

## 유한요소법을 이용한 원통체의 점탄성 응력 해석

## Viscoelastic Stress Analysis of Adhesive-bonded Cylindrical by FEM

박승진\*

Sung-Jin Park\*

Dr. of Engineering, Professor, Department of Urban Engineering, Incheon National University, Yeonsu-gu, Incheon, Republic of Korea

\*Corresponding author: Sung-Jin Park, sjpark@inu.ac.kr

## ABSTRACT

**Purpose:** In this paper adhesive-bonded cylindrical lap joints are analyzed by assuming that the adherends are elastic and the adhesive is linearly viscoelastic. **Method:** The distribution of the stresses in the adhesive is evaluated using the Finite Element Method. Numerical examples for identical and different adherends bonded through a four parameter viscoelastic solid adhesive are illustrated. **Results:** The stress distribution in the adhesive layer with respect to time is shown. The stress distribution in the adhesive layer with respect to time is shown. The results are also shown that adherend thickness and elastic modulus give effect on the normalized stress. **Conclusion:** In this study, the stress distribution of the adhesive layer of the wrapped cylindrical body considering the viscoelasticity of the adhesive layer was numerically analyzed by using a four - element elastomer model.

**Keywords:** Cylindrical Lap Joint, Viscoelastic Adhesive, Stress Analysis, FEM

## 요약

**연구목적:** 본 논문에서 접착제로 접착된 원통형 랩 접합부는 피착체가 탄성이고, 접착제가 선형 점탄성이라고 가정한다. **연구방법:** 피착체의 응력 분포는 유한요소법을 사용하며, 4개의 아이소파라미터 점탄성 고체 접착제를 통해 피착체에 대한 해석결과를 검증한다. **연구결과:** 접착층에서의 시간에 대한 응력분포와 피착체의 두께와 탄성율이 규격화에 미치는 응력의 영향을 검토한다. **결론:** 본 연구는 접착제층의 점탄성을 고려한 랩접착된 원통체의 접착제층의 응력분포에 대해서 4요소 탄성체 모델을 사용하여 수치해석을 하였다.

**핵심용어:** 랩접착된 원통형, 점탄성 접착제, 응력해석, 유한요소법

Received | 14 April, 2019

Revised | 15 April, 2019

Accepted | 3 June, 2019

 OPEN ACCESS

## 서론

접착제는 최신 기술의 발달로 인해 공학분야, 특히 구조 경량화고기능화가 요구되는 분야에서 널리 사용되고 있다. 본 논문에서 사용되고 있는 Fig. 1의 단순접 원통연결에서 (Lubkin et al., 2015; Adams et al., 2016)의 연구로 접착제 층 내부의 기본적인 응력 특성이 연구되어 왔다. 그러나 지금까지의 연구는 대부분 탄성해석에 의한 것이기 때문에

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0>) which permits unrestricted noncommercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

© Society of Disaster Information All rights reserved.

접착제 층의 점탄성체 특성의 응력분포에 미치는 영향은 충분히 규명되었다고는 말하기 어렵다.

본 논문에서는 피착제를 탄성체로 접착제 층을 4요소 모델의 선형 점탄성체로 가정하여, 접착제 층 내부의 응력 특성을 유한요소법에 의한 근사해법으로 해석한다.

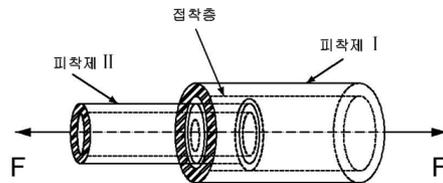


Fig. 1. Wrapped cylinder

### 정식화와 이산화

해석 모델은 Fig. 1에서 보이는 바와 같이 축방향으로 인장력  $F$  를 받는 랩접착된 원통체이고, 외측 피착제를 접착체 I로 탄성계수, 포아송비, 두께를 각각  $E_1, \nu_1, t_1$ 로 나타내고, 동시에 내측 피착제를 접착체 II로 하고 탄성계수 등을  $E_2, \nu_2, t_2$ 로 나타낸다. 또한 접착제 층의 두께, 접착제 층의 길이 및 접착제 층의 반경을  $\eta, l$  및  $r_0$ 로 나타낸다.

