韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
http://doi.org/10.7468/mathedu.2019.58.2.239
2019. 05. 제 58권, 제 2호, 239-262.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A:
The Mathematical Education
May. 2019, Vol. 58, No. 2, 239-262.

두 대응관계를 연결한 과제에 대하여 역함수 존재 여부에 대한 학생의 질문에 관한 소고

이동근(서울특별시교육청 교육연구정보원, 교사)

A study on the student′s question about the existence of the inverse function for the task that connects the two correspondence relations

Lee, Dong Gun(Seoul Education Research & Information Institute, jakin7@hanmail.net)

초록

본 연구에서는 특정한 학생의 질문에서 시작된 고민을 다루고 있으며, 교과서 분석을 통하여 해당 질문이 충분히 제기 가능한 질문임을 확인하였다. 또한 면담을 거쳐 두 대응관계가 연결된 새로운 대응관계에서 학생들이 합성함수 여부 판정과 역함수 존재 여부 판정에서 정의역에 대한 고민이 학생들에게서 어떻게 의미 있는 수학 지식으로 재구성되어가는 지에 대한 사례를 관찰하였다. 본 연구에서 제시된 사례들은 제한된 상황에서의 특정한 사례라는 한계가 있기 때문에 곧바로 교수학습 상황에 적용될 수는 없으나 다른 연구자들에게 함수 학습 관련 연구에 대하여 통찰의 기회를 제공할 수 있을 것으로 기대된다.

Abstract

This study deals with the anxieties that originated from specific student questions. Through the analysis of the textbooks, we confirmed that the question was a sufficiently plausible question. Third interviews were also held with three high school students. Through the interviews, we analyzed students′ expressions about the new correspondence relationship that the two correspondence relations are linked. In the determination of the composite function and the determination of the inverse function existence,

We have observed a case of how the worries about domain are being reconstructed from students into meaningful mathematical knowledge. Through this, we confirmed that the question will be confusing to students in the field. In this study, we observed the transfer of domain in relation to student domain in composite function. In particular, a present study revealed that the students involved in the interview were influenced by this domain transfer phenomenon in determining whether the task given in the interview was a function. This was the same in determining the existence of a inverse function. The examples presented in this study are limited to specific cases in limited circumstances. Therefore, it can not be applied directly to teaching and learning situations.

However, it is expected that this study will provide other researchers with insight into function learning related research.

* 주요어 : 합성, 합성함수, 함수, 일대일 대응, 역함수
* **Key words** : composition, composite function, function, one-to-one correspondence, inverse function
* **Address**: Seoul education research & information institute, Seoul, Korea
* **ZDM Classification** : C30
* **2000 Mathematics Subject Classification** : 97C30
* **Received**: March 18, 2019 **Revised**: April 13, 2019 **Accepted**: April 25, 2019

Ⅰ. 서론

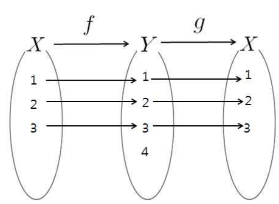
학교수학에서 합성함수와 역함수는 그 자체로도 수학교육 연구에서 주목받는 주제이다. Freudenthal(1983)은 ‘합성하기’와 ‘역 구하기’라는 조작이 함수를 대상으로 새로운 연산을 학습할 수 있는 기회를 제공해주며 이러한 활동이 함수 학습에 도움이 된다고 하였다. 국내 학자들도 합성함수와 역함수를 학습하는 것이 대수적인 관점에서 함수들 사이의 연산 구조를 학습할 수 있는 기회를 제공하여 주며, 이는 함수 학습에 도움을 준다고 하였다 (Kim et al., 2006; Kim, 2004; Kim & Chung, 2010). 그러나 Lucas(2005)는 합성함수와 역함수에 대한 이해가 함수 학습에서 중요함에도 불구하고 정작 함수 개념을 이해하는 것에 도움이 되는 ‘합성함수와 역함수 학습’에 대한 연구가 부족함을 지적하면서 관련 연구의 필요성을 주장하였다.

본 연구는 두 대응관계가 연결된 새로운 대응관계가 ‘함수인지 여부’와 ‘역함수가 존재하는지 여부’에 대하여 학생에게서 나온 질문을 중심으로 교과서 분석과 혼합연구를 진행한 결과를 소개하고 있다. 연구의 시작은 연구자가 수업 중 학생으로부터 받은 질문에서 시작되었는데, 당시 학생의 질문은 [Fig. 1]을 제시하면서 다음과 같은 두 가지를 묻는 것이었다.

1) 두 대응관계를 서로 연결한 새로운 결과를 X에서 X로의 함수 또는 합성함수로 볼 수 있는가?

2) 두 대응관계를 서로 연결한 새로운 결과를 X에서 X로의 함수로 볼 수 있다면 역함수는 존재하는 것인가?

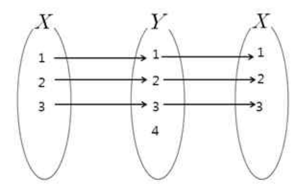
이때 두 대응관계 중 하나의 대응관계는 함수였지만 다른 하나의 대응관계는 함수가 아니었으며, [Fig. 1]은 학생이 질문한 내용을 그림으로 나타낸 대응표이다.



[Fig. 1] Correspondence relationship that a student’s question about a function

연구자는 학생의 질문이 ‘수업 때 이용한 교과서’에 다루어지는 내용이 아님에도 불구하고 학생 스스로 구성하여 질문하였다는 사실에 주목하였다. 즉 학생이 이러한 질문을 하게 된 배경에 대한 호기심과 더불어서, 합성함수와 역함수 학습 과정에서 다른 학생들도 질문한 학생과 유사한 질문을 할 수 있는 것인지에 대하여 확인할 필요가 있다고 판단하였다. 이는 학생이 제기한 질문이 교과서의 범주를 벗어나는 질문이라 하여도 만약 다른 학생들에게서도 충분히 제기될 수 있는 질문이라면, 그 자체만으로도 수학교육분야 연구에 시사해주는 바가 있다고 생각했기 때문이다. 또한 관련 질문이 함수 여부와 역함수 존재 여부와 같이 판단에 관한 내용이므로 학생들의 함수, 합성함수, 일대일대응, 역함수와 같은 다양한 함수 관련 개념을 살펴볼 수 있을 것이라 생각하였다.

[Fig. 1]과 같은 학생의 질문은 몇 가지 수학적 오류를 가지고 있다. 우선 대응관계 그림에 있는 표현 중 ‘$Y \xrightarrow{g} X$’라는 표현은 학교수학에서 g가 함수라는 전제하에 사용하는 표현이다. 그런데 해당 부분은 정의역의 원소 ‘4’가 대응이 되지 않고 있기 때문에 함수로 볼 수 없고 이러한 이유로 ‘$Y \xrightarrow{g} X$’와 같은 표현을 사용한 것은 학교수학에서 문제가 될 수 있다.



[Fig. 2] Modified Figure ‘Correspondence relationship that a student’s question about a function’

다음으로 학생의 질문에서 핵심은 함수가 아닌 대응관계와 함수를 서로 연결할 수 있는지 그리고 그러한 연결도 합성된 것으로 볼 수 있는지에 대한 것인데, 이 역시 학교수학에서 합성은 함수를 대상으로 다루고 있기 때문에 질문으로서의 성립 자체에 문제를 제기할 수 있다.

그러나 위와 같이 학생의 질문이 학교수학의 관점에서 몇 가지 문제점을 가지고 있음을 발견했다고 해서, 질문을 한 학생의 의문점이 해소되었다고 볼 수 없다. 더욱이

그러한 문제점을 지적한 수학교사의 입장에서도 학생에게 명쾌한 도움을 주었다기보다는 학생들이 그러한 질문을 하지 못하도록 차단하였다는 불편한 기억으로 남을 수 있다.

Cho(2005)에서도 함수와 관련된 교사의 교과 내용지식과 교수학적 지식을 알아보기 위한 연구를 진행하면서 비슷한 장면이 소개된 바 있다. 함수의 정의에서 일가성의 내용이 들어있는 이유를 묻는 질문에 대하여 응답자 중 한 명의 수학교사는 '정의는 약속하는 것인데 왜 그렇게 되냐고 물으니 당황스럽다.'라는 답을 하였다. 해당 수학교사의 반응은 Lee(2013)가 말한 것처럼 '정의는 약속이고 약속에 의하여 유도된 결론들이 새로운 통찰을 제공한다는 관점'을 보여준다. Lee(2013)는 이러한 장면들에 대하여 수학교사가 수학 수업을 통하여 이미 만들어진 정의를 받아들이고 그 정의를 사용하고 연습함으로써 다시 그 개념을 알아간다는 관점이라고 하면서, 수학적 개념을 단지 받아들여야만 하는 약속으로 가르치는 것에 대하여 주의가 필요함을 지적하였다.

한편 Lee(2019)는 교수실험을 통하여 학생들의 극한 개념을 조사하는 연구를 수행하면서, 수업에서 교사가 학생들의 수학적 표현에 오류가 있다고 판단하기 이전에 학생의 고민이 무엇인지에 대하여 관심을 가지려는 노력이 선행되지 않으면 고등학생들이 자신들의 생각을 감추고 교사가 원하는 답을 내놓는 이중적인 모습을 보일 수 있으므로 주의할 필요가 있다고 하였다.

본 연구에서도 학생들의 표현에서 수학적인 오류가 있다 하더라도 그러한 표현을 오개념으로 판단하기보다는 학생의 고민이 담긴 표현으로 보고 연구를 진행할 것이다. 또한 앞서 논의한 바와 같이 본 연구에서는 [Fig. 1]과 같은 질문이 다른 학생들에게서도 제기될 수 있는 것인지를 살펴보기 위하여, 우선 학생들이 사용하는 교과서를 분석하여 그러한 가능성을 살펴보고자 한다. 다음으로 교과서 분석을 통하여 얻은 시사점에 근거하여 합성함수와 역함수를 학습한 경험이 있는 학생들을 대상으로 3회의 면담을 진행하여 [Fig. 1]과 같은 질문에 대한 학생들의 생각을 질적으로 살펴봄으로써 이해의 깊이를 더하고자 한다. 이를 통하여 [Fig. 1]에서 제기된 문제가 교과서 범위를 벗어나는 특정 학생의 질문이 아니라 지속적으로 함수, 합성함수, 역함수 학습 관련 연구에서 관심을 가져야할 필요가 있는 소재임을 논할 것이다.

지금까지의 논의를 바탕으로 본 연구에서는 다음과 같은 연구문제를 설정하였다.

첫째, '학생이 질문한 내용은 교수·학습 과정에서 다른 학생들에게서도 제기될 수 있는 질문인가?'

둘째, 대응적 관점에서 함수 여부를 판단할 수 있는 학생들의 '두 대응관계를 연결한 과제'에 대한 역함수 존재 여부 판단 과정에서의 표현은 어떠한가?

Ⅱ. 이론적 배경

학생들의 함수 개념 관련 연구

Choi, Pang(2012)은 초등학생도 함수적 사고 능력을 갖추고 있으며, 특히 해당 능력이 초기 대수 교육의 성공 요인 중 하나로 강조된다고 하였다. 그러나 초등학교에서는 '함수'라는 용어를 명시적으로 사용하지는 않으며, 중학교에서 최초로 '함수'라는 용어를 명시적으로 사용하게 된다.

중학교에서 함수 개념 도입은 7차 교육과정을 기준으로 큰 변화가 있었다(Byun & Ju, 2012). 7차 교육과정 이전에는 두 집합 사이의 일대일 대응관계로 도입하였으나 7차 교육과정에서는 비례 관계를 바탕으로 종속적인 변화 과정으로 지도하였다. Byun, Ju(2012)는 7차 교육과정에서 함수 개념을 비례관계로 도입하면서 동시에 '대응'이라는 용어는 사용하지 않으면서 대응관점에서 사용하는 정의역, 공역, 치역 등의 개념을 함께 도입해서 학생들의 이해를 어렵게 하였다고 지적하였다. 2007 개정 수학과 교육과정(Ministry of Education Human Resources, 2007)에서는 종속 관계에 있는 두 양의 대응 관계로 도입하는 것으로 바뀌었으며 이러한 방향은 2009 개정 수학과 교육과정(Ministry of Education and Science Technology, 2011)을 거쳐 2015 개정 수학과 교육과정(Ministry of Education, 2015)에서도 동일한 흐름으로 유지되고 있다. 2015 개정 수학과 교육과정의 내용을 예로 살펴보면, 중학교 함수 영역에 대한 '일반화된 지식(변화하는 양 사이의 관계를 나타내는 함수는 대응과 종속의 의미를 포함하며, 그래프는 함수를 시각적으로 표현하는 도구이다.)'과 '교수·학습 방법 및 유의 사항(함수의 개념은 다양한 상황에서 한 양이 변함에 따라 다른 양이 하

나씩 정해지는 두 양 사이의 대응 관계를 이용하여 도입한다.)'로 되어있음을 확인할 수 있다.

Lee, Kim, Lee, & Cho(2016)는 함수 개념 도입 방식을 두고 여러 고민을 거쳐 변화 과정을 거쳤음에도 불구하고 중학생들의 함수 개념 학습에서 인지적 장애를 포함하여 어려움을 겪고 있다고 하였다.

한편 Kim(as cited Lee, Kim, Lee, & Cho, 2016)은 상위권 학생들로 제한하기는 하였지만, 고등학생들이 함수 여부를 판단할 때 대응적 관점에서의 정의를 가지고 판단하는 경향이 있음을 언급하였는데, 이 과정에서 정의역에 대한 임의성과 일가성이 중요한 역할을 하는 것으로 보인다. Lee(2013)는 학교수학에서 일가성을 가지는 임의적 관계라는 대응적 관점으로 함수 개념을 도입하는 것이 Bourbaki식의 현대적인 함수 개념이라는 것을 언급하였다. 동시에 선행연구들에 대한 분석을 거쳐 이러한 도입 방식이 합성함수와 역함수를 설명하기에 유용하다고 하였다.

이상의 내용을 종합해보면, 본 연구에서는 [Fig. 1]과 관련된 고등학생의 질문에서 시작하고 있으므로 학생들이 대응적 관점에서 함수 여부를 판단할 것이라는 생각을 할 수 있고, 이때 정의역에 대한 일가성과 임의성[1]이 중요한 판단 기준이 될 것이라는 생각이 가능하다. 실제 [Fig. 1]과 관련된 학생의 질문 속에도 역함수 존재 여부에 대한 부분은 일가성과 관련된 내용이 포함되어있다. 이에 다음 절에서는 함수 여부 판단 기준에 대한 학생들의 정의역에 관련된 어려움을 소개한 선행연구들을 중심으로 살펴볼 것이다.

2. 함수에서 정의역 관련 연구

Whang, Sim, Lee(1995)는 고등학생들의 함수 개념 이해에 관한 사례연구를 수행하면서 학생들이 함수의 정의역과 공역을 무시하는 경향이 있다고 하면서 정의역에 대한 인식의 중요성을 강조하였다.

