항은 반 힐레 의 5수준을 측정하기 위한 것으로, Chicago Project에서 Usiskin이 "중학교에서 제 5수준은 존재하지도 않고, 측정할 수도 없다."(p.79)고 내린 결론에 따라 본 연구에서도 제 5수준은 제외하였다. 따라서 제 1수준에서 제 4수준까지 20문항을 채택하였다. 또한 반 힐레 수준 검사의 제한시간은 20분으로 하였다.

반 힐레 수준을 알아보기 위한 검사 문항의 한 가지 예를 들면 다음과 같다. 다음 문항은 반 힐레 수준 검사지에서 제2수준을 묻는 문항의 예이다.



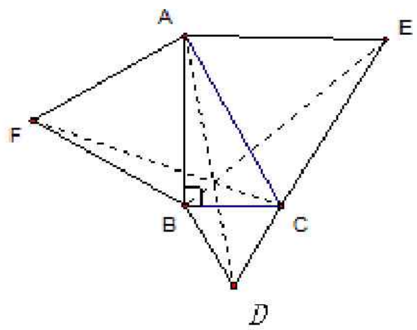
[그림Ⅲ-5] 2수준 문항의 예

(문항) $PQRS$는 정사각형이다. 이 정사각형에서 참인 성질은?

① $\overline{PR}$과 $\overline{RS}$의 길이는 같다.
② $\overline{QS}$와 $\overline{PR}$은 수직이다.
③ $\overline{PS}$와 $\overline{QR}$은 수직이다.
④ $\overline{PS}$와 $\overline{QS}$의 길이는 같다.
⑤ 각Q는 각R 보다 크다.

이 문항은 정사각형의 성질에 의해 모양을 인식하고 특성 지을 수 있는지를 묻는다. 정사각형은 '네 변의 길이가 같고 네 각의 크기가 같은 사각형이다'라는 정의와 '대각선의 길이가 같고 그 대각선은 서로를 수직 이등분한다'는 성질의 집합으로 볼 수 있는지를 파악하는 문항으로 2수준을 판별할 수 있는 문항이다.

다음은 반 힐레 수준 검사지의 제4수준 문항의 예이다.



[그림Ⅲ-6] 4수준 문항의 예

(문항) 다음에 직각삼각형ABC가 있다. 이 직각삼각형ABC의 세 변에 정삼각형 ACE, ABF, BCD를 만들자. 그러면, $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$는 공통인 한 점에서 만난다는 것을 증명할 수 있다. 이 증명으로 알 수 있는 것은?

① 여기에 그려진 이 삼각형에서만 $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$가 한 점에서 만난다.
② 모든 직각삼각형이 아닌 몇 개의 직각삼각형에서만 $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$가 한 점에서 만난다.

③ 모든 직각삼각형에서 $\overline{AD},\overline{BE},\overline{CF}$는 한 점에서 만난다.
④ 모든 삼각형에서 $\overline{AD},\overline{BE},\overline{CF}$는 한 점에서 만난다.
⑤ 모든 이등변삼각형에서 $\overline{AD},\overline{BE},\overline{CF}$는 한 점에서 만난다,

이 문항은 페르마 점에 관한 문항으로 기하적 진술을 논리적으로 설명하고 파악함으로써 형식적으로 추론할 수 있는지를 묻고 있다. 또한 제시된 직각삼각형의 성질에 대한 추론의 결과 기하 체계 안에서 논리적 재조직 관계망을 형성하고 있는지를 묻는 문항으로 반 힐레 4수준을 판별 할 수 있는 문항이다.

3. 검사 결과 처리

반 힐레 검사지에서 배점을 부여하고 수준을 부여하는 방법은 Usiskin(1982)이 사용한 방법을 활용던 이창연, 황우형(2010)의 배점 방식을 택하였다. 이 방법은 학생이 문항을 전혀 모르는 채 많은 문항을 맞추기는 확률적으로 어렵다는 점을 기준으로 하여 수준을 판정하는 것이다. 예를 들어 5문항 중 3문항을 맞출 확률은 0.0579인 반면 학생이 문항을 전혀 모르고 5문항 중 4문항을 맞출 확률이 0.0067이므로, 학생이 주어진 수준에서 5문제 중 4문제를 정답으로 했을 경우에 그 수준에 도달한 것으로 간주하기로 하는 것이다. 그리고 다음 표와 같이 배점한다.