이산화 해법에는 유한요소법을 사용하고, 피착제의 이산화에는 축대칭 하중을 받는 3차원 탄성체의 미소변형 이론을 근거로 응력-변형 관계식의 8절법 아이소파라메트릭을 이용한다. 유한요소법에 의한 점탄성 구조해석에는 많은 해법이 제안되고 있지만, 그 중에서 본 논문에 이용된 해법은 Mobasher and Shah(1990)에 의한 증분형의 해법이고, 일반 Voigt 모델에 적용된 Creep-Conpraince를 이용한 Creep 증분법에서 증분형의 응력-변형 매트릭스를 적용하기로 한다.

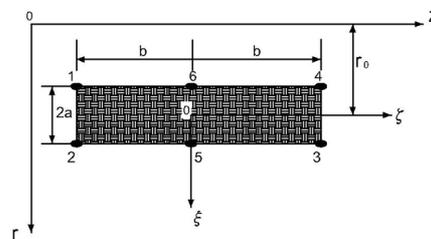


Fig. 2. Adhesive element

접착층의 이산화에 있어서는 기존 연구(Mikami, 2014)에서 제안한 두께방향에는 분할을 하지 않지만, 축대칭의 미소변형 이론에 근거한 변형-변위 관계식에 합리적인 근사해법을 적용하여 접착층의 두께를 고려한 Fig. 2에 보이는 6절점 유한요소법에 점탄성적 특성을 추가한다. Yamada(2017)의 해법에 의하면 요소내의 변형증분  $\{\Delta \epsilon\}$ 와 절점변위증분  $\{\Delta \delta\}$ 의 관계는 다음과 같이 성립된다.

$$\{\Delta \epsilon\} = [B]\{\Delta \delta\} \tag{1}$$

여기서,

$$\{\Delta\varepsilon\} = \{\Delta\varepsilon_r \quad \Delta\varepsilon_\theta \quad \Delta\varepsilon_z \quad \Delta\gamma_{rz}\}^T = \left\{ \Delta\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right) \quad \Delta\left(\frac{u}{r}\right) \quad \Delta\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) \quad \Delta\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right) \right\}^T \quad (2)$$

$$\{\Delta\delta\} = \{\Delta u_1 \quad \Delta w_1 \quad \Delta u_2 \quad \Delta w_2 \quad \cdots \quad \Delta u_6 \quad \Delta w_6\}^T \quad (3)$$

여기서  $u$ 는 반경방향 ( $\xi$  방향) 변위,  $w$ 는 축방향 변위 ( $\zeta$  방향)를 나타낸다. 미소 시간에 대한 응력이 직교 변화한다고 하면 편차응력증분과 편차변형 증분, 체적응력증분과 체적변형 증분의 관계식을 구하여 매트릭스로 표시하면 다음식이 된다(단, 시간  $t$  함수를 나타내는 첨자  $t$ 는 생략한다).

$$\{\Delta\sigma\} = [D]\{\Delta\varepsilon\} - \{\Delta\sigma_v\} \quad (4)$$

여기서,

$$\{\Delta\sigma\} = \{\Delta\sigma_r \quad \Delta\sigma_\theta \quad \Delta\sigma_z \quad \Delta\tau_{rz}\}^T \quad (5)$$

이고, 응력-변형 매트릭스  $[D]$ 는 다음식이 된다.

$$[D] = \begin{bmatrix} K_c + \frac{4}{3}G_c & & & & \text{sym.} \\ K_c + \frac{2}{3}G_c & K_c + \frac{4}{3}G_c & & & \\ K_c - \frac{2}{3}G_c & K_c - \frac{2}{3}G_c & K_c + \frac{4}{3}G_c & & \\ 0 & 0 & 0 & G_c & \end{bmatrix} \quad (6)$$

단,  $G_c$ 와  $K_c$ 는 편차성분과 체적적분의 Creep 특성에 의해 나타낸 계수이며,  $\{\Delta\sigma_v\}$ 는 점탄성 변형에 의한 응력 벡터를 나타내며 다음식에 의해 주어진다.

$$\{\Delta\sigma_v\} = [H]\{\Delta I\} \quad (7)$$

여기서

$$[H] = \begin{bmatrix} G_c & 0 & 0 & 0 & K_c/3 \\ 0 & G_c & 0 & 0 & K_c/3 \\ 0 & 0 & G_c & 0 & K_c/3 \\ 0 & 0 & 0 & G_c & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\{\Delta I\} = \{\Delta I_r \ \Delta I_\theta \ \Delta I_z \ \Delta I_{rz} \ \Delta I_B\}^T \tag{9}$$

$\{\Delta I\}$ 의 성분은 편차체적성분 증분과 편차체적 변형 성분의 관계식으로 구할 수 있고, 강성 매트릭스는 식 (1)을 이용하여 절점변위 증분과 절점반력 증분  $\{\Delta f\}$ 와의 관계는 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$\{\Delta f\} = [k]\{\Delta \delta\} - \{\Delta f_v\} \tag{10}$$

여기서, 강성매트릭스  $[k]$  및 점탄성변형에 의한 하중(등가절점력)  $\{\Delta f_v\}$ 은 다음 식으로 주어질 수 있다.

$$[k] = 4\pi ab r_0 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] d\xi \tag{11}$$

$$\{\Delta f_v\} = 4\pi ab r_0 \int_{-1}^1 [B]^T [H] \{\Delta I\} d\xi \tag{12}$$

피착체의 요소와 접착층 요소의 각 방정식을 중첩하여 전체 방정식으로 유도하여 해석하면 되고, 식 (11)과 식 (12)의 적분은 Gauss 구적법을 이용하였다.

## 수치해석 예

### 해석모델의 제원

해석 모델은 Fig. 3에 보이는 바와 같이 축방향 인장력  $F$ 가 내측의 피착체로 작용할 경우이고, 탄성해석 영역은  $L/1 = 5$ 를 이용한다. 요소분할은 피착체 층에 대해서는 14요소, 피착체에 대해서는 192요소의 합계 206요소이다(Fig. 3의 경우에 해당 됨). 해석 제원은 원통체인 경우에는  $t_1/t_2 = 1$ ,  $1/t_1 = 10$ ,  $\eta/t_1 = 0.2$ 로 하고,  $t_1 = 1\text{mm}$ 를 이용하였다.

재료의 성질에 대해서는 접착제 층은 에너지계의 재료로 점탄성재료 특성을 전단 Creep-Con  $D(t)$ 와 체적 Creep-Con  $B(t)$ 에는 다음과 같은 관계식을 이용하였다(Fig. 4).

$$D(t) = D_0 + \frac{t}{\eta_D} + D_1(1 - e^{-t/T_D}) \tag{13}$$

$$B(t) = B_0 + \frac{t}{\eta_B} + B_1(1 - e^{-t/T_B}) \tag{14}$$

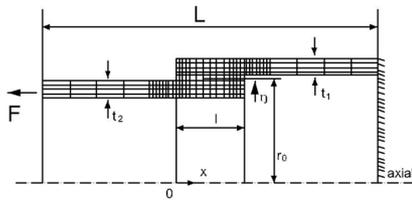


Fig. 3. Analytical Model and Element Segmentation

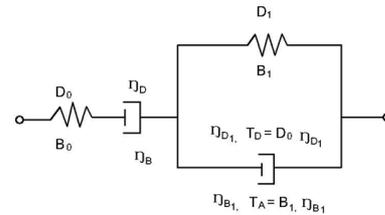


Fig. 4. Four-element viscoelastic model

여기서,  $D_0 = 7.0 \times 10^{-4} \text{m}^2/\text{MN}$ ,  $D_1 = 1.33 \times 10^{-4} \text{m}^2/\text{MN}$ ,  $\eta_D = 1.0 \times 10^6 \text{MN} \cdot \text{sec.}/\text{m}^2$ ,  $T_D = 13.3 \text{sec.}$ ,

$\eta_{D1} = 1.0 \times 10^5 \text{MN} \cdot \text{sec.}/\text{m}^2$ ,  $B_0 = 2.0 \times 10^{-4} \text{m}^2/\text{MN}$ ,  $B_1 = 2.5 \times 10^{-5} \text{m}^2/\text{MN}$ ,

$\eta_B = 1.0 \times 10^7 \text{MN} \cdot \text{sec.}/\text{m}^2$ ,  $T_B = 10.0 \text{sec.}$ ,  $\eta_{B1} = 4.0 \times 10^5 \text{MN} \cdot \text{sec.}/\text{m}^2$

피착체는 알루미늄(탄성계수 : 70,600MNm<sup>2</sup>, 포아송비 : 0.3)과 철(탄성계수 : 206,000MNm<sup>2</sup>, 포아송비 : 0.3)으로 하고, 각종 조합된 수치해석을 실시하였다. 또한 원통체의 상대 두께를  $R=(t_1/2r_0)$ 로 하고,  $R=0.01$ 과  $0.1$ 의 2개의 경우에 대해서 해석하였다.

### 해석결과

다음에 보이는 결과에 대해서 접착제층 내부의 응력 중에서 수직응력  $\sigma_r$  및 전단응력  $\tau_{zr}$ 을 평균전단응력  $\tau_m = F/(2\pi r_0 l)$ 로 무차원화하여 각각  $N(=\sigma_r/\tau_m)$  및  $T(=\tau_{zr}/\tau_m)$ 로 나타내었다. 본 논문에서는 시각 간격폭  $\Delta t=120 \text{sec.}$ 의 스텝으로 해석을 하였고, 시각  $t=0 \text{min.}$  (탄성상태),  $30 \text{min.}$ ,  $180 \text{min.}$ 에 대해서 응력  $T$ 와 응력  $N$ 의 분포를 보인다.

### 피착체가 동종재료[알루미늄(A1)] (A1-A1)인 경우

Fig. 5 및 Fig. 6에 각각,  $R=0.01$  및  $R=0.1$ 인 경우의 접착제층 내부의 응력 ( $T$ 와  $N$ )을 보인다. Fig.의 종축은 무차원화된 접착제층의 좌표이고,  $x/l=0.0$ 은 하중작용 측,  $x/l=1.0$ 은 고정단 측이다(Fig. 3에 참조). 이들 Fig.에 의하면 ① 응력  $N$ 은  $R$ 에

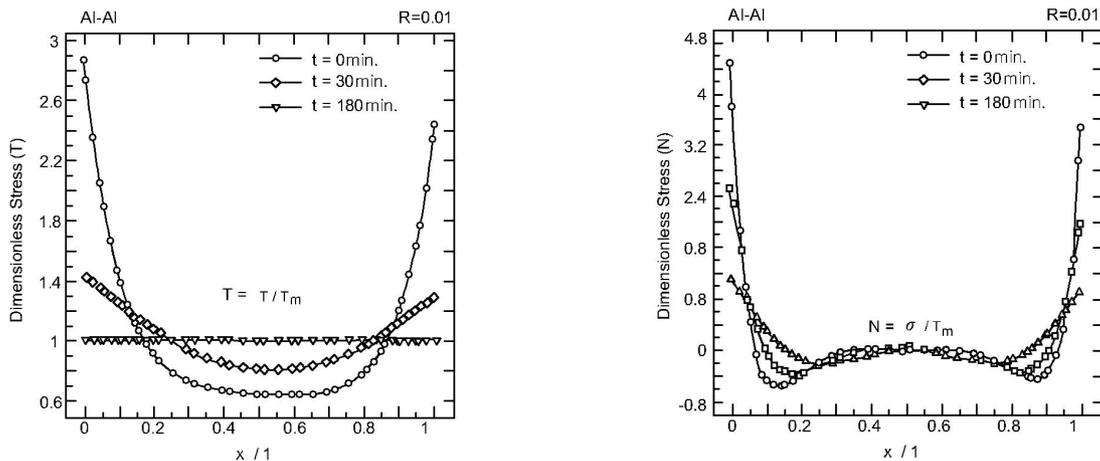


Fig. 5. Characteristics of adhesive layer stress distribution [A1-A1, R=0.01]

관계없이 접착제층 양단에서 큰 값을 나타내고 있으며 시간과 함께 감소하고 점탄성 영향을 상당히 받는다. 그러나 접착제층 중앙부에서는 시각 변화에 대한 영향을 그다지 받지 않는다는 것을 알 수 있다. ② 응력  $T$ 는 응력  $N$ 과 마찬가지로  $R$ 에 관계없이 접착제층 양단에서 최대값을 나타내지만, 점탄성 영향은 접착제층의 전 영역에서 나타나고, 또한 시간의 경과와 함께 ‘ $T=1$ ’에 근접하게 된다.

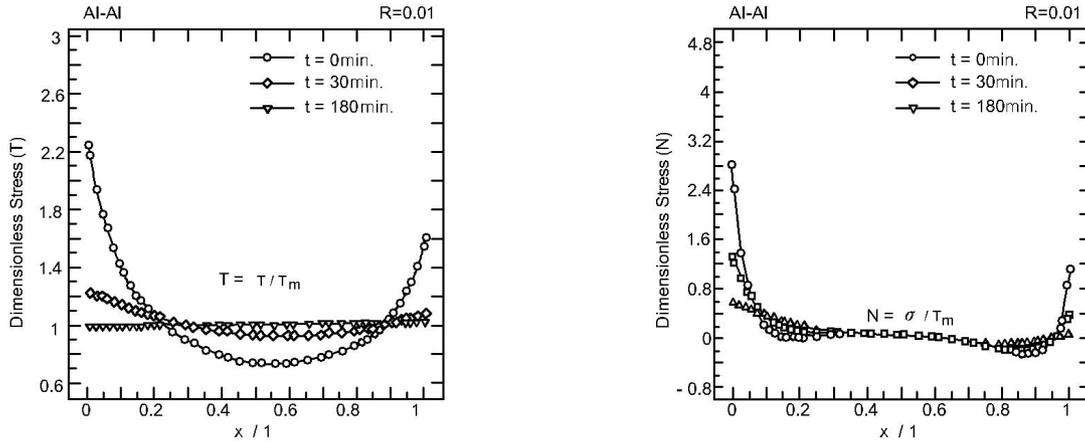


Fig. 6. Characteristics of adhesive layer stress distribution [A1-A1, R=0.1]

Fig. 7에  $x/l=0.0$  단부에 있어서 최대 응력의 시간이력을 나타낸 것이다.  $t=180\text{min}$ 까지의 결과는 4요소 점탄성체 모델을 이용한 경우이고,  $t=60\text{min}$ 까지의 결과는 데시포트 정수  $\eta_D$ 와  $\eta_B$ 를 무차원화한 3요소 모델인 경우이다. 이들 결과를 비교하면 응력의 감쇠는  $\eta_D$ 와  $\eta_B$ 값의 크기에 크게 의존하고 있고, 3요소 모델의 해는 거의 일정값을 보이고 있다. 또한 Fig. 7에  $t=180\text{min}$ 까지의 결과를 분석하면 응력  $N$ 와  $T$ 는 시간의 경과와 함께 감소하고, 그 정도는 응력  $T$ 보다도 응력  $N$  쪽이 크다. 또한 응력  $N$ 은 탄성상태와 같은  $R$ 이 작을수록 큰 값을 나타내지만, 응력  $T$ 는 시간이  $R$ 에 관계없이 거의 동일한 값으로 수렴한다는 것을 알 수 있다.

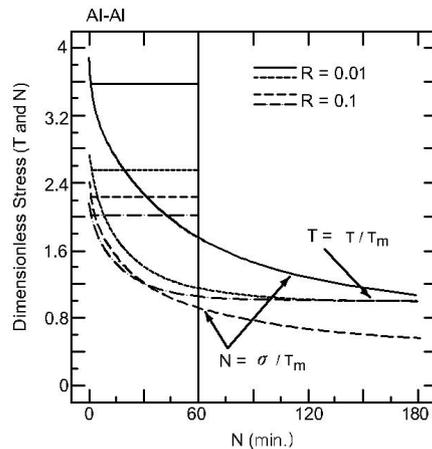


Fig. 7. Changes in maximum shear stress and normal stress (Al-Al)

피착체가 동종재료[철(Fe)], (Fe-Fe)인 경우

A1-A1인 경우와 마찬가지로 결과에 대한 그래프를 Figs. 8~13에 보인다. 이 들 Fig.에 의하면 ① 알루미늄에 의한 동종재료의 결과에서 양단에서의 응력( $N$ 과  $T$ ) 최대값은 작고, 응력의 감쇠도 완만하며 응력  $T$ 은 알루미늄보다 철의 수렴속도가 빠르다. ② 탄성상태와 마찬가지로 피착체의 탄성계수가 크게 될수록  $R$ 의 응력 최대값에 대한 영향은 작아지는 경향이 있다.

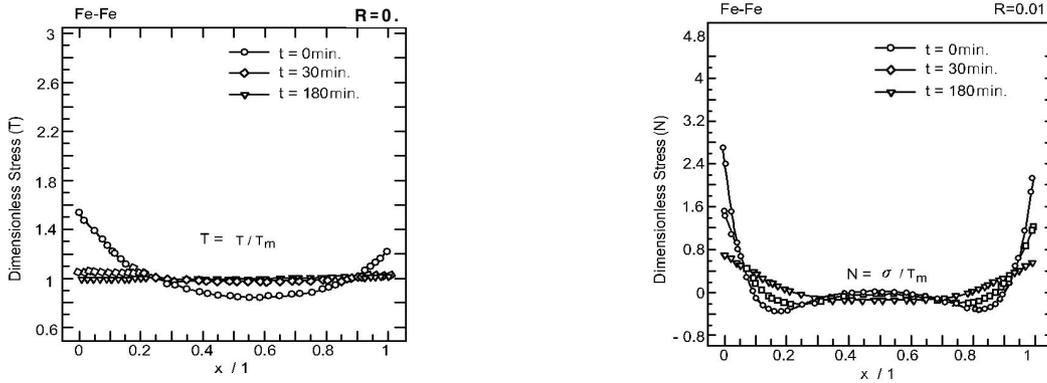


Fig. 8. Characteristics of adhesive layer stress distribution [Fe-Fe, R=0.01]

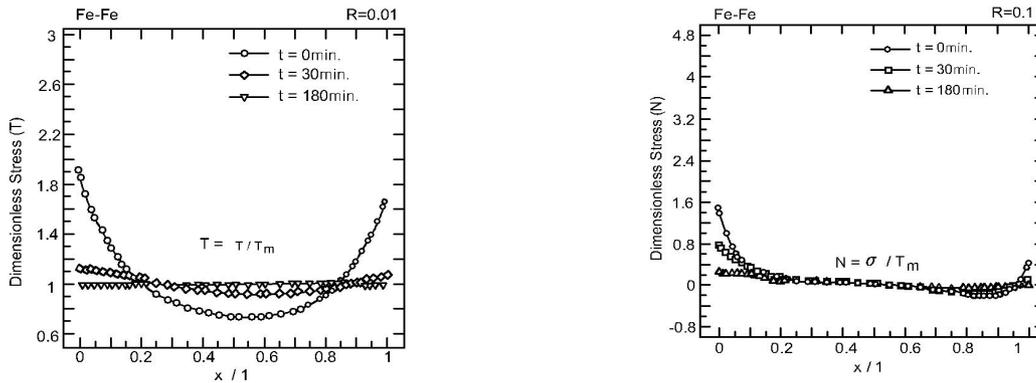


Fig. 9. Characteristics of adhesive layer stress distribution [Fe-Fe, R=0.1]

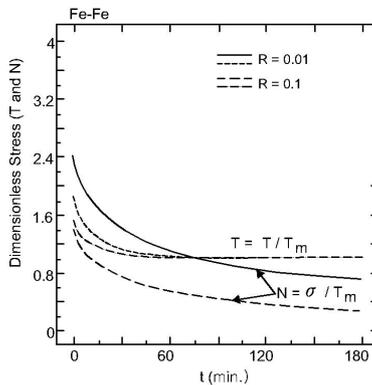


Fig. 10. Changes in maximum shear stress and normal stress (Fe-Fe)

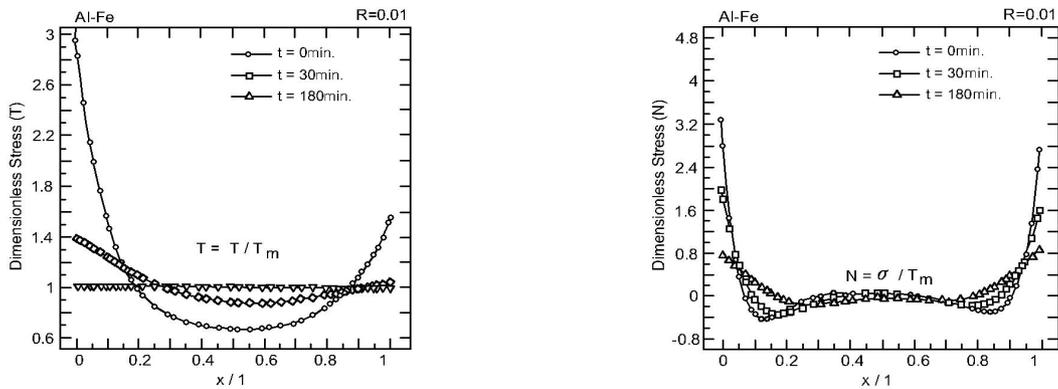


Fig. 11. Characteristics of adhesive layer stress distribution [Al-Fe, R=0.01]

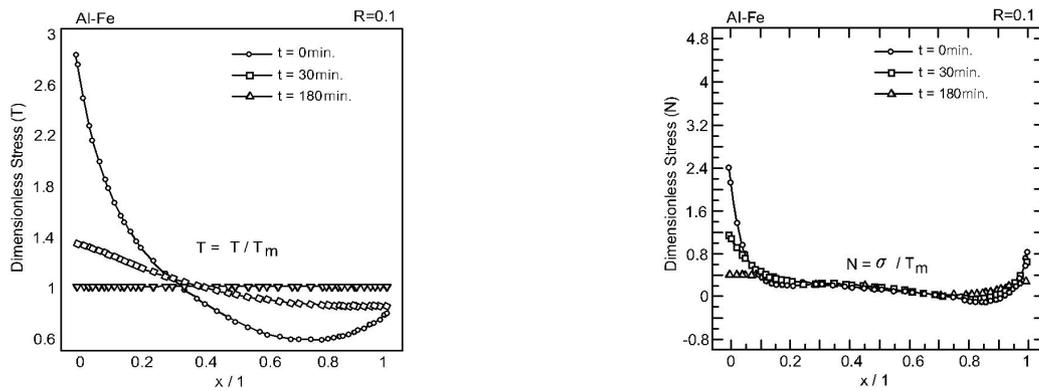


Fig. 12. Characteristics of adhesive layer stress distribution [Al-Fe, R=0.1]

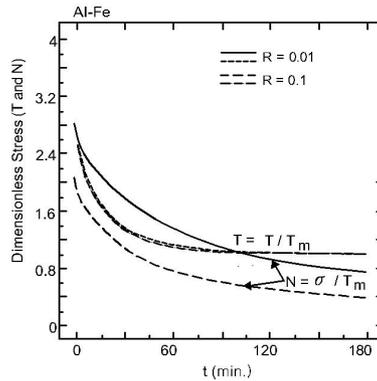


Fig. 13. Changes in maximum shear stress and normal stress (Al-Fe)

## 결론

본 연구는 접착제층의 점탄성을 고려한 랩접착된 원통체의 접착제층의 응력분포에 대해서 4요소 탄성체 모델을 사용하여 수치해석을 하였고, 접착제 층의 응력분포의 시간에 대한 변화 및 응력의 감소 경향에 대한 영향을 알아보았다. 본 연구를 요약하면 다음과 같다.

- 1) 에폭시계의 접착제 재료를 한 예로서, 피착체에는 8절점 아이소파라메트릭 요소와 6절점 접착요소를 이용한 유한요소 법에 의해 접착제층의 응력 분포에 대한 해석을 통해 알아보았다.
- 2) 응력의 감소는 피착체의 강성의 크기에 크게 의존하고, 접착체의 강성이 클수록 작아진다.
- 3) 수직응력  $N$ 의 감소는 전단응력  $T$ 보다 크다.

## Acknowledgement

이 논문은 인천대학교 2016년도 자체연구비 지원에 의하여 수행한 것으로 이에 감사드립니다.

## References

- [1] Adams, R.D., Peppiatt, N.A. (2016). "Stress analysis of adhesive bonded tubular lap joints." *J. Adhes*, Vol. 9, pp. 1-8.
- [2] Jeon, I.K., Jeon, C.K. (2010). "Manufacture and Construction Technology of Polyamide Fiber Reinforced Shotcrete in Tunnel." *Journal of the Korea Institute for Structural Maintenance and Inspection*, Vol. 14, No. 6, pp. 41-45.
- [3] Kim, Y.G., Kim, S.C., Kim, M.H. (2012). "A Study on the Dynamic Properties of Cement Mortar with Recycled PET Fiber." *Journal of the Korea Institute of Building Construction*, Vol. 2, No. 4, pp. 113-122.
- [4] KS F 2566:2000 (2000). Test Method for Flexural Toughness of Steel Fiber Reinforced Concrete. Korean Standards Association.
- [5] Lee, I.C., Kim, H.S., Nam, J.S., Kim, S.B., Kim, G.Y. (2013). