

CCSSM-CA와 미국 교과서에 제시된 분수의 연산 내용 분석

이 대 현 (광주교육대학교 교수)

본 연구에서는 CCSSM-CA와 그에 따른 미국 초등 교과서에 제시된 분수의 연산 내용을 분석하였다. 분석 결과, 분수를 단위분수나 분모가 같은 분수의 합으로 표현하게 하여 분수 개념과 연산을 연결 짓는 특징이 있었다. 또 분수의 곱셈에서는 곱하는 한 수의 크기에 기초하여 다른 수의 곱의 결과를 비교하도록 하거나, 나눗셈에서는 단위 분수가 포함된 나눗셈을 먼저 다루고, 다양한 방법으로 계산을 하도록 제시하는 특징 등이 있었다.

I. 서론

분수는 균등한 분배 상황이나 측정 상황과 같이 자연수로 해결할 수 없는 실생활 맥락의 문제를 다루고 해결하는 과정에서 발생하였으며, 그 의미와 개념도 다양하게 발전되어 왔다(강홍규, 2005). 또한 분수는 우리나라의 경우에도 3학년에서 6학년까지 다루어지듯이, 초등학교 수학에서 오랜 시간에 걸쳐 지도되는 학습 주제이면서도 학생들에게는 어렵고 도전적인 학습 내용으로 인식되고 있다. 더불어 분수는 초등학교 고학년에서 배우게 되는 ‘비와 비율’의 개념이나 중등학교에서 학습하게 될 ‘대수’ 학습에도 중요한 기본 내용이 되고 있다(Empson & Levi, 2011).

분수의 다양한 개념과 의미의 복잡함, 그리고 역사를 통해 오랜 시간에 걸쳐 점진적으로 형성된 수학 개념이라는 본질적 측면은 효율적인 분수 지도를 위해 다양한 접근을 시도하는 결과로 나타났고, 이에 관한 연구들도 꾸준히 계속되어 왔다(서동엽, 2005; 이지영 외, 2017; Empson & Levi, 2011; The Mathematics in Context Development Team, 1997 등). 그리고 분수 지도의 다양함 때문에 각 나라간 분수 내용에 대한 비

교·분석 연구도 지속적으로 진행되어 오면서 이에 대한 시사점을 발굴하는 데에도 노력을 해오고 있다(박은희, 2007; 원솔희, 2016; 이대현, 2017; 최근배, 2015).

분수 학습 내용 중에서도 분수의 연산은 분모가 다른 분수의 덧셈과 뺄셈에서 계산 과정에 대한 개념적 이해의 어려움과 통분과 같은 수치적인 계산 알고리즘 처리의 복잡성, 그리고 곱셈과 나눗셈에서 절차 수행의 단순함에도 불구하고 알고리즘의 개념적 의미 파악에 겪는 어려움 등으로 교수학적 논의의 중심에 놓여 있다(이지영 외, 2017; Ma, 1999). 또한 분수 연산에 이용된 모델이나 방법들이 각 나라마다 다르고, 우리나라 각 교육과정에 따른 교과서에서도 그 변화가 계속되고 있다(강홍규, 2005). 이것은 분수의 연산에 대한 접근 방식의 다양성을 나타냄과 동시에, 어떤 관점으로 교육 내용을 선정하고 전개했는가에 따라 학생들의 개념적 이해의 범위와 폭에 영향을 줄 수 있다는 면에서 관심의 대상이 된다.

따라서 분수의 연산에 대해 나라마다 새로 발표되는 교육과정이나 교과서에 어떤 관점과 원리를 바탕으로 내용을 선정하고 지도 방법을 전개하는가를 살펴서 학습 지도에 시사점을 도출하는 것이 필요하다. 이것은 교육의 관점은 계속해서 진화하고 있고, 새로운 교육의 관점과 경향을 반영하여 학생들의 이해를 깊게 하기 위해 각 나라들은 교육과정이나 교과서 내용들을 새롭게 발표하기 때문이다. 이에 각 나라의 변화된 교육 내용을 살피는 것은 새로운 교육 내용과 방법에 관한 시사점을 도출하고, 교과서 집필 등에 필요한 정보를 얻기 위해 필요한 과정이다. 특히, 분수의 연산과 관련해서는 분수 연산 내용을 어떤 과정이나 순서로 지도하는가? 각 연산에 이용되는 모델이나 주안점은 무엇인가? 세부적인 학습 차시 내용의 특징은 무엇인가? 각 교과서의 특징과 우리에게 주는 시사점은 무엇인가? 등을 살펴봄으로써 분수 연산 지도나 교과서 및 학습 지도 자료 개발에 적용하는 노력이 필요하다.

외국의 수학교육 경향 파악의 맥락에서 미국의 수

* 접수일(2019년 3월 11일), 심사(수정)일(2019년 4월 18일), 게재확정일(2019년 4월 26일)
* ZDM분류 : B72
* MSC2000분류 : 97B70
* 주제어 : 분수, 분수 연산, 수학 교과서, CCSSM-CA

학교교육은 NCTM(1989; 2000)을 필두로 여러 가지 개혁적인 프로그램을 제시하고 있어 이에 관련된 학습 내용을 살펴보는 것은 유용할 수 있다. 초·중등 교육 과정에 관하여 국가 수준의 교육과정을 운영하지 않는 미국에서는 학교 교육에 관련된 문체에 답을 얻을 수 있는 근거 자료로 2010년에 Common Core State Standards-Mathematics(이하 CCSSM)를 발표하였다. 이것은 현장 교사, 연구자, 고등 교육자, 대중들의 의견을 수렴하여 만든 것으로, 발표 당시에 48개 주들이 채택할 정도로 미국 수학교육에 많은 영향을 끼치고 있다(김영옥, 최성웅, 이승미, 2010), 이로 인해 우리나라에서도 CCSSM과 그에 따른 교과서에 대한 내용을 비교·분석하는 연구들이 있어 왔다(강홍재, 2016; 김영옥, 최성웅, 이승미, 2010; 안지영, 전영주, 윤마병, 이종학, 2014; 장혜원, 2012 등).

특히, 캘리포니아 주는 CCSSM의 도입과 적용에 적극적인데, 2013년 1월에 California Common Core State Standards-Mathematics를 수정하여 제시하였다(The California Department of Education, 2013). 이것은 CCSSM과 거의 유사하지만, 캘리포니아 주에서 몇 가지 추가한 내용을 수학 내용 기준의 끝 부분에 CA로 표기해 제시하고 있다(이하 CCSSM-CA). CCSSM 자체가 개략적인 내용을 제시하고 있기 때문에 캘리포니아 주는 이에 대한 교육과정 해설서와 같은 성격의 문서인 Mathematics Framework for California Public Schools를 제시하여, 학년별·내용별로 다루어질 내용과 이에 대한 지도 방법을 상세하게 제시하고 있다(The California Department of Education, 2015). 한편, CCSSM을 반영한 교과서가 집필되어 학교 현장에 보급되어 활용되고 있고, 이들 교과서는 CCSSM의 방향과 취지에 맞게 집필되었음을 명시하고 있다. 따라서 이를 활용하여 미국 수학교육의 강조점과 가르칠 내용을 살펴보는 것이 유용하다.

본 연구에서는 CCSSM-CA에 제시된 분수의 연산에 관한 내용과 그에 따라 집필된 수학 교과서의 내용을 분석하고자 한다. 분석에서는 분수의 각 연산별로 도입 시기와 내용을 CCSSM-CA를 바탕으로 분석하고, 각 연산의 지도 방법과 사용하는 모델이나 접근 방법 등은 CCSSM-CA에 맞게 집필된 교과서 내용을 바탕으로 특징적인 면에 주안점을 두어 분석한다. 이를 통해 분수 연산을 위한 지도와 교과서 집필과 같은

학습 자료 개발을 위한 시사점을 제공하고자 한다.

II. 분수 연산에 대한 이론적 탐색

초등수학에서 연산은 수 개념과 더불어 기본적인 학습 내용으로, 학생들은 수 개념을 형성하고 비형식적이고 직관적인 방법으로 연산을 수행하게 된다(이대현, 박창우, 방신옥, 성장근, 2017). 초등수학에서 연산이 중요한 학습 내용임에도 불구하고, 그간의 연산 지도가 계산 속도와 정확성을 높이는데 추구해 왔다는 비판이 있어 왔다. 연산 지도에서는 계산 기능의 숙달뿐만 아니라, 연산 의미, 문제해결 능력, 어림 능력, 암산 능력, 수감각 등을 강조해야 하기 때문이다(Reys, Lindquist, Lambdin & Smith, 2009).

연산을 수행할 때에는 우선적으로 정확한 값이 필요한지? 대략적인 값이 필요한지를 판단해야 한다. 만약 대략적인 값이 필요하면 어림으로 충분할 것이고, 정확한 값이 필요하다면 계산기 산이나 암산, 지필계산을 하면 될 것이다(Reys, Lindquist, Lambdin & Smith, 2009). 이것은 학생들이 생활 속에서 필요한 계산 결과를 얻기 위해서 상황에 적절한 계산 방법을 택하고 수행하여 결과를 얻고 해석하는 것이 중요하다는 것을 의미하며, 이것이 연산 지도에서 중요한 첫 과정인 것이다.

초등학교 수학에서 자연수를 바탕으로 시작된 연산은 새로운 수 개념인 분수와 소수가 도입됨에 따라 이들 수 범위로 확장하게 된다. 분수와 소수의 연산은 이전에 학습한 자연수 연산의 기본 원리가 적용되고 확장되도록 해야 한다. 그렇지만 자연수의 연산에서 적용되는 모든 원리들이 동일하게 적용되는 것은 아님을 학생들이 이해하도록 해야 한다. 예를 들어, 두 분수를 곱하는 경우에 동수누가가 아니며, 두 자연수를 곱할 때 그 결과는 곱해지는 두 자연수 중 어느 것보다 항상 커지지만, 두 진분수를 곱하면 계산 결과는 곱해지는 두 분수 중 어느 것보다도 작게 되는 것이다.

학생들은 분수 계산을 형식적으로 하기 보다는 의미 있게 이해하고 수행할 필요가 있으며, 이를 위해 분수 지도의 중요한 측면을 확인하고 교과서나 학습지도 과정에 반영하는 노력이 필요하다. 예를 들어, 분모가 다른 분수의 덧셈과 뺄셈에서는 '전체 단위의 고정

성, 공통 측정 단위의 필요성, 재귀적 분할과 이분모 덧셈 알고리즘으로 연결'과 같은 세 가지 수준의 단위 구조를 경험하고 실행하도록 해야 하는 것이 중요하다. 이것을 인식해야 하고(이지영, 외, 2017), 따라서 현행 교과서에 제시된 연산의 지도 방법을 살펴볼 필요가 있다. 분수의 덧셈과 뺄셈에서는 알고리즘의 수행만이 아니라, 알고리즘 적용의 기본 원리를 파악하도록 하는 것이 중요하며, 이것은 계산 기능의 향상뿐만이 아니라, 계산 원리를 파악하고 적용하는데 중요하기 때문이다.