<표 Ⅲ-1> 수준별 문항 배점

	기준	배점
1수준	5문항 중 4개 이상 맞출 때	1점
2수준	5문항 중 4개 이상 맞출 때	2점
3수준	5문항 중 4개 이상 맞출 때	4점
4수준	5문항 중 4개 이상 맞출 때	8점

또한 반 힐레 수준에 연속적으로 도달한 학생과 비연속적으로 도달한 학생의 두 그룹으로 나누어 질 수 있는데 이에 대해 다음과 같이 처리하였다.

연속적으로 도달한 학생의 반 힐레 수준은 그 학생이 도달한 가장 높은 수준으로 정하였다. 그러므로 합산점 1, 3, 7, 15는 각각 반 힐레 1, 2, 3, 4, 수준과 일치하며, 합산점이 0인 경우는 시각적 인식 수준인 1수준에도 도달하지 않은 1수준 미달이라고 하였다.

비연속적으로 도달한 학생의 반 힐레 수준은 그 학생이 도달한 비연속적인 수준 중 가장 높은 수준으로 정하고, '준수준'이라고 정의 하였다. 그러므로 합산점 2는 준 2수준으로, 합산점 4~6은 준 3수준으로, 합산점 8~14는 준 4수준을 나타낸다.

예를 들어, 어떤 학생이 1수준 문항을 4개, 2수준 문항을 4개, 3수준 문항을 1개, 4수준 문항을 2개 맞췄을 경우, 합산 점수는 총 1+2=3으로 제 2수준으로 판별된다. 또, 1수준 문항을 5개, 2수준 문항을 2개, 3수준 문항을 4개, 4수준문항을 1개 맞췄을 경우는 합산점수가 $1+4=5$이므로 준 3수준으로 판별한다. 이창연, 황우형(2010)의 연구에서 준수준의 경우 0.5를 감하여 반 힐레 수준을 결정한 것과는 달리 여기에서는 연속적으로 도달하지 않았음을 그대로 보여주기 위해 준수준을 그대로 사용한다.

Ⅳ. 연구 결과 및 분석

1. 교과서의 반 힐레 수준 분석

중학교 수학 교과서는 3종 교과서를 선택하여 2007개정교육과정에서부터 2015개정 교육과정까지의 반 힐레 수준을 분석하여 수준의 변화가 있는지를 살펴보았다.

각 단원별 내용별로 반 힐레의 수준을 분석하는데 있어서는 교과서의 내용과 문제의 제시에 있어서 서로 다른 수준을 갖는 경우가 많으므로, '내용'과 '문제'의 두 부분으로 나누어 조사하였다. 또한 2007 개정 교육과정을 기준으로 단원을 구분해 분석하였다. 교육과정이 변화함에 있어서 학습 내용의 적정화가 이루어졌으며 이때 내용의 감축과 학년 간 이동을 크게 꼽을 수 있다. 내용의 감축 또한 학생들의 수준을 고려한 것이므로 교육과정의 변화에 따른 교과서의 내용 구성 실태를 잘 보여준다고 볼 수 있으므로 기준을 설정하였다.

1학년의 경우 교과서의 반 힐레 수준은 1, 2, 3 수준 순서로 비율이 나타났다. 교육과정이 개정됨에 따라 교과서에서 다루는 내용과 문제의 유형 또한 거의 유사하게 나타나 전체적으로 큰 변화는 없는 것으로 나타났다.

중학교 1학년 교과서 반 힐레 수준 분석의 결과는 다음 <표 Ⅳ-1>과 같았다.