본 연구가 논의되는 시점을 기준으로 할 때, 학교수학에서 '정의역'은 2015 개정 수학과 교육과정과 2009 개정 수학과 교육과정에서 각각 개발 된 '수학' 교과서와 '수학 Ⅱ' 교과서에서 집합 개념을 학습한 이후 함수를 정의할 때 도입하는 개념이다. 특히 정의역은 대응적 관점으로 함수를 정의할 때 도입하는 개념으로서 학교수학에서 정의역을 도입한 이후 함수를 다룰 때는, 종속적으로는 동일한 규칙을 가지고 있는 관계식이라 하더라도 정의역이 다르면 다른 함수로 다루어진다. 또한 함수가 되기 위한 대응규칙은 모두 정의역과 관련된다는 점에서 학생들의 함수 학습에서 정의역의 역할은 중요한 것으로 보인다.

Kim (2010)은 휴대폰 요금 문제나 저축 문제와 같이 교과서에서 제시된 일차함수 활용 단원의 과제를 이용하여 식과 그래프로 모델링하는 과정에서 나타나는 정의역의 중요성을 지적한 바 있다. 또한 Lee, Chang, Lee(2018)는 함수의 연속성과 관련된 논의를 진행하면서, 학교수학에서 어느 시점 이후로는 함수를 정의할 때 정의역을 표시하지 않고 관계식이 함수로서의 대응규칙을 만족시키는 모든 범위를 암묵적으로 정의역으로 생각하도록 하는 점을 지적하였는데, 이를 통하여 함수를 표현할 때 정의역을 명시적으로 밝혀줄 필요가 있음을 주장하였다. 이와 같이 정의역은 함수 개념 관련 학습에서 학생들의 어려움을 소개하는 연구의 소재로 다루어지기도 한다. 즉, 이차함수에서 정의역이 주어지지 않은 경우와 비교하여 주어진 경우에 학생들이 최댓값과 최솟값을 구하는데 더 어려움을 보이는 것을 드러낸 연구(Lee & Park, 2018)에서와 같이 함수 개념 학습에서 정의역에 대한 주의가 필요함을 알 수 있다. 다만 본 연구에서는 교과서 분석을 거쳐 면담을 진행할 때, 면담 대상자들이 대응적 관점에서 함수 여부를 판정할 수 있는 학생들을 대상으로 진행하였으므로, 정의역의 원소에 대한 일가성과 임의성에 대한 개념을 가지고 있음에도 불구하고 이러한 지식이 [Fig. 1]과 같은 질문에서 역함수 존재 여부 판정에서 역할을 하지 못하는 부분에 대하여 관심을 가질 것이다.

3. 합성함수와 역함수 학습 관련 연구

Lucas(2005)는 예비교사와 현직교사를 대상으로 합성함수와 역함수에 대한 교과내용지식, 교수학적내용지식, 교육과정지식의 세 가지 구성요소 사이의 관계에 대하여 연구하였다.

특히 $f(x)=\sqrt{4-x^2}$과 $g(x)=\sqrt{x^2-9}$의 합성함수

---

[1] 일가성은 정의역의 원소에 치역의 원소가 단 하나만 대응되는 조건을 뜻하며, 임의성은 어떤 규칙이나 그래프에 의하여 묘사될 필요가 없는 경우에도 함수 관계를 정의할 수 있는 것을 뜻한다 (as cited Lee, 2013).

$g\circ f$를 구하는 과제를 제시하였는데, 이는 합성함수를 구하는 절차를 적용할 경우

$$g(f(x))=\sqrt{\{f(x)\}^2-9}=\sqrt{-x^2-5}$$

의 형태가 되지만 실제로는 함수 f의 치역이 함수 g의 정의역의 부분집합이 되지 않으므로 합성함수가 존재하지 않는 과제이다. 이에 대하여 Lucas(2005)는 연구대상자들의 반응에서 절차적인 방식으로 합성함수의 형태를 제시하려는 경향이 나타남을 지적하였으며, 이를 통하여 합성함수 학습에서 예비교사와 현직교사들이 절차적인 처리 과정에는 익숙하지만 개념적인 학습에 있어서 어려움을 보이고 있음을 지적하였다. 연구자가 본 연구와 관련하여 주목할 부분은 Lucas(2005)의 연구에 참여한 연구대상들이 합성함수 $g\circ f$의 정의역을 인식하지 못한 채 합성에 대한 절차만으로 결과를 도출하였다고 지적한 부분이다. 연구자는 만약 Lucas(2005)의 연구에서 연구대상들이 정의역 조건을 $-2\le x\le 2\,(4-x^2\ge 0)$ 인식하였다고 가정하였을 때 어떤 결과물을 산출할 것인지에 대하여 의문이 들었다. 한편 Lucas(2005)는 연구대상들이 기계적으로 두 함수를 합성하는 절차적 지식을 가지고 있음을 드러내었는데, 이는 연구자로 하여금 [Fig. 1]과 관련된 학생의 질문에서 두 대응관계를 기계적으로 연결하는 것일 수도 있음을 생각하게 해주었다.

Kim, Chung(2010)은 합성함수 $g\circ f$의 학습에서 함수 f의 치역과 함수 g의 정의역의 관계에 대하여 언급하였다. Kim, Chung(2010)은 합성함수의 학습에 대한 의미를 '복잡한 함수를 익히 알고 있는 함수들의 연산으로 분석하여 보는 것'이라 설명하였다. 예를 들어 $y=2^x$와 $y=x^2$에 대한 학습 경험이 있는 학생들이 $y=2^{x^2}$을 학습할 때 이미 사전에 학습한 $y=2^x$와 $y=x^2$를 이용하여 이해할 수 있다고 설명한 것이다. 이 과정에서 Kim, Chung(2010)은 이미 알고 있는 두 함수들의 연결 과정에서의 관계가 중요함을 언급하였다. 그런데 학교 수학에서 합성함수를 학습할 때, 함수 f의 치역과 함수 g의 정의역의 관계가 불분명하다는 점을 지적하면서, 이 과정에서 학생들은 함수 f의 치역과 함수 g의 정의역이 같아지는 것과 같은 개념 이미지를 구성할 수 있음을 지적하였다. 이를 해결하기 위하여 학교수학에서 함수 f의 치역이 함수 g의 정의역의 부분집합이 되는 것을 드러내는 방식으로 학습할 필요가 있다고 하였다. 해당 연구에 따라 [Fig. 1]과 관련된 학생의 질문을 살펴보면, 두 대응관계를 연결할 때 처음 연결과정에서의 결과가 두 번째 연결과정이 시작되는 집합의 부분집합이 되어야하는 조건은 충족한 것으로 볼 수 있다. 다만, Kim, Chung(2010)은 합성의 대상을 함수들로 한정한 반면 [Fig. 1]과 관련된 질문을 하였던 학생은 함수가 아닌 대응관계도 연결의 대상으로 생각하였다는 차이가 있다.

다음으로 본 연구와 관련된 역함수 관련 연구들을 살펴보면 '역으로 되돌리는 조작'에 대한 내용들을 찾아볼 수 있다. 앞서 언급하였듯이 Freudenthal(1983)은 역함수 학습에서 역 조작에 대한 내용을 강조하였다. 이를 실험적으로 확인한 연구도 있는데, Even(1989; 1990)은 예비교사 162명을 대상으로 역함수에 대한 이해의 정도에 대하여 조사하였다. 그가 역함수에 대한 지식과 이해에 관한 문제로 제시한 것은 아래와 같이 두 문제이다.

1. $f(x)=2x-1, f^{-1}(x)=\dfrac{x+10}{2}$일 때 $(f\circ f^{-1})(512.5)$를 구하고 그 이유를 설명하여라.
2. 한 학생이 $f(x)=10^x$에 대한 역함수는 서로 다른 두 가지가 존재한다고 말했다. 하나는 무리함수이며, 다른 하나는 로그함수이다. 이 학생의 답은 옳은가? 그 이유를 설명하여라.

Even(1989; 1990)은 예비교사들의 반응을 분석하여, 연구대상들이 역함수 개념에서 '되돌림'의 의미에 주목하고 있다는 것을 밝혀내었다. 특히 제시한 과제에서 1번 과제에 대하여는 연구대상들 중 절반에 해당하는 예비교사들이 $f\circ f^{-1}$가 항등함수라는 것을 고려하여 답을 하기 보다는 기계적인 절차를 따라서 실제 함수 f^{-1}의 x에 $x=512.5$를 대입하여 구한 값을 다시 함수 f의 x에 대입하여 값을 구하는 모습을 보였다는 점을 지적하였다. 본 연구와 관련하여서 살펴볼 부분은 해당 연구에 참여한 연구대상들이 실제 대입을 해서 계산을 하는 조작에서 드러난 부분은 역으로 되돌리는 행위 결과이므로 함수관계를 식 대신 대응관계 그림으로 제시하였을 때도 유사한 반응이 나올 것으로 생각할 수 있다는 점이다.

Ⅲ. 연구 방법

본 연구에서는 교과서 분석을 통하여 [Fig. 1]과 관련된 특정 학생의 질문이 다른 학생들에게서도 제기될 수 있는 문제인지 살펴보았다. 이후 특정 학생에게서 제기된 질문에 대한 연구자의 이해의 폭을 넓히기 위하여 이미 합성함수와 역함수를 학습한 경험이 있는 서울 소재 일반계 고등학교 이과 계열 남학생 세 명을 대상으로 3차시의 과제에 기반한 비구조화된 면담을 진행하였으며, 이를 통하여 특정 학생에게서 제시되었던 질문에 대한 이해의 깊이를 더함과 동시에 교수학적 시사점을 논하고자 한다.

우선 교과서 분석 과정에서 대상으로 삼은 교과서는 합성함수와 역함수의 내용을 포함한 19종의 교과서이며, 2009 개정 수학과 교육과정에서 개발된 10종의 수학Ⅱ 교과서와 2015 개정 수학과 교육과정에서 개발된 9종의 수학 교과서이다. 2009 개정 수학과 교육과정과 2015 개정 수학과 교육과정을 고려한 것은 본 연구가 진행되는 시점이 두 교육과정이 동시에 적용되고 있는 교육과정 전환기라는 점을 고려하였으며, 또한 본 연구에서 연구대상으로 참여한 학생들에게 적용되는 교육과정이기 때문이다.

분석 방식은 총 19종의 교과서에서 합성함수와 역함수 내용 구성 순서와 내용을 점검하였다. 특히 내용에서 다루고 있는 용어의 정의와 대응관계 그림 등을 중점적으로 점검하여, [Fig. 1]과 같은 내용에 대한 질문이 제기될 수 있는 여지를 살펴보았다.

다음으로 교과서 분석에서 얻은 시사점에 근거하여 과제를 개발하였으며, 개발된 과제에 근거하여 세 명의 학생을 대상으로 3차시의 과제 기반 비구조화된 면담을 실시하였다. 이를 통하여 연구자가 최초 학생의 질문에 대한 다각적인 이해가 가능하였으며, 이를 바탕으로 교수학적 시사점을 살펴보았다.

이에 본 장에서는 교과서 분석 이후 실시한 면담과정에 대하여 보다 세밀하게 소개하고자 한다.

1. 면담 절차

Johnson(2002)은 면담법을 적용 가능한 연구에 대하여, 연구문제가 다음과 같은 네 가지 속성 중 하나에 해당할 때 면담법을 적용하여 연구를 진행하는 것이 가능하다고 하였다.

- 대부분의 구성원이 당연시하기 때문에 쉽게 드러나지 않는 지식을 발견하고자 할 때
- 복합적인 정서를 동반할 때
- 개개인 혹은 집단마다 다양한 관점에서 접근하는 문제일 때
- 문제에 대한 세밀하고 깊이 있는 정보를 얻고 싶을 때

본 연구는 ‘두 대응관계가 연결된 새로운 대응관계에서 역함수 존재 여부’에 대하여 교과서에 소개되지 않은 학생의 질문에 근거하여 논의를 진행하고 있으며, 학생의 질문에 대한 고민을 통하여 세밀하고 깊이 있는 정보를 얻고자 하는 연구이다. 따라서 Johnson(2002)이 제시한 면담법이 적용 가능한 연구문제의 속성 중 첫 번째와 네 번째에 해당하므로, 본 연구를 진행하는데 있어 면담법은 적절한 연구방법이 될 수 있다.

특히 본 연구는 면담법 중에서도 과제에 기반한 비구조화된 면담으로 볼 수 있다. Shin(2005)에 따르면, 비구조화된 면담에서는 연구자가 처음에 제시하는 주제나 질문에 대하여 연구대상이 자유롭게 면담의 내용과 질서들을 정해가며, 연구자는 연구대상의 의견을 듣는 학습자의 역할을 하게 된다. Shin(2005)은 비구조화된 면담에서 적극적인 연구자의 참여를 인정하였는데, 비구조화된 면담에서는 구조화된 면담에서와 달리 연구자가 상황에 따라 되묻거나 명료하게 대화를 정리하는 역할을 하기도 하지만, 연구자의 질문들은 연구대상의 생각이나 의견을 보다 심층적으로 듣고자 하는 것에 초점을 맞추게 된다고 하였다. 특히 연구자가 면담 과정에 구성원이기에 어느 정도의 영향력을 가지고는 있기에 자신의 의견을 이야기할 수도 있고, 이러한 점은 연구대상이 자기표현을 하는데 도움이 될 수 있다고 하였다. 이러한 측면에 비추어볼 때 비구조화된 면담의 결과물은 연구자와 연구대상이 공동으로 산출해낸 사회적 구성물로 보아야한다(Holstein & Gubrium, 1995).

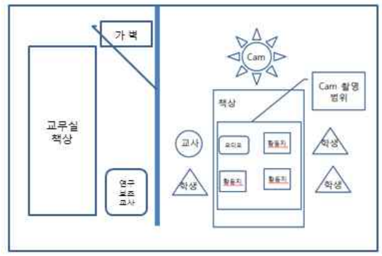
본 연구에서 면담은 연구자가 학생들에게 과제를 제시한 다음 해당 과제를 중심으로 학생들의 의사소통의 흐름을 따라 진행을 하되 연구자의 판단에 의사소통 과정에서 의미가 불명확한 부분이 발생할 경우 연구자가 개

입하여 불명확한 부분에 대하여 질문을 하는 방식으로 진행되었다. 다만 과제를 중심으로 면담을 진행하기는 하였으나, 이용된 과제의 경우 연구자들의 협의하에 설정한 최초 과제를 제외한 나머지 과제들은 연구에 참여한 세 명의 학생들과의 면담 진행 과정에서 학생들로부터 제기된 학생들의 표현과 의사소통 내용에 근거하여 연구자와 연구에 참여한 학생들 사이의 합의에 의하여 결정되었다. 따라서 본 연구에서 진행된 면담 과정은 미리 예견된 계획에 의하여 진행하였다기보다는 과제에 대한 학생의 반응에 따라 가변적이라는 점에서 실험적인 성격이 강하다.

한편 본 연구에서는 의사소통 과정에서 제시된 학생들의 표현 속에 학생들의 사고가 반영되어있는 것으로 보기 때문에 학생들의 표현에 대한 수학적인 오류 유무에 대한 판단을 하기 보다는 그 속에 담긴 학생들의 사고와 의미에 대하여 고민하였다.