또한, 분수의 곱셈에서는 분모끼리 분자끼리 곱하고, 분수의 나눗셈에서는 제수의 분모와 분자를 서로 바꾸어 곱하면 된다는 사실을 이용하여 계산을 수행하면 쉽게 답을 구할 수 있다. 그럼에도 불구하고, 그러한 알고리즘이 성립하는 이유나 원리를 파악할 수 있는가의 문제는 중요하게 고려해 보아야 한다. 즉, 분수의 연산 지도에서 수치적인 계산 알고리즘만을 지나치게 강조하여 계산 원리나 이유를 파악하지 못하고 있는 것은 아닌가를 확인할 필요가 있다.

분수의 연산 지도에서 알고리즘의 지도보다는 계산 원리에 대한 의미를 형성해 주기 위한 노력들이 있어 왔다. 예를 들어, Empson & Levi(2011)는 균등 분배 문제를 이용함으로써 학생들이 분모가 다른 분수의 덧셈과 뺄셈을 하기 위해서는 공통의 분모를 가지는 분수가 필요하다는 것을 비형식적인 방법으로 알고, 이를 적용하는 것을 관찰하였다. 이지영 외(2017)은 이분모 분수 덧셈의 핵심적인 아이디어를 지도하기 위한 방안을 제시할 목적으로 시각적 표현에 관해 국제 비교 연구를 수행하면서 학생들이 직접 모델을 그려보면서 수행하도록 하여 재귀적 분할과 알고리즘과의 연결을 위해 시각적 표현에 더 주의를 기울여야 한다는 시사점을 제공하였다.

Baroody & Coslick(1998)은 분수 나눗셈의 경우에 형식적인 교육이 없더라도 비형식적인 지식을 이용하여 그 결과를 얻을 수 있다는 것을 제시하고 있다. 사실 학생들이 활용하는 분수의 나눗셈에 관한 비형식적 지식은 '역수로 바꾸어 곱하라.'라는 알고리즘과 매우 유사함을 알 수 있다(Empson & Levi, 2011). 예를 들어, $3 \div \frac{3}{8}$ 의 경우에 먼저 3안에 $\frac{1}{8}$ 만큼의 양이 얼마

있는가를 알아야 한다. 이것은 $3 \div \frac{1}{8}$ 이 되고, 3안에 $\frac{1}{8}$ 이 몇 개 있는가를 알기 위해서는 3×8 이면 된다. 다음으로 3안에 $\frac{3}{8}$ 이 몇 개 있는가를 알기 위해서 $\frac{1}{8}$ 이 $\frac{3}{8}$ 의 $\frac{1}{3}$ 이므로 3안에 $\frac{1}{8}$ 이 있는 것의 $\frac{1}{3}$ 이면 되므로 3×8 을 3으로 나누면 될 것이다. 이를 식으로 나타내면 $3 \div \frac{3}{8} = 3 \div \frac{1}{8} \div 3 = 3 \times 8 \div 3 = 3 \times \frac{8}{3} = 8$ 이 된다.

분수 계산에서는 그 계산에 내재되어 있는 알고리즘의 원리를 파악하고, 이를 직관적으로 파악하도록 연결해 줄 수 있는 다양한 모델이 필요하며, 학생들이 가지고 있는 비형식적 지식과 형식적 지식을 연결시켜 줄 수 있는 방안의 탐색이 요구된다. 또한 분수의 덧셈과 뺄셈에 사용되는 분수 유형도 분모가 같은 분수와 다른 분수를 구분하는 것과 같이 외형적인 차이에 의해 도입 시기를 결정하기보다, 분수 연산의 다양한 전략을 바탕으로 해결할 수 있는 가능성을 열어 놓기 위하여 수를 선택하는 것도 필요하다.

이러한 분수 연산에 대한 지도 방안을 바탕으로 미국의 CCSSM은 수학교육의 개선을 표방하며 발표되었고, 종전의 미국 교과서 비교 연구 결과가 우리나라 교과서와는 다른 관점을 표방하고 있기 때문에(안지영 외, 2014; 이대현, 2017; 최근배, 2015 등), 본 연구에서는 CCSSM-CA에 제시된 분수의 연산에 관한 내용과 그에 따라 집필된 수학 교과서의 내용을 분석하기로 한다.

III. 연구 대상 및 방법

본 연구에서는 CCSSM-CA와 이 문서에서 제시한 학습 내용 표준과 방향에 부합하도록 집필된 초등학교 수학 교과서의 분수 연산 내용을 분석하였다. 특히 CCSSM-CA의 분석에서는 CCSSM의 도입과 적용에 적극적인 California Common Core State Standards-Mathematics(The California Department of Education, 2013)를 바탕으로, 이에 대한 교육과정 해설서와 같은 성격의 문서인 Mathematics Framework for California Public Schools(The California Department of Education, 2015)의 내용을 중심으로

분석하였다.

그리고 교과서 분석에서는 CCSSM-CA의 기준과 방향에 맞춰 집필된 교과서를 선정하여 분석하였다¹⁾. 분석 대상인 미국 교과서는 K-6학년의 일부인 4-6학년의 교과서였다. 이 교과서의 특징적 부분은 영어판과 스페인어판으로 출판되고 있는데, 동일한 내용을 언어만 달리하여 제시하고 있다. 본 연구의 분석 대상은 [표 1]과 같이 분수 연산에 관한 단원의 내용들이었다.

[표 1] 분석 대상 교과서
[Table 1] Textbooks for an analysis

Grade	Name	Units
4	<i>California Go Math!</i> <i>Common Core</i> (Dixon, Burger & Leinwand, 2015a)	7. Add and Subtract Fractions 8. Multiply Fractions by Whole Numbers 9. Relate Fractions and Decimals
5	<i>California Go Math!</i> <i>Common Core</i> (Dixon, Burger & Leinwand, 2015b)	6. Add and Subtract Fractions with Unlike Denominators 7. Multiply Fractions 8. Divide Fractions
6	<i>California Go Math!</i> <i>Common Core</i> (Dixon, Burger & Leinwand, 2015c)	2. Fractions

본 연구에서는 CCSSM-CA와 교과서의 분수 연산에 관한 내용을 분석하기 위하여 분석 틀을 설정하여 내용 별로 분석하였다. 구체적인 분석 방법의 주안점은 [표 2]와 같다.

전체적으로 CCSSM-CA와 그에 따른 교과서에 분수의 연산 내용이 어떤 시기에, 어떤 순서로 제시되고 있는가를 분석하였고, 이것을 우리나라 수학 교과서에

1) 미국 내에 CCSSM의 기준과 방향에 맞춰 집필된 수학 교과서는 여러 유형이 있으나, 본 논문에서는 캘리포니아 주의 교육 상황에 맞게 집필된 Houghton Mifflin Harcourt 출판사의 교과서를 분석 대상으로 삼았다. 따라서 결과 해석에 제한이 따를 수 있다.

제시된 분수 연산 내용의 계열과 구성 등을 상호 비교하였다²⁾.

[표 2] 분석의 주안점
[Table 2] Focus of analysis

The content of analysis	The focus of analysis
Contents of grades /Differences between Korea and U. S.	<ul style="list-style-type: none"> • Order of fractional operations presented • The differences between Korea and U. S. in fractional operations
Contents and characteristics of each operation	<ul style="list-style-type: none"> • The composition and characteristics of grade-instructional content by addition, subtraction, multiplication, division

다음으로는 덧셈과 뺄셈, 곱셈, 나눗셈 별로 학년별 지도 내용의 구성 및 특징 등을 CCSSM-CA에 제시된 내용과 이를 구체화하여 반영한 교과서의 특징적인 내용을 함께 제시하면서 분수 연산 지도의 시사점을 도출하였다.

IV. 분석 결과

1. 학년별 분수의 연산 내용 분석

이 절에서는 CCSSM-CA와 그에 따른 교과서에 제시된 분수 연산에 대한 내용을 전체적으로 분석하였다. CCSSM-CA에서는 3학년에 ‘전체를 똑같은 b 부분으로 분할하였을 때, 그 중 한 부분으로 구성되는 양을 $\frac{1}{b}$ 로, $\frac{1}{b}$ 의 a 부분들로 구성되는 양을 $\frac{a}{b}$ ’로 분수 개념을 정의하여 도입하고 있다(The California Department of Education, 2015, p. 170). 그리고 분수 연산은 [표 3~5]와 같이 4학년부턴 6학년 에 걸쳐 제시하고 있다.

2) CCSSM-CA에는 학년별로 내용이 제시되고 있으나, 우리나라 교육과정은 학년군별로 제시되어 있어, 학년별 내용 비교를 위해 우리나라 문서는 교과서를 활용하였다.

[표 3] 4학년 분수 연산의 내용(CCSSM-CA)
 [Table 3] Contents of Fractional Operation by Grade 4 (CCSSM-CA)

Grade	Main contents
Grade 4	Number and Operations-Fractions <ul style="list-style-type: none"> • Understanding the fractional addition and subtraction • Decomposition fraction into fractional addition with the same denominator in more than one way • Mixed number's addition and subtraction with the same denominator • Solving the word problem that include addition and subtraction of fractions with the same denominator pointing to the same whole
	• Addition of two fractions with denominator of 10, 100 $(\frac{3}{10} + \frac{4}{100} = \frac{30}{100} + \frac{4}{100} = \frac{34}{100})$
	Number and Operations-Fractions <ul style="list-style-type: none"> • Understanding $\frac{a}{b}$ as a times $\frac{1}{b}$ • Understanding (natural number) \times fraction as $n \times \frac{a}{b} = \frac{n \times a}{b}$ based on understanding $\frac{a}{b}$ as a times $\frac{1}{b}$ (ex: $3 \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3 \times 2}{5}$) • Solving the word problem with (natural number)\times(fraction)

먼저, CCSSM-CA의 4학년에서는 [표 3]과 같이 Number and Operations-Fractions(수와 연산-분수) 영역에서 분모가 같은 분수(진분수, 가분수 포함)와 대분수의 덧셈과 뺄셈을 다루고 있다. 분모가 같은 분수의 덧셈과 뺄셈에서는 단위분수 $\frac{1}{b}$ 의 합으로 $\frac{a}{b}$ 를 이해하도록 하고 있다. 그리고 분수의 곱셈에서는 (자연수) \times (분수)를 다루고 있는데, 이를 이해하기 위해 곱셈에 대한 이전의 내용을 적용하고 확장하도록 제시하고 있다.