<표 Ⅳ-1> 교육과정별 1학년 수학교과서의 반 힐레 수준별 비율

	2007개정교육과정		2009개정교육과정		2015개정교육과정	
	내용	문제	내용	문제	내용	문제
1수준	45%	35%	44%	35%	44%	39%
2수준	36%	55%	34%	55%	36%	51%
3수준	19%	11%	23%	10%	21%	9%

중학교 2학년 교과서의 반 힐레 수준의 분석 결과 내용부분의 4수준의 비율이 출판사 구분 없이 모두 50%가 넘는 반면 문제의 수준은 교육과정이 변화함에 따라 4수준의 비율이 감소하고 3수준의 비율이 높게 나타났다. 내용부분이 여전히 4수준으로 높은 이유는 수학적 개념을 도입함에 있어서 논리적 근거를 제시하기 위해 여전히 '증명'을 통해 핵심 내용과 정리를 도입하기 때문이라고 판단된다. 또한 그에 반해 문제의 반 힐레 수준이 낮은 이유는 본문의 내용에서 도입한 결과를 적용하여 해결할 수 있어서 문항의 난이도는 높지 않은 것으로 파악된다.

중학교 1학년의 경우 A, B, C 출판사 모두 교육과정이 개정됨에 따라 교과서에서 다루는 핵심 내용을 제시함에 있어서 증명과정을 분할함으로써 수준을 낮추려는 노력이 보였으나 이는 소수에 불과하며 핵심내용을 설명하는 방법이 거의 유사하여 4수준의 비율이 크게 감소되지 못한 것으로 나타났다. 한편, 세 출판사 모두 문제 부분에서 직접 증명을 삭제하고 설명을 요하는 문제로 변형하여 제시하여 4수준의 비율이 줄고 3수준의 비율이 늘어난 것으로 나타났다.

중학교 2학년 교과서 반 힐레 수준 분석의 결과는 다음 <표 Ⅳ-2>과 같았다.

<표 Ⅳ-2> 교육과정별 2학년 수학교과서의 반 힐레 수준별 비율

	2007개정교육과정		2009개정교육과정		2015개정교육과정	
	내용	문제	내용	문제	내용	문제
2수준	18%	26%	14%	34%	11%	40%
3수준	23%	44%	21%	44%	27%	49%
4수준	59%	30%	65%	22%	62%	11%

3학년에서는 내용과 문제에서 3수준의 비율이 가장 높았고, 4수준의 경우 내용과 문제에서 많은 차이가 나타났다. 다루는 주제 측면에서 보면 2학년에서는 삼각형과 사각형의 성질을 증명하고 이를 정당화하기 위한 내용에서 반 힐레 의 4수준이 차지하는 비율이 높았고, 3학년에서는 삼각형과 원의 성질을 발견하고 이를 조직하는 과정에서 3수준이 차지하는 비율이 많아진 것으로 나타났다. 하지만 교육과정이 변함에 따라 수준의 변화는 미미하며 각 출판사마다 다뤄지는 내용 접근 방식이나 예제, 문제의 유형에는 큰 변화가 없었다.

중학교 3학년 교과서 반 힐레 수준 분석의 결과는 다음 <표 Ⅳ-3>과 같았다.

<표 Ⅳ-3> 교육과정별 3학년 수학교과서의 반 힐레 수준별 비율

	2007개정교육과정		2009개정교육과정		2015개정교육과정	
	내용	문제	내용	문제	내용	문제
2수준	10%	51%	14%	56%	2020년 적용	
3수준	51%	45%	61%	44%		
4수준	39%	4%	26%	0%		

2. 학생의 반 힐레 수준 분석

가. 중학교 1학년 학생의 반 힐레 수준 분석

3개의 D, E, F중학교 1학년에 대한 반 힐레 수준에 도달한 학생 수를 조사한 결과는 <표 Ⅳ-4>과 같았다.

<표 Ⅳ-4> 중학교 1학년 학생의 반 힐레 수준분석 결과

반 힐레 수준	1수준 미달	1수준	준2 수준	2수준	준3 수준	3수준	준4 수준	4수준	합계
학생수 (백분율)	66 (24.7)	119 (44.3)	41 (14.8)	18 (6.4)	15 (5.4)	7 (2.2)	2 (0.8)	4 (1.4)	272 (100)

이때 D, E, F중학교 1학년 학생 수는 각각 108명, 87명, 77명이었다. 3개 학교의 1학년의 수준을 분석해 보았을 때 학교는 다르지만 학생들의 수준의 비율은 유사하였다.

