Journal for History of Mathematics http://dx.doi.org/10.14477/jhm.2019.32.2.061
Vol. 32 No. 2 (Apr. 2019), 61–77

The Study of Historical Analysis and Educational Extension on Derangement

교란순열에 대한 역사적 탐색과 교육적 확장에 대한 연구

Suh Bo Euk 서보억

The study was conducted based on the 'method of mathematical exploration through history'. In recent school education, 'Probability and Statistics' education has been emphasized, and as a result, the study has conducted a study on permutations. Permutation is used in a variety of fields, and in this study, we looked at the Derangement. The results of this study are as follows. First, analysis was made at current school mathematics level and academic mathematics level for Derangement. Second, the historical development process of derangement was examined. Third, based on this, the research direction of this study was decided to be 'Derangement number's triangle(Rencontres number's triangle)', and the inquiry for education expansion was carried out. Fourth, we have presented data on concrete educational expansion by discovering various mathematical facts of the Derangement number's triangle. We hope that the results of this study will provide meaningful implications for the application of mathematics and the presentation of new inquiry directions.

Keywords: Derangement, Partial derangement, Factorial, Subfactorial, Arrangement number, Derangement number(Rencontres number), Derangement number's triangle, Mathematical exploration through history; 교란순열, 준교란순열, 계승, 준계승, 순열의 수, 교란순열의 수, 교란순열의 수 삼각형, 수학사를 통한 수학탐구.

MSC: 01A72, 97K20 ZDM: A34

1 서론

순열(permutation)은 유한개의 원소 n개 전체 혹은 그 일부인 r개를 선택하여 순서대로 배열하는 경우의 수이다 [4, 9, 14]. 순열의 영어 단어인 'permutation'의 어원은 14세기 중엽 프랑스의 'permutaction' 즉, 'change, shift'에 근거하고 있다(온라인 어원 사전, 2018.06.25.검색). 또한 라틴어에서는 permutare(change thoroughly 또는 exchange)가

Suh Bo Euk: Dept. of Math. Edu., Chungnam National Univ. E-mail: eukeuk@cnu.ac.kr
Received on Dec. 25, 2018, revised on Mar. 15, 2019, accepted on Apr. 3, 2019.

세 명의 학생과 세 개의 자리가 있다. 자리마다 학생이 정해져 있을 때, 어느 누구도 제자리에 앉아 있지 않는 경우의 수를 구하여라.

Figure 1. Example(1); 사례1

어원이 되는데, 'thoroughly'를 의미하는 'per'와 'to change 또는 go 혹은 move'를 의미하는 'mutare'의 합성어이다 [9].

순열의 역사는 다른 수학 개념의 역사에 비교해서는 그렇게 오래되지 않았다. Biggs [3]에 따르면, 인도인들은 $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ 및 ${}_nP_r = \frac{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-r+1)}{r!}$이라는 사실을 A.D 6세기부터 정확하게 알고 있었다는 근거가 충분하고, 인도의 수학자 Bhaskara가 1150년에 쓴 수학책 'Līlāvatī'에는 순열에 대한 기록이 남아 있다. Līlāvatī의 13장 267번에 보면, 계승 $n!$을 다루고 있는데, 이 내용으로 볼 때, 10!의 값을 정확하게 계산할 수 있었다 [3, 7].

그 이후, 1677년 Stedman은 서로 다른 종류의 종을 이용하여 종소리의 순열을 생각하였다. 그는 2종류의 종은 $(12), (21)$ 두 가지를, 3종류의 종은 $(123), \cdots, (321)$ 여섯 가지를 제시하였고, 5종류의 종은 120가지라는 사실을 그 이유와 함께 제시하였다. 또한 Lagrange는 순열의 도움으로 다항식 방정식에 대한 해결에 큰 도움을 얻었고, 이러한 결과는 Galois에 의해 이루어진 다항 방정식 해결에 결정적인 도움을 제공하였다고 평가할 수 있다 [5].

역사적으로 보면, 1부터 n까지의 곱을 의미하는 계승의 기호는 처음에는 π(pi)에서부터 출발하였다. 1799년 방정식에 대한 Ruffini의 이론에서 $\pi(4)$는 $1 \times 2 \times 3 \times 4$를 의미했다. 이를 이어받은 Gauss는 1811년 그의 책에서 대문자 Π를 사용하여 $\Pi(4)$를 사용하기도 했고, 1834년 Jacobi는 Π_4을 사용하기도 했다. 1838년 De Morgan은 $[n]$을 사용하였고, 1855년 Carmichael은 $\overline{n}$을 사용하기도 하였으며, 1861년에 Henri는 $|\underline{n}$라는 기호를 사용하였다. 현재 사용하고 있는 !이 처음 사용된 것은 1816년 독일의 Durrande에 의해서인데, 독일의 Ohm, Eisenstein, Sylvester 등이 이 기호를 오랫동안 사용하면서부터이다. 미국에서도 Bartklett이 1859년부터 ! 기호를 사용하기 시작하였고, 그 이후 보편화되었다 [5]. 수학의 역사를 기초로 볼 때, 계승의 기호가 !로 고정이 된 것은 순전히 쓰기와 타자에 의한 인쇄의 편리함 때문이라는 것이 보편적이다.

순열은 다양한 수학 분야에서 사용되고 있다. 그러한 활용 중에서 널리 알려진 것 중의 하나가 교란순열(derangement)이다. 교란순열은 1708년 프랑스 수학자인 Pierre de Montmort에 의해 처음 제기되었고, 교란순열은 완전순열이라고도 불리기도 하는데, 교란순열의 문제는 Figure 1과 같은 형식으로 중등학교에서 다루어지기도 하였다 [11].

우리나라 중등학교 수학교육에서 교란순열의 개념을 정규 교육과정에서 다루지는 않았

지만, 이와 관련된 문제는 다양하게 다루어졌다. 교육과정에서 다루지 않는 개념을 문제상황에서 다루는 이유는 교란순열의 발생의 역사가 1708년으로 매우 오래되었고, 문제해결 과정이 매우 흥미로워 학습동기를 높이기에 충분한 소재이기 때문이다. 이에 학교수학에서는 다소 생소할 수 있지만, 다양한 문제상황에서 다루어지는 교란순열에 대한 역사적 분석을 통해 정규 수학교육과정으로 활용가능하고, 그 개념의 가능성에 대한 연구가 필요할 것이다.

현재 수학의 흐름은 수학의 응용과 활용에 매우 중요한 가치를 두고 있다. 대표적으로 산업수학의 활성화가 그것이다. 이러한 수학의 흐름은 수학교육의 흐름과도 크게 다르지 않다. 수학교육의 목적을 정신도야제로의 전통적인 관점에서 벗어나, 수학의 실용성, 수학적 안목의 개발 등에 더 중요한 가치를 두기 시작했다. 학교수학의 다섯가지 대영역인 '수와 연산, 문자와 식, 함수, 기하, 확률과 통계' 중에서 가장 실용성이 강한 영역이 확률과 통계이다. 확률과 통계 영역의 내용 중에서 실생활에서 충분히 일어남직한 주제 중의 하나가 교란순열이므로, 이에 대한 수학적 탐구활동을 진행하여 전형적인 사례를 고찰하는 것은 현시점에 필요한 연구임에 분명하다.