다음으로 CCSSM-CA의 5학년에서는 [표 4]와 같이 Number and Operations-Fractions(수와 연산-분수) 영역에서 분모가 다른 분수의 덧셈과 뺄셈을 다루고

있는데, 이를 위해 동치분수를 이용하도록 제안하고 있다.

[표 4] 5학년 분수 연산의 내용(CCSSM-CA)
 [Table 4] Contents of Fractional Operation by Grade 5 (CCSSM-CA)

Grade	Main contents
Grade 5	Number and Operations-Fractions <ul style="list-style-type: none"> • Proper fraction and mixed number's addition and subtraction with the unlike denominator • Solving the fractional addition and subtraction word problem with the unlike denominator • Evaluating the appropriateness of the addition answer using the number sense of the fraction(reference fraction and mental calculation)
	Number and Operations-Fractions <ul style="list-style-type: none"> • Understanding (fraction) \times (natural number) as much as q of a parts of the same b and making story problem • (fraction)\times(fraction) (eg. $\frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$) • Finding rectangular area whose sides are fractions using basic figures whose sides is unit fraction • Comparing the result of multiplication based on the factor without calculating • Explaining why multiplication by fractions greater than 1 results in larger and multiplication by fractions smaller than 1 results in smaller • Relating $\frac{a}{b} = \frac{n \times a}{n \times b}$ with $\frac{a}{b}$ multiply 1 • Solving the real world word problem with fraction and mixed number
	Number and Operations-Fractions <ul style="list-style-type: none"> • Making the story problem with (unit fraction)\div(natural number), (natural number)\div(unit fraction) and explain the results in relation to multiplication • Solving the real world word problem with fraction and mixed number(unit fraction)\div(natural number), (natural number)\div(unit fraction)

그리고 분수의 곱셈에서는 (분수) \times (자연수), (분

수) \times (분수)를 다루고 있는데, 4학년에서 학습한 (자연수) \times (분수)에 대한 이해를 적용하고 확장하도록 제시하고 있다. 또한 변의 길이가 분수인 직사각형의 넓이를 구하도록 하거나, 직접 곱셈을 하지 않고도 곱의 결과가 원래 수보다 커지거나 작아지는 이유를 설명하도록 함으로써 크기 변화에 관한 비율(scaling; resizing)로 곱셈을 해석하도록 하고 있다. 또한 5학년의 나눗셈에서는 제수나 피제수 중 하나가 단위분수이고 나머지가 자연수인 (단위분수) \div (자연수), (자연수) \div (단위분수)를 다루고 있는데, 이를 위해 나눗셈에 대해 이전에 학습한 내용을 적용하고 확장하도록 제시하고 있다.

[표 5] 6학년 분수 연산의 내용(CCSSM-CA)
[Table 5] Contents of Fractional Operation by Grade 6 (CCSSM-CA)

Grade	Main contents
Grade 6	The Number System <ul style="list-style-type: none"> Understanding and calculating (fraction)\div(fraction) Solving the word problem with (fraction)\div(fraction)

6학년에서는 [표 5]와 같이 초등 과정과는 달리 영역 명이 The Number System(수 체계)인 영역에서 (분수) \div (분수)를 다루고 있다. 분수 나눗셈을 위해서는 곱셈과 나눗셈에 대해 이전에 학습한 내용을 적용하고 확장하도록 제시하고 있다. 특히, CCSSM-CA의 경우에는 각 연산마다 적절한 실세계 문장제를 해결하게 하는 기준을 제시하는 특징이 있었다.

각각의 연산별로 살펴보면, 분수의 덧셈은 4학년에서 분모가 같은 분수의 덧셈과 뺄셈, 5학년에 분모가 다른 분수의 덧셈과 뺄셈을 다루고 있고, 분수의 곱셈은 4학년에서 (자연수) \times (분수)를, 5학년에서 (분수) \times (자연수)와 (분수) \times (분수)를 다루고 있다. 마지막으로 분수의 나눗셈은 5학년에 (단위분수) \div (자연수), (자연수) \div (단위분수)를, 6학년에서 (분수) \div (분수)를 다루고 있다. 그리고 각 연산에 대한 유형별 계산 원리를 이해하고 난 다음에는 실세계 문장제를 해결하도록 예를 함께 제시하고 있다.

이러한 구성을 우리나라의 2015 개정 수학과 교육

과정에 따른 교과서에 제시된 분수 연산 내용과 비교해 보기로 한다. 이를 위해 우리나라 학년별 분수 연산 구성 내용이 [표 6]과 같다³⁾.

[표 6] 학년별 분수 연산의 내용(한국)
[Table 6] Contents of Fractional Operation by Grades (Korea)

Grade	Main contents
4-2	<ul style="list-style-type: none"> Fractional addition and subtraction with the same denominator Mixed number's addition and subtraction with the same denominator Natural number - proper fraction (mixed number)
5-1	<ul style="list-style-type: none"> Proper fraction and mixed number's addition and subtraction with the unlike denominator
5-2	<ul style="list-style-type: none"> (fraction)\times(natural number), (natural number)\times(fraction), (proper fraction)\times(proper fraction), (mixed number)\times(mixed number)
6-1	<ul style="list-style-type: none"> (natural number)\div(natural number), (fraction)\div(natural number), (mixed number)\div(natural number)
6-2	<ul style="list-style-type: none"> (fraction)\div(fraction), (natural number)\div(proper fraction)

먼저, 분수의 덧셈과 뺄셈에서는 CCSSM-CA의 분수의 덧셈과 뺄셈과 제시 학년이 일치하는 것을 알 수 있다. 그렇지만 교과서에서 다루는 수의 유형에서는 우리나라의 경우에 차시별 학습 내용이 명료하게 구분되어 제시되는 상황에서 '자연수-진분수(대분수)'와 같은 내용을 특정한 한 차시에 걸쳐 다루는 특징이 있었지만(교육부, 2018b), 미국 교과서의 경우에는 1-(진분수) 상황만 진분수끼리의 뺄셈에서 $1 = \frac{n}{n}$ 을 이용하여 함께 다루는 차이가 있었다.

분수의 곱셈에서는 우리나라 경우에 분수 곱셈의 모든 유형이 5학년 2학기에 한 번에 제시되고 있다(교

3) 분석 대상인 5-6학년군 2학기 교과서는 현장 검토 감수 심의본을 바탕으로 하였다.

육부, 2018d). 반면에, CCSSM-CA의 경우에는 4학년에서 (자연수)×(분수)를 다루고⁴⁾, 나머지는 5학년에서 다루는 차이가 있었다. 4학년에서는 자연수 곱셈을 이용하여 (자연수)×(분수) 상황을 집중적으로 다루고 있었다.

마지막으로, 분수의 나눗셈의 경우에 우리나라 교과서에서는 6학년에 1학기와 2학기에 제수가 자연수인 경우와 분수인 경우로 나누어 각각 제시하고 있다(교육부, 2018e; 2018f). 이에 반해 CCSSM-CA의 경우에는 (단위분수)÷(자연수), (자연수)÷(단위분수)를 5학년 경우에 다루고 있어 단위분수가 포함된 나눗셈을 강조하는 특징이 있었다. 이것은 CCSSM-CA의 경우에 단위분수를 중요한 개념으로 다루며, 분수 개념의 도입 과정이나 분수의 덧셈에서도 기본 요소로 중시하는 것과 일관되며, (단위분수)÷(자연수)는 등분제 상황으로, (자연수)÷(단위분수)는 포함제 상황으로 문제 상황을 표현하고 해석할 수 있기 때문에 판단된다. 또, 분수 끼리의 나눗셈은 6학년에서 다루고 있어 우리나라와 동일하였다. 분수의 나눗셈에서는 우리나라 경우에 제수가 자연수인 경우와 분수인 경우를 엄격하게 학기를 달리하여 제시하는 반면, CCSSM-CA의 경우에는 제수에 제시되는 분수 유형보다는, 분수의 자체의 특성에 따라 분수를 선택하는 특징이 있었다.

2. 분수의 덧셈과 뺄셈 내용 분석

이 절에서는 CCSSM-CA와 그에 따른 교과서에 제시된 분수의 덧셈과 뺄셈에 대하여 분석하였다. 먼저, 4학년에서는 자연수 연산에 대한 이해를 적용하고 확장하면서 일반분수를 단위분수의 합으로 표현하도록 하는데, 이것은 3학년에서 분수 $\frac{a}{b}$ ($a > 1$)를 $\frac{1}{b}$ 의 합으로 도입한 것을 바탕으로 일반분수를 단위분수의 합으로 표현하도록 제시하고 있는 것이다.

구체적으로 살펴보면, 분수의 덧셈과 뺄셈에서는 같은 전체를 가리키는 부분을 결합하거나 분리함으로써 분수의 덧셈과 뺄셈을 이해하게 하고, 분수를 한 가지 이상의 방법으로 분모가 같은 분수의 합으로 분해하고 그 결과를 등식으로 나타내며, 시각적인 분수 모델을

이용하여 분해한 결과를 정당화하도록 하고 있다. 예를 들어, 분수 $\frac{3}{8}$ 을 $\frac{3}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{8} + \frac{2}{8}$ 와 같이 분해하고 등식을 이용하여 나타내도록 하고 있다(The California Department of Education, 2015).

이를 위해 교과서에서는 먼저 분수를 단위분수의 합으로 표현하도록 하고, [그림 1]과 같이 한 분수를 여러 가지 분수의 합으로 표현해 보도록 제시하고 있다(Dixon, Burger & Leinwand, 2015a).

THINK SMARTER Ellie's mom sells toys. She sold $\frac{7}{10}$ of the toys. Select a way $\frac{7}{10}$ can be written as a sum of fractions. Mark all that apply.

A $\frac{4}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10}$

B $\frac{4}{10} + \frac{3}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10}$

C $\frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \frac{1}{10}$

[그림 1] 분수의 합(Dixon, Burger & Leinwand, 2015a, p. 286)

[Fig. 1] Addition of fractions(Dixon, Burger & Leinwand, 2015a, p. 286)

CCSSM-CA에서 분수를 단위분수의 합으로 이해하도록 하고 분모가 같은 분수들의 합으로 표현하도록 하는 것은 자연수의 경우와 마찬가지로, 분수의 덧셈에서도 동일한 단위를 이용하여 합을 구해야 한다는 것을 이해시킴으로써 분모(단위)가 다른 분수의 합에서 학생들에게 전형적으로 나타나는 $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{5}$ 과 같은 오류인 피할 수 있는 장점이 있다.

또한, 4학년에서는 분모가 같은 대분수의 덧셈과 뺄셈을 다루고 있으며, 같은 전체를 가리키며 같은 분모를 가지는 분수의 덧셈, 뺄셈을 포함하는 문장제를 해결하도록 제시하고 있다. 여기에서 같은 전체를 가리키는 분수의 덧셈을 강조하는 것은 분수의 덧셈에서는 전체 단위가 같다는 것을 인식하는 것이 중요하다는 분수 덧셈의 핵심 아이디어의 하나를 강조하고 있음에 주목할 필요가 있다(이지영 외, 2017).