1학년 학생의 경우 모두 1수준이하에 도달한 학생이 69%이상으로 다수를 차지하였다. 1수준 미달의 학생도 24.7%이고, 1수준과 준2수준에 도달한 학생은 59.13%로 나타나 2수준에 도달하지 못한 학생이 83.8%로 나타났다. 2수준과 준3수준에 도달한 학생은 11.8%로 나타났다. 3수준과 준4수준에 도달한 학생은 3%, 4수준에 도달한 학생은 1.4%로 나타났다.

나. 중학교 2학년 학생의 반 힐레 수준 분석

3개의 중학교 2학년에 대한 반 힐레 수준에 도달한 학생 수를 조사한 결과는 다음 <표 Ⅳ-5>과 같았다.

<표 Ⅳ-5> 중학교 2학년 학생의 반 힐레 수준분석 결과

반 힐레 수준	1수준 미달	1수준	준2 수준	2수준	준3 수준	3수준	준4 수준	4수준	합계
학생수	37	48	42	71	36	25	5	6	270
(백분율)	(13.7)	(18.3)	(15.7)	(26)	(13.1)	(9.3)	(1.8)	(2.1)	(100)

이때 D, E, F중학교 2학년 학생 수는 각각 109명, 85명, 76명이었다. 2학년의 반 힐레 수준을 살펴보면 2수준과 준3수준이 39.1%, 3수준과 준4수준이 11.13%로 수준이 향상됨을 알 수 있었다. 여전히 2수준 이하의 학생들이 차지하는 비율은 73.7%로 나타났다. 시각적 인식수준인 1수준의 학생비율이 1학년에 비해 다소 줄긴 했지만 여전히 32%를 차지하고 있다.

다. 중학교 3학년 학생의 반 힐레 수준 분석

3개의 중학교 3학년에 대한 반 힐레 수준에 도달한 학생 수를 조사한 결과는 다음 <표 Ⅳ-6>과 같았다.

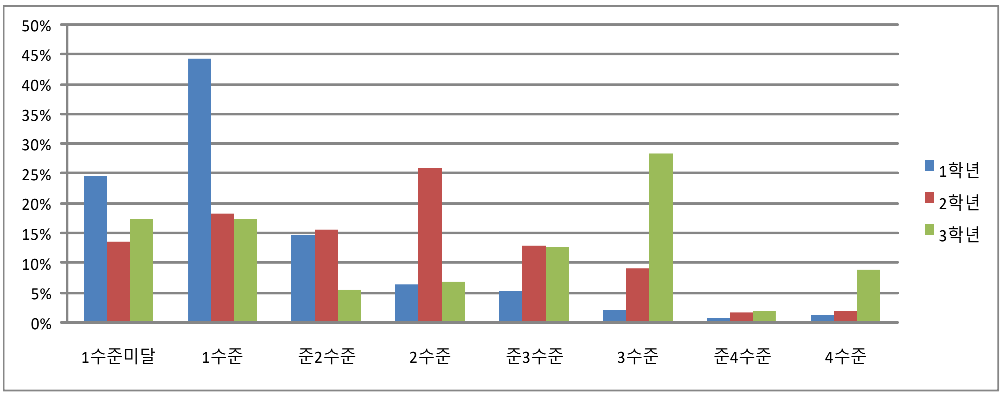
<표 Ⅳ-6> 중학교 3학년 학생의 반 힐레 수준분석 결과

반 힐레 수준	1수준 미달	1수준	준2 수준	2수준	준3 수준	3수준	준4 수준	4수준	합계
학생수	48	45	17	19	35	76	4	24	268
(백분율)	(17.4)	(17.6)	(5.6)	(7)	(12.8)	(28.5)	(2.1)	(9)	(100)

이때 D, E, F중학교 3학년 학생 수는 각각 107명, 84명, 77명이었다. D, E, F 중학교 3학년 학생들 모두 3수준이상의 학생 비율이 2학년학생들의 비율에 비해 높아졌음을 알 수 있다.