면담은 2017년 7월 말 경의 방학 기간 중에 연구자[2]와 연구대상이 이틀에 걸쳐 진행하였다. 하루에 1회 혹은 2회의 만남을 통하여 교실이 아닌 별도의 공간에서 이루어졌고, 1회 면담은 70분 내외로 진행되었다. 면담 시간은 사전에 연구자와 연구에 참여한 학생들 사이에 합의된 것은 아니었으나, 학교에서 50분을 1차시로 진행되는 것을 고려하여 연구자가 50분 정도의 기준 시간을 암묵적으로 정한 상태에서 진행하였다.

면담이 진행된 공간은 연구참여 학생들의 반응을 기록으로 남길 수 있는 카메라와 오디오 녹음기가 설치되어 있는 곳이었다. 해당 공간은 연구자와 연구에 참여한 학생들이 활동을 진행하는 장소와 연구보조교사가 대기하면서 면담을 관찰할 수 있는 별도의 공간으로 구성된 장소였다. 면담을 진행하는 공간과 연구보조교사가 대기하며 면담을 관찰하는 공간은 얇은 가벽으로 분리되어있어서 연구보조교사와 학생들은 서로 보이지는 않지만 연구자와 학생들의 대화를 연구보조교사가 들을 수 있는 공간이었다. [Fig. 3]은 연구가 진행된 공간을 그림으로 재구성하여 제시한 것이다.



[Fig. 3] Figure about spot of interview

차시별 면담의 대략적 개요는 [Table 1]과 같다.

[Table 1] Sequence of interview

<table>
<tr><th>time</th><th>day</th><th>Activities</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2017.07.24.</td><td>It has time to freely express their thoughts on mathematical terms (time, velocity, mean velocity, function, inverse function, composite function, and identity function) for rapport formation between researchers and students participating in research.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2017.7.26. (AM)</td><td rowspan="2">Based on the first interview, we have time to express mathematically about functions, composite functions, inverse functions, and so on. In addition, [Task 2] and [Task 3] were presented sequentially through the communication process starting from the [Task 1] presented by the researcher. Then, based on students′ responses, the students and students communicate about [Task 4] and [Task 5].</td></tr>
<tr><td>3</td><td>2017.07.26. (PM)</td></tr>
</table>

연구자는 면담 진행을 담당하였으며, 면담의 완성도를 높이고 진행자가 실수하는 부분에 대한 보완과 방향성을 제시하기 위하여 1명의 다른 연구보조교사가 관찰자로 참여하였다. 연구보조교사는 직접 매번 면담에 관찰자로 참석하기 보다는 주로 촬영된 영상자료를 분석한 다음 연구자와의 회의를 통하여 다음 차시 면담 과제를 정하는데 기여하였다.

매 차시 면담 종료 이후 연구자는 이전 차시에서 보인 학생들의 사고와 행동의 의미를 연구보조교사와 공동으로 분석하고 상호 합의에 근거하여 다음 면담을 준비하였다. 이와 같이 연구자들의 협의를 거쳐 다음 차시에 대한 면담이 설계되면, 연구자는 이를 반영하여 최종 투입과제를 선정하여 다음 차시 면담을 진행하는 과정을 반복하였다. 면담 진행은 학생들 간의 의사소통을 중심으로 진행하되 필요에 따라 연구자가 다른 학생들의 의견을

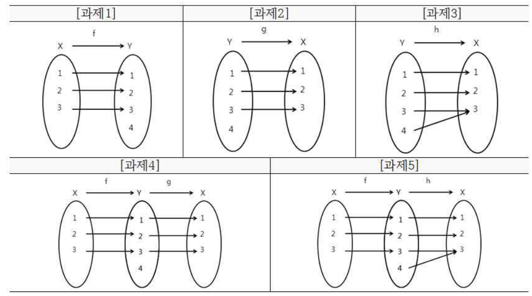
2) 본 연구에서 면담을 진행한 교사는 연구자를 의미한다.

정리하여 전체 학생들에게 다시 확인시키거나 혹은 다음 단계로 넘어가기 위한 발문 또는 연구자가 궁금한 부분을 질문하는 정도의 수준으로 개입하기도 하였다.

2. 면담에 적용된 과제

총 3차시의 면담 중 본 연구에서는 연구주제와 관련된 2차시와 3차시의 면담 자료를 중심으로 분석하였다. 해당 면담에서 사용된 과제는 총 5개였다. [과제1], [과제2], [과제3]은 연구자에 의하여 최초 학생들에게 제시된 과제이었으며, 나머지 두 개의 과제인 [과제4], [과제5]는 [과제1], [과제2], [과제3]을 시작으로 학생들과의 의사소통을 진행하는 과정에서 학생들의 표현을 보다 명확히 질문하는 과정에서 연구자와 학생들 간의 합의 과정을 통하여 순차적으로 제시된 과제들이다.

[과제1]은 학생들이 1차시와 2차시 면담에서 함수 개념에 대하여 자유롭게 표현하는 과정에서 대응규칙을 이용하여 설명하는 것이 관찰됨에 따라 연구자가 학생들이 표현한 대응규칙에 근거하여 함수 여부를 판단할 수 있는지 확인하기 위하여 제시한 과제였다. [과제2]와 [과제3] 역시 [과제1]과 마찬가지로 학생들의 설명한 대응규칙을 적용하여 함수 여부를 판단할 수 있는 과제이며, 이를 통하여 연구자는 학생들이 함수 여부를 판단하는 주요한 기준을 확인할 수 있었다. [과제4]는 [과제1]과 [과제2]를 연결하여 만든 새로운 대응관계에 해당하고, [과제5]는 [과제1]과 [과제3]을 연결하여 만든 새로운 대응관계에 해당하는 과제이다. [과제4]를 제시할 수 있었던 이유는 1차시와 2차시 면담에서 학생들이 합성함수에 대한 개념을 설명할 때 두 함수를 합성하는 것이라고 표현하였는데, 그러한 것에 대한 반례를 제시하려는 목적에서 고려한 과제였다. 또한 함수가 아닌 것과 함수인 것을 연결한 것에 대하여는 어떻게 생각하는지 자연스럽게 확인할 수 있는 상황이 조성되었다고 연구자가 판단하였기 때문에 제시한 과제이다. [과제5]는 [과제4]를 대상으로 연구자와 학생들이 의사소통 진행 과정에서 상호 합의에 의하여 구성된 과제로서, [과제4]에서 학생들이 문제를 삼은 함수 g의 정의역의 원소 '4'가 대응되지 않았던 점을 해결하여 제시한 과제이다. 이때 [과제2]의 대응표는 함수가 아니므로 '$Y \xrightarrow{g} X$'와 같은 표현을 사용하면 안되지만, [Fig. 1]에서 질문한 학생이 함수가 아닌 대응관계 그림에서도 '$Y \xrightarrow{g} X$'와 같은 표현을 사용하였던 점을 고려하였다.



[Fig. 4] Tasks of interview

3. 연구 참여 학생들의 특성

연구에 참여한 학생A, 학생B, 학생C는 2017년 4월에 실시한 전국연합학력평가의 수학 성적 등급이 서로 상이한 학생들이다. 학생A는 2등급이었고, 학생B와 학생C는 동일한 지필평가에서 각각 3등급과 6등급이었다.

Merriam(1994)은 이와 같이 수학 학업 성취 수준이 상이한 연구대상을 의도적으로 선정하는 것에 대하여, 질적 연구에서 연구자가 더 많은 정보를 얻을 수 있다는 장점이 있다고 하였다. 본 연구에서도 수학 학업 성취 수준이 상이한 학생들을 대상으로 면담을 진행하기는 하였지만 연구대상들의 수학 성적은 참고자료일 뿐이며, 학생들에 의하여 구성되는 수학 개념의 질적 차이와는 관련이 없는 것으로 보고 면담을 진행하였다. 즉, 본 연구에서 학생의 반응을 논의할 때 어느 반응이 더 우수하다는 식의 평가는 하지 않았다. 연구대상들은 서울 소재 일반계 고등학교 2학년 이과 계열에 재학 중인 남학생들로서 1학년 때 연구자로부터 함수와 합성함수 및 역함수에 대하여 학습 경험이 있는 학생들이었다.

4. 자료 수집

Kwak(2014)은 사례연구를 포함한 질적 연구들은 범주로 분류하거나 수치화하는 것에 치중하기 보다는 특별한 현상의 변수들을 그것의 맥락으로부터 분리할 수 없는 상황에서 그 자체의 맥락에서 현상을 조사하기에 적합한 연구라고 하였다. 또한 Lee(2012)는 교사와 학생의 수업에서의 활동을 분석할 때 수업의 복합적인 맥락과 의미를 총체적으로 분석할 필요가 있다고 하였는데, 이러한

점을 고려하면 면담을 통하여 학생들의 활동에 대한 영상 및 음성자료, 활동지, 회의록 등을 수합하는 사례연구는 교사와 학생의 수업 활동을 분석할 때 적합한 연구로 볼 수 있다.

본 연구에서는 면담을 진행하고 여기서 발생하는 자료(영상 및 음성 자료, 전사록, 학생 활동지, 회의일지)[3]를 주로 수집하였다. 본 연구는 총 3차시의 교수실험 결과물 중에서 연구주제와 관련된 2차시와 3차시의 면담 자료를 집중적으로 분석한 것으로서, 비디오카메라 1대로 연구에 참여한 학생 세 명에 대한 수학적 활동을 촬영하였으며, 이 외에도 별도로 녹음된 오디오자료의 전사과정을 통하여 분석에 활용하였다.

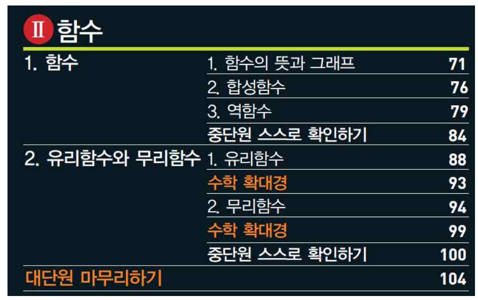
또한 면담 과정에서 학생들이 작성한 활동지와 연구자들이 작성한 현장노트 및 다음 과제를 구성하기 위한 연구자간의 회의일지를 수합하여 면담 진행 도중에 일어나는 교수학적 결정 과정과 변화의 양상을 살펴보고, 이러한 자료들을 기초로 면담의 진행과 분석 과정에서 발생했던 수정과 재구성의 이유를 ‘Ⅳ. 결과분석 및 논의’ 부분에 함께 기술하였다.

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

1. 교과서 분석

본 연구에서 논의가 되는 2019년은 학교현장에서 2009 개정 수학과 교육과정과 2015 개정 수학과 교육과정이 모두 적용되는 교육과정 변환 시기에 해당한다. 2019년에 고등학교 1, 2학년인 학생들은 2015 개정 수학과 교육과정에 근거한 9종의 ‘수학’ 교과서를 대상으로 수업을 하거나 경험했으며, 고등학교 3학년 학생들은 2009 개정 교육과정에 근거한 10종의 ‘수학Ⅱ’ 교과서를 대상으로 수업을 경험하였다.

2009 개정 수학과 교육과정에서의 총 10종의 고등학교 수학Ⅱ 교과서는 함수 개념을 학습한 이후 합성함수와 역함수를 도입하는 방식으로 구성되어있다. [Fig. 5]는 2009 개정 수학과 교육과정에서의 수학Ⅱ 교과서 1종(Lee 외, 2014)의 함수단원의 학습 목차를 나타낸 그림이다.



[Fig. 5] MathematicsⅡ in the 2009 revised mathematics curriculum, table of contents of function in textbooks

이러한 구성 방식은 2015 개정 수학과 교육과정에서의 수학 교과서들에서도 동일한 것으로 보인다. [Fig. 6]은 2015 개정 수학과 교육과정에서의 수학 교과서 1종(Hwang 외, 2018)의 함수단원의 학습 목차를 나타낸 그림이다.

[Fig. 6] Mathematics in the 2015 revised mathematics curriculum, table of contents of function in textbooks

이와 같이 본 연구에서의 논의 시점이 교육과정 변환기이기는 하지만, 학교수학에서 함수 단원의 학습 구성방식은 2009 개정 수학과 교육과정과 2015 개정 수학과 교육과정 사이에 큰 차이가 없었다.

[3] 영상과 음성 자료는 각 차시마다 파일로 수합되었으며, 수합된 자료는 <영상1>, <영상2>, <영상3>과 <음성1>, <음성2>, <음성3>으로 구분하였고 수합된 날짜는 [Table 1]에 제시하였다. 전사록은 각 차시별로 작성하여 <전사1>, <전사2>, <전사3>의 세 개의 파일로 구분하였으며, 각 차시의 전사자료는 10분 단위의 구간으로 구분하여 자료를 기록하였다. 학생 활동지와 연구자 회의일지는 해당 자료를 스캔하여 파일로 각각 저장하였으며, 각각 <학생1-1차>, <학생1-2차>, …, <학생3-3차>와 <회의1>, <회의2>, <종합>으로 구분하였다. 이때 <학생1-2차>는 학생1의 2차 면담 활동지를 뜻한다. 또한 <회의1>은 1차 면담이 종료된 이후 다음 차시 면담 과제를 위한 연구자간 회의록을 뜻하며, 3차시 면담으로 종료되었기 때문에 <회의2>로 마무리 되었다. <종합>은 모든 면담이 종료된 이후 연구자간 회의를 기록한 회의록을 뜻한다.

1) 합성함수

합성함수는 2009 개정 수학과 교육과정의 수학Ⅱ 교과서(총 10종)와 2015 개정 수학과 교육과정의 수학 교과서(총 9종)의 함수 단원에서, '대응관계로 표현된 두 함수 f와 g를 순차적으로 연결한 새로운 함수'로 도입된다. 도입방식은 총 19종의 교과서 모두에서 동일한 것으로 확인되었으며, 해당 방식은 다음과 같다.

> 두 함수 $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$에 대하여 합성함수는 기호로 $g\circ f$로 나타내고 $g\circ f:X\to Z$에서 $(g\circ f)(x)=g(f(x))$인 관계를 갖는 함수이다.

또한 대부분의 교과서는 보조 설명으로 '함수 f의 치역이 함수 g의 정의역의 부분집합일 때에만 합성함수 $g\circ f$가 정의된다.'의 내용을 포함하고 있었으며, 합성 기호에 대하여 연산 관점에서 교환법칙이 성립하지 않는다는 것과 결합법칙이 성립하는 것을 도입하는 방식 역시 동일하였다. [Fig. 7]은 면담에 참여한 학생들이 학습한 2009 개정 수학과 교육과정에서의 수학Ⅱ 교과서의 합성함수 도입 관련 항목별 구성 내용을 나타낸 것이다.