특히, CCSSM-CA에서는 계산 원리가 성립함을 보이기 위하여 수직선 모델과 같은 시각적 모델을 활용

4) 우리나라의 경우로는 (분수)×(자연수)에 해당된다.

하도록 제안하는데, 학생들이 모델을 활용하여 $\frac{3}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$ 과 같은 식이 성립함을 보이고, 이를 일반화하여 $\frac{7}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7+4}{5}$ 를 구하도록 하게 한다.

한편, [그림 2]와 같이 분수의 합을 이용하여 $2 + \frac{3}{6} = \frac{12}{6} + \frac{3}{6} = \frac{15}{6}$ 와 같이 (자연수)+(분수)를 통해 대분수를 가분수로 변환하여 $2\frac{3}{6} = 2 + \frac{3}{6} = \frac{12}{6} + \frac{3}{6} = \frac{15}{6}$ 가 가능하도록 유도함으로써 변환 과정을 기계적인 방법보다 분수 의미와 덧셈을 연결 지어 이해하도록 하는 특징이 있다(The California Department of Education, 2015). 이것은 우리나라의 경우에 대분수와 가분수 개념을 지도하는 과정에 대분수와 그 변환을 다루는 것과 차이가 있는 것으로(교육부, 2018a), 실생활에서 1보다 크거나 같은 양을 다루면서 이를 분수들의 합으로 표현하는 과정을 통해 대분수와 가분수의 상호 변환까지 다루는 특징이 있는 것이다.

1 Example Write a mixed number as a fraction.

THINK

STEP 1 Model $2\frac{3}{6}$.

MODEL AND RECORD

$2\frac{3}{6} = 1 + 1 + \frac{3}{6}$

STEP 2 Find how many $\frac{1}{6}$ -size pieces are in each whole. Model $2\frac{3}{6}$ using only $\frac{1}{6}$ -size pieces.

$2\frac{3}{6} = \frac{6}{6} + \frac{6}{6} + \frac{3}{6}$

STEP 3 Find the total number of $\frac{1}{6}$ -size pieces in $2\frac{3}{6}$.

Think: Find $\frac{6}{6} + \frac{6}{6} + \frac{3}{6}$

$2\frac{3}{6} = \frac{15}{6}$

Math Talk Mathematical Practices

[그림 2] 대분수의 변환(Dixon, Burger & Leinwand, 2015a, p. 301)
 [Fig. 2] Conversion of mixed number(Dixon, Burger & Leinwand, 2015a, p. 301)

4학년에서는 소수와 분수를 관련짓기 위하여 분모가 10이거나 100인 분수의 덧셈을 다루고 있는데, $\frac{3}{10}$

을 $\frac{30}{100}$ 으로 표현하여 $\frac{3}{10} + \frac{4}{100} = \frac{34}{100}$ 로 구할 수 있게 제시하고 있다. 이러한 CCSSM-CA에 따른 교과서는 [그림 3]과 같이 제시하고 있다.

1 Example 1 Find $\frac{3}{10} + \frac{21}{100}$.

STEP 1 Write $\frac{3}{10}$ and $\frac{21}{100}$ as a pair of fractions with a common denominator.

Think: 100 is a multiple of 10. Use 100 as the common denominator.

$\frac{3}{10} = \frac{3 \times \square}{10 \times \square} = \frac{\square}{100}$ **Think:** $\frac{21}{100}$ already has 100 in the denominator.

So, $\frac{\square}{100}$ of the mural is painted.

STEP 2 Add.

Think: Write $\frac{3}{10} + \frac{21}{100}$ using fractions with a common denominator.

$\frac{30}{100} + \frac{21}{100} = \frac{\square}{100}$

Math Talk Mathematical Practices

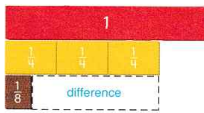
[그림 3] 분모가 10, 100인 분수의 합(Dixon, Burger & Leinwand, 2015a, p. 381)
 [Fig. 3] Addition of fractional parts of 10, 100(Dixon, Burger & Leinwand, 2015a, p. 381)

CCSSM-CA의 5학년에서는 동치분수를 활용하여 분모가 다른 진분수와 대분수의 덧셈과 뺄셈을 분모가 같은 분수로 변환하여 구하도록 제시하고, 이에 관한 문장제를 해결하도록 하고 있다. 분모가 다른 분수의 덧셈과 뺄셈을 할 때에는 분모끼리 곱하여 분모가 같은 분수를 만들어 낼 수 있다는 것을 이해할 필요가 있지만, 최소공배수를 반드시 사용할 필요는 없다는 것을 제시하고 있다. 이것은 우리나라 교과서에서 제시하는 방법과 유사하다(교육부, 2018c). 그리고 동치분수를 구하는 방법인 $\frac{a}{b} = \frac{n \times a}{n \times b}$ 를 활용하여, 분모가 다른 분수의 덧셈을 $\frac{2}{5} + \frac{7}{8} = \frac{2}{5} \cdot \frac{8}{8} + \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{5} = \frac{16}{40} +$

$\frac{35}{40} = \frac{51}{40}$ 과 같이 계산하도록 제시하고 있다(The California Department of Education, 2015, p. 252). 이에 대한 교과서에서는 [그림 4]와 같이 먼저 분수 띠를 이용하여 분모가 다른 분수의 덧셈과 뺄셈을 해 본 후에, 식으로 나타내도록 제시하고 있다.

Materials ■ fraction strips ■ MathBoard

- A.** Find $\frac{3}{4} - \frac{1}{8}$. Place three $\frac{1}{4}$ strips under the 1-whole strip on your MathBoard. Then place a $\frac{1}{8}$ strip under the $\frac{1}{4}$ strips.
- B.** Find fraction strips all with the same denominator that fit exactly under the difference $\frac{3}{4} - \frac{1}{8}$.



- C.** Record the difference. $\frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \underline{\hspace{2cm}}$

[그림 4] 분수 띠를 이용한 분수의 합(Dixon, Burger & Leinwand, 2015b, p. 257)

[Fig. 4] Addition of fraction using fraction strips (Dixon, Burger & Leinwand, 2015b, p. 257)

다음으로 식을 이용한 분모가 다른 분수의 덧셈에서는 [그림 5]와 같이 CCSSM-CA의 권고에 맞게 공통분모를 구하는 두 방법을 제시하고 있다.

One Way

Find a common denominator by multiplying the denominators.

$4 \times 8 = \underline{\hspace{1cm}}$ ← common denominator

Use the common denominator to write equivalent fractions with like denominators. Then add, and write your answer in simplest form.

$$\frac{1}{4} = \frac{1x}{4x} =$$

$$+ \frac{3}{8} = + \frac{3x}{8x} = +$$

$$=$$

Another Way

Find the least common denominator.

The least common denominator of $\frac{1}{4}$ and $\frac{3}{8}$ is $\underline{\hspace{1cm}}$.

$$\frac{1}{4} = \frac{1x}{4x} =$$

$$+ \frac{3}{8} \quad +$$

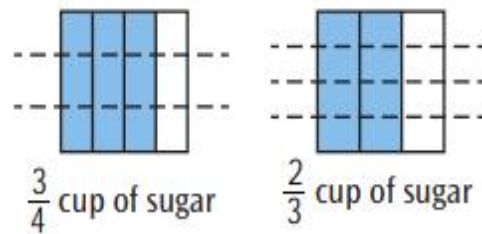
$$=$$

[그림 5] 분수의 합(Dixon, Burger & Leinwand, 2015b, p. 273)

[Fig. 5] Addition of fraction(Dixon, Burger & Leinwand, 2015b, p. 273)

CCSSM-CA에서는 분수의 덧셈과 뺄셈에 대한 문장제를 해결할 때 학생들은 암산이나 영역 모델을 활용하는 것과 같이 다양한 전략을 이용하여 문장제를 해결함으로써 분수의 양적인 측면을 이해하도록 제시하는 특징이 있다.

예를 들면, ‘제리는 두 종류의 쿠키를 만들려고 한다. 하나는 $\frac{3}{4}$ 컵의 설탕이 필요하고, 다른 하나는 $\frac{2}{3}$ 컵의 설탕이 필요하다. 두 종류의 쿠키를 만들기 위해 얼마만큼의 설탕이 필요한가?’라는 문장제에 대하여 두 분수 모두 $\frac{1}{2}$ 보다 크고 1보다 작으므로 1컵보다는 많지만 2컵보다는 적다라고 암산으로 어렵하거나, 다음 [그림 6]과 같이 영역 모델을 이용하여 동치분수를 찾아 답을 구하는 방법으로 해결하도록 한다(The California Department of Education, 2015).



[그림 6] 동치분수에 대한 영역 모델(The California Department of Education, 2015, p. 252)

[Fig. 6] Area model to show equivalence(The California Department of Education, 2015, p. 252)

그리고 분수에 대한 수 감각을 이용하여 기준분수와 암산으로 어렵하여 덧셈 결과의 적절성 평가하도록 제시하고 있다. 예를 들어, 두 분수에서 $\frac{3}{7} < \frac{1}{2}$ 이므로 $\frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \frac{3}{7}$ 이라고 학생들이 흔히 범하는 결과가 잘못된 계산이라는 것을 인식하도록 할 수 있다. 이러한 CCSSM-CA에 따른 교과서는 [그림 7]과 같이 수직선을 활용하여 어렵하여 답하도록 제시하고 있다.

Estimate. $\frac{1}{6} + \frac{3}{8}$

STEP 1 Place a point at $\frac{1}{6}$ on the number line.

The fraction is between _____ and _____.

The fraction $\frac{1}{6}$ is closer to the benchmark _____.

Round to _____.

STEP 2 Place a point at $\frac{3}{8}$ on the number line.

The fraction is between _____ and _____.

The fraction $\frac{3}{8}$ is closer to the benchmark _____.

Round to _____.

STEP 3 Add the rounded fractions.