이러한 연구의 필요성에 따라 본 연구에서는 교란순열에 대한 역사적 발달과정을 탐색하고, 이를 바탕으로 학교수학 수준에서 수학적 탐구활동 결과 도출을 연구의 목적으로 설정하였다. 이러한 연구의 목적에 따라 연구 내용은 첫째, 현재 학교수준 및 대학교 학부수준에서 다루어지는 교란순열에 대한 내용이 무엇인지 분석하고, 둘째, 교란순열의 발생의 기원과 발달 과정이 어떠하였는지 고찰하며, 셋째, 학교수학 수준에서 교란순열의 새로운 탐구활동의 방향을 설정하고, 이 방향에 따라 수학적 탐구활동의 결과를 논리적으로 정리하는 것이다.

2 연구범위 및 방법

본 연구에서는 순열에 대한 기초적인 개념을 기초로 하여 교란순열의 활용에 대한 역사적 발달과정을 고찰하였고, 이를 토대로 교란순열을 학교수학 수준에서 탐구할 수 있는 탐구 방향을 설정하였다. 또한, 이러한 학교수학 수준에서의 탐구 방향에 따라, 실제로 탐구활동을 수행하여 학교수학에서 활용할 수 있는 수학적 사실을 발견하고, 정리하였다. 이러한 역사적 고찰과 학교수학 수준에서의 수학탐구활동은 서보억 [15]이 제시한 수학사를 활용한 수학탐구방법을 근간으로 연구가 진행되었다.

이에 따라 본 연구에서는 다음과 같은 절차로 연구를 진행하였다.

첫째, '현재 수준' 으로 중등학교 및 학문수학(대학수학)에 나타난 교란순열의 내용이 무엇인지 분석하고 이에 대한 수학적 의미를 이해한다.

둘째, '과거 수준' 으로 수학사에 대한 연구를 기반으로 교란순열의 역사적 발생과정에

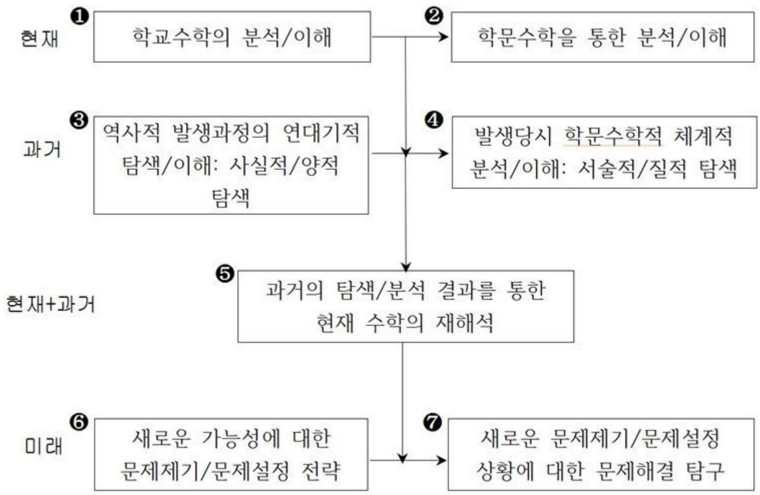


Figure 2. Method of mathematical exploration through history; 수학사를 통한 수학탐구 방법

대한 사실적인 탐색과 더불어 발생당시의 교란순열에 대한 체계적인 분석을 통해 교란순열의 의미를 탐색한다.

셋째, '현재와 과거를 연결하는 수준'으로 교란순열에 대한 수학적 탐색을 기반으로 현재 중등학교 및 학문수학에 나타난 교란순열의 교육적 확장 가능성의 방향을 탐색한다.

넷째, '미래 수준'으로 본 연구의 핵심이며 본질에 해당하는 단계로써, 교란순열에 대한 교육적 확장 가능성을 탐색한다. 여기서 교육적 확장 가능성이란 중등학교 수준에서의 수학적 탐구활동의 수행 및 그 결과에 대한 논리적 정리를 의미한다.

3 교란순열에 대한 수학사적 분석

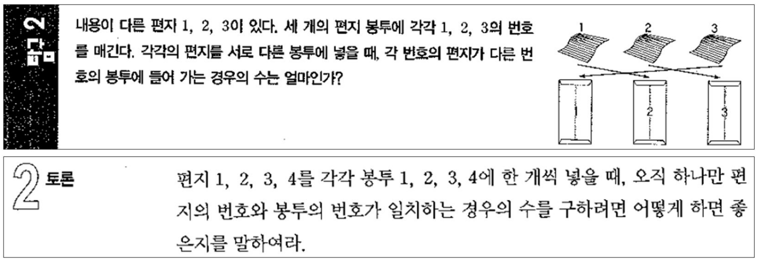
3.1 학교수학에 나타난 교란순열

고등학교 교과서를 분석하면 교란순열을 이해하기 위한 기초적인 지식으로 순열, 중복순열을 찾을 수 있고, 마지막으로는 교란순열을 적용한 문제가 제시되고 있었다.

첫째, 순열의 의미가 제시되고 있다. 순열은 서로 다른 n개에서 r개를 택하여 순서대로 나열한 결과를 의미하며, 그러한 순열의 수는 ${}_nP_r$로 나타내고, 그 값은 다음과 같다.

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \tfrac{n!}{(n-r)!}$$

둘째, 중복순열의 의미가 제시되고 있다. 중복순열은 서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택한 결과를 의미하며, 그러한 중복순열의 수는 ${}_n\prod_r$로 표현하는데, 그 값은 ${}_n\prod_r = n^r$와 같다.


탐구 2
내용이 다른 편지 1, 2, 3이 있다. 세 개의 편지 봉투에 각각 1, 2, 3의 번호를 매긴다. 각각의 편지를 서로 다른 봉투에 넣을 때, 각 번호의 편지가 다른 번호의 봉투에 들어 가는 경우의 수는 얼마인가?

2 토론
편지 1, 2, 3, 4를 각각 봉투 1, 2, 3, 4에 한 개씩 넣을 때, 오직 하나만 편지의 번호와 봉투의 번호가 일치하는 경우의 수를 구하려면 어떻게 하면 좋은지를 말하여라.

Figure 3. Example(2); 사례2 [11]

셋째, 교란순열의 개념은 제시되고 있지 않지만, 교란순열의 의미를 내포하는 '탐구' 혹은 '토론' 과제가 제시되고 있다.

3.2 학문수학에 나타난 교란순열

대학교 학부수준의 교재를 분석하면 순열, 교란순열, 준계승의 정의, 계승과 준계승의 비교, 순열의 수와 교란순열의 수, 교란순열의 수열 등이 다루어지고 있었다. 이러한 내용을 정리하면 다음과 같다.

첫째, 순열에 대한 정의를 기반으로 교란순열과 준계승의 정의가 다루어진다. 더불어 다양한 교란순열의 사례가 제시되고 있다.