항목	내용	쪽
합성 함수 도입	함수 f의 치역이 함수 g의 정의역의 부분집합이면 합성함수 $g\circ f$를 정의할 수 있다. **합성함수** 두 함수 $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$의 합성함수는 $g\circ f:X\to Y$, $(g\circ f)(x)=g(f(x))$	77 상단
교환 법칙	두 함수 $f(x)=3x+2$, $g(x)=2x-1$에 대하여 합성함수 $g\circ f$, $f\circ g$를 각각 구하면 다음과 같다. $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3x+2)=2(3x+2)-1=6x+3$ $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x-1)=3(2x-1)+2=6x-1$ 따라서 $g\circ f\neq f\circ g$임을 알 수 있다. 즉, 함수의 합성에서 교환법칙은 성립하지 않는다.	77 하단
결합 법칙	한편, 세 함수 f, g, h에 대하여 $((f\circ g)\circ h)(x)=(f\circ g)(h(x))=f(g(h(x)))$ $(f\circ (g\circ h))(x)=f((g\circ h)(x))=f(g(h(x)))$ 따라서 $(f\circ g)\circ h=f\circ (g\circ h)$이다. 즉, 함수의 합성에서 결합법칙이 성립한다.	78 상단

[Fig. 7] MathematicsⅡ in the 2009 revised mathematics curriculum, composite function configuration method

그러나 교과서에서 두 대응관계로 제시한 함수 f와 g를 연결하는 내용에서는 일부 차이가 있었다. [Table2]는 19종 교과서들의 도입부 자료에 대하여 '함수 f의 치역과 함수 g의 정의역의 포함관계'와 '두 함수 f와 g중 일대일 함수가 아닌 함수의 포함여부'를 표로 제시한 것이다.[4] 분석 대상 교과서 명칭은 연구와 직접적인 관련이 없으므로 특정 교과서의 명칭을 구분하여 언급할 필요를 제외하고는 '개정 교육과정 연도'와 연구자가 임의로 정한 순서대로 알파벳을 이용하여 제시하였으며, 논의과정에서 대표적인 교과서를 제시해야할 상황에서는 연구에 참여한 학생들이 학습하였던 교과서를 기준으로 제시하였다.

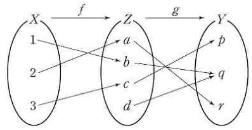
[Table 2] An analysis table of the textbook introduction materials

Order	Textbook	The relation between the domain of the function f and the domain of the function g (proper subset or same set)	Whether the two functions f and g are not one-to-one functions(include or not include)
1	2009a	proper subset	include
2	2009b	proper subset	include
3	2009c	same set	not include
4	2009d	same set	include
5	2009e	proper subset	include
6	2009f	same set	not include
7	2009g	proper subset	not include
8	2009h	proper subset	include
9	2009i	proper subset	include
10	2009j	proper subset	not include
11	2015a	proper subset	not include
12	2015b	same set	not include
13	2015c	same set	include
14	2015d	same set	not include
15	2015e	same set	not include
16	2015f	proper subset	include
17	2015g	same set	include
18	2015h	proper subset	include
19	2015i	same set	include

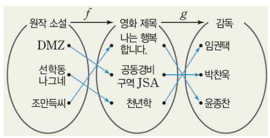
한편 [Fig. 8]은 합성함수를 도입할 때 함수 f의 치역과 함수 g의 정의역의 관계에 대한 차이를 제시한 것이다.

4) 연구자는 교과서 도입부의 활동이 학생들에게 학습 과정에서 첫 인상이 될 수 있다고 판단하였다. 이에 진부분집합 혹은 동일한 집합 판단의 대상은 각 교과서의 생각열기, 생각의 싹, 개념열기, 탐구활동 등과 같은 명칭의 도입부에 소개된 내용을 대상으로 하였으며, 해당 부분에서 명확하게 자료가 소개되지 않은 경우는 그 아래 바로 이어지는 설명에 제시된 자료를 판단 대상으로 하였다.

<유형1> 함수 f의 치역이 함수 g의 정의역의 진부분집합으로 도입한 예시 (2009 개정 교육과정의 수학Ⅱ 교과서 10종 중 8종의 교과서에서 유사한 방식으로 도입)



<유형2> 함수 f의 치역이 함수 g의 정의역이 같은 집합으로 도입한 예시 (2009 개정 교육과정의 수학Ⅱ 교과서 10종 중 2종의 교과서에서 유사한 방식으로 도입)



[Fig. 8] When introducing a composite function, the difference between the range of the function and the domain of the function

2009 개정 수학과 교육과정에서 10종의 수학Ⅱ 교과서들을 예로 들어서 살펴보면, 7종([Table 2]에서 2009a, b, e, g, h, I, j)의 교과서는 함수 f의 치역이 함수 g의 정의역의 진부분집합으로 설정하여 도입하였고, 3종(2009c, d, f)의 교과서는 함수 f의 치역과 함수 g의 정의역이 같은 것으로 설정하여 도입하였다.

이러한 장면은 2015 개정 수학과 교육과정에서 9종의 수학 교과서에서도 동일하게 발견된다. 3종(2015a, f, h)의 교과서는 함수 f의 치역이 함수 g의 정의역의 진부분집합으로 설정하여 도입하였고, 6종(2015b, c, d, e, g, i)의 교과서는 함수 f의 치역과 함수 g의 정의역이 같은 것으로 설정하여 도입하였다.

즉, 두 교육과정(2009 개정 수학과 교육과정, 2015 개정 수학과 교육과정)에서의 19종의 교과서[5]들에서 동일하게 합성함수를 다루고 있고 도입방식에서 유사한 점이 많이 있지만 도입할 때 예로 제시하는 대응관계에서는 차이가 있음을 확인할 수 있다.

교과서에서의 구성 방식에 따르면 합성함수는 두 함수를 연결하는 것이기 때문에 [Fig. 1]과 같은 대응관계가 합성함수인지에 대한 내용을 다루지 않는다. 19종의 교과서에서 '두 함수의 합성'만을 소개하는 이유는 '함수를 학습한 이후 함수들 사이의 연산에 해당하는 합성을 학습하는 구조'에 비추어볼 때 자연스러운 구성 방식으로 보인다.

2) 역함수

역함수는 19종의 교과서 모두 동일한 방식으로 도입하고 있으며, 교과서에서의 도입방식은 다음과 같다.[6]

> 함수 $f: X \to Y,\ y = f(x)$가 일대일 대응일 때, 집합 Y의 임의의 원소 y에 $f(x) = y$인 집합 X의 원소 x를 대응시키면 집합 Y를 정의역, 집합 X를 공역으로 하는 새로운 함수를 얻는다. 이 함수를 함수 $f: X \to Y$의 역함수라고 하며, 이것을 기호로 f^{-1}와 같이 나타낸다. 즉, $f^{-1}: Y \to X,\ x = f^{-1}(y)$이다.

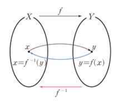
이는 앞서 Freudenthal(1983)에서 언급한 '역 구하기'과정을 강조한 것으로 볼 수 있다. 또한 19종의 교과서 모두에서는 역함수를 도입한 이후 합성함수 개념과 연결시켜서, '역함수의 성질'이라는 제목으로,

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x \quad (x \in X)$$
$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y \qquad (y \in Y)$$

와 같은 내용을 소개하고 있으며, 이를 통하여 $f^{-1} \circ f$는 집합 X에서의 항등함수이고, $f \circ f^{-1}$는 집합 Y에서의 항등함수라는 것을 언급하고 있다. 이는 합성함수에서와 마찬가지로 연산 관점에서 역함수의 의미를 설명하려한 것으로 보인다. [Fig. 9]는 면담에 참여한 학생들이 학습한 2009 개정 수학과 교육과정에서의 수학Ⅱ 교과서([Table 2]의 2009h)의 역함수 도입 관련 항목별 구성 내용을 제시한 것이다.

[5] 이후부터 2009 개정 수학과 교육과정에서의 10종의 수학Ⅱ 교과서와 2015 개정 수학과 교육과정에서의 9종의 수학 교과서를 모두 언급할 때는 '19종의 교과서'라는 표현을 사용하기로 한다.

[6] 이후 19종의 교과서 모두에서는 바로 이어서 함수 f^{-1}의 정의역을 X로 바꾸어서 $f^{-1}: X \to Y$, $y = f^{-1}(x)$로 정리하여 기술한다. 즉, 교과서에는 $x = f^{-1}(y)$와 $y = f^{-1}(x)$라는 표현이 모두 있으므로 이 둘을 명확하게 구분하기 위하여 정의역이 무엇인지 강조할 필요가 있을 것으로 보인다.

항목	내용	쪽
역함수 도입	일반적으로 함수 $f: X \to Y$가 일대일 대응이면 Y의 각 원소 y에 대하여 $f(x)=y$인 X의 원소 x는 단 하나 존재한다. 이때 Y의 각 원소 y에 $f(x)=y$인 X의 원소 x를 대응시키면 Y를 정의역으로 하고 X를 공역으로 하는 새로운 함수를 얻을 수 있다. 이 함수를 f의 **역함수**라고 하며, 이것을 기호로 $\boldsymbol{f^{-1}}$ 와 같이 나타낸다. 즉, $f^{-1}: Y \to X$, $x=f^{-1}(y)$이다. 	79
역함수 성질	위의 관계에서 다음 사실을 알 수 있다. $(f^{-1} \circ f)(x)=f^{-1}(f(x))=f^{-1}(y)=x \ (x \in X)$ $(f \circ f^{-1})(y)=f(f^{-1}(y))=f(x)=y \ (y \in Y)$ 즉, $f^{-1} \circ f$는 X에서의 항등함수이고, $f \circ f^{-1}$는 Y에서의 항등함수이다. 이상을 정리하면 다음과 같다. **역함수의 성질** 함수 $f: X \to Y$가 일대일 대응일 때 ① 역함수 $f^{-1}: Y \to X$가 존재한다. ② $y=f(x) \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ ③ $(f^{-1} \circ f)(x)=x \ (x \in X)$, $(f \circ f^{-1})(y)=y \ (y \in Y)$	80

[Fig. 9] MathematicsⅡ in the 2009 revised mathematics curriculum, inverse function configuration method

다만, 역함수를 소개한 19종의 교과서들은 역함수의 성질을 소개할 때, 함수 f의 역함수 f^{-1}가 해당 성질을 만족하는 것이라고 소개하고 있을 뿐, 그러한 성질을 만족하는 함수가 f^{-1}로 유일하다는 것을 다루고 있지는 않다. 즉, $f: X \to Y$일 때, $(g \circ f)(x)=x$ 이고 $(f \circ g)(y)=y$인 함수 $g: Y \to X$가 존재하면, 그러한 함수 g가 f^{-1}로 유일하다는 것을 다루지는 않는다.

반면 대학에서 예비수학교사를 대상으로 사용되는 교재 중 일부에서는 학교수학에서 고등학생들에게 역함수를 정의하는 방식과 다른 방식으로 다루기도 한다.

Shin(2009)은

> 함수 $f: X \to Y$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $g: Y \to X$가 존재할 때 $g: Y \to X$를 $f: X \to Y$의 역함수라고 한다.
>
> $g \circ f = I$ 이고 $f \circ g = I$

와 같이 역함수를 도입하고 있는데, 이는 역함수를 정의하고 나서 그렇게 정의된 역함수는 '역함수의 성질'을 만족한다는 학교수학에서의 도입 방식과 달리, 학교수학에서의 '역함수의 성질'을 이용하여 역함수를 정의하는 방식으로 볼 수 있다. 이러한 도입 방식에서는 논리의 완전성을 위하여 '역함수의 유일성'에 대한 논의를 포함하게 된다.

이상에 따르면 학교수학에서 역함수를 도입하는 방식 외에도 저자의 관점에 따라 다른 방식으로도 역함수를 도입할 수 있음을 알 수 있다.

한편, 19종의 교과서에서는 역함수를 구하는 방식에 대하여 모두 동일한 방식으로 도입하고 있다. [Fig. 10]은 면담에 참여한 학생들이 학습한 2009 개정 수학과 교육과정에서의 수학Ⅱ 교과서([Table 2]의 2009h)의 역함수 구하는 절차와 관련 항목별 구성 내용을 그림으로 나타낸 것이다.

$$y=f(x) \xrightarrow[x\text{에 대하여 푼다.}]{} x=f^{-1}(y) \xrightarrow[x\text{와 }y\text{를 서로 바꾼다.}]{} y=f^{-1}(x)$$

[Fig. 10] Procedure to obtain inverse function in textbook

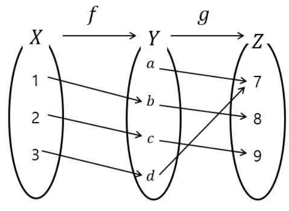
교과서에서는 모두 일대일 대응임을 확인하고 나서 함수 $y=f(x)$의 관계식을 x에 대하여 푼 다음 x와 y를 바꿔주는 절차적인 방식을 제시하고 있다.

3) 합성함수의 역함수

19종의 교과서에서는 '합성함수의 역함수'에 대한 내용을 공통적으로 포함하고 있다. 즉, 두 함수 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$에 대하여, 두 함수 f와 g에 대해서 각각 역함수 f^{-1}와 g^{-1}가 존재할 때,

$$(g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x)$$

가 성립함을 다루고 있다. 그런데 19종의 교과서들에서 합성함수를 도입할 때 역함수가 존재하는 함수들의 합성으로 제한하고 있지 않기 때문에, 두 함수 f와 g에 대해서 역함수 f^{-1}와 g^{-1}가 모두 존재하지 않는 경우의 합성함수 $g \circ f$의 역함수를 구하는 방법에 대한 문제가 제기될 수 있다. 특히 [Table 2]와 같이 2009 개정 수학과 교육과정에서 10종의 수학Ⅱ 교과서 중 6종(2009a, b, d, e, h, i)의 교과서와 2015 개정 수학과 교육과정에서 9종의 수학 교과서 중 5종(2015c, f, g, h, i)의 교과서는 두 함수 f와 g 중에서 일대일 함수가 아닌 경우를 포함하고 있는데, 이러한 합성함수에 대한 역함수 존재 여부에 대한 고민이 학생들에게서 충분히 가능할 것으로 보인다. [Fig. 11]은 19종의 교과서 중에서 일대일 함수가 아닌 함수를 포함한 합성함수를 제시한 교과서 1종(2009g)의 사례를 재구성하여 나타낸 그림이다.



[Fig. 11] Example of a textbook showing a composite function including a function rather than a one-to-one function[7]

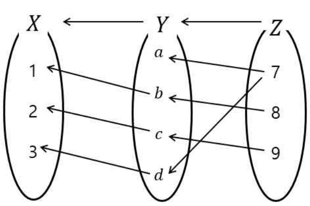
2. 교과서 분석 결과

[Fig. 11]과 같은 내용이 교과서에 소개되어있다는 것은 본 연구에 있어서 주목할 만한 부분이다. [Fig. 11]은 두 함수를 합성한 것이며 그 결과는 $g \circ f$라는 새로운 함수가 된다. 따라서 합성함수와 역함수를 이미 학습한 학생들에게 [Fig. 11]과 같은 함수에서 역함수가 존재하는지에 대한 의문은 언제든 제기될 가능성이 있다. 그리고 학교수학에서 학생들이 이러한 질문을 제기할 수 있는 학생들이 존재한다는 것은 일면 합성함수와 역함수 학습의 긍정적인 결과로 볼 수도 있다.