3학년의 반 힐레 수준을 살펴보면 2수준과 준3수준이 19.8%, 3수준과 준4수준이 30.6%%로 수준이 향상됨을 알 수 있으며, 4수준에 도달한 학생이 9%로 나타났다. 그러나 여전히 2수준 이하의 학생들이 차지하는 비율은 47.6%로 나타났다.

학년이 올라감에 따라 변화되는 학생들의 반 힐레 수준을 분석하면 다음 [그림 Ⅳ-1]과 같다.



[그림 Ⅳ-1] 학년별 반 힐레 수준 변화 분석

1학년의 경우 1수준 이하의 학생들이 많은 비율을 차지하고 있으며 2학년의 경우 1수준이하의 학생들의 비율은 줄고 2·3수준의 학생의 비율이 높아짐을 알 수 있다. 하지만 여전히 1수준이 해당하는 학생의 비율이 높다. 또 3학년의 경우 3수준의 학생비율이 높아졌지만 1수준 이하의 학생들이 여전히 높은 비율을 차지하고 있음을 파악할 수 있다.

3. 교과서와 학생의 반 힐레 수준 분석

<표Ⅳ-1>와 <표Ⅳ-4>에서 볼 수 있듯이 1학년 교과서의 반 힐레 수준은 제 1, 2, 3수준에 분포되어있는데 비해, 1수준에 미달한 1학년 학생이 24.7%이고, 교과서의 2, 3수준의 비율이 약 절반을 넘는 것에 비해 학생 중 2 수준 이상은 약 17% 정도이므로 교과서와 학생의 반 힐레 수준 차이는 크다고 할 수 있다.

<표Ⅳ-2>를 보면 2학년 교과서에서의 반 힐레 수준은 제 2, 3, 4수준에 분포되어 있음을 알 수 있고, 대략 70% 이상이 3, 4수준에 있음을 알 수 있다. 반면 <표Ⅳ-5>에서 볼 수 있듯이 2학년 학생의 수준은 2수준 이하가 73.7%이고 3, 4 수준의 학생은 준3수준을 포함한다 할지라도 26.3%에 불과함을 알 수 있다. 또 1수준에 도달하지 못한 비율이 32%라는 점에서 상당수 학생들은 기하 학습에서 어려움을 겪을 것을 예상할 수 있다.

<표Ⅳ-3>에서 볼 수 있듯이 3학년 교과서에서의 반 힐레 수준도 제 2, 3, 4수준에 분포되어 있음을 알 수 있고, 내용의 경우 3, 4 수준의 비율은 90%에 이르지만 <표Ⅳ-6>에서 보듯이 2수준 이하의 학생 비율이 47.6%에 달하고, 3, 4수준에 이른 학생의 비율은 39.6%에 불과해 많은 학생들이 소외될 수 있음을 알 수 있다.

특히 2, 3학년 교과서에서는 4수준의 경우 문제보다 내용의 수준이 높게 나타났다. 이는 주로 본문의 내용에서 기하의 성질이나 정리를 증명하고, 문제에서는 이들의 결과를 적용하여 해결하는 것을 주로 요구하기 때문으로 풀이된다.

Ⅴ. 논의 및 제언

기하는 고대에서 지금까지 서양에서 중요한 교과목으로 가르쳐 왔지만 학생들의 수준에 비해 지나치게 엄밀한 점 때문에 학생들은 기하를 공부할 때 곤란을 겪어 왔다. 본 연구에서는 현재의 중학교의 효율적인 기하 교수 학습을 위해 중학교 수학 교과서의 기하영역의 반 힐레 수준과 학생들의 수준을 분석하였다. 이를 위해 교육과정이 변함에 따라 중학교 수학교과서 기하영역의 반 힐레 수준의 변화가 있었는지, 중학교 교과서의 반 힐레 수준과 중학생들의 반 힐레 수준은 얼마나 차이가 나는지를 분석하였다.