[그림 7] 분수의 합의 어림(Dixon, Burger & Leinwand, 2015b, p. 261)

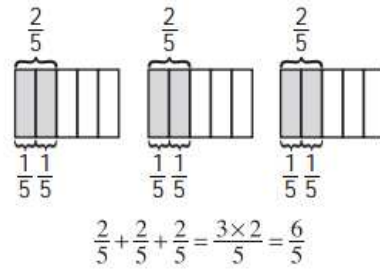
[Fig. 7] Estimation of fractional sum(Dixon, Burger & Leinwand, 2015b, p. 261)

3. 분수의 곱셈 내용 분석

이 절에서는 분수의 곱셈에 대하여 CCSSM-CA와 그에 따른 교과서에 제시된 내용을 분석하였다. 분수의 곱셈을 처음 도입하는 4학년에서는 3학년에서 $\frac{1}{b}$ 의 합으로 $\frac{a}{b}$ ($a > 1$)를 이해하도록 했기 때문에 $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ 로 나타내고, 이를 이용하여 $n \times \frac{a}{b} = \frac{n \times a}{b}$ 를 이끌어 낸다. 즉, 3학년에서 배운 $3 \times 7 = 7 + 7 + 7$ 과 같이, 자연수의 곱을 합으로 표현하여 나타낸 것과 분수 $\frac{a}{b}$ 가 $\frac{1}{b}$ 의 a 배인 것을 바탕으로 $\frac{5}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ $= 5 \times \frac{1}{3}$ 과 같이 나타내는 과정을 통해 $\frac{5}{3}$ 를 $5 \times \frac{1}{3}$ 로 볼 수 있게 한다. 이를 바탕으로 $3 \times \frac{2}{5}$ 는 $3 \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5}$ $= \frac{3 \times 2}{5}$ 를 유도한다.

이 과정을 보여주기 위하여 상황이나 시각적 모델, 방정식 등을 이용하여 문장제를 해결하도록 하는데,

예를 들면 $3 \times \frac{2}{5}$ 는 다음 [그림 8]과 같이 시각적 모델로 표현하여 그 결과를 산출할 수 있다.

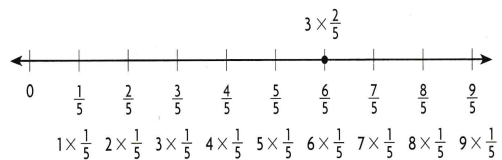


[그림 8] $3 \times \frac{2}{5}$ 의 시각적 모델(The California Department of Education, 2015, p.216)

[Fig. 8] The visual model of $3 \times \frac{2}{5}$ (The California Department of Education, 2015, p.216)

CCSSM-CA에 따른 곱셈의 특징적인 부분을 살펴 보면, (자연수) \times (분수)의 규칙을 이끌어 내기 전에 $\frac{5}{6} = 5 \times \frac{1}{6}$ 과 같이 분수를 (자연수) \times (단위분수)로 표현하고, 이를 바탕으로 [그림 9]와 같이 수직선 모델이나 영역 모델을 이용하여 $4 \times \frac{2}{3} = (4 \times 2) \times \frac{1}{3}$ 과 같이 나타내어 원리를 이해하도록 한다(Dixon, Burger & Leinwand, 2015a, p. 334). 그리고 이를 이용하여 곱의 패턴을 발견하도록 제시하고 있다.

$3 \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$. Write $\frac{6}{5}$ as a product of a whole number and a unit fraction.



$3 \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5} = \underline{\quad} \times \underline{\quad}$

Example 2 Use a pattern to multiply.

You know how to use a model and repeated addition to multiply a fraction by a whole number. Look for a pattern in the table to discover another way to multiply a fraction by a whole number.

Multiplication Problem	Whole Number (Number of Groups)	Fraction (Size of Groups)	Product
	2	1/6 of a whole	2/6
	2	2/6 of a whole	4/6
	2	3/6 of a whole	6/6

When you multiply a fraction by a whole number, the numerator in the product is the product of the _____ and the _____ of the fraction. The denominator in the product is the same as the _____ of the fraction.

[그림 9] 분수 곱셈 원리와 일반화(Dixon, Burger & Leinwand, 2015a, pp. 334-340)

[Fig. 9] The principle and generalization of multiplication of fraction(Dixon, Burger & Leinwand, 2015a, pp. 334-340)

5학년에서는 [그림 10]과 같이 이전에 학습한 곱셈에 대한 이해를 적용하고 확장하여, (분수)×(자연수)를 할 수 있게 한다. 그리고 이 식에 맞는 이야기 상황을 만들도록 하고 있다.

Example Multiply a whole number by a fraction.

Kirsten brought in 4 loaves of sliced bread to make sandwiches for the class picnic. Her classmates used $\frac{2}{3}$ of the bread. How many loaves of bread were used?

MODEL

- Shade the model to show $\frac{2}{3}$ of 4.

Think: I can cut the loaves into thirds and show $\frac{2}{3}$ of them being used.
- Rearrange the shaded pieces to fill as many wholes as possible.

So, _____ loaves of bread were used.

RECORD

- Write an expression to represent the problem.

$$\frac{2}{3} \times 4$$

Think: I need to find $\frac{2}{3}$ of 4 wholes.
- Multiply 4 by the number of third-size pieces in each whole. Then, write the answer as the total number of third-size pieces.

$$\frac{2}{3} \times 4 = \frac{8}{3}$$
- Write the answer as a mixed number.

$$\frac{8}{3} = 2 \frac{2}{3}$$

[그림 10] 분수 곱셈(Dixon, Burger & Leinwand, 2015b, p. 316)

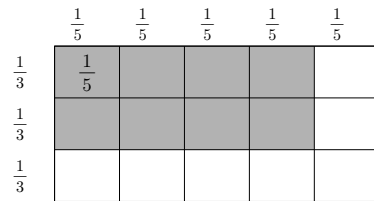
[Fig. 10] The multiplication of fraction(Dixon, Burger & Leinwand, 2015b, p. 316)

(분수)×(자연수)에서는 동일한 b 개의 a 부분의 q 만

큼으로 $\frac{a}{b} \times q$ 를 해석하고(즉, $a \times q \div b$), 이를 바탕으로

로 $\frac{2}{3} \times 4 = \frac{2 \times 4}{3} = \frac{8}{3}$ 을 유도하고 있다. 그리고 분수에 의한 곱의 이해를 바탕으로 두 분수의 곱인 (분수)×(분수)를 일반화하도록 하고 있다.

다음으로, [그림 11]과 같이 변의 길이가 분수인 직사각형의 넓이를 구하기 위하여 가로와 세로의 길이를 나타내는 분수들의 분모에 관련된 단위분수를 추출하여 단위를 삼아 계산할 수 있도록 하고 있다.



[그림 11] $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ 의 시각적 모델

[Fig. 11] The visual model of $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$

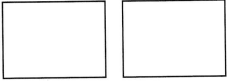
예를 들면, $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ 의 경우에는 한 변의 기본 단위는

$\frac{1}{3}$ 이 되고, 다른 변의 기본 단위는 $\frac{1}{5}$ 이 되어 $\frac{1}{15}$ 짜리 새로운 단위가 생성되어 이를 바탕으로 계산을 하게 하는 것이다.

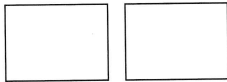
특히 분수의 곱셈이 자연수의 곱셈과 다른 성질을 가지고 있는 것 중의 하나가 곱의 결과가 원래 수보다 커지거나 작아질 수가 있다는 것이다. 이와 관련하여 CCSSM-CA의 기준에서는 직접 계산을 수행하지 않고 한 수의 크기에 기초하여 다른 수의 곱의 결과를 비교하도록 하고 있다. 그리고 1보다 큰 수를 곱하면 결과는 주어진 수보다 커지고, 1보다 작은 수를 곱하면 결과는 주어진 수보다 작아진다는 것을 설명하도록 하고 있다. 이를 위해 교과서에서는 [그림 12]와 같이 승수가 1인 경우, 1보다 작은 경우, 1보다 큰 경우로 나누고, 모델이나 수직선을 이용하여 그 결과를 알아보도록 제시하고 있다(Dixon, Burger & Leinwand, 2015b).

Sherie has a recipe that requires $1\frac{1}{4}$ cups of flour. She wants to know how much flour she would need if she made the recipe as written, if she made half the recipe, and if she made $1\frac{1}{2}$ times the recipe.

Shade the models to show $1\frac{1}{4}$ scaled by 1, by $\frac{1}{2}$, and by $1\frac{1}{2}$.

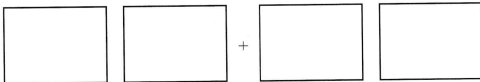
A $1 \times 1\frac{1}{4}$ 

- What can you say about the product when $1\frac{1}{4}$ is multiplied by 1?

B $\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{4}$ 

- What can you say about the product when $1\frac{1}{4}$ is multiplied by a fraction less than 1? _____

C $1\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{4} = (1 \times 1\frac{1}{4}) + (\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{4})$



- What can you say about the product when $1\frac{1}{4}$ is multiplied by a number greater than 1?

[그림 12] 분수 곱셈(Dixon, Burger & Leinwand, 2015b, p. 337)
 [Fig. 12] The multiplication of fraction(Dixon, Burger & Leinwand, 2015b, p. 337)

특히, 분수에 1을 곱할 때는 그 결과가 같다는 것을 동치분수를 만드는 과정 $\frac{a}{b} = \frac{n \times a}{n \times b}$ 를 관련지어 보여 준다. 이것은 각각의 학습 내용을 서로 관련지음으로써 각 학습 내용의 정당화를 피하고 있는 것이다. 마지막으로 문제를 나타내는 시각적 모델이나 등식을 이용하여 분수와 대분수 곱이 있는 실세계 문장제를 해결하도록 하고 있다.

4. 분수의 나눗셈 내용 분석

이 절에서는 분수의 나눗셈에 대하여 CCSSM-CA와 그에 따른 교과서에 제시된 내용을 분석하였다. 먼저, 5학년에서는 이전에 배운 나눗셈에 대한 이해를 바탕으로, 이를 (단위분수) \div (자연수), (자연수) \div (단위분수)의 문제 상황에 적용하고 확장한다. 그리고 [그림 13]처럼 (단위분수) \div (자연수)에서는 이야기 상황을 만들고 몫을 발견하기 위해 시각적 모델을 이용한다. (자

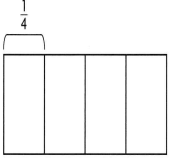
연수) \div (단위분수)의 경우에도 이 상황에 맞는 이야기 상황을 만들고 몫을 발견하기 위해 시각적 모델을 이용한다.

그리고 계산 결과를 설명하기 위해 [그림 14]처럼, $\frac{1}{4} \div 2 = \frac{1}{8}$ 에서 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ 인 것과 같이 곱셈과 나눗셈의 관계를 이용하도록 한다.

Divide. $\frac{1}{4} \div 3$

- Let the rectangle represent 1 pound of beads. Divide the rectangle into fourths and then divide each fourth into three equal parts.

The rectangle is now divided into _____ equal parts.



- When you divide one fourth into 3 equal parts, you are finding one of three equal parts or $\frac{1}{3}$ of $\frac{1}{4}$. Shade $\frac{1}{3}$ of $\frac{1}{4}$.

The shaded part is _____ of the whole rectangle.

- Complete the number sentence.