Freudenthal(1983)은 합성함수와 역함수를 각각 합성하기와 역 구하기라는 조작적 자산으로 보았으며, 이러한 자산이 기본적인 함수로부터 새로운 함수들을 매우 풍부하게 고안할 수 있도록 하였고, 또한 복잡한 함수를 간단한 함수로 분해하는 것을 가능하게 하거나 가역적 조작을 고려하게 함으로써 수학적 사고에 긍정적인 역할을 했다고 언급했다. 예를 들어 합성하기 조작은 두 변수 사이에 새로운 변수(매개변수)를 이용하여 또 다른 표현으로 나타내는 것(역으로 세 변수에서 매개변수를 처리하여 두 변수 사이의 관계로 나타내는 것)을 가능하게 하고, $\frac{dz}{dx}=\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)$와 같은 Chain rule에 대한 발상과 이해를 도울 수도 있다. 역 구하기 조작의 경우도 새로운 함수들의 등장에 영향을 주었을 뿐만 아니라 미분과 적분의 관계 혹은 지수함수와 로그함수의 관계를 연결하여 이해하는데 도움을 줄 수 있는 조작이다.

다시 말해서 학생들이 주어진 함수들에 대하여 합성하기와 역 구하기라는 조작을 통하여 새로운 함수가 되는지에 대하여 고민하는 것은 언제나 가능한 것으로 볼 수 있다.

그런데 [Fig. 11]에서 역함수가 존재하는지에 대한 질문을 하는 순간 앞서 [Fig. 1]에서 학생이 질문하였던 문제와 매우 유사한 문제점에 봉착하게 된다. 우선 함수 f와 g의 역함수가 존재하지 않는 문제가 발생한다. 함수 f의 역에 해당하는 대응관계에서는 집합 Y의 원소 'a'가 대응이 되지 않고 있고, 함수 g의 역에 해당하는 대응관계에서는 일가성에 대한 위배가 발생한다. 다음으로 생기는 문제는 함수가 아닌 f의 역에 해당하는 대응관계와 g의 역에 해당하는 대응관계를 서로 연결하여 생각할 수 있는지에 대한 문제가 발생한다. [Fig. 12]는 [Fig. 11]에서 역 대응관계를 그림으로 연구자가 재구성한 것이며, 역 대응관계는 함수가 되지 않으므로 함수 관계를 표현하는 부분을 삭제하였다.



[Fig 12] Example of a textbook showing a composite function including a function rather than a one-to-one function

한 가지 더 생각할 수 있는 문제는, 교수·학습 상황에서 [Fig. 11]에서 역함수가 존재하는가에 대한 질문이 결과적으로 '역함수가 존재하지 않는다.'와 '역함수가 존재한다.'라는 두 가지 반응을 가져올 수 있다는 점이다. 즉, 앞서 [Fig. 11]이 교과서 분석 과정에 근거하여 학생들에게서 충분히 제기될 수 있는 문제라 가정하면, 학생들 혹은 수학교사들이 해당 문제에 대하여 어떠한 생각을 가지고 있는지에 대한 것도 살펴볼 필요가 있음을 알 수 있다.

3. 면담 분석

1) 함수, 합성함수, 역함수 용어에 대한 학생들의 표현

면담 초기에 rapport 형성을 위하여 연구자는 학생들에게 수학적 용어들을 제시하고 이에 대하여 학생들이 서로 자유롭게 이야기하는 시간을 가졌다. 특히 면담 초기에 연구자는 "함수라는 용어는 언제 사용할 수 있는 거

7) [Fig. 11]에서 함수 g는 일대일 함수가 아니며, 이때 g^{-1}을 고려할 수 없게 된다. 그렇다면 학생들은 g^{-1}가 존재하지 않기 때문에 $g \circ f$의 역함수가 존재하지 않는다고 판단할 가능성이 있다.

야?”와 같이 열린 발문을 사용하였는데, 이는 차후 면담의 원활한 진행을 위한 것이었다. 즉, 의사소통의 주도권이 어느 특정 학생 쪽으로 치우치지 않도록 하기 위한 연구자의 의도였다. 이러한 과정을 거치면서 1차 면담 종료 시점 즈음에 학생들은 면담 시작 당시 보다 자신의 생각을 표현하는 것에 적극성을 가지게 되었으며, 다른 학생의 견해에 동의할 때는 동의하는 이유를 제시하게 되었고, 동의하지 않을 때는 동의하지 않는 다는 것을 말하는 것에 한층 더 자연스러워 진 것으로 보였다.

한편 연구자는 학생들에게 함수, 합성함수, 역함수 등의 용어에 대하여 자신들의 생각을 다른 사람에게 전달할 수 있도록 적어보도록 하였는데, 이는 앞서 연구자가 학생들에게 하였던 초기 질문인 “함수라는 용어는 언제 사용할 수 있는 거야?”라는 질문에 기인한다. 연구자가 한 질문에 대하여 1차시 면담 후반부와 2차시 면담 전반부에 학생들이 상호간에 답변과 질문의 과정이 활발하게 이루어졌었다. 학생A는 시간-거리 함수를 예로 들어서 ‘시간을 대입하면 물체가 이동하는 거리가 나오는 관계’를 이야기할 때 함수를 사용한다고 하였으며, 더 나아가서 거리-속력의 함수는 ‘거리를 대입하면 물체의 속력이 나오는 관계’라고 답을 하였다. 이때 학생A의 답변을 듣고 있던 학생C가 연구자와 다른 학생들을 향해서 시간-거리 함수와 거리-속력 함수를 연결해서 얻어지는 시간-속력 함수가 합성함수인지를 질문하게 되었는데, 연구자는 이 시점에 개입하여 학생들이 사용하였던 함수, 합성함수라는 용어에다 역함수를 포함시켜서 각 용어에 대하여 자신들이 생각하는 바를 적어보도록 요구하게 되었다.

연구에 참여한 학생들이 제시한 함수, 합성함수, 역함수의 용어의 뜻에 대한 학생들의 표현을 각각 살펴보면 다음과 같다.

학생A는

- 함수 : 정의역의 원소가 빠짐없이 치역의 원소 하나에만 대응되는 관계
- 합성함수 : $y=f(g(x))$와 같이 어떤 함수의 함숫값이 다른 함수의 정의역이 되는 함수
- 역함수 : 증가함수이거나 감소함수일 때, $a \le x \le b$에서 $x=f(y)$인 함수

라고 표현하였으며,

학생B는

- 함수 : 정의역의 원소가 빠짐없이 치역의 원소 하나에만 대응되는 관계
- 합성함수 : $f(g(x))$와 같이 함수 두 개를 합성한 것
- 역함수 : 함수 $f(x)$의 그래프가 $y=x$에 대칭인 함수를 함수 $f(x)$의 역함수라 함

이라고 표현하였다. 마지막으로 학생C는

- 함수 : 정의역의 원소가 빠짐없이 치역의 원소 하나에만 대응되는 관계
- 합성함수 : $f(g(x))$와 같이 두 개 이상의 함수를 합성한 것
- 역함수 : 어떤 함수를 $y=x$를 기준으로 대칭이동한 것

이라고 표현하였다. [Table 3]은 학생들의 표현을 제시한 그림이며, 함수에 관한 것은 학생들이 교사와의 대화중에 말로 표현된 것을 기록하였고, 합성함수와 역함수는 학생들이 남긴 기록을 제시한 것이다.

[Table 3] A table showing students' expressions about ‘function’, ‘composite function’, ‘inverse function’

	student1	student2	student3
function	정의역의 원소가 빠짐없이 치역의 원소 하나에만 대응되는 관계		
composite function	정의역이 어떤 함수의 함숫값이 되는 함수 $y=f(g(x))$	두개는 합성한 것 ex) $f(x)$ 와 $g(x)$는 합쳐서 $f(g(x))$라는 식을 만든다. $f \circ g(x)$	2개이상의 함수를 합성한것 $f(g(x))$
inverse function	함수 $y=f(x)$가 $a \le x \le b$ 에서 증가함수거나 감소함수 일때 $a \le x \le b$에서 $f(y)=x$ 꼴이 되는 함수	$f(x)$ 그래프가 $y=x$ 에 대해 어떤 함수를 ... 역함수라 한다.	어떤함수를 $y=x$ ~~[illegible]~~를 기준으로 대칭한것

학생들이 사용하였던 표현에 대하여 해당 차시 면담이 종료된 이후 연구자와 연구보조교사는 해당 차시 면담의 영상(<영상2>, 2017.07.26.)과 전사록(<전사2>, 2017.07.26)을 분석하는 과정에서 학생들의 각 용어에 대하여 정의한 바를 비교하여 살펴보았다. 이 과정에서 각 용어들에 대한 학생들의 표현에서 상호 공통점과 차이점을 살펴보았고, 특히 학생들의 표현에 근거하여 학생들이 각 용어에서 가지고 있는 주요 생각이 무엇인지에 대하여 연구자들 입장에서 해석하는 기회를 가졌다.

우선 ‘함수’라는 용어에 대하여는 세 명의 학생 모두 정의역의 원소에 대한 대응규칙을 이용하여 ‘함수’를 정의하였다. 즉, 학생들이 제시한 기준에 따르면 학생들은 정의역이 무엇인지 확인한 다음 그 정의역의 원소들이 함

수의 대응규칙에 맞는지를 확인하는 방식으로 함수 여부를 판단해야한다. 연구자들은 추후 면담 과정에서 학생들이 자신들이 제시한 정의대로 함수 여부를 판단하는지 확인할 수 있는 과제를 제시하기로 합의하였다.

'합성함수' 용어에 대한 학생들의 정의를 살펴보면, 공통적으로 '$f(g(x))$'라는 표현이 관찰되었으며 함수들을 대상으로 '합성함수'를 만들어낸다는 표현이 관찰되었다. 특히 연구자들이 보기에 학생B와 학생C는 '합성함수'를 설명할 때 '합성'이라는 용어를 이용하여 표현하는 것이 관찰되었는데, 이때 학생들이 사용한 '합성'이라는 용어가 '$f(g(x))$'와 연결된 용어로 보였다. 다만, 다른 두 학생과 달리 학생A는 '합성함수'를 정의할 때 '$f(g(x))$'라는 표현을 사용하였지만, '합성'이라는 용어를 사용하지 않고, '함수'를 정의할 때 사용하였던 것과 유사하게 정의역이라는 용어를 사용하여 '합성함수'를 정의하는 모습을 보여주었는데, 연구자들은 이러한 차이가 '합성함수' 여부를 판단할 때 어떠한 차이를 보여줄 것인지에 대하여는 추후 확인하기로 하였다.

'역함수' 용어에 대한 학생들의 정의에서는 '학생B와 학생C의 표현'과 '학생A의 표현'에서 두드러진 차이가 관찰되었다. 학생B와 학생C는 직선 $y=x$에 대칭인 새로운 함수를 주어진 함수의 역함수로 정의한 반면, 학생A는 다른 두 학생과는 전혀 다른 표현을 사용하여 정의하였다. 학생A의 표현에서 연구자들이 주목한 부분은 '증가함수이거나 감소함수일 때'라는 표현과 정의역을 $a \le x \le b$로 제한한 점 그리고 '$x=f(y)$'라는 표현을 사용하였다는 점이다. 2차시 면담 종료후 연구자들의 해당차시 영상(<영상2>, 2017.07.26.)과 전사록(<영상2>, 2017.07.26.) 및 학생 활동지(<학생1-2차>, <학생2-2차>, <학생3-2차>)를 분석한 것과 3차시까지의 면담이 종료된 이후 전체 차시의 면담 자료를 종합적으로 분석하는 과정(<종합>)에서 학생A의 역함수에 대한 표현을 연구자들의 관점에서 이해하는 시간을 가졌었다. 특히 학생A의 표현을 교과서에서 역함수를 정의할 때의 표현과 비교하여 살펴보면, '증가함수이거나 감소함수일 때'라는 표현은 교과서에서의 '일대일 대응'이라는 표현과 연관되는 것으로 보이며, $x=f(y)$라는 표현은 교과서에서의 $y=f^{-1}(x)$라는 표현과 연관되는 것으로 보인다. 학생A가 역함수를 대수적으로 표현한 $x=f(y)$는 학생A가 사용한 교과서(2009 개정 수학과 교육과정에서의 수학Ⅱ 교과서)에서 역함수를 대수적으로 표현한 $x=f^{-1}(y)$와 차이가 있었다. 교과서에서는 $y=f(x)$의 역함수를 $x=f^{-1}(y)$로 표현하고 있으며 이 표현 속에는 함수 $y=f(x)$의 치역이 역함수의 정의역이 된다는 의미를 포함하고 있다. 교과서의 표현대로 역함수를 구하기 위해서는 $y=f(x)$라는 식을 x에 대하여 먼저 풀어낸 다음 x와 y를 바꾸어 주어야한다(혹은 x와 y를 바꾸어 준 다음 이를 y에 대하여 풀어내야한다.).

예를 들어 $y=2x$의 역함수를 구하기 위해서는 $y=2x$를 $x=\frac{y}{2}$로 바꾼 다음 x와 y를 바꾸어 주어서 $y=\frac{x}{2}$를 구하게 된다. 그러나 학생A의 $x=f(y)$라는 표현은 x와 y를 바꾸는 것에서는 동일하지만 이후 이 식을 y에 관하여 정리하는 과정이 생략된 것으로 보인다. 학생A가 표현한 방식에 근거하여 $y=2x$의 역함수를 표현해보면 $x=2y$가 된다.

2차시 면담 자료를 분석하는 연구자들 회의에서 연구보조교사는 2차시 면담 영상 중 '학생A가 함수 $y=f(x)$의 역함수를 $x=f(y)$로 표현하였을 때 면담을 진행하는 연구자가 당황하는 장면'을 지적하면서, 실제 당황한 것인지 아니면 학생의 반응에서 새로운 질문거리를 고민하는 장면인지를 확인하였다. 연구보조교사의 지적과 같이 당시 연구자는 학생A의 표현이 익숙하지 않은 표현이어서 연구자 혼자 생각으로 '$y=2x$를 예로 들어서 점 해당 함수의 그래프 위의 점(1,2)가 학생A 방식으로 구한 역함수 $x=f(y)$에 넣었을 때 성립하는지 학생들에게 물어보면 어떨까?'를 고민 중이었다. 학생A의 방식으로 역함수를 구하면 $x=2y$가 되는데, 다른 학생들은 역함수를 정의할 때 '$y=x$에 대한 대칭'으로 정의하였기 때문에 만약 이렇게 구한 역함수에 점(2,1)을 대입하면 등식이 성립하지 않게 되기 때문이다. 즉, 학생A의 표현에서 정의역이 무엇인지는 매우 중요한 역할을 하게 되는데, 학생A의 표현에서 그러한 부분을 강조한 부분은 발견되지 않았다. 그럼에도 연구자는 학생A의 역함수의 표현을 교과서와 비교하였을 때 교과서에서 제시하는 두 가지 표현

$$f^{-1}: X \to Y,\ y=f^{-1}(x)$$
$$f^{-1}: Y \to X,\ x=f^{-1}(y)$$

과는 또 다른 표현이라 생각하였다. 그러나 2차시까지의 면담 자료에서는 학생A를 포함하여 다른 두 학생들까지도 합성함수와 역함수를 표현할 때 정의역이 무엇인지 명확하게 명시하지 않았기 때문에 이러한 부분에 대하여는 추후 합성함수 여부와 역함수 여부를 판정할 때 어떠한 장면으로 나타날 것인지 살펴보기로 하였다.