이를 위해 본 연구에서는 2007개정, 2009개정, 2015개정 교육과정 기하영역의 변화를 분석하고, 3개 출판사의 중학교 1~3학년 수학교과서를 대상으로 반 힐레 수준이론에 근거하여 반 힐레 수준을 분석하였다. 3학년의 경우는 2007개정, 2009개정 교육과정을 분석하였다. 또한, D중학교 1~3학년 3학급씩 268명, E중학교 1~3학년 3학급씩 270명, F중학교 1~3학년 3학급씩 272명으로 총 810명을 대상으로 반 힐레 수준을 측정하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

첫째, 2007개정교육과정에서 2015개정교육과정이 변화함에 따라 적용되는 교과서 내용이나 문제의 유형에는 큰 변화가 없었으며, 내용의 감축으로 인한 수준의 비율의 변화만 보인 점이 아쉬웠다.

먼저 중학교 1학년의 경우 2009개정교육과정에는 3수준의 비율이 높았던 '삼각형의 결정조건'을 삭제하여 수준을 낮추었으며, 2수준을 차지하던 '원의 위치관계'를 삭제하여 학습량을 줄인 것으로 나타났다. 또한 2학년의 경우 2009개정교육과정부터 3·4수준을 차지하던 '명제와 증명'을 삭제하였고, '삼각형의 중점연결정리'를 삭제 하였다. 2015개정교육과정부터 2·3수준을 차지하던 '닮은 도형의 넓이와 부피'를 삭제하여 학생들의 학습 부담을 경감시켰다.

다만 3학년의 경우 2007개정교육과정에서 2009개정교육과정으로 변할 때 4수준의 내용의 비율은 39%에서 26%로 비교적 많이 낮아졌음을 볼 수 있었다. 2007개정 교육과정에서 전체적으로 학습목표를 '증명'할 수 있는 것에서 '설명'할 수 있는 것으로 많이 바꾼 것에 기인하는 것으로 보이며, 피타고라스 정리를 증명하는 것에서 설명하는 것으로 학습목표가 바뀐 것도 이 중에 한 가지이다. 2015개정교육과정부터 3·4 수준을 차지하던 '피타고라스 정리의 활용', '원과 사각형', '접선과 현이 이루는 각', '원과 비례'을 삭제함으로써 수준의 비율은 더 낮아질 것으로 예측된다.

둘째, 3학년 교과서에서는 3, 4수준의 경우 문제보다 내용의 수준이 높게 나타났고, 4수준의 경우에는 특히 심하게 나타났다. 이것은 교과서의 내용 구성을 변화시킬 필요가 있음을 시사한다. 기하의 성질을 귀납적으로 추측하게 하고, 학생의 수준에 따라 이를 다양하게 정당화를 시도하는 것이 바람직하다. 예를 들어 한 점에서 직선에 이르는 거리와 같은 경우에도 이 거리를 일반적으로 구하는 과정은 이해하기 어렵지만 문제에서 이 공식을 활용하여 한 점에서 직선에 이르는 거리를 구하는 것은 공식에서 제시된 계수가 무엇인지를 파악하여 계산하는 과정에 불과하기 때문에 내용에서 주어진 과정을 이해하는 것보다 용이하다.

이것은 수학 교과서의 체제를 정의, 정리, 증명, 그리고 이것의 활용으로 두기 때문에 생기는 문제이다. Buchberger(Heugl, Klinger & Lechner, 1996 재인용)는 수학도 자연과학과 같이 많은 실험을 통해서 성장해왔기 때문에 교수 학습에서도 실험환경 속에서 실험과 추측을 통하여 수학적 지식을 귀납적으로 구성하는 것을 제안한 바 있다. 특히 기하영역의 경우 새로운 교육과정에서는 실험, 관찰, 조작을 통해 기하적 성질을 예측하고 학생 수준에 맞는 적당한 정당화 과정을 밟도록 유도하고 있음을 볼 때, 내용을 제시함에 있어 귀납적 추론과 유추 등을 이용하여 학생이 어느 정도 정리의 내용을 추측할 수 있을 때, 공학적 도구 등을 이용하여 이를 정당화해볼 수 있는 방향으로 교과서의 내용과

문제의 구성을 제시함이 바람직하다고 생각된다.