$\frac{1}{4} \div 3 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \underline{\hspace{2cm}}$

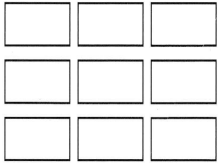
So, each friend gets _____ of a pound of beads.

Brad has 9 pounds of ground turkey to make turkey burgers for a picnic. How many $\frac{1}{3}$ -pound turkey burgers can he make?

Will the number of turkey burgers be less than or greater than 9?

Divide. $9 \div \frac{1}{3}$

- Draw 9 rectangles to represent each pound of ground turkey. Divide each rectangle into thirds.



- When you divide the _____ rectangles into thirds, you are finding the number of thirds in 9 rectangles or finding 9 groups of _____. There are _____ thirds.

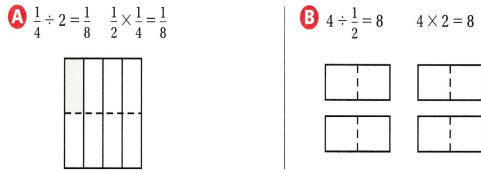
- Complete the number sentence.

$9 \div \frac{1}{3} = \underline{\hspace{2cm}} \times \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

So, Brad can make _____ one-third-pound turkey burgers.

[그림 13] 단위분수 나눗셈(Dixon, Burger & Leinwand, 2015b, p. 371)
 [Fig. 13] The division of unit fraction(Dixon, Burger & Leinwand, 2015b, p. 371)

단위분수가 포함된 분수 나눗셈에서는 두 가지 상황에 맞는 실세계 문장제를 해결하도록 하는데, (단위분수) \div (자연수)는 등분제 상황으로, (자연수) \div (단위분수)는 포함제 상황으로 문제를 제시하고 있다.



1. Look at Example A. Describe how the model shows that dividing by 2 is the same as multiplying by $\frac{1}{2}$.

[그림 14] 곱셈과 나눗셈 관계(Dixon, Burger & Leinwand, 2015b, p. 372)

[Fig. 14] The relation between multiplication and division (Dixon, Burger & Leinwand, 2015b, p. 372)

6학년에서는 (분수)÷(분수)를 중점적으로 다루고 있는데, 이를 이해하고 계산하기 위해 [그림 15]와 같이 시각적 모델이나 방정식을 이용하여 하도록 한다. 그리고 $\frac{8}{9}$ 의 $\frac{3}{4}$ 이 $\frac{2}{3}$ 이므로 $\frac{2}{3} \div \frac{3}{4} = \frac{8}{9}$ 인 것처럼, 나눗셈 결과를 설명하기 위해 곱셈과 나눗셈의 관계를 이용하도록 하고, 여러 가지 분수 나눗셈에 대한 문장제를 해결하도록 한다. 이러한 문장제는 학생들이 분수 나눗셈을 이해하도록 도움을 주는데 유용하다.

Toby and his dad are building a doghouse. They need to cut a board that is $\frac{2}{3}$ yard long into $\frac{1}{6}$ yard pieces. How many $\frac{1}{6}$ yard pieces can they cut?

1 One Way Divide $\frac{2}{3} \div \frac{1}{6}$ by using a number line.

STEP 1 Draw a number line, and shade it to represent the total length of the board.
 Think: Divide a whole into thirds.
 Toby and his dad have $\frac{2}{3}$ yard, so shade $\frac{2}{3}$.

STEP 2 Show fraction parts that represent the pieces of board.
 Think: Find the number of groups of $\frac{1}{6}$ in $\frac{2}{3}$.

So, there are $\frac{2}{3} \div \frac{1}{6} = 4$ yard pieces in $\frac{2}{3}$ yard.

1 Another Way Divide $\frac{2}{3} \div \frac{1}{6}$ by using a common denominator.

STEP 1 Write equivalent fractions using a common denominator.
 Think: $\frac{4}{6}$ is a multiple of 3 and 6, so $\frac{4}{6}$ is a common denominator.
 $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2 \times 2}{3 \times 2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} + \frac{1}{6}$

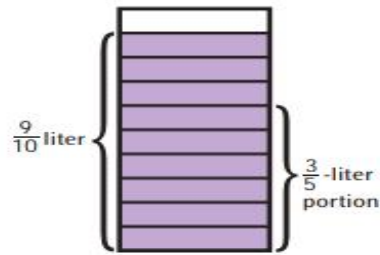
STEP 2 Divide.
 Think: There are $\frac{4}{6} \div \frac{1}{6} = 4$ groups of $\frac{1}{6}$ in $\frac{4}{6}$.
 So, $\frac{2}{3} \div \frac{1}{6} = 4$. Toby and his dad can cut 4 $\frac{1}{6}$ yard pieces.

Math Talk Explain how to quotient $\frac{2}{3} \div \frac{1}{6}$.

[그림 15] 분수 나눗셈(Dixon, Burger & Leinwand, 2015c, p. 77)

[Fig. 15] The division of fraction(Dixon, Burger & Leinwand, 2015c, p. 77)

다음과 같은 포함제 상황의 문제를 살펴보자. ‘어떤 병이 $\frac{3}{5}$ ℓ일 때 $\frac{9}{10}$ ℓ를 채우려면 몇 병이 필요한가?’ 이 문제를 해결하기 위해서는 [그림 16]과 같은 시각적 분수 모델을 이용하여 $\frac{9}{10}$ 안에 $\frac{3}{5}$ ($=\frac{6}{10}$)이 몇 번 들어갈 수 있는가를 알아보면 되는 것이다.



[그림 16] $\frac{9}{10} \div \frac{3}{5}$ 의 시각적 모델(The California Department of Education, 2015, p. 292)

[Fig. 16] The visual model of $\frac{9}{10} \div \frac{3}{5}$ (The California Department of Education, 2015, p. 292)

한편, 6학년 CCSSM-CA에서는 분수 나눗셈에 대한 일반적인 방법을 다음과 같이 4가지로 제시하고 있는데, 이것은 다음과 같다(The California Department of Education, 2015, pp. 293-294).

• 공통분모 찾기: 포함제 상황으로 해석하여 분모가 같은 동치분수를 구하여 분모끼리의 몫으로 해결한다.

$$\text{(예)} \quad \frac{7}{8} \div \frac{2}{5} = \frac{35}{40} \div \frac{16}{40} = 35 \div 16 = \frac{35}{16}$$

• 분모와 분자를 각각 나누기(특수한 경우): 제수의 분모와 분자가 각각 피제수의 약수일 때 분모와 분자끼리의 몫으로 해결한다.

$$\text{(예)} \quad \frac{8}{15} \div \frac{2}{5} = \frac{8 \div 2}{15 \div 5} = \frac{4}{3}$$

• 분모와 분자를 각각 나누기(일반적인 경우로 나아가기): 제수의 분모가 피제수의 분모의 약수가 아닐 때 동치분수로 변형하여 앞의 전략을 활용한다.

$$\text{(예)} \quad \frac{2}{3} \div \frac{2}{7} = \frac{2 \times 7}{3 \times 7} \div \frac{2}{7} = \frac{14 \div 2}{21 \div 5} = \frac{7}{3}$$

· 분모와 분자를 각각 나누기(일반적인 경우): 제수의 분모나 분자가 모두 피제수의 분모나 분자의 약수가 아닐 때는 동치분수로 변형하여 앞의 전략을 활용한다.

$$\begin{aligned} \text{(예)} \quad \frac{3}{4} \div \frac{5}{7} &= \frac{3 \times 5 \times 7}{4 \times 5 \times 7} \div \frac{5}{7} = \frac{(3 \times 5 \times 7) \div 5}{(4 \times 5 \times 7) \div 7} \\ &= \frac{3 \times 7}{4 \times 5} = \frac{4}{3} \times \frac{7}{5} \end{aligned}$$

이러한 4가지 전략은 학생들이 나눗셈 알고리즘의 원리를 이해하는 것이 없이, 단순히 제수의 분모와 분자를 서로 바꾸어 곱하는 과정만을 알고 적용함으로써 문장제와 같은 문제를 해결하는데 가질 수 있는 어려움을 피하도록 할 수 있다.

One Way Estimate $15\frac{3}{4} \div 3\frac{5}{6}$ using compatible numbers.

Think: What whole numbers close to $15\frac{3}{4}$ and $3\frac{5}{6}$ are easy to divide mentally?

$15\frac{3}{4}$ is close to _____.

$3\frac{5}{6}$ is close to _____.

Rewrite the problem using compatible numbers.

$15\frac{3}{4} \div 3\frac{5}{6}$

↓ ↓

Divide.

$16 \div 4 =$ _____

So, Eric will be able to record the complete whale song about _____ times.

[그림 17] 분수 나눗셈의 어려움(Dixon, Burger & Leinwand, 2015c, p. 73)

[Fig. 17] The of estimation division of fraction(Dixon, Burger & Leinwand, 2015c, p. 73)

특히, CCSSM-CA에 따른 교과서의 특징적인 부분을 살펴보면 계산 결과에 대해 어렵하도록 제시하는데 [그림 17]은 대분수의 나눗셈 결과를 자연수로 어렵하여 답하도록 제시하고 있음을 알 수 있다.

V. 결론

분수 연산은 분수 개념의 의미와 모델의 다양성에

더하여, 그 계산 과정의 원리 이해의 이해에도 도전적인 학습 내용이다. 특히, 자연수의 계산 원리와 의미를 확장하여 적용해야 함에도 불구하고, 자연수의 계산 원리나 의미가 적용되지 않는 한계도 가지고 있다. 이런 이유로 효율적인 분수 연산 지도를 위한 연구와 이에 관한 국제 비교 연구들도 계속되어 왔다(이지영 외, 2017; 최근배, 2015 등).

외국의 수학교육 경향을 파악하여 시사점을 도출하는데 있어서 여러 가지 개혁적인 프로그램을 제시하고 있는 미국의 수학교육은 분석 대상으로 적합할 수 있다. 특히, 국가 수준의 교육과정을 운영하지 않고 있는 미국은 학교 교육과정 개선을 위해 CCSSM을 발표하였는데, 캘리포니아 주는 2013년에 CCSSM-CA를 도입하여 이를 적극적으로 적용하고 있다(The California Department of Education, 2013; 2015). 이 문서에서는 학년별·내용별로 다루어질 내용과 이에 대한 지도 방법을 상세하게 제시하고 있기 때문에, 이를 활용하여 미국 수학교육의 강조점과 가르칠 내용을 살펴보는 것이 유용하다. 이를 통해 우리나라의 분수 연산을 위한 지도와 교과서 집필과 같은 학습 자료 개발을 위한 시사점을 얻을 수 있을 것이다.