한편 학생A의 교과서와 구분되는 또 다른 표현인 '정의역을 $a \le x \le b$으로 제한'하여 표현한 것에서도 연구자들은 해석상의 어려움을 겪었다. 이 부분에 대하여 연구자들은 제한된 면담 자료로 해석하기에는 어려움이 있지만, 학생A가 원래함수의 정의역을 표현하고자 했을 가능성이 있는 것으로 판단하였다.

2) 과제별 학생들의 함수, 합성함수, 역함수 존재 여부에 대한 생각

(1) [과제1], [과제2], [과제3]에 대한 함수 여부 판정

2차시 면담에서 '함수', '합성함수', '역함수'의 뜻에 대한 학생들의 표현을 살펴본 이후, 연구자는 2차시 면담 자료(영상, 전사록, 학생 활동지)를 분석하는 과정에서 연구보조교사와 논의 끝에 3차시 초기 면담 과제로 세 개의 과제를 제시하고 함수 여부를 묻는 과제를 제시하였다. 이는 학생들이 자신들이 정의한 '함수'의 정의에 따라 실제 함수 여부를 판단하는지 확인하는 것에 목적이 있었다.

연구자가 제시한 세 개의 과제에 대하여 각각 [과제1]과 [과제3]은 함수가 되고, [과제2]는 함수가 되지 않는다. 세 명의 학생들도 제시된 세 개의 과제에 대하여 상호일치된 의견을 제시하였으며 함수 여부에 대한 판정도 수학적으로 옳게 판단하였다. 또한 함수가 되는 이유와 되지 않는 이유에 대하여도 동일한 방식으로 답을 하였는데, [과제1]과 [과제3]은 정의역에 남는 원소가 없고 동시에 하나의 원소에만 대응된다는 점을 제시하였으며 [과제2]는 정의역의 원소 중 '4'에 대응하는 원소가 없기 때문에 함수가 되지 않는다고 판단하였다. 이상에서 학생들의 함수 여부 판정에 있어 정의역의 원소 중에서 남는 것이 있는지와 하나의 원소에 대응되는지가 중요한 판정 기준임을 확인할 수 있었으며, 이는 학생들이 정의한 방식대로 함수 여부를 판단하고 있음을 보여준다.

(2) [과제4]와 [과제5]가 합성함수인지 여부에 대한 학생들의 생각

3차시 면담에서 연구자는 학생들에게 [과제1]과 [과제2]를 연결해보고 [과제1]과 [과제3]을 연결하여 각각 [과제4]와 [과제5]를 구성하여 학생들과 합성함수 여부에 대하여 논의하였다. 특히 이 과정에서 연구자는 학생들의 합성함수 여부 판단 자체에도 관심을 가지고 살펴보았지만, 그러한 판단에 대한 학생들의 설명 혹은 표현에 더 주목하여 의사소통을 진행하였다. 따라서 학생들의 판단과 설명은 의사소통 과정에서 수정 혹은 보완되는 과정을 거치게 되었으며, 본 절에서는 그러한 변화와 수정에 대한 분석에 초점을 맞추어 살펴보았다.

[과제4]와 [과제5]가 합성함수인지에 대한 학생들의 초반 반응을 살펴보면, 학생A와 학생B는 두 과제는 합성함수가 아니라고 답을 하였고 학생C는 잘 모르겠다는 표현으로 답하였다. 또한 학생A는 두 과제가 합성함수가 아니라고 판단한 이유에 대하여,

> "합성함수는 치역이 정의역이 되니까 정의역은 그 범위에서 모든 실수가 되어야만 해요. 치역도 모든 실수가 되어야하는데, 치역에서 4를 빼고 $1, 2, 3$만 되니까..."

라고 설명하였는데, 다른 두 학생들도 학생A의 설명에 동의하였다. 학생A의 설명을 살펴보면 정의역과 치역이라는 용어를 반복적으로 사용하고 있는데 무엇의 정의역이고 치역인지를 명시하지는 않았다. 이에 연구자가 학생A의 표현에 대하여 생략된 표현을 재구성해보면, '$(g \circ f)(x) = g(f(x))$이므로 $f(x)$는 함수 g의 정의역이고 이는 함수 f의 치역이다. 그런데 함수 g의 정의역 중에서 원소 '4'는 함수 f의 치역이 아니기 때문에 두 과제는 합성함수가 아니다.'로 표현한 것으로 보였다.

즉, 학생A는 합성함수가 되기 위해서는 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$에서 함수 f의 치역과 함수 g의 정의역이 일치되어야한다고 표현한 것으로 볼 수 있으며, 다른 두 학생들도 그러한 관점에서 학생A의 표현을 받아들인 것으로 보였다.

연구자는 학생A의 표현에서 정의역과 치역을 언급할 때 무엇의 정의역과 치역인지를 불명확하게 대답하였기에 이를 확인할 필요가 있다고 판단하였다. 그래서 학생

A에게 두 과제의 합성함수 여부 대해서 이야기할 때 ‘어떤 함수의 함숫값이 어떤 함수의 정의역이 되는 함수’라고 했었는데, 두 과제의 정의역은 무엇인지에 대하여 명확히 표현해달라고 요구하였다. 연구자의 요구에 대하여 학생A는 별다른 고민 없이 X를 두 과제의 정의역이라고 답을 하였고, 이에 연구자가 바로 이어서 합성함수를 판단할 때는 그 판단하고자 하는 함수의 정의역을 가지고 생각해야하는 것이 아닌지에 대하여 지적하였으며, 학생A는 연구자의 지적에 한참을 고민하는 모습을 보여주었다. [대화]는 [과제4]와 [과제5]의 합성함수 여부에 대한 학생들과 연구자의 대화를 제시한 것이다.

[대화] : <전사3>, 2017.07.26

교사 : 이 과제([과제4])를 볼래요? 이 과제([과제4])는 함수인가요? 그리고 이거 합성함수에요? 각자의 기준대로 봤을 때 이거 합성함수에요? 한번 각자 기준대로 판단 해봐요?

학생A : 아니에요.

학생B : 저도 아닌 것 같아요.

학생C : 잘 모르겠어요.

교사 : 학생C는 잘 모르겠다고?

학생C : 네

교사 : 아래 있는 [과제5]는 합성함수인지 아닌지? 본인 기준대로?

학생A : 아니에요.

학생B : 네

교사 : 이것도 합성함수가 아니에요? 그러면 아닌 이유를 좀 설명해줄래요. 왜 아니라고 생각해요?

학생A : 그 합성함수는 치역이 정의역이 되니까 정의역은 그 범위에서 모든 실수가 되어야하니까 치역도 모든 실수가 되어야하는데 치역이 4를 빼고 1,2,3만 되니까...

교사 : 다시 해볼래요. 내가 설명을 못 따라가서...

학생A : 합성함수가 치역이 정의역이 되잖아요.

교사 : 응. 너의 표현에 의하면 그렇게 되요. 그런데?

학생A : 근데 정의역은 함수에서 모든 실수가 범위 안에서 모든 실수가 정의역이 되어야하는데... 그러니까 정의역이 되어야하는 치역이 4를 빼고 1, 2, 3만 되니까...

교사 : 이 함수(함수 f)의 함숫값이야. 이것들(1, 2, 3)은...

학생A : 네

교사 : 그 함숫값이 이 함수(함수 g)의 정의역이 되었죠?

학생A : 네

교사 : 그러면 되는 거 아니야?

학생A : 네. 지금은 여기(함수 g)부터 시작해서 가야하는데 4가 절대 갈 수 없잖아요.

교사 : 4가 비어있다?

학생A : 네

교사 : 너희들이 생각하는 합성함수의 정의역이 뭐에요? $f(x)$가 합성함수의 정의역이 되는 거야?

학생B : f의 치역이요.

교사 : 그게 정의역이 되는 거야?

학생C : $f(x)$가 정의역이 되는 것 아니에요?

교사 : 학생B도 그렇게 쓰기는 했는데... 학생A는 어떤 함수의 함숫값의 정의역이 되는 함수를 합성함수라고 했단 말이야. 그 때 정의역이 어떤 함수의 정의역이냐고?

학생A : g라는 함수의 정의역이요.

교사 : 그러면 합성함수의 정의역은 뭐야?

학생A : X요.

교사 : 합성함수의 정의역이 X라고? g라는 함수의 정의역이 $f(x)$?

학생A : 네

교사 : 그러면 합성함수의 정의역이 X야. 그러면 이 값(함수 $g(f(x))$의 치역)은?

학생A : 합성함수의 치역이요.

교사 : 원래 함수는 정의역과 치역만 가지고 이야기한 것 아니야? 아까 함수 정의대로 하면 합성함수에서 어떻게 되는 거야?

학생들 : (고민 함)

이러한 고민 과정을 거친 이후 학생A는 이전 자신의 표현을 수정하여 [과제4]가 함수가 된다고 답하였다. 연구자는 학생A가 [과제4]에 대하여 ‘합성함수’가 아닌 ‘함수’가 된다고 표현한 것에 주목하였고, 다시금 [과제4]가 합성함수는 아닌지를 확인하였다. 연구자가 학생A가 [과제4]에 대하여 함수라고 판단한 이후에 질문을 다시 하여 확인한 이유는 학생A가 이전에 [과제4]가 합성함수가 아니라고 답하였던 이유가 [과제4]가 함수가 되지 않았기 때문에 합성함수도 될 수 없다고 답하였을 가능성이 있기 때문이었다. 한편으로는 교과서에서 합성함수는 함수들을 대상으로 정의하고 있고, 다른 두 학생들은 합성함수를 설명할 때 이 부분을 명시하였지만 당시 학생A는 자신의 합성함수 표현에서 이 부분을 명시하지 않았던 점도 고려하였다. 이러한 이유들 때문에 연구자는 [과제4]를 함수라고 답한 학생A가 [과제4]를 합성함수로 판단하는지 여부를 확인할 필요가 있었다. 연구자의 질문에 대

하여 학생A는 [과제4]가 함수가 되기는 하지만 여전히 합성함수는 아니라고 답하였으며, 그 이유에 대하여

> "합성함수는 두 함수를 합성하는 것인데, [과제4]에서 g의 대응관계는 함수가 아니기 때문에 [과제4]는 합성함수가 아니다." (<전사3>, 2017.07.26.)

라고 표현하였다. 반면에 학생B는 [과제4]가 함수이지만 합성함수가 아니라고 표현한 학생A의 표현과 달리, 자신은 [과제4]가 함수이면서 동시에 합성함수도 된다고 표현하였다. 이는 학생B가 합성함수를 정의할 때 '함수 두 개를 합성'이라는 표현을 사용하여 정의하였던 점을 고려하면, 문맥상 모순이 되는 부분이 발생한다. 그러나 교사가 이러한 부분에 대하여 질문하기 전에 학생C가 자신도 학생B의 견해에 동의한다고 표현해서 이 부분에 대한 확인을 하지 못하였다.

[과제4]의 합성함수 여부에 대한 논의가 마무리 된 이후 세 명의 학생들은 처음 생각을 수정하여 [과제5]가 합성함수가 된다고 하였다. 특히 이 과정에서 학생B는 이전에 자신이 [과제4]가 합성함수라고 하였을 때의 문제점을 인지하고 나서 다른 학생들에게 '합성함수'라는 표현 대신 '합성된 함수'라고 표현을 하면 [과제4]도 포함시켜서 논의를 진행할 수 있을 것 같다는 의견을 제시하였다. 연구자는 학생B에게 학생B가 사용한 '합성'이라는 용어가 무엇인지 설명해달라고 요구하였고, 학생B는 자신은 '$x \rightarrow f(x) \rightarrow g(f(x))$와 같은 절차'를 '합성'으로 본다고 하였다. 그렇기 때문에 자신은 [과제4]가 '합성된 함수'로 표현할 수 있다고 하였다. 이러한 학생B의 의견에 대하여 다른 두 학생들도 [과제4]를 '합성된 함수'로 부르는 것에 동의하는 모습을 보여주었다. 이에 연구자는 '합성된 함수'라는 표현과 이를 반영하여 면담을 진행하는 것에 대하여 수학적으로 문제가 될 수 있으나, 학생들의 합의에 의하여 자연스럽게 제기된 표현이라는 점을 고려하여 학생들의 구성과정에서의 표현을 따라 면담을 계속 진행하였다.

(3) [과제4]와 [과제5]의 일대일 대응 여부에 대한 학생들의 생각

3차시 면담 이전에 학생A는 역함수의 정의를 표현하는 과정에서 다른 두 학생들과 달리 '증가함수이거나 감소함수일 때'라는 표현을 사용하였었다. 연구자는

> "학생A의 역함수 정의에 대한 표현에서 '증가함수이거나 감소함수'라는 표현은 어떤 의미가 있는가?"(<전사3>, 2017.07.26.)

라는 질문을 통하여 이러한 점을 연구대상들에게 상기시켰다. 연구자의 질문에 대하여 학생B와 학생C는 해당 조건과 일대일 대응을 연결 지어 생각하는 모습을 보여주었다.

그런데 이 과정에서 학생C는 "일대일 대응이면 역함수가 존재해요."라는 표현을 사용하였는데, 19종의 교과서에서는 일대일 대응과 역함수의 관계를 필요충분조건으로 소개하고 있는 반면, 학생C의 표현은 일대일 대응 조건을 역함수가 존재하기 위한 충분조건으로 표현한 것이기 때문에 연구자는 이 부분에 대하여 확인하는 질문을 학생들에게 하였다.

연구자는 "일대일 대응이 아니면?"이라고 다시 질문을 하였는데, 연구자의 질문에 대하여 학생들은 역함수가 존재하지 않는다고 하였다. 특히 학생C는 이전 표현을 수정하여 "일대일 대응이어야만 역함수가 존재하는데"라고 표현하였으며, 연구자는 이러한 표현을 통하여 학생C가 일대일 대응 조건을 역함수가 존재하기 위한 필요충분조건으로 인식하는지에 대한 것은 확실하지 않으나 일대일 대응 조건을 역함수 존재 여부를 판단하는데 있어 매우 중요한 선결 조건으로 인식하고 있는 것으로 정리하여 면담을 진행하였다.