셋째, 교과서의 반 힐레 수준과 학생의 반 힐레 수준 사이에는 상당한 격차가 있음을 알 수 있었다. 교육과정이 바뀜에 따라 내용의 감축이 이루어졌고, 특히 어렵다고 생각되는 내용들을 삭제하여 난이도를 조정해왔지만, 현실은 교과서의 수준과 학생의 수준은 여전히 그 차이가 큼을 알 수 있다. 이러한 결과는 김미정・이종희(1994) 그리고 이중권(2006)의 연구 결과에서도 유사하게 나타남을 알 수 있다. 따라서 내용 요소의 수준을 학생 수준에 맞춰 좀 더 낮출 필요가 있다.

넷째, 학년이 올라감에 따라 학생의 반 힐레 수준 또한 상승하고 있지만 각 학년마다 많은 학생들이 낮은 수준에 머물러 있다. 1학년 학생의 경우 모두 1수준이하에 도달한 학생이 69%이상이고 2학년의 경우 여전히 2수준 이하의 학생들이 차지하는 비율은 73.7%, 3학년의 경우 2수준 이하의 학생들이 차지하는 비율은 47.6%로 나타났다. 또 상당수의 학생들은 학년에 상관없이 낮은 수준에 머물러 있음은 특기할 만한 일이라 할 수 있다. 3학년에 이르러서도 1수준 이하의 학생들은 35%로 나타나 여전히 1수준이하의 학생이 차지하는 비율이 높으므로 학생 수준의 양극화를 줄일 수 있는 방법에 대한 연구가 필요하다고 본다. 이창연, 황우형(2010)이나 Hagar, 류희찬(2008)의 연구에서처럼 GSP을 이용하거나 고상숙(2006)에서처럼 GeoGebra를 수업에 접목시킴으로써 기하적 사고수준의 향상 시키는 방안을 모색하고, 이를 활용할 수 있는 교재를 개발할 필요성을 시사한다고 할 수 있다.

참고 문헌

강문봉, 김현미 (1998), 제6차 초등학교 수학 교과서 및 교사, 학생의 van Hiele 수준 분석, **과학교육논총**. 경인교육대학교.

교육부 (2007). **수학과 교육과정**.(교육인적지원부 고시 제2007-79호 별책8).

교육과학기술부 (2011). **수학과 교육과정**.(교육과학기술부 고시 제2011-361호 별책8).

교육부 (2015). **수학과 교육과정**.(교육부 고시 제2015-74호 별책8).

김미정, 이종희 (1994). van Hiele 이론에 의한 중학생들의 기하적 사고 수준에 관한 연구. **한국교육학회 시리즈 A <수학교육>**, 한국수학교육학회.

우정호 (2011). **학교수학의 교육적 기초**. 서울대학교 출판문화원.

이무현 (2002). **기하학 원론**. 교우사.

이중권 (2006). van Hiele의 기하 인지발달이론에 따른 중학교 기하교육과정 및 우리나라 중학생들의 기하수준에 관한 연구. **한국교육문제연구 17**.

이창연, 황우형 (2010). 반 힐레 이론과 GSP를 활용한 중학교 기하영역에 관한 연구 8-나단계의 사각형의 성질을 중심으로. **한국교육학회 시리즈 A <수학교육> 49(1)**, 한국수학교육학회.

임현정, 고상숙 (2016). GeoGbra를 활용한 반 힐레 기하교수법에서 도구화에 관한 연구. **한국수학교육학회 시리즈 E, 33(4)**. 한국수학교육학회.

최민정, 손홍찬 (2016). 중학생의 반 힐레 기하수준에 관한 연구. **교사교육연구, 55(3)**. 부산대학교 과학교육연구소.

황혜정 외 5인 (2016) **수학교육학 신론**. 문음사.

Burger, W.F., Shaughnessy, J.M (1986). Characterizing the Van Hiele Levels of Development in Geomtry. *Journal for Reserach in Mathematics Education 17(1)*, 31-48

Fuys, D., Geddes, D., and Tischler, R. (1988). The Van Hiele Model of Thinking in Geometry Among Adolescents, (*Journal for Research in Mathematics Education Monograph 3*). Reston, VA:National Council of Teachers of Mathematics.