이에 본 연구에서는 CCSSM-CA에 제시된 분수 연산에 관한 내용과 그에 따라 집필된 수학 교과서의 내용을 각 연산별로 분석하였다. 분석에서는 덧셈과 뺄셈, 곱셈, 나눗셈 별로 도입 시기 및 순서, 방법, 학년별 지도 내용의 구성 및 특징 등을 분석하였다. 분석 결과로 다음과 같은 내용을 얻을 수 있었다.

첫째, 분수 연산에 대한 전반적 내용을 살펴보면, 분수의 덧셈과 뺄셈에서는 CCSSM-CA와 우리나라 교과서에 제시된 학년이 일치하였다. 그렇지만 분수의 곱셈과 나눗셈에서는 학년별 제시 방식에 차이가 나타났다. 곱셈의 경우에 우리나라는 한 학기에 제시하는 반면, 미국은 (자연수)×(분수)를 4학년에서 먼저 다룬 후에 나머지 유형의 곱셈을 5학년에서 다루고 있었다. 또한, 분수 나눗셈의 경우에도 우리나라는 제수가 자연수인 경우와 분수인 경우에 학기를 달리하여 제시한 반면에, 미국은 제수와 피제수가 각각 단위분수와 자연수인 경우와 그 외의 경우를 구분하여 다루고 있었다.

둘째, 분수의 덧셈과 뺄셈에서는 전반적으로 내용의 구성 면에서 우리나라의 교육 내용의 제시 순서와 유

사함을 알 수 있다. 그렇지만 분수를 도입할 때 진분수를 단위분수의 합으로 표현한 것을 활용하여 일반 분수를 단위분수나 분모가 같은 분수의 합으로 표현하도록 하는 특징과 분수에 대한 수 감각을 이용하여 답의 적절성을 평가하도록 제시하는 방식은 수 감각과 연산 감각을 연결 짓는 유용한 시도로 보여 졌다. 또한 학습 내용의 구성에서 외형적인 학습 주제보다는 원리가 유사한 학습내용끼리 함께 구성하는 특성이 있었다.

셋째, 분수의 곱셈에서는 (자연수) \times (분수)를 4학년에서 다룬 후에 (분수) \times (자연수)와 (분수) \times (분수)를 5학년에서 다루고 있다. 또한 분수의 곱셈 결과에 대하여 직접 계산을 수행하지 않고 한 수의 크기에 기초하여 다른 수의 곱의 결과를 비교하도록 함으로써 곱의 결과에 대한 양감을 가지게 하는 특징이 있었다.

넷째, 분수의 나눗셈에서는 학년을 달리하여 5학년에 (단위분수) \div (자연수), (자연수) \div (단위분수)을, 6학년에 (분수) \div (분수)를 중점적으로 다루고 있다. 이것은 우리나라의 경우에 제수가 자연수인 경우와 분수인 경우를 구분하여 제시하는 것과 차이가 있다. 또한 6학년에서 곱셈과 나눗셈의 관계를 이용하여 (분수) \div (분수)의 결과를 확인하거나, 다양한 방법으로 나눗셈을 하도록 제안하는 특징이 있었다.

이상의 결과를 바탕으로 분수 연산의 지도와 관련하여 수학 개념의 도입 과정에서 이용한 내용을 일관되게 연산에서 활용하는 연결성의 문제, 연산 결과에 대한 양감 형성 및 정당화 과정의 중시, 연산에 제시되는 분수 유형별 내용 구성의 순서와 계산 및 문제해결 방식의 다양한 방법 모색, 실생활 문제 활용, 수학적 실천과 같은 행동적 요소의 강조 등은 수학 학습지도의 내실화를 위해 재고할 필요가 있다. 이를 바탕으로 분수의 연산과 관련하여 다음과 같은 논점과 시사점을 제시한다.

첫째, 분수의 덧셈에서는 분수 개념을 도입할 때 $\frac{1}{b}$ 의 a 부분으로 만들어진 양으로 $\frac{a}{b}$ 를 도입한 것과 같이, 분수를 단위분수나 여러 가지 분수의 합으로 표현해 보도록 제시하고 있다. 그리고 그 결과를 등식으로 표현하고, 분수 모델을 이용하여 정당화하는 과정을 중시하고 있다. 이것은 분수에 대한 수 개념과 연산을

연결시켜 학습 구성에 일관성을 유지하고 있는 것이다. 또한, 분수 덧셈의 일반화 과정을 바탕으로 대분수의 정의 방식인 '(자연수)+(분수)'의 형태인 대분수를 분수의 덧셈을 통해 가분수로 변환하도록 이끌어 줌으로써 대분수의 의미와 연산을 연결 지어 제시하고 있다. 이것은 외형적인 학습 주제보다는 내용의 본질적 측면에 초점을 두고 내용을 구성하는 특성이라고 볼 수 있으며, 우리나라의 경우에 분수 유형을 중심으로 교과서 내용을 구성하고 있고, 개념 학습과 원리 학습을 대부분 분리하여 제시하는 것과 차이가 있는 부분이다. 우리나라 교과서의 경우에 가분수와 대분수를 분수의 개념적 측면에서 정의하고, 이들의 상호 변환을 다루고 있는 것이다(교육부, 2018a), CCSSM-CA의 이러한 구성 방식은 우리나라 교과서의 경우에 각 단원별 내용이 엄격히 구분되어 집필되어 상호 관련된 내용을 연결 짓기 어려운 상황에 시사점을 준다.

둘째, 분모가 다른 분수의 덧셈과 뺄셈에서는 동치분수를 활용하여 분모가 다른 진분수와 대분수의 덧셈, 뺄셈을 다루되, 공통분모를 구하기 위하여 최소공배수를 반드시 사용할 필요는 없다는 것을 제시하고 있는데, 이것은 우리나라 교과서의 경우와 유사하다. 특징적인 면으로는 모든 유형의 문제에 실생활 중심의 문장제를 만들어 해결하도록 제시하고 있고, 이를 해결하기 위하여 암산이나 영역 모델을 활용하는 것과 같이 다양한 전략을 이용하여 해결함으로써 분수의 양적인 측면을 이해하도록 제시하고 있다는 것이다. 한편, 분수에 대한 수 감각을 이용하여 기준분수와 암산으로 어려워 덧셈 답의 적절성을 평가하도록 제시하는 내용은 수 감각과 연산 감각을 연결 짓는 유용한 시도로 보여 진다.

셋째, 분수의 곱셈의 경우에 (자연수) \times (분수)를 먼저 4학년에서 다룬 후에, 나머지 유형인 (분수) \times (자연수)와 (분수) \times (분수)를 5학년에서 다루고 있다. (자연수) \times (분수)에서는 $\frac{a}{b}$ 를 $\frac{1}{b}$ 의 a 배로 도입한 분수 개념을 적용하여 $\frac{1}{b}$ 의 a 번의 합으로 $\frac{a}{b}$ 를 표현할 수 있고, 이것은 자연수 상황의 곱을 적용하여 $a \times \frac{1}{b}$ 로 나타낼 수 있다. 이것은 '분수의 개념 정의-자연수 곱셈 원리의 확장-분수 곱셈 원리 발견'으로 연결되는 순환적

구조로 구성되어 있음을 알 수 있다. 이것은 분수의 덧셈과 마찬가지로 분수 정의에서 출발하여 연산으로 확장되는 예시와 유사한 것이다.

그리고 분수의 곱셈이 자연수의 곱셈과 다른 것으로 계산 결과가 원래 값보다 크거나 작아질 수가 있는데, CCSSM-CA의 5학년에서는 직접 계산을 수행하지 않고 한 수의 크기에 기초하여 다른 수의 곱의 결과를 비교하도록 하고 있다. 이것은 6학년에서 학습할 비와 비율의 학습에 앞서서 분수의 곱에 의해 수가 어떻게 변하는가를 조사함으로써 크기 변화(scaling, resizing)의 역할로 곱셈을 이해하도록 하며, 곱의 결과에 대한 양감을 가지게 하는 내용으로 주목된다.

넷째, 분수의 나눗셈에서는 5학년에 단위분수가 포함된 나눗셈을 다루고, 6학년에 (분수)÷(분수)를 다루고 있는데, 이것은 우리나라의 경우에 제수가 자연수인 경우와 분수인 경우를 구분하여 제시하는 것과 차이가 있다. 이러한 이유로는 피제수나 제수가 단위분수인 경우에는 등분제나 포함제 상황으로 제시하고, 몫을 발견하기 위해 시각적 모델을 이용하여 직관적으로 해결할 수 있기 때문이다. 그리고 분수 나눗셈의 결과를 설명하기 위하여 곱셈과 나눗셈의 관계를 이용하도록 하고 있으며, 제수와 피제수의 분모와 분자사이의 관계에 따라 여러 가지 나눗셈 방법을 제시하는 특징이 있었다. 이것은 제수의 분모와 분자를 바꾸어 곱하는 분수 나눗셈 알고리즘의 원리를 충분한 이해 없이 수행하는 것을 막기 위한 방안으로, 우리나라의 경우에도 학생들에게 나눗셈 알고리즘에 대한 수학적으로 논리적인 설명에 한계가 있는 영역에 다양한 방법으로 나눗셈을 시도해 볼 수 있게 하는 제안이 될 수 있다.

또한, 분수 나눗셈의 경우에도 제수와 피제수가 각각 단위분수와 자연수인 경우와 그 외의 경우를 구분하여 다루고 있었다. 이것은 그림이나 시각적 모델을 이용하여 피제수가 단위분수인 경우에는 등분제 상황으로, 제수가 단위분수인 경우에는 포함제 상황으로 해결하기 용이하기 때문이며, 분수가 가지는 특성에 따라 연산이 용이한 것을 구분하여 다루는 특징이 있는 것이다. 이러한 구분은 계산 알고리즘을 강조하는 것 보다는 다양한 방법(그림, 수직선, 식 등)을 이용하여 결과를 산출하는데 초점을 두고 있는 미국 교육의 특성을 반영한 결과로 해석된다.

다섯째, CCSSM-CA에서는 수학 내용 기준과 더불어 수학 실천(Mathematics Practice) 기준을 제시하고 있는데, 각 내용 기준마다 이를 구현할 수 있는 수학 실천 기준을 명시하고 있으며, 이를 반영한 교과서에서도 각 실천 기준에 맞는 활동을 제시하고 있다. 예를 들면, [그림 18]은 MP 3인 ‘실행 가능한 논쟁을 구성하고 다른 사람의 추론을 비판하여라.’를 실천하도록 하는 문제해결의 예시이다.