이어서 연구자는 연구대상에게 [과제4]와 [과제5]가 일대일 대응인지를 물어보았고, 연구자의 질문에 대하여 학생C는 [과제4]에서 정의역의 원소 중 '4'를 대응시킬 수 없기 때문에 일대일 대응이 아니라고 답하였다. 학생B도 학생C의 의견에 동의하면서 같은 이유로 [과제5]도 일대일 대응이 아니라고 표현하였다. 반면 학생A는 두 학생의 이야기를 들으면서 별다른 의견을 표현하지 않았다. 연구자는 학생C와 학생B의 표현에서 이전에 학생A가 [과제4]가 함수인지 여부를 판단하는 과정에서 보여주었던 것과 마찬가지로 학생B와 학생C가 함수 f와 함수 g의 합성함수 $(g \circ f)(x)$에서 정의역을 $f(x)$로 인식하고 있기 때문에 제시된 표현이라고 판단하였다. 연구자가 이렇게 판단한 이유는 이미 이전에 [과제4]의 합성함수 여

부를 판단하는 과정에서 비슷한 장면을 확인하였기 때문이다.

이에 연구자는 앞서 학생A가 [과제4]를 함수로 보지 않았을 때와 마찬가지로 학생B와 학생C에게 [과제4]에서의 정의역이 무엇인지를 질문하였고, 연구자의 질문을 듣고 잠시 생각을 하던 두 학생들은 이전 표현을 수정하여서 [과제4]와 [과제5]가 일대일 대응이라고 표현하는 변화를 보여주었다.

(4) [과제4]와 [과제5]의 역함수 존재 여부에 대한 학생들의 생각

앞서 학생들은 일대일 대응이면 역함수가 존재한다고 표현하였다. 따라서 연구자는 3차시 면담을 진행의 흐름을 고려할 때 [과제4]와 [과제5]가 일대일 대응이라고 반응을 보인 시점에서 '두 과제의 역함수가 존재하는지 묻는 것'이 자연스러운 질문이라 생각하였다. 이에 연구자는 학생들에게 [과제4]와 [과제5]는 역함수가 존재하는지에 대하여 질문을 하였다. 연구자의 질문에 대하여 세 명의 학생들 모두는 '[과제4]는 역함수가 존재하고, [과제5]는 역함수가 존재하지 않는 것'으로 답을 하였다.

[과제5]가 역함수가 존재하지 않는 이유에 대하여 학생A, 학생B, 학생C 각각은

- 학생A : 3을 넣었을 때 어디로 가야할지 값이 안 나와요.
- 학생B : x값 한 개에 y값 두 개가 대응되면 함수가 아니에요.
- 학생C : 3을 넣으면 y값이 두 개에요.

라고 답을 하였다. 이는 [과제5]에서 h의 대응관계에 의하여 Y의 원소 '3'과 '4'가 모두 X의 원소 '3'에 대응된 것을 의식한 표현으로 볼 수 있다. 이러한 대응관계를 역으로 대응시킬 때 X의 원소 '3'이 Y의 원소 '3'과 '4'에 동시에 대응이 되는데 학생들은 이 경우를 함수 관계로 볼 수 없다고 판단한 것이다.

이는 이전에 [과제4]와 [과제5]가 합성함수인지에 대하여 판단할 때, 합성된 전체의 대응관계에서 함수 여부를 판단하지 않고 각 단계마다 함수 여부를 판단하려고 하였던 것과 유사한 것으로 볼 수 있다.

이에 연구자는 "일대일 대응이면 역함수가 존재한다고 하지 않았나?"라고 질문을 함으로서 학생들의 이전 표현과 현재의 판단에 차이가 있음을 언급하였다. 연구자의 질문에 대하여 학생A와 학생C는 잘 모르겠다고 답을 한 뒤에 침묵하면서 고민하는 모습을 보여준 반면, 학생B는 다른 두 학생들과 달리

> "맞다. 일대일 대응이면 역함수가 존재해야만 하는데, [과제5]는 역함수가 존재하지 않는다. 지금 생각해보니 [과제5]는 일대일 대응이 아닌 것 같다." (<전사3>, 2017.07.26.)

라고 답을 하였다.

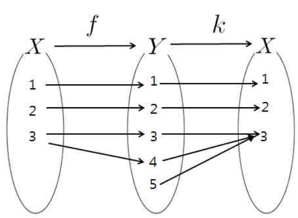
이 대목에서 연구자는 학생B의 반응에 주목하였다. 연구자는 학생B의 반응에 대하여, 학생B가 자신이 참이라고 알고 있던 '$p \Rightarrow q$'라는 명제에서 $\sim q$를 확인하였을 때, $\sim p$라는 반응을 보임으로서 기존에 자신이 참이라고 알고 있던 '$p \Rightarrow q$'라는 명제를 보호하려는 모습을 보여준 것으로 판단하였다. 즉, 학생B는 [과제5]가 역함수가 존재하지 않는 것이라는 확신을 가진 것으로 볼 수 있으며, 이렇게 될 경우 역시 학생B의 입장에서는 확신을 가지고 있는 또 다른 지식인 '일대일 대응이면 역함수가 존재한다.'는 것에 문제가 발생한다. 학생B는 [과제5]가 역함수가 존재하지 않는 다는 확신과 또 다른 확실한 지식 '일대일 대응이면 역함수가 존재한다.'를 지키기 위하여 [과제5]가 일대일 대응이라는 것을 부정하는 방식을 선택한 것이다. 이는 학생B의 입장에서 볼 때, [과제5]의 역함수가 존재하지 않는다는 것이 [과제5]가 일대일 대응이라는 것 보다 더 확실하게 여겨지는 지식이라는 것을 추측할 수 있게 해준다. 이러한 학생B의 설명이 마무리 될 때까지도 다른 학생들은 별다른 이야기를 하지 못하고 고민하는 모습을 보여주었다.

그러나 이후 학생A는 [과제5]에 대하여 역함수가 존재한다고 하였으며, 그 이유에 대하여 함수 h는 역함수가 존재하지 않지만 함수 $h \circ f$는 역함수가 존재한다고 설명하였다. 학생A의 설명에서 핵심이 되는 부분은 $h \circ f$의 역함수 존재 여부를 판단할 때 문제가 되는 X의 원소 '3'이 중간 과정에서 대응될 때는 Y의 원소 '3', '4'에 대응이 되지만 결과적으로 다시 X로 대응이 되는 과정에서 Y의 원소 '4'는 X의 원소로 대응이 되는 것이 없고 Y

의 원소 ‘3’은 X의 원소 ‘3’으로 대응이 되기 때문에 역함수가 존재한다는 논리이다.

모든 면담이 종료된 이후 전체 면담을 종합적으로 분석하는 연구자들 회의(<종합>)에서 연구자와 연구보조교사는 이러한 학생A의 논리가 앞서 [과제4]에서 학생A가 $g \circ f$에서 대응관계 f와 대응관계 g를 구분하여 차례로 살펴보던 것에서 이후 $g \circ f$라는 것을 하나의 대응관계로 인식하는 것으로 변한 것에 기인한 것으로 판단하였으며, 이때 정의역이 무엇인지를 고민하게 한 질문이 영향을 주었을 수 있다고 추측하였다. 즉, 학생A가 사용한 표현 중 ‘h의 역함수는 존재하지 않지만’이라는 표현에 근거하면, 학생A의 논리는 [과제5]에 대하여 역함수의 정의역과 최종적으로 대응되는 역함수의 함숫값 사이의 관계만을 보겠다는 것으로 받아들여졌다.

학생C는 학생A의 설명을 듣고 나서 이해했다는 표현을 하면서 동의하였으나, 학생B는 학생A의 설명을 듣고 나서도 한 동안은 동의하지 않았다. 오히려 하나의 예를 구성하여 학생A에게 “이러한 경우는 설명할 수 없잖아?”라고 물어보는 모습을 보여주었다. 학생B가 제시한 예는 Y의 원소 ‘4’도 X의 원소 ‘3’으로 대응이 되는 것으로서, 이중으로 대응되는 예를 통하여 반례를 제시하려 한 것으로 추정된다. [Fig. 13]은 학생B가 구성한 예를 연구자가 재구성하여 제시한 것이다.



[Fig 13] A picture of the correspondence relationship, student B presents to student A

그러나 학생B가 제시한 대응관계 그림에 대하여 학생A는 자신의 관점에서는 학생B가 제시한 대응관계 역시 역함수가 존재한다고 하였다. 학생A는 역으로 가는 과정을 볼 때 X의 원소 ‘3’이 Y의 원소 ‘3’, ‘4’, ‘5’에 각각 대응되고 있지만 결과적으로 마지막에는 ‘3’으로 대응되고 있기 때문에 $f^{-1} \circ k^{-1} : X \rightarrow X$는 함수가 된다는 자신의 견해를, 학생B에게 설명하여 주었다. 이러한 학생A의 설명을 다시 듣고 난 이후 학생B도 학생A의 견해에 동의하는 모습을 보여주었다.

4. 면담 분석 결과

본 연구에서 면담은 [Fig. 1]에서 학생이 제시한 질문에 대하여 더 풍부한 해석을 하기 위한 목적으로 실시되었다. 앞서 언급하였듯이 3차시의 면담을 통하여 세 명의 적은 학생들을 대상으로 진행하였다는 제한점은 있지만, 학생들이 보여준 일련의 구성 과정을 살펴보면 본 연구에 시사해주는 바가 있었다.

우선 제시된 과제들에 대하여 함수 여부를 판단할 때, 학생들이 임의성과 일가성에 근거하여 판단하는 것이 관찰되었다. 다만, 이러한 판단 기준에 근거하여 [과제4], [과제5]와 같이 합성된 새로운 대응관계의 함수 여부 판정하는 것에는 어려움을 겪는 것으로 관찰되었다. 특히 학생들은 해당 과제들에서 두 대응관계를 연결하여 얻어진 새로운 대응관계를 전체적으로 보고 함수 여부를 판정하는 것이 아니라 각 대응관계를 구분하여 그 부분들이 이어지는 것으로 보았으며, 이 과정에서 정의역에 대한 인식이 바뀌는 모습이 관찰되었다. 즉, [과제4]에서 새롭게 얻어진 대응관계 그림에 대하여 학생들은 처음에는 함수 f의 정의역인 X를 해당 대응관계의 정의역으로 생각하지만, 다음 과정을 거치면서 함수 g의 정의역인 Y를 새롭게 얻어진 대응관계의 정의역처럼 생각하게 되면서 대응되지 않는 원소 ‘4’에 대하여 고민하는 모습을 보여주었다.

다음으로 학생들이 [과제 5]를 새로운 함수로 인식을 하게 되면서 해당 함수의 역함수 존재 여부에 대하여 의사소통한 부분에 주목할 필요가 있다. 이때 학생들은 [과제 5]를 함수로 판단하는 논리를 적용하여 [과제 5]가 일대일 대응이므로 역함수가 존재한다는 일련의 구성 과정을 보여주었다. 그리고 학생들의 구성 과정에서 [Fig. 13]과 같은 결과물이 제시되었는데, [Fig. 13]은 앞서 교과서 분석에서 살펴보았던 [Fig. 11]의 역 대응관계를 나타낸 것과 구조적으로 매우 유사하다. 다시 말해서 본 연구에서는 교과서에서 [Fig. 11]의 결과를 새로운 함수로 소개하고 있으며 이에 따라 학생들이 [Fig. 11]의 역함수 존재 여부에 대하여 궁금해하는 것이 충분히 가능함을 언급하였는데, 면담 과정에서도 학생들이 [Fig. 11]과 유사한 예

를 스스로 구성하여 역함수 존재 여부에 대하여 논의하는 장면이 제시된 것이다. 특히 이러한 면담 과정에 대한 자료는 [Fig. 1]에서 시작된 특정한 학생의 질문에 대하여 단순히 함수가 아닌 대응관계와 함수를 합성할 수 있는지로 그 의미를 제한하여 해석하는 것이 아니라, [Fig. 11]과 같이 대응관계들을 연결한 새로운 대응관계 전체에 대한 함수 여부 판정과 [Fig. 13]과 같이 [Fig. 11]의 대응관계 유형들에서 역 대응관계를 생각하여 역함수 존재 여부를 판단하는 문제 등으로 그 의미를 확장하여 해석할 수 있었다는 점에서 의미를 찾을 수 있다.

V. 결론 및 제언

1. 교수·학습 과정에서 [Fig. 1]과 관련하여 학생들의 문제 제기 가능 여부

본 연구는 특정 학생이 [Fig. 1]을 이용하여 문제를 제기하였던 것에 주목하여 해당 질문이 교수·학습 상황에서 다른 학생들에게서도 제기될 수 있는 성질의 질문인지에 대하여 교과서 분석 및 3차시의 면담과 현장 수학교사 및 학생들을 대상으로 한 설문조사를 실시하여 살펴본 연구이다. [Fig. 1]에서 학생의 질문은 함수가 아닌 대응관계와 함수를 연결하여 새로운 대응관계를 구성한 다음 해당 결과물이 역함수가 존재하는지에 대하여 질문한 것으로서, 본 연구에서는 교과서 분석을 통하여 해당 대응관계와 관련된 그림이 합성함수와 역함수 내용을 다루고 있는 2009 개정 수학과 교육과정과 2015 개정 수학과 교육과정에서 개발된 교과서들에서 실제 제시된 결과물임을 밝히고 있다. 또한 함수가 아닌 대응관계와 함수를 서로 연결하는 것이 수학적으로 오류가 있을 수 있으나, 교과서 분석에 의하면 [Fig. 11]이 합성함수 단원에서 소개되고 있고, Freudenthal(1983)과 Even(1989; 1990) 등이 역함수에서 역으로 되돌리는 조작에 대한 강조를 하고 있다는 점에서, 학생들 역시 [Fig. 11]에서 [Fig. 12]와 같은 질문을 하는 것이 자연스러울 것이라 생각할 수 있다. 즉, 역함수를 역으로 되돌리는 조작으로 생각하고 있는 학생들에게 있어서 [Fig. 12]와 같이 그 역에 해당하는 관계가 함수인지 여부에 대한 질문이 가능하고, 이는 [Fig. 1]과 관련된 학생의 질문과 같이 함수가 아닌 대응관계와 함수를 연결한 새로운 대응관계 그림과 유사한 문제가 된다.

이를 종합하여 정리하면, 연구자는 [Fig. 1]과 관련된 학생의 질문이 다른 학생들에게서도 교수·학습 과정에서 제기 될 수 있다고 보았다. 이에 대한 근거로 본 연구에서는 ‘일부 교과서들에서 [Fig. 11]과 같은 유형의 대응관계가 (합성)함수로 소개되고 있다는 점’을 제시하였다. 또한 소수의 학생들을 대상으로 진행한 제한된 차시의 면담이기는 하지만 학생들의 표현에 대한 세밀한 관찰을 통하여 ‘대응적 관점에서 함수 여부를 판단할 수 있는 학생들’의 ‘두 대응관계가 연결된 과제’에서 역함수 존재 여부를 판단하는 과정을 소개함으로써, 최초 학생이 [Fig. 1]을 이용하여 제기한 질문이 다른 학생들에게서 어떻게 표현되고 있는지를 살펴보았다. 이 역시 교수·학습 과정에서 해당 함수의 역함수가 존재하는지에 대한 문제가 제기될 수 있음을 보여주는 근거가 될 수 있다.