Heugl, H; Klinger, W & Lechner, J. (1996). Mathematiknutericht mit computeralgebra-System (Ein didaktisches Lehrerbuch mit Erfahrungen aus dem österreichischen DERIVE-Projekt). Bonn:Addison-Wesley Publishing Co.

Hagar G. & Lew H. C. (2008). And then she changed her mind-A bypass of van Hiele level to classify parallelograms, **교원교육, 24(2)**, 한국교원대학교 교원 연구원, 450-461

Primasatya, N. & Jatmiko (2018). Implementation of Geometry multimedia Based on Van Hiele's Thinking Theory for Enhancing Critical Thinking Ability for Grade V Students, *International Journal of Trends in Mathematics Education Research, 1(2)*: 56-59..

Senk, S. L. (1989). Van Hiele Levels and Achivement in Writing Goemetry Proofs, *Journal for Reserch in Mathematics Education. 20(3)*, 309-321

Usiskin, Z. (1982) *van Hiele Levels and Achivement in Secondary School Geometry*. University of Chicago.

van Hiele, P. M & D.-G. van Heile (1958). A Method of Initiation into Geometry at Secondary Schools, H. Freudenthal(ed), *Report on Method of Initiation into Geometry*, J. B.Wolers/Groningen.

van Hiele, P.M. (1986). *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education,* Academic Press.

van Hiele, P.M. (1999). Developing Geometric Thinking through Activities that Begin with Play, *Teaching Children Mathematics, Vol. 5*. pp.310-316.

A Study on the Van Hiele Level of Middle school Mathematics Textbooks and Middle school students' geometric thinking

Kang, MiHye[4]· Son, HongChan[5]

Abstract

This study compared and analyzed the van Hiele levels of geometry contents in middle school mathematics textbooks and those of students' thinking. As the mathematics curriculum was revised recently, the amount of contents in the geometry area were reduced, but the van Hiele level did not change much, and the gap between the van Hiele level of geometric contents presented in the textbooks and the level of students' geometric thinking still remained unchaged.

The van Hiele levels of the geometric contents in the textbooks were distributed in the levels of 1, 2, 3 in the first grade, and 2, 3, 4 in the second and third grade. In the case of the first grade, 69% of the students were less than or equal to level 2, and 73.7% and 47.6% of the students in the second and third grades were less than or equal to level 3, respectively.

Especially, in the case of the second and third grade, the ratio of the 4th level of the contents presented in the textbook is higher than the problem, which can cause difficulties for the students.

Key word : Mathematics Textbook, Geometry, van Hiele level

Received November 29, 2019
Revised December 23, 2019
Accepted December 24, 2019

---

* 2010 Mathematics Subject Classification: 97U20
4) Jeonju Seo Middle School (doda2748@naver.com)
5) Jeonbuk National University (hcson@jbnu.ac.kr), Corresponding Author

<부록 1> 분석대상 수학 교과서

출판사	교육과정	학년	저자	표시
미래엔	2007개정교육과정	1학년	류희찬 외	A7-1
		2학년	류희찬 외	A7-2
		3학년	류희찬 외	A7-3
	2009개정교육과정	1학년	이강섭 외	A9-1
		2학년	이강섭 외	A9-2
		3학년	이강섭 외	A9-3
	2015개정교육과정	1학년	황선욱 외	A15-1
		2학년	황선욱 외	A15-2
지학사	2007개정교육과정	1학년	이강섭 외	B7-1
		2학년	이강섭 외	B7-2
		3학년	이강섭 외	B7-3
	2009개정교육과정	1학년	신항균 외	B9-1
		2학년	신항균 외	B9-2
		3학년	신항균 외	B9-3
	2015개정교육과정	1학년	장경윤 외	B15-1
		2학년	장경윤 외	B15-2
천재교육	2007개정교육과정	1학년	박영훈 외	C7-1
		2학년	박영훈 외	C7-2
		3학년	박영훈 외	C7-3
	2009개정교육과정	1학년	류희찬 외	C9-1
		2학년	류희찬 외	C9-2
		3학년	류희찬 외	C9-3
	2015개정교육과정	1학년	류희찬 외	C15-1
		2학년	류희찬 외	C15-2