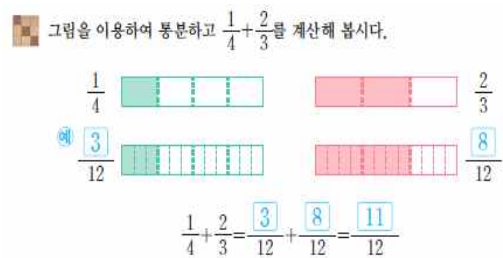


[그림 18] 실천 기준 예시(Dixon, Burger & Leinwand, 2015b p. 264)

[Fig. 18] The example of mathematics practice(Dixon, Burger & Leinwand, 2015b p. 264)

이것은 우리나라의 경우에 2015개정 수학과 교육과정에서 6가지 수학 교과 역량을 강조하고 있음에도 불구하고(교육부, 2015), 교과서에는 단위 말미의 특정 차시에만 제시되고 있는 상황에 비추어 적극적인 구현 방안을 위한 시사점을 준다.

여섯째, 분모가 다른 분수의 덧셈의 경우에 ‘전체 단위의 고정성, 공통 측정 단위의 필요성, 재귀적 분할과 이분모 덧셈 알고리즘으로 연결’과 같은 세 가지 수준의 경험이 중요한데(이지영 외, 2017),



[그림 19] 분수의 덧셈(교육부, 2018c, p. 97)

[Fig. 19] Addition of fraction(The ministry of Education, 2018c, p. 97)

미국 교과서에서는 [그림 19]와 같이 분수 띠를 이

용하여 전체 단위의 고정성과 공통 측정 단위의 필요성을 인식하도록 하고는 있지만, 재귀적 분할 과정은 나타내지 않고 있었다. 그렇지만 우리나라의 새로운 교과서에서는 재귀적 분할 과정을 명시하는 시도가 이루어지고 있어 고무적인 현상으로 보여 진다.

마지막으로 교과서에서 세부적으로 다루는 수의 유형은 나라마다 차이가 있을 수 있는데, 우리나라의 경우에는 차시별 학습 내용이 명료하게 구분되어 제시되는 상황에서 ‘자연수-진분수(대분수)’와 같은 내용을 다루는 특징이 있는데 반해(교육부, 2018b), 미국 교과서에서는 그러한 특정 식보다는 계산의 원리 탐구나 성질을 성립하는 이유를 설명하도록 하는 것에 초점을 두고 있음을 알 수 있었다. 또한 분수의 연산에서는 모든 유형의 문제에 실생활 중심의 문장제를 만들어 해결하도록 제시하고 있고, 이를 해결하기 위하여 암산이나 영역 모델을 활용하는 것과 같이 다양한 전략을 이용하여 해결함으로써 분수의 양적인 측면을 이해하도록 제시하는 특징이 있어 우리나라 교과서 구성에도 시사점을 제시한다.

참 고 문 헌

- 강홍재(2016). 미국 캘리포니아 주의 수학과 교육과정 고찰-초등학교 도형 영역을 중심으로-. 한국초등수학 교육학회지, 20(2), 239-257.
- Kang, H. J. (2016). Study on california common core states standards for mathematics-focused on the geometry domain of elementary school-. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea*, 20(2) 239-257.
- 강홍규(2005). 분수 개념과 알고리즘 지도 비교 양상 비교-McLellan, MiC, 한국의 교재를 중심으로. 수학교육학연구, 15(4), 375-399.
- Kang, H. K. (2005). A comparative study on didactical aspects of fraction concept and algorithm appeared in the textbook of McLellan, MiC, Korea. *The Journal of Educational Research in Mathematics*, 15(4), 375-399.
- 교육부(2015). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제2015-74호[별책 8].
- Ministry of Education(2015). *Mathematics Curriculum*. The ministry of Education Notification No, 2015-74호[Separate Volume 8]
- 교육부(2018a). 수학 3-2. 서울: (주) 천재교육.
- Ministry of Education (2018a). *Mathematics 3-2* Seoul: (Inc.) Cheonjaegyoyook.
- 교육부(2018b). 수학 4-2. 서울: (주) 천재교육.
- Ministry of Education (2018b). *Mathematics 4-2* Seoul: (Inc.) Cheonjaegyoyook.
- 교육부(2018c). 수학 5-1. 서울: (주) 천재교육.
- Ministry of Education (2018c). *Mathematics 5-1*. Seoul: (Inc.) Cheonjaegyoyook.
- 교육부(2018d). 수학 5-2. 서울: (주) 천재교육.
- Ministry of Education (2018d). *Mathematics 5-2* Seoul: (Inc.) Cheonjaegyoyook.
- 교육부(2018e). 수학 6-1. 서울: (주) 천재교육.
- Ministry of Education (2018e). *Mathematics 6-1*. Seoul: (Inc.) Cheonjaegyoyook.
- 교육부(2018f). 수학 6-2. 서울: (주) 천재교육.
- Ministry of Education (2018f). *Mathematics 6-2* Seoul: (Inc.) Cheonjaegyoyook.
- 김영옥, 최성웅, 이승미(2010). 미국 Common Core State Standards for Mathematics 소개. 수학교육학 논총 제38집, 27-36.
- Kim, Y. O., Choi, S. W., & Lee, S. M. (2010). The introduction of Common Core State Standards for Mathematics of U. S. *The Proceedings of Mathematical Education*, 38, 27-36.
- 박은희(2007). 한국과 싱가포르의 초등 수학 교과서 비교 분석- 분수와 소수를 중심으로 -. 한국교원대학교 석사학위논문.
- Park, E. H. (2007). *Comparative Analysis of Mathematics Textbooks of Elementary School in Korea and Singapore-focused on Fractions and Decimals* -. Master's thesis in KNUE.
- 서동엽(2005). 분수의 역사발생적 지도 방안. 수학교육학연구, 15(3), 233-249.
- Seo, D. Y. (2005). Historico-Genetic Instruction on Fraction. *The Journal of Educational Research in Mathematics*, 15(3), 233-249.
- 안지영, 전영주, 윤마병, 이종학(2014). 한국의 2009 개정 수학과 교육과정과 미국의 수학과 교육과정 기준 CCSSM의 비교·분석. 한국학교수학논문집, 17(4), 437-464.
- Ahn, J. Y., Jeon, Y. J., Youn, M. B., & Lee, J. H. (2014). A comparative analysis of the 2009 revised curriculum for mathematics in Korea and the common core state standard for mathematics (CCSSM) in the U.S.-Focus on

- the number and operation strand in elementary school. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea* 14(4), 437-464.
- 원솔희(2016). 초등학교 수학 교과서 분수 영역 국제 비교 분석. 서울교육대학교 석사학위논문.
- Won, S. H. (2016). *A Comparative Analysis of Elementary Mathematics Textbooks Focused on Fractions* Master's thesis in SNUE.
- 이대현(2017). 미국 캘리포니아 주의 CA-CCSSM과 그에 따른 교과서에 제시된 분수 개념에 관한 내용 분석. 한국초등수학교육학회지, 21(4), 547-574.
- Lee, D. H. (2017). An analysis on the contents of fraction in CA-CCSSM and its textbook. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea* 21(4) 547-574.
- 이대현, 박창우, 방신욱, 성장근(2017). 초등수학 속에 담긴 수학. 서울: 교우사.
- Lee, D. H., Park C. W., Bang, S. O., & Seong, C. G. (2017). *Mathematics in Elementary Mathematics*. Seoul: Kyowoosa.
- 이지영, 방정숙, 서은미, 김경훈(2017). 한국과 싱가포르의 초등학교 수학 교과서에 제시된 분수의 덧셈 관련 시각적 표현에 대한 비교 분석. 수학교육학연구, 27(3), 537-555.
- Lee, J. Y., Pang, J. S., Seo, E. M., & Kim, K. H. (2017). A Comparative Analysis of Graphical Representations Related to Addition of Fractions in Elementary Mathematics Textbooks of Korea and Singapore. *Journal of Educational Research in Mathematics*, 27(3), 537-555.
- 장혜원(2012). 미국의 수학교육과정 기준 CCSSM의 수학적 실천에 대한 고찰. 수학교육학연구, 22(4), 557-580.
- Jang, H. W. (2012). Study on the Standards for Mathematical Practice of Common Core State Standards for Mathematics. *Journal of Educational Research in Mathematics*. 22(4), 557-580.
- 최근배 (2015). 한국과 미국(Harcourt Math)의 초등 수학 교과서 비교 분석: 분수와 소수의 도입과 연산을 중심으로. 한국초등수학교육학회지, 19(1), 17-37.
- Choi, K. B. (2015). A comparative study of elementary school mathematics textbooks of Korea(2007 Curriculums) and America(Harcourt Math). *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea*, 19(1), 17-37.
- Baroody, A. J., & Coslick, R. T. (1998). *Fostering Children's Mathematics Power: An Investigative Approach to K-8 Mathematics Instruction*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Dixon, J. K., Burger, E. B., & Leinwand S. J. (2015a). *California Go Math!-4 Common Core*. Orlando: Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company.
- Dixon, J. K., Burger, E. B., & Leinwand S. J. (2015b). *California Go Math!-5 Common Core*. Orlando: Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company.
- Dixon, J. K., Burger, E. B., & Leinwand S. J. (2015c). *California Go Math!-6 Common Core*. Orlando: Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company.
- Empson, S. B., & Levi, L. (2011). *Extending Children's Mathematics-Fractions and Decimals-*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Ma, L. (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United State*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
- Reys, R. E., Lindquist, M. M., Lambdin, D. V., & Smith, N. L. (2009) *Helping Children Learn Mathematics, 9th Edition*. John Wiley & Sons.
- The California Department of Education (2013). *California Common Core State Standards-Mathematics*. The California Department of Education.
- The California Department of Education (2015). *Mathematics Framework for California Public Schools-Kindergarten through Grade Twelve-*. The California Department of Education.
- The Mathematics in Context Development Team (1997). *Measure for Measure*. Naon.

An Analysis on the Contents of Fractional Operations in CCSSM-CA and its Textbooks

Lee, Dae Hyun

Gwangju National University of Education

E-mail : leedh@gnue.ac.kr

Because of the various concepts and meanings of fractions and the difficulty of learning, studies to improve the teaching methods of fraction have been carried out. Particularly, because there are various methods of teaching depending on the type of fractions or the models or methods used for problem solving in fraction operations, many researches have been implemented. In this study, I analyzed the fractional operations of CCSSM-CA and its U.S. textbooks. It was CCSSM-CA revised and presented in California and the textbooks of Houghton Mifflin Harcourt Publishing Co., which reflect the content and direction of CCSSM-CA.

As a result of the analysis, although the grades presented in CCSSM-CA and Korean textbooks were consistent in the addition and subtraction of fractions, there are the features of expressing fractions by the sum of fractions with the same denominator or unit fraction and the evaluation of the appropriateness of the answer. In the multiplication and division of fractions, there is a difference in the presentation according to the grades. There are the features of the comparison the results of products based on the number of factor, presenting the division including the unit fractions at first, and suggesting the solving of division problems using various ways.

* ZDM Classification : B72

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97B70

* Key Words : fraction, operation of fraction, mathematics textbook, CCSSM-CA