(집합 S의 순열 σ)

집합 $S = \{1, 2, 3, 4, \cdots, n\}$의 순열은 전단사함수(일대일대응) $\sigma : S \to S$를 의미한다. 즉, 다음과 같은 의미를 가진다.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

(교란순열의 정의)

집합 S의 순열 $\sigma : S \to S$에서 모든 $s \in S$에 대하여 $\sigma(s) \neq s$를 만족시키는 순열 σ를 교란순열(derangement)혹은 완전순열(perfect permutation)이라고 한다. 즉, $\sigma(1) \neq 1, \sigma(2) \neq 2, \cdots, \sigma(n) \neq n$인 순열이다.

(교란순열의 문제 사례)

1) 학생 n명이 각각 1개의 가방을 가지고 교실에 들어 왔다. 교실을 나갈 때 무심코 가방을 잡았을 때, 모두가 다른 사람의 가방을 가지고 나갈 경우의 수를 구하시오.

2) 학생 n명이 각각 1개의 모자를 쓰고 교실에 들어 왔다. 교실을 나갈 때 무심코 모자를 쓰고 나갈 때, 모두가 다른 사람의 모자를 쓰고 나갈 경우의 수를 구하시오.

둘째, 계승과 준계승의 정의가 제시되고, 순열의 수와 교란순열의 수가 다루어진다.

(계승과 준계승)

계승(factorial)이란 n개의 원소를 순서대로 나열하는 경우의 수 즉 ${}_nP_n$을 나타내며, 궁극적으로는 ${}_nP_n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1 = n!$을 의미한다. 반면, 준계승(subfactorial)은 n개의 원소에 대한 교란순열의 수를 의미하고 $!n$으로 표현한다.

(순열의 수와 교란순열의 수)

집합 $S = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$의 계승의 값을 순열의 수(arrangement number)라고 하고, A_n라고 한다. 실제로 $A_n = n!$이므로 $A_1 = 1, A_2 = 2, A_3 = 6, A_4 = 24$가 된다. 이러한 순열의 수들의 나열을 순열수열이라 한다. 집합 $S = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$의 준계승의 값을 교란순열의 수(derangement number)라고 하고, D_n 혹은 D_n^1이라고 한다. 즉 $D_1 = 0, D_2 = 1, D_3 = 2, D_4 = 9$가 된다. 이러한 교란순열의 수들의 나열을 교란순열수열이라고 한다.

셋째, 순열의 수에 대한 점화식, 교란순열의 수에 대한 점화식, 교란순열의 수열이 다루어지고 있다.

(명제1) 순열의 수를 나열한 수열의 점화식은 $A_n = (n-1)(A_{n-1} + A_{n-2})$이다.

(명제2) 교란순열의 수를 나열한 수열의 점화식은 $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$이다.

(계승과 준계승의 값) 계승과 준계승의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5040
$!n$	1	0	1	2	9	44	265	1854

Table 1. factorial & subfactorial of n; 순열과 교란순열의 수

(명제3) 교란순열의 수열 $D_n = n! - n! \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$이다.

3.3 교란순열의 발생과 발달에 대한 분석

교란순열은 순열의 활용에 대한 문제였고, Rouse Ball [1]에 따르면 교란순열에 대한 최초의 역사적 기록은 프랑스의 수학자인 de Montmort에 의한 것으로 보인다. Ball은 de Montmort가 1713년에 쓴 확률과 게임에 대한 저서인 '위험 게임에 대한 분석(2판)'에서 교란순열에 대해 언급하고 있다. 그의 저서에 따르면 de Montmort는 1708년 교란순열에 대한 최초의 착상을 하였고, 이 문제의 해법을 구체적으로 소개한 것은 1713년에 출판된 본인의 저서에서였다.

교란순열에 대한 두 번째 해결은 Nicholas Bernoulli에 의해서 이루어졌다. Bernoulli는 포함배제의 원리를 이용하여 교란순열에 대한 일반적인 해법을 찾았다 [2]. Bernoulli [2]가 사용한 포함배제의 원리를 적용하여 교란순열을 해석하는 것은 교란순열의 수 D_n을 'E_i를 $\sigma(i) = i$인 순열의 수라고 설정하였을 때, $D_n = n! - |\bigcup_{i=1}^{n} E_i|$으로 구하는 방법'


ESSAY
D'ANALYSE
SUR
LES JEUX DE HAZARD.
SECONDE EDITION
Revûe & augmentée de plusieurs Lettres.

A PARIS,
Chez JACQUE QUILLAU, Imprimeur-Juré-Libraire de l'Université, rue Galande.
MDCCXIII.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

Figure 4. de Montmort's book; de Montmort의 책

으로 설명하는 것이다. 한국사전연구원 [12]의 수학사전에서는 교란순열을 '기준순열에서 그 중의 어느 하나의 요소도 움직이지 않는 것이 없는 그러한 치환에 의해 얻어지는 순열' 이라고 정의하고 있다. 즉 D_n은 어떤 원소 n개를 한 개에서 n개까지의 원소가 있을 위치를 정해주고, 모든 원소가 각각의 원소의 원래 위치에 있지 않을 방법의 수이다.

일반적으로 교란순열은 D_n이라고 표기하고, 교란순열의 수는 준계승(subfactorial)이라 하고, 기호로는 $!n$으로 나타낸다. 보통 교란순열과 관련된 문제에서 D_4까지는 경우의 수가 많지 않아서 간단히 수형도를 그려서 쉽게 구할 수 있다. 하지만 D_5부터는 경우의 수가 44로 커져서, 수형도로는 모든 경우의 수를 찾기가 어렵고 시간도 오래 걸려서 오류가 생길 수 있기 때문에 교란순열에 대해 알 필요가 있다.

역사적으로 준계승(subfactorial)을 나타내는 기호는 계승의 기호와 밀접한 관련이 있다. 1878년 Whitworth는 계승의 기호 $|\underline{n}$을 기초로 하여 $||\underline{n}$로 표기하였다. 사실 $||$기호는 Henri가 $n!$을 나타내기 위해 사용한 '$|\underline{\ }$'에 '$|$'를 한 개 더 추가한 형태였다 [5]. Whitworth는 $||\underline{n}$의 값을 $||\underline{n-1}$에 n을 곱하여 $(-1)^n$을 추가하여 얻을 수 있다고 주장하였다. 예를 들어, $||\underline{0}$은 $0!$과 같이 1로 약속하고, $||\underline{1}$은 $||\underline{0}\times 1+(-1)^1$이므로 $||\underline{1}=1-1=0$이고, $||\underline{2}$는 $||\underline{1}\times 2+(-1)^2$이므로 $||\underline{2}=0+1=1$이고, $||\underline{3}$은 $||\underline{2}\times 3+(-1)^3$이므로 $||\underline{3}=3-1=2$이며, $||\underline{4}$는 $||\underline{3}\times 4+(-1)^4$이므로 $||\underline{4}=8+1=9$이다.

교란순열은 시간이 흐름에 따라 새로운 상황을 추가하여 또다른 문제상황으로 확장되었다. 그 대표적인 것이 Ménage 문제이다. 이 문제는 Edouard Lucas가 1891년에 고안한 것으로 여러 쌍의 커플이 원형 테이블에 서로 이웃하지 않게 앉을 수 있는 경우의 수를 구하는 문제이다. 또한 교란순열의 개념을 확장한 준교란순열(partial derangement)이

제시되었다. 준교란순열은 '집합 $S = \{1, 2, 3, 4, \cdots, n\}$의 순열 $\sigma : S \to S$에서 r(단, $0 \le r \le n$)개의 원소 $s \in S$에 대하여 $\sigma(s) = s$를 만족시키는 순열'로 정의되어진다. 교란순열의 수를 D_n이라고 부르는 것을 고려하여, 준교란순열의 수는 $D_{(n,r)}$로 표현한다. 즉, $D_{(n,0)} = D_n$이다 [10]. 그런데, 준교란순열은 Pascal의 삼각형처럼 아래와 같은 수열의 나열을 가진 배치를 만들 수 있는 것으로 알려져 있다.

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & & 1 & & 2 & & 6 & & 24 \\
& 0 & & 1 & & 4 & & 18 & \\
& & 1 & & 3 & & 14 & & \\
& & & 2 & & 11 & & & \\
& & & & 9 & & & &
\end{array}$$

3.4 역사적 발달과정을 통한 탐구 방향 설정

역사적으로 보면, de Montmort는 Pascal이 창안한 'Pascal의 삼각형'이라고 알려진 수표에 특별한 이름을 부여한 수학자로 알려져 있다. Pascal은 1653년 '수 삼각형론'을 저술하였고, de Montmort는 1708년 교란순열에 대한 기본적인 착상을 발표하였다 [8]. de Montmort는 Pascal이 최초로 제시한 'Pascal의 삼각형'을 'Table of Mr. Pascal for the combinations(조합에 대한 Pascal의 수표)'라고 불렀을 만큼, Pascal의 삼각형은 매우 관심을 가지는 수학적 소재이었다 [1]. 교란순열을 최초로 제안하고 해결한 de Montmort가 Pascal의 삼각형에 특별한 관심을 가진 것으로부터 우리는 교란순열의 발생이나 의미가 Pascal의 삼각형과 무관해 보이지 않을 것이라는 가설을 설정할 수 있다.

게다가 가로와 세로의 열을 가지는 수표에서의 수학적 패턴을 찾는 탐구활동으로 초등학교에서의 구구표에 대한 패턴 찾기, 중등학교에서 Pascal의 삼각형에 대한 수표에서 수학적 패턴에 대한 연구는 진행되었지만 [6], 교란순열의 수 삼각형에 대한 수학적 패턴에 대한 탐색은 매우 제한적이다. 따라서 본 연구에서는 교란순열에 대한 역사적 발달과정에 고찰을 기초로 탐구의 기본 방향과 탐구 주제를 설정하였다.

첫째, 탐구의 기본 방향을 다음과 같이 설정하였다.

교란순열은 모든 원소가 자기 자신과 대응되지 않는 순열이다. 하지만, 부분적으로는 자기 자신이 자기 자신과 대응하는 순열을 생각할 수 있다. 즉, 일부는 자기 자신과 대응하지 않지만, 일부는 자기 자신과 대응하는 순열의 수를 탐구하는 것이다. 따라서 집합 $S = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$의 순열에서 n개의 원소 중에서 r개가 고정되는 순열의 수를 탐구하는 것을 기본 방향으로 한다.

둘째, 탐구 주제를 다음과 같이 설정하였다.

준교란순열 $D_{(n,r)}$ 즉, n개 중에서 r개가 고정된 순열의 수에서 n과 r의 값에 따라 만든 수표(number table)를 교란순열의 수 삼각형이라고 부르도록 한다. 그러면 아래와 같은

수표를 완성할 수 있다.

n/r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	0	1									
2	1	0	1								
3	2	3	0	1							
4	9	8	6	0	1						
5	44	45	20	10	0	1					
6	265	264	135	40	15	0	1				
7	1854	1855	924	315	70	21	0	1			
8	14833	14832	7420	2464	630	112	28	0	1		
9	133496	133497	66744	22260	5544	1134	168	36	0	1	
10	1334961	1334960	667485	222480	55650	11088	1890	240	45	0	1
11	14684570	14684571	7342280	2447445	611820	122430	20328	2970	330	55	0

Table 2. rencontres numbers; 준교란순열의 수 삼각형

본 연구의 탐구주제는 교란순열의 수를 확장하여 만든 교란순열의 수 삼각형를 기초로 한다. 구체적으로 위의 수표에 대한 직관적 관찰을 실시하며, 이를 바탕으로 수학적 패턴과 규칙, 속성에 대한 추측을 실시하고, 이에 대한 정당화 과정 등 다양한 수학적 탐색활동을 진행하여 교육적 확장을 시도하는 것을 본 연구의 탐구 주제로 설정하였다.

4 교란순열에 대한 교육적 확장을 위한 수학탐구활동

본 연구의 탐구결과로 얻은 교란순열의 수 삼각형에 대한 수학적 발견의 결과를 정리하고자 한다. 본 연구에서의 교육적 확장은 Polya [13]가 제시한 다양한 현상과 사례에 대한 관찰을 기반으로 하였으며, 추측하고, 추측한 결과를 확인하고 증명하는 과정에 따라 진행하였다. 이러한 탐구방법에 따라 본 연구의 교육적 확장의 결과는 '발견', '정리', '증명'이라는 3단계로 제시하였다.

본 연구에서 제시하는 발견은 '수표로 제시된 수 삼각형'에 대한 직관적인 관찰을 통해 처음으로 얻은 직관적인 결과를 제시한 것이고, 정리는 직관적 발견을 기초로 얻은 객관화된 수학적 사실을 의미하며, 증명은 정리에 대한 연역적 정당화 결과를 제시한 것이다. 다만, 본 연구에서 설정한 탐구방법으로 추측하여 정당화한 '정리'의 일부는 이미 알려져 있는 사실도 일부 있음을 밝혀둔다. 본 연구는 학교수학 수준의 탐구활동이므로, 정리들이

우리가 설정한 탐구방법을 통해 도출한 사실이지만, 일부 정리는 이미 알려진 수학적 사실일 수 있기 때문이다.

또한 본문에서는 한 개의 '추측'과 '가설', '정의'가 제시되어 있는데, 추측은 참인 것으로 예상되지만, 명확한 증명을 마치지 못한 것이고, '가설'은 추측을 기반으로 한 참이 될 것 같은 추측이며, 정의는 필요한 용어에 대한 뜻을 명확하게 규정한 것이다. 본 연구의 교육적 확장에서는 7개의 발견과 10개의 정리와 1개의 추측과 가설을 제시하였다.

(발견1) 수표에서 1열과 2열의 두 수의 차는 항상 1이다.

(정리1) $D_{(n,0)} - D_{(n,1)} = (-1)^n$ 이다.