2. 대응적 관점에서 함수 여부를 판단할 수 있는 학생들의 ‘두 대응관계를 연결한 과제’에 대한 역함수 존재 여부 판단 과정에서의 표현

연구자는 특정 학생의 질문에 담겨있는 의미를 보다 세밀하게 살펴보기 위하여 합성함수와 역함수를 학습한 세 명의 학생들을 대상으로 면담을 실시하였다. 이를 통하여 학생들이 ‘함수가 아닌 대응관계와 함수를 연결시키는 과정’과 ‘함수를 서로 연결시키는 과정’을 살펴보면서 이들 구성과정에서의 결과물에 대한 일대일 대응 여부와 역함수 존재 여부에 대한 학생들의 생각을 그들의 표현을 중심으로 분석할 수 있었다.

학생들이 정의역 원소들의 대응관계가 일가성과 임의성을 만족하는지 여부를 가지고 함수인지 아닌지에 대하여 판단하는 것을 확인할 수 있었으며, 두 대응관계가 연결되는 과제에서 학생들은 연결되는 흐름에 따라 일가성과 임의성을 만족시켜야만 하는 대상 집합이 변화되는 모습을 관찰할 수 있었다. [Fig. 1]을 예로 설명하면, 처음에는 집합 X의 원소 $1, 2, 3$에 대하여 일가성과 임의성을 조사하였지만, 바로 이어서 집합 Y의 원소 $1, 2, 3, 4$에 대하여도 일가성과 임의성을 조사하는 모습을 보였다. 이 과정에서 집합 Y의 원소 중 4에 대하여 임의성이 적용되지 않는 것을 근거로 [Fig. 1]이 함수가 아니라고 판단하는 모습이 이에 해당한다.

이는 Freudenthal(1983)의 연구를 포함한 선행연구들에서 합성함수 관련 학습의 의미를 설명하면서 복잡한 함수들을 여러 개로 쪼개서 이해를 가능하게 해준다는 의견에 대하여 고민을 하게 해준다. 고등학생들이 대응적 관점에서 일가성과 임의성을 가지고 함수 여부를 판단할 수 있다고 하더라도, 여러 대응관계가 연결된 새로운 대응관계의 함수 여부를 판정하는 과정에서 일가성과 임의성이 적용되는 대상 집합에 대한 혼란이 있을 수 있으며, 이러한 혼란이 결과적으로 합성된 함수의 역함수 판정 여부에도 영향을 주고 있음을 확인하였기 때문이다. 즉, 본 연구에서 드러난 바와 같이 학생들이 대응관계가 연결된 상태에서 연결 과정을 따라가면서 함수의 정의역도 변화되는 모습이 있으며 그 결과 대응관계들이 연결되어 구성된 새로운 대응관계에 대한 함수 여부 판정에서 어려움을 겪는 것을 관찰할 수 있었다.

이는 본 연구에서 관찰된 학생들의 어려움에 대한 고민이 선결적으로 해결되었을 때, 합성함수 학습의 의미를 함수들 사이의 연산을 학습하는 과정이며 복잡해 보이는 규칙을 여러 개로 쪼개서 이해를 가능하게 해준다는 선행연구 결과가 의미를 가질 수 있음을 보여준다.

본 연구는 Kim, Chung(2010)이 학교 수학에서 합성함수를 학습할 때 함수 f의 치역과 함수 g의 정의역의 관계가 불분명하다는 점을 지적하면서, 이 과정에서 학생들은 함수 f의 치역과 함수 g의 정의역이 같아지는 것과 같은 개념 이미지를 구성할 수 있다는 것에 추가적인 시사점을 제공할 수 있다. 즉, 본 연구에서는 학생들은 합성함수를 학습할 때 합성함수 $g \circ f$의 정의역을 인식할 때 함수 f의 정의역을 해당 함수의 정의역으로 생각하고 있으며, 합성 과정에서 그 정의역에 대한 생각이 가변적이어서 $f(x)$를 정의역으로 생각하거나 함수 g의 정의역을 함수 $g \circ f$의 정의역으로 생각할 수 있기 때문에 혼란을 겪을 수 있다는 점을 드러내었다. 또한 이러한 장면은 역으로 되돌리는 조작에 익숙한 학생들에 의하여 [Fig. 1]과 관련된 질문과 같은 유형의 문제제기들이 교수·학습 상황에서 제시될 수 있다고 가정하였을 때, 역으로 되돌리는 조작에 의한 결과가 함수인지를 판단할 때 동일하게 발생할 수 있는 문제이다.

이상을 종합해보면, 본 연구는 선행연구들에서 함수 학습에서 학생들의 정의역에 대한 인식에 어려움을 겪는다는 것에 추가하여 정의역을 인식하고 있다 하더라도 함수들을 연결하는 과정에서 학생들의 함수의 정의역이 무엇인지에 대한 생각이 가변적임을 드러내었다는 점에서 의미가 있다. 앞서 언급한바 있지만 정의역을 이용하여 함수 여부를 판단하는 것은 대응적 과점에서 함수 여부를 판단하는 것으로 볼 수 있다. 따라서 본 연구에서는 '대응적 관점'에서 함수 여부를 판단할 수 있는 학생들을 대상으로 [Fig. 1]을 이용하여 제기된 최초 과제와 같이 '두 대응관계가 연결된 과제'에서 역함수 존재 여부에 대한 판단 과정에서의 표현에 근거하여 학생들이 어려움을 보일 수 있는 가능성을 확인하였고, 그 이유에 대하여 '연결 과정'에서 정의역에 대한 학생들의 '가변성'이 문제가 될 수 있음을 제시하였다.

이러한 학생들에 관련된 정보는 교수·학습을 담당하는 교사들에게 의미있는 정보가 될 수 있으며, 함수 학습 관련 연구에서 정의역에 대한 연구의 필요성을 제기하였다는 점에서 함수 학습 관련 연구의 기초연구가 될 수 있다.

3. 제언

본 연구에서는 특정한 학생의 질문에서 시작된 고민을 다루고 있다. 교과서 분석을 통하여 해당 질문이 충분히 제기 가능한 질문임을 확인하였으며, 면담을 거쳐 두 대응관계가 연결된 새로운 대응관계에서 학생들이 합성함수 여부 판정과 역함수 존재 여부 판정에서 정의역에 대한 고민이 학생들에게서 어떻게 의미 있는 수학 지식으로 재구성 되어가는 지에 대한 사례를 관찰하였다. 본 연구에서는 학생의 질문에 수학적으로 오류가 있었지만 이에 대하여 애초에 성립할 수 있는 질문이 아니라는 식으로 학생의 질문 자체를 부정하기 보다는 학생의 질문이 현장에서 논의 가능한 질문인지를 확인하는 작업을 거쳤다.

수학지식이 단순히 전달해야만 하는 지식이 아니라면, 교사에게 자연스러운 지식 구성 방식이 아닌 학생에게 자연스러운 지식 구성 방식에 대하여 지속적으로 관심을 가질 필요가 있으며, 이를 위해서는 학생들이 고민하고 있는 학생들의 수학에 대한 정보를 축적할 필요가 있다.

본 연구에서 제시된 사례들은 앞서 언급한 바와 같이 제한된 상황에서의 특정한 사례라는 한계가 있기 때문에

곧바로 교수학습 상황에 적용될 수는 없으나 다른 연구자들에게 함수 학습 관련 연구에 대하여 통찰의 기회를 제공할 수 있을 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

Byun, H. H. & Ju, M. K. (2012). Korean middle school students' conception of function. *Journal of Educational Research in Mathematics. 22*(3), 353-370.

Cho, S. M. (2005). *Research on the Relationship between Teacher's Knowledge and Classroom Practice Evaluated from Curriculum Implementation Perspective : Focused on Knowledge of 'Function' in Mathematics.* Unpublished doctoral dissertation. Ewha Womans University.

Choi, J. Y. & Pang, J. S. (2012). An analysis of elementary school students' understanding of functional relationships. *Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics. 14*(3), 275-296.

Even, R. (1989). *Prospective Secondary Mathematics Teachers' Knowledge and Understanding about Mathematical Functions.* Unpublished Doctoral dissertation. Michigan State University, East Lansing, MI. (USA)

Even, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational Studies in Mathematics, 21*(6), 521-544.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Holstein, J. A. & Gubrium, J. F. (1995). *The Active Interview.* Thousand Oaks, CA: Sage.

Hwang, S. W., Kang, B. G., Yoon, G. J., Lee, G. Y., Kim, S. Y., Lee, M. H., Kim, W. I., …, Park, S. E., (2018). *Mathematics.* Seoul: MiraeN.

Johnson, J. M. (2002). In-depth interviewing. in J. F. Gubrium & J. A. Holstein(eds.). *Handbook of interview research.* Thousand Oaks, Sage Publications. 103-119.

Kim, B. M. (2004). Understanding of the synthesis of functions and limitations of synthetic functions in university mathematics. *Communications of Mathematical Education, 18*(1), 289-296.

Kim, B. Y. & Chung, Y. W. (2010). A study on meaning of composition ∘ of functions. *School Mathematics 49*(2), 149-160.

Kim, J. H. (2010). A review of the role of domain in representational activities for forming the concept of linear functions. *Communications of mathematical education. 24*(1), 49-65.

Kim, N. H., Na, G. S., Park, K. M., Lee, K. H., Chung, Y. O., & Hong, J. G. (2006). *Mathematics Curriculum and Textbook Research.* Seoul: Kyung-Mun-SA

Kwak, Y. S. (2014). *Teacher and Qualitative Research.* Seoul: Kyoyookbook.

Lee, D. G. (2019). A case study on students′ expressions in solving the limitations of functions problems. *The Mathematical Education. 58*(1), 79-99.

Lee, K. S. & Park, S. M. (2018). Analysis of constructed response items of high school mathematics in the 2015 national assessment of educational achievement. *The Journal of Educational Research in Mathematics. 28*(2), 159-179.

Lee, K. S., Hwang, S. G., Kim, B. Y., Shim, S. A., Wang, G. C., Song, K. S., …, Kim, W. J. (2015). *Mathematics II.* Seoul: MiraeN.

Lee, K. W. (2012). Elementary social studies teacher? curriculum expertise in the practice of reorganizing curriculim materials on economic eduation. *Research in Social Studies Education. 19*(4), 45-60.

Lee, S. H., Chang, H. S., & Lee, D. W. (2018). A study of the in-service teachers' and pre-service teachers' recognition the domain in the problem of the continuity of a function. *School Mathematics 57*(4), 477-491.

Lee, Y. K.., Kim, E. S., Lee, H. W., & Cho, W. Y. (2016). An analysis on the understanding of middle school students about the concept of function based on integrated understanding. *Communications of Mathematical Education. 30*(2), 199-223.

Lee, Y. S. (2013). *Epistemological Reference Models for the Teaching of the Concept of Function.* Unpublished doctoral dissertation. Pusan National University.

Lucas. C. A. (2005). *Composition of Functions and Inverse Function of a Function: Main Ideas, as Perceived by Teachers and Preservice Teachers.* Unpublished Doctoral dissertation. Simon Fraser University (Canada).

Merriam, S. B. (1988). *Case Study Research in Education: A Qualitative Approach,* SF: Jossey-Bass Inc.

Ministry of Education (2015). *Mathematics Curriculum.* Bulletin of MOE No.2015-84 [Seperate Volume #8]. Seoul: Author.

Ministry of Education Human Resources (2007). *Mathematics Curriculum.* Bulletin of MEHR No.2007-79 [Seperate Volume #8]. Seoul: Author.

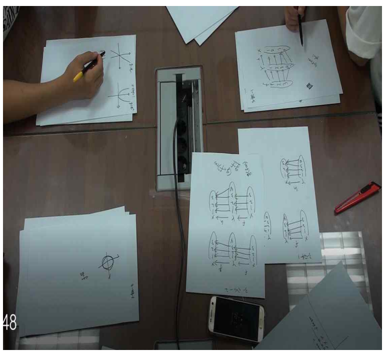
Ministry of Education and Science Technology (2011). *Mathematics Curriculum*. Bulletin of MEST No.2011-361 [Seperate Volume #8]. Seoul: Author.

Shin, H. Y. (2009). *Set Theory for Teacher*. Seoul: KyoWooSa.

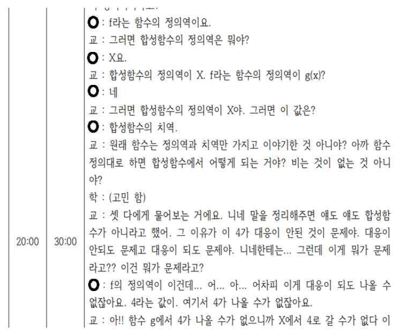
Shin, O. S. (2005). The significance and use of in-depth interviewing for educational research. *Educational Publications, 25*(1), 121-139.

Whang, W. H., Sim, J. W., & Lee, S. E. (1995). A case study of the function concepts of high school students. *Journal of Educational Studies in Mathematics, 5*(2), 173-187.

<부록> 면담, 전사록, 학생 활동지 및 연구자 회의록 예시



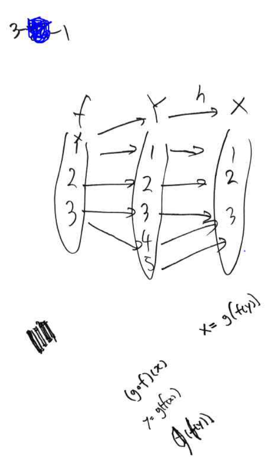
<면담 장면>



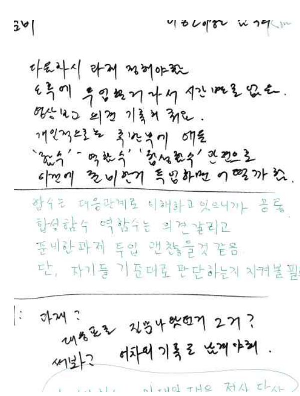
20:00 | 30:00

O : f라는 함수의 정의역이요.
교 : 그러면 합성함수의 정의역은 뭐야?
O : X요.
교 : 합성함수의 정의역이 X. f라는 함수의 정의역이 g(x)?
O : 네
교 : 그러면 합성함수의 정의역이 X야. 그러면 이 값은?
O : 합성함수의 치역.
교 : 원래 함수는 정의역과 치역만 가지고 이야기한 것 아니야? 아까 함수 정의대로 하면 합성함수에서 어떻게 되는 거야? 비는 것이 없는 것 아니야?
학 : (고민 함)
교 : 셋 다에게 물어보는 거에요. 니네 말을 정리해주면 얘도 얘도 합성함수가 아니라고 했어. 그 이유가 이 4가 대응이 안된 것이 문제야. 대응이 안되도 문제고 대응이 되도 문제야. 니네한테는... 그런데 이게 뭐가 문제라고?? 이건 뭐가 문제라고?
O : f의 정의역이 이건데... 어... 아... 어차피 이게 대응이 되도 나올 수 없잖아요. 4라는 값이. 여기서 4가 나올 수가 없잖아요.
교 : 아!! 함수 g에서 4가 나올 수가 없으니까 X에서 4로 갈 수가 없다 이

<전사록>



<학생 활동지>



<연구자 회의일지>