[증명] $D_n = D_{(n,0)}$ 이므로 교란순열의 수의 일반항으로부터 $D_{(n,0)} = n! - n!\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}$ 이다. 그런데, $D_{(n,1)}$ 은 n개 중에서 1개가 고정되는 순열의 수이다. 만약 $\sigma(1) = 1$이고 $\sigma(i) \neq i (i = 2, 3, \cdots, n)$인 순열의 수를 구하면, 한 개가 고정된 상태에서 나머지는 자신과 대응하지 않아야 하므로, $D_{(n-1,0)}$과 같다. 그런데, $\sigma(k) = k$로 단 한 개만 고정될 수 있는 경우의 수는 $k = 1, 2, 3, \cdots, n$으로 총 n가지이므로, $D_{(n,1)} = n \times D_{(n-1,0)}$이 된다. $D_{(n-1,0)} = D_{n-1}$이므로, $D_{(n,1)} = n \times D_{n-1}$이다. 따라서, $D_{(n,1)} = n \times \{(n-1)! - (n-1)!\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}\}$이 된다. 즉, 다음의 계산으로 결론을 얻을 수 있다.

$$
\begin{aligned}
D_{(n,0)} - D_{(n,1)} &= n! - n!\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} - n \times \{(n-1)! - (n-1)!\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}\} \\
&= n! - n!\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} - n! + n!\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \\
&= n! \times \left[-\frac{(-1)^{n-1}}{n!} \right] \\
&= (-1)^n
\end{aligned}
$$

즉, n이 짝수일 때 1이고, n이 홀수일 때 -1이 된다.□

(발견2) 수표에서 맨 위의 두 대각선 방향은 하나는 0만, 하나는 1만 존재한다.

(정리2) $D_{(n,n-1)} = 0$이고 $D_{(n,n)} = 1$이다.

[증명] 먼저, $D_{(n,n-1)} = 0$임을 보이자. 집합 $S = \{1, 2, 3, 4, \cdots, n\}$의 한 순열 σ를 생각하자. $\sigma(i) = i$(단, i는 1부터 n까지 중에 $n-1$개)라고 하자. 그러면, 어떤 $k \in S$ 중에서 $\sigma(k) \neq k$가 단 한 개만 존재하여야 한다. 그런데, 이미 $(n-1)$에 대해 $\sigma(i) = i$인 상태에서 남은 한 개의 k가 $\sigma(k) \neq k$인 것은 불가능하다. 즉, $\sigma(k) = k$이어야 하므로, 모든 $i \in S$의 원소에 대해 $\sigma(i) = i$이므로 $D_{(n,n-1)} = 0$이다.

다음으로 $D_{(n,n)} = 1$임을 보이자. 집합 $S = \{1, 2, 3, 4, \cdots, n\}$의 한 순열 σ를 생각하자. 모든 $i \in S$의 원소에 대해 $\sigma(i) = i$인 σ는 한 개 존재한다. 따라서 $D_{(n,n)} = 1$이다.□

(발견3) 수표에서 1열의 수와 r열의 수 사이에 관련성이 있다.

(정리3) $D_{(n,r)} = D_{n-r} \times {}_nC_{n-r}$ 혹은 $D_{(n,r)} = {}_nC_r \times D_{n-r}$이다. 즉, $D_{(n,r)} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \times D_{(n-r,0)}$이다.

[증명] $D_{(n,r)}$의 값을 구해보자. 집합 $S = \{1, 2, 3, 4, \cdots, n\}$에서 r개의 값이 자기 자신으로 고정된 한 순열 σ를 생각하자. 예를 들어 $\sigma(i) = i(1 \le i \le r)$라고 하자. 그러면, $\sigma(k) \ne k(r + 1 \le k \le n)$이어야 한다. 즉, r개가 고정된 어느 한 σ는 D_{n-r}개의 서로 다른 순열이 존재할 수 있다.

그런데, 집합 S에서 임의로 r개를 선택하는 경우의 수는 ${}_nC_r$ 혹은 ${}_nC_{n-r}$이다. 각각의 경우에 D_{n-r}개가 가능하므로, 전체 경우의 수는 $D_{(n,r)} = {}_nC_r \times D_{n-r}$ 혹은 $D_{(n,r)} = {}_nC_{n-r} \times D_{n-r}$이 된다.□

(정리4) $D_{(n,r)} = \frac{n!}{r!} \sum_{k=0}^{n-r} \frac{(-1)^k}{k!}$이다.

[증명] $D_{(n,r)} = {}_nC_r \times D_{n-r}$이고, $D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$이므로, 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} D_{(n,r)} &= \frac{n!}{(n-r)!r!} \times D_{(n-r,0)} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!r!} \times (n-r)! \sum_{k=0}^{n-r} \frac{(-1)^k}{k!} \\ &= \frac{n!}{r!} \sum_{k=0}^{n-r} \frac{(-1)^k}{k!} \end{aligned}$$

따라서 $D_{(n,r)} = \frac{n!}{r!} \sum_{k=0}^{n-r} \frac{(-1)^k}{k!}$이다.□

(정리5) $D_n - n \times D_{n-1} = (-1)^n$이다.

[증명] $D_{(n,r)} = {}_nC_r \times D_{n-r}$에서 $r = 1$이라고 하면, $D_{(n,1)} = {}_nC_1 \times D_{n-1}$을 얻을 수 있다. 즉 $D_{(n,1)} = n \times D_{n-1}$이 된다. 즉, $D_n - n \times D_{n-1} = D_n - n \times D_{n-1}$과 같다. 그런데, 앞의 정리로부터 $D_{(n,0)} - n \times D_{(n-1,0)} = (-1)^n$이 성립하므로, $D_n - n \times D_{n-1} = (-1)^n$이다.□

(발견4) 수표에서 각각의 행에 있는 모든 숫자의 합은 $n!$이다.

(정리6) 순열의 수 $n! = \sum_{k=0}^{n} D_{(n,k)}$이다.

[증명] 정의에 의해서 집합 $S = \{1, 2, 3, 4, \cdots, n\}$의 계승의 값을 $A_n = n!$이다. 그런데 집합 S의 순열은 전단사함수(일대일대응) $\sigma : S \to S$를 의미한다. 따라서 순열 σ는 다음과 같이 분류할 수 있다.

첫째, 모든 $i \in \{1, 2, 3, \cdots, n\}$에 대해서 $\sigma(i) \ne i$인 순열, 즉 모든 수가 자기 자신과 대응하지 않는 순열이다. 이것은 $D_{(n,0)}$이다.

둘째, 단 하나의 $i \in \{1, 2, 3, \cdots, n\}$에 대해서 $\sigma(i) = i$인 순열이다. 즉, $D_{(n,1)}$이다.

셋째, 단 두 개의 $i \in \{1,2,3,\cdots,n\}$에 대해서 $\sigma(i)=i$인 순열이다. 즉, $D_{(n,2)}$이다.

넷째, 단 k개의 $i \in \{1,2,3,\cdots,n\}$에 대해서 $\sigma(i)=i$인 순열이다. 즉, $D_{(n,k)}$이다.

다섯째, 모든 $i \in \{1,2,3,\cdots,n\}$에 대해서 $\sigma(i)=i$인 순열, 즉 모든 수가 자기 자신과 대응하는 순열이다. 이것은 $D_{(n,n)}=1$이다.

위의 다섯 가지를 제외한 순열은 존재할 수 없다. 따라서 $n! = D_{(n,0)}+D_{(n,1)}+D_{(n,2)}+\cdots+D_{(n,n)}=\sum_{k=0}^{n} D_{(n,k)}$이다.□

(따름정리) (1) $n! = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \times D_{n-k}$이다.

(2) $D_n = n! - \sum_{k=1}^{n} {}_nC_k \times D_{n-k}$이다.

(3) $\sum_{k=1}^{n} {}_nC_k \times D_{n-k} = n!\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}$ 이다.

[증명] (1) $D_{(n,k)} = {}_nC_k \times D_{n-k}$이므로, $n! = \sum_{k=0}^{n} D_{(n,k)} = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \times D_{n-k}$이다.

(2) $n! = D_{(n,0)}+D_{(n,1)}+D_{(n,2)}+\cdots+D_{(n,n)}$이다. 따라서 $D_{(n,0)} = n! - \{D_{(n,1)}+D_{(n,2)}+\cdots+D_{(n,n)}\}$이다. 그런데, $D_{(n,1)}+D_{(n,2)}+\cdots+D_{(n,n)} = \sum_{k=1}^{n} {}_nC_k \times D_{n-k}$이므로, $D_n = n! - \sum_{k=1}^{n} {}_nC_k \times D_{n-k}$이다.

(3) $D_n = n! - \sum_{k=1}^{n} {}_nC_k \times D_{n-k}$이므로, $\sum_{k=1}^{n} {}_nC_k \times D_{n-k} = n! - D_n$이다. 그런데 $D_n = n! - n!\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}$이므로, $\sum_{k=1}^{n} {}_nC_k \times D_{n-k} = n! - \left(n! - n!\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}\right)$ 이다. 즉, $\sum_{k=1}^{n} {}_nC_k \times D_{n-k} = n!\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}$이다.□

(발견5) 수표에서 대각선 방향으로 행, 열의 수가 변할 때, 순열도 일정한 규칙을 가진다.

(정의) 수열 c_n^r : 수열 c_n^r은 r의 값(r은 $0,1,2,3,\cdots$)이 결정되었을 때, $n \geq r$인 자연수 n에 대해서 $D_{(n,n-r)}$의 수의 나열이다. 예를 들어, $r=4$이면, 수열 c_n^4은 $n \geq 4$인 자연수 n에서 $D_{(n,n-4)}$의 수의 나열이므로, $D_{(4,0)}, D_{(5,1)}, D_{(6,2)}, D_{(7,3)}, \cdots$ 의 나열을 의미한다. 이때, $c_4^4 = D_{(4,0)}, c_5^4 = D_{(5,1)}, c_6^4 = D_{(6,2)}, c_7^4 = D_{(7,3)}, \cdots$ 을 의미한다.

(정리7) $c_n^2 = D_{(n,n-2)} = D_2 \times {}_nC_2$이다.

[증명] $D_{(n,n-2)}$의 값을 구해보자. 집합 $S=\{1,2,3,4,\cdots,n\}$에서 $(n-2)$개의 값이 자기 자신으로 고정된 한 순열 σ를 생각하자. 예를 들어 $\sigma(i)=i\,(1 \leq i \leq n-2)$라고 하자. 그러면, $\sigma(n-1) \neq n-1$이고, $\sigma(n) \neq n$이어야 하므로, $\sigma(n-1)=n, \sigma(n)=n-1$이어야 한다. 따라서 $(n-2)$개가 고정된 순열에서 나머지 2개가 자신을 함숫값으로 가지지 않는 경우는 오직 한 가지뿐이다. 그런데, 집합 S에서 임의로 $(n-2)$개를 선택하는 경우의 수는 ${}_nC_{n-2}$ 혹은 ${}_nC_2$이다. 각각의 경우에 한 가지씩 가능하므로, 전체 경우의 수는 ${}_nC_2 \times 1$이 된다. 그런데 $D_{(2,0)}=1$이므로 $D_{(n,n-2)} = D_2 \times {}_nC_2$이다. 따라서 $c_n^2 = D_{(n,n-2)} = D_2 \times {}_nC_2$이다.□

(따름정리) (1) $c_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$이다. (2) c_n^2은 삼각수이다. (3) $c_{n+1}^2 - c_n^2 = n$이다.

[증명] (1) $c_n^2 = D_2 \times {}_nC_2$ 인데, ${}_nC_2 = \frac{n!}{(n-2)!2!}$ 이다. 이것을 정리하면, ${}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2}$ 이 되므로, $c_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ 이다.

(2) 그런데, 삼각수의 나열을 T_n 이라고 하면 $T_n = 1+2+3+\cdots+n$ 이므로 $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$ 이다. 그런데, c_n^2 는 $n=2$ 일 때 초항이 되므로, T_{n-1} 의 값과 비교하여야 한다. $T_{n-1} = \frac{n(n-1)}{2}$ 가 되고 이는 c_n^2 와 같다. 즉, c_n^2 의 나열은 삼각수의 나열이다.

(3) $c_{n+1}^2 = \frac{n(n+1)}{2}$ 이고, $c_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ 이므로 다음이 성립하므로, 증명이 마무리된다.

$$c_{n+1}^2 - c_n^2 = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2+n-n^2+n}{2} = n. \ \square$$

(정리8) 수열 c_n^r 에서 $c_n^r \times \frac{n+1}{n-r+1} = c_{n+1}^r$(단, $n \geq r$ 인 정수)이다.

[증명] $c_n^r = D_{(n,n-r)}$ 이고, $D_{(n,r)} = \frac{n!}{r!}\sum_{k=0}^{n-r}\frac{(-1)^k}{k!}$ 이므로, 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} c_n^r \times \frac{n+1}{n-r+1} &= D_{(n,n-r)} \times \frac{n+1}{n-r+1} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!}\sum_{k=0}^{r}\frac{(-1)^k}{k!} \times \frac{n+1}{n-r+1} \\ &= \frac{(n+1)!}{(n-r+1)!}\sum_{k=0}^{r}\frac{(-1)^k}{k!} \qquad \cdots ① \end{aligned}$$

그런데, $D_{(n,r)} = \frac{n!}{r!}\sum_{k=0}^{n-r}\frac{(-1)^k}{k!}$ 에서 n을 $n+1$로, r을 $n-r+1$로 변환하면, $D_{(n+1,n-r+1)} = \frac{(n+1)!}{(n-r+1)!}\sum_{k=0}^{r}\frac{(-1)^k}{k!}$ 이 되므로, ①식은 $D_{(n+1,n-r+1)}$ 이다.

따라서, $c_n^r \times \frac{n+1}{n-r+1} = D_{(n+1,n-r+1)} = c_{n+1}^r$ 이다.$\square$

(추측) 수표에서 1열의 수를 6으로 나눈 나머지는 일정한 규칙을 가진다.

(가설) $D_{(n,0)}$ 을 6으로 나눈 나머지는 1, 0, 1, 2, 3, 2를 반복한다. 구체적으로 $n = 6k+1$(단, $k \geq 0$ 인 정수)이며 $D_{(6k+1,0)} = 6m$ 이다.

(발견6) 수표의 1열에서 $D_{(n,0)} = (n-1)(D_{(n-1,0)} + D_{(n-2,0)})$**라는 점화식이 존재한다.**

(정리9) (1) $D_{(n,1)} = (n-1)(D_{(n-1,1)} + D_{(n-2,1)}) + (-1)^{n-1}$ 이다.

(2) $D_{(n,2)} = (n-1)(D_{(n-1,2)} + D_{(n-2,2)}) + (-1)^n(n-1)$ 이다.

(3) $D_{(n,3)} = (n-1)(D_{(n-1,3)} + D_{(n-2,3)}) + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ 이다.

(4) $D_{(n,4)} = (n-1)(D_{(n-1,4)} + D_{(n-2,4)}) + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$ 이다.

[증명] 증명은 (1)만 제시하고, 일반화된 증명은 (정리10)에서 제시한다.

(1) (정리4)로부터 $D_{(n-1,1)} = (n-1)!\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(-1)^k}{k!}$ 이고, $D_{(n-2,1)} = (n-2)!\sum_{k=0}^{n-3}\frac{(-1)^k}{k!}$ 이다. 따라서 다음 식을 얻을 수 있다.

$$(n-1)(D_{(n-1,1)} + D_{(n-2,1)}) + (-1)^{n-1}$$

$$\begin{aligned}
&= (n-1)\{(n-1)!\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(-1)^k}{k!}+(n-2)!\sum_{k=0}^{n-3}\frac{(-1)^k}{k!}\}+(-1)^{n-1}\\
&= (n-1)!\{(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(-1)^k}{k!}+\sum_{k=0}^{n-3}\frac{(-1)^k}{k!}\}+(-1)^{n-1}
\end{aligned}$$

그런데, $\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(-1)^k}{k!}=\{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}\}-\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$이고, $\sum_{k=0}^{n-3}\frac{(-1)^k}{k!}=\{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}\}-\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}-\frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!}$이다. 따라서 주어진 식은 아래와 같이 변형이 가능하고, 이를 계산하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned}
&(n-1)!\{(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(-1)^k}{k!}+\sum_{k=0}^{n-3}\frac{(-1)^k}{k!}\}+(-1)^{n-1}\\
=\ &(n-1)!\{n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}-\frac{(-1)^{n-1}}{(n-2)!}-\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}-\frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!}\}+(-1)^{n-1}\\
=\ &n!\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}-(-1)^{n-1}+(-1)^{n-1}\\
=\ &n!\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}=D_{(n,1)}.\square
\end{aligned}$$

(발견7) 수표에 제시된 교란순열의 수 삼각형의 r번째 열에서 일반적 점화식이 있다.

(정리10) $D_{(n,r)}=(n-1)\{D_{(n-1,r)}+D_{(n-2,r)}\}+(-1)^{n-r}{}_{n-1}C_{r-1}$이다.

[증명] $D_{(n,r)}=\frac{n!}{r!}\sum_{k=0}^{n-r}\frac{(-1)^k}{k!}$로부터 $D_{(n-1,r)}=\frac{(n-1)!}{r!}\sum_{k=0}^{n-r-1}\frac{(-1)^k}{k!}$이고, $D_{(n-2,r)}=\frac{(n-2)!}{r!}\sum_{k=0}^{n-r-2}\frac{(-1)^k}{k!}$이다. 따라서 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
&(n-1)\{D_{(n-1,r)}+D_{(n-2,r)}\}\\
=\ &(n-1)\{\frac{(n-1)!}{r!}\sum_{k=0}^{n-r-1}\frac{(-1)^k}{k!}+\frac{(n-2)!}{r!}\sum_{k=0}^{n-r-2}\frac{(-1)^k}{k!}\}\\
=\ &\frac{(n-1)!}{r!}\{(n-1)\sum_{k=0}^{n-r-1}\frac{(-1)^k}{k!}+\sum_{k=0}^{n-r-2}\frac{(-1)^k}{k!}\}
\end{aligned}$$

그런데, $\sum_{k=0}^{n-r-1}\frac{(-1)^k}{k!}=\left(\sum_{k=0}^{n-r}\frac{(-1)^k}{k!}\right)-\frac{(-1)^{n-r}}{(n-r)!}$이고, $\sum_{k=0}^{n-r-2}\frac{(-1)^k}{k!}=\left(\sum_{k=0}^{n-r}\frac{(-1)^k}{k!}\right)-\frac{(-1)^{n-r}}{(n-r)!}-\frac{(-1)^{n-r-1}}{(n-r-1)!}$이다. 따라서 주어진 식은 변형이 가능하고, 계산하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned}
&\frac{(n-1)!}{r!}\{(n-1)\sum_{k=0}^{n-r-1}\frac{(-1)^k}{k!}+\sum_{k=0}^{n-r-2}\frac{(-1)^k}{k!}\\
=\ &\frac{(n-1)!}{r!}\{n\sum_{k=0}^{n-r}\frac{(-1)^k}{k!}-\frac{n-1}{(n-r)!}(-1)^{n-r}-\frac{(-1)^{n-r}}{(n-r)!}-\frac{(-1)^{n-r-1}}{(n-r-1)!}\}\\
=\ &\frac{(n-1)!}{r!}\{n\sum_{k=0}^{n-r}\frac{(-1)^k}{k!}-\frac{n(-1)^{n-r}}{(n-r)!}-\frac{(-1)^{n-r-1}}{(n-r-1)!}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n!}{r!}\sum_{k=0}^{n-r}\frac{(-1)^k}{k!} - (-1)^{n-r} \times \frac{n(n-1)!}{r!(n-r)!} + (-1)^{n-r} \times \frac{(n-1)!(n-r)}{r!(n-r)!} \\
&= \frac{n!}{r!}\sum_{k=0}^{n-r}\frac{(-1)^k}{k!} - (-1)^{n-r} \times \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} \\
&= D_{(n,r)} - (-1)^{n-r} \times \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}
\end{aligned}$$

따라서, $(n-1)\{D_{(n-1,r)} + D_{(n-2,r)} = D_{(n,r)} - (-1)^{n-r} \times \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}$ 이다. 이를 통해 우리는 다음 식을 얻을 수 있다.

$$D_{(n,r)} = (n-1)\{D_{(n-1,r)} + D_{(n-2,r)} + (-1)^{n-r} \times \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}$$

그런데, $\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} = {}_{n-r}C_{r-1}$ 이므로, $D_{(n,r)} = (n-1)\{D_{(n-1,r)} + D_{(n-2,r)}\} + (-1)^{n-r}{}_{n-1}C_{r-1}$ 이다.□

5 결론 및 제언

5.1 결론

순열과 준순열에 대한 기초적인 개념을 활용하여, 교란순열에 대한 역사적 과정을 고찰하고, 이러한 고찰을 근거로 교란순열을 일반화한 확장을 통해 다양한 점화식과 규칙을 탐색하는 것을 연구주제로 설정하여 연구를 진행하였다.

먼저 배경지식으로 순열과 조합의 기초 지식을 조사하였고, 이러한 배경지식을 기초로 하여 본 연구의 탐구활동 결과를 정리하면 다음과 같다.

첫째, 교란순열과 준계승의 정의를 찾아서, 그 차이를 인식하였다. 이를 바탕으로 순열의 수에 대한 점화식 $A_n = (n-1)(A_{n-1} + A_{n-2})$을 기초로 하여 교란순열의 수에 대한 점화식이 동일한 모습을 가진다는 사실 즉, $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$을 알게 되었고, 이를 체계적으로 정리하였다.

둘째, 교란순열의 수에 대한 점화식을 귀납적인 방법으로 유도하게 되었고, 수열의 식을 이용하여 논리적으로도 유도할 수 있었다.

셋째, 교란순열의 수를 일반화하여 순열에서 n개의 원소 중에서 r개가 고정되는 순열의 수 $D_{(n,r)}$을 정의하고, 이를 수표로 만들어 내었고, 이 수표를 교란순열의 수 삼각형으로 명명하였다.

넷째, 교란순열의 수 삼각형을 완성하기 위해 다양한 규칙을 발견하였고, 이 규칙을 바탕으로 교란순열의 수 삼각형을 $n = 11, r = 10$일 때까지 완성하였다.

다섯째, 교란순열의 수 삼각형을 완성하는 과정에서, 또한 교란순열의 수 삼각형을 완성한 다음, 직관적인 관찰을 통해 여러 가지 패턴과 규칙을 발견하였고, 이러한 패턴과 규칙의

타당성을 증명하였다. 본 탐구활동에서 관찰을 통해 발견한 수학적 패턴과 규칙은 다음과 같다.

(정리1) $D_{(n,0)} - D_{(n,1)} = (-1)^n$ 이다.

(정리2) $D_{(n,n-1)} = 0$ 이고 $D_{(n,n)} = 1$ 이다.

(정리3) $D_{(n,r)} = D_{(n,n-r)} \times {}_nC_{n-r}$ 혹은 $D_{(n,r)} = {}_nC_r D_{n-r}$ 이다.

(정리4) $D_{(n,r)} = \frac{n!}{r!} \sum_{k=0}^{n-r} \frac{(-1)^k}{k!}\}$ 이다.

(정리5) $D_n - n \times D_{n-1} = (-1)^n$ 이다.

(정리6) 순열의 수 $n! = \sum_{k=0}^{n} D_{(n,k)}$ 이다.

(따름정리1) (1) $n! = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \times D_{n-k}$ (2) $D_n = n! - \sum_{k=1}^{n} {}_nC_r \times D_{n-k}$ (3) $\sum_{k=1}^{n} {}_nC_r \times D_{n-k} = n! \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}$ 이다.

(정리7) $c_n^2 = D_{(n,n-2)} = D_2 \times {}_nC_2$ 이다.

(따름정리2) (1) $c_n^2 = \frac{n(n-2)}{2}$ (2) c_n^2 은 삼각수 3) $c_{n+1}^2 - c_n^2 = n$ 이다.

(정리8) 수열 c_n^r 에서 $c_n^r \times \frac{n+1}{n-r+1} = c_{n+1}^r$(단, $n \geq r$ 인 정수)이다.

(정리9) (1) $D_{(n,1)} = (n-1)(D_{(n-1,1)} + D_{(n-2,1)}) + (-1)^{n-1}$ 이다. (2) $D_{(n,2)} = (n-1)(D_{(n-1,2)} + D_{(n-2,2)}) + (-1)^n(n-1)$ 이다. (3) $D_{(n,3)} = (n-1)(D_{(n-1,3)} + D_{(n-2,3)}) + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ 이다. (4) $D_{(n,4)} = (n-1)(D_{(n-1,4)} + D_{(n-2,4)}) + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$ 이다.

(정리10) $D_{(n,r)} = (n-1)\{D_{(n-1,r)} + D_{(n-2,r)}\} + (-1)^{n-r}{}_{n-1}C_{r-1}$ 이다.

본 연구의 결과는 다음과 같이 활용할 수 있다. 첫째, 고등학교 확률과 통계 교과목에서 순열을 다루는 심화학습의 자료로 활용할 수 있다. 둘째, 최근 고등학교에서는 학생주도적 연구활동, 과제탐구활동이 매우 중요한 이슈가 되고 있다. 고등학교 학생이 진행할 수 있는 전형적인 활동의 예로 제시할 수 있다. 셋째, 교사 연구자료로의 활용이다. 본 연구 결과는 연수자료로 효과적으로 활용할 수 있다. 넷째, 영재교육원 프로그램 개발에 활용될 수 있다.

5.2 제언

본 연구에서 우리는 몇 가지 미해결 문제가 생겼다. 가장 대표적인 것이 (추측)과 (가설)이다. 이에 대한 정당화 과정이 추가적으로 고찰될 필요가 있다.

(추측) 1열의 수를 6으로 나눈 나머지는 일정한 규칙을 가진다. 이 추측으로부터 우리는 아래와 같은 가설에 대한 증명이 요구되어진다.

(가설) $D_{(n,0)}$ 을 6으로 나눈 나머지는 1, 0, 1, 2, 3, 2를 반복한다. 구체적으로 $n = 6k+1$(단, $k \geq 0$ 인 정수)이며 $D_{(6k+1,0)} = 6m$ 이다.

위의 추측과 가설 이외에도 우리는 교란순열이 발생하는 상황을 1회의 시행에 그치지

않고, 연속적으로 2회 이상의 시행에서는 어떤 결과가 나오는지, 즉, 준교란순열의 확대 적용의 연구에 대한 제언을 할 수 있다.

감사의 글 보다 좋은 논문을 위해 성심어린 가르침과 충고를 해주신 심사위원들께 감사의 마음을 전합니다.

References

1. W. W. Rouse Ball, *A Short Account of the History of Mathematics, 4th edition*, MacMillan and Co., Ltd., 1908.
2. G. Bhatnagar, *Inverse Relations, Generalized Bibasic Series, and their U(n) Extensions*, Ph.D. thesis, Ohio State University, 1995.
3. N. L. Biggs, The roots of combinatorics, *Historia Mathematicsa* 6(1997), 109–136.
4. C. B. Boyer, U. C. Merzbach, *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, Inc., 1991.
5. F. Cajori, *Notations in elementary mathematics*, La Salle : The Open Publishing Company, 1928.
6. Y. D. Cho, Applying the principles of arithmetic triangles to class, *School Mathematics* 2(2) (2000), 545–562, 조윤동, 산술삼각형의 구성 원리를 수업에 응용하기, 학교수학 2(2) (2000), 545–562.
7. H. Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, Harcourt Brac, 1962.
8. Q. Feng, W. Jing-Lin, G. Bai-ni, A representation for derangement numbers in terms of a tridiagonal determinant, *Kragujevc Jouranal of Mathematics* 42(1) (2018), 7–14.
9. J. Gullberg(권창욱, 홍대식 역), 수학백과, 경문사, 1997.
10. P. Jim, Some Probabilistic Aspects of Set Partitions, *American Mathematical Monthly* 104(3) (1997), 201–209.
11. Kangwon National University, *Discrete Mathematics*, Ministry of Education & Human Resources Development, 2002. 강원대학교 1종 도서 편찬 위원회, 이산수학, 교육인적자원부, 2002.
12. Korea Institue of Dictionary, *The latest math dictionary*, Gyoyugmunhwawon, 1989, 한국사전연구원, 최신 수학사전 항목별, 교육문화원, 1989.
13. G. Polya, *Mathematics and Plausible Reasoning, Vol I*, Princeton University Press, 1973.
14. D. E. Smith, *History of Mathematics*, Dover Press, 1958.
15. B. E. Suh, *Investigation on middle school mathematic and curriculum for teacher*, KyoWooSa, 2013. 서보억, 교육과정과 중학교 교직수학의 이해, 교우사, 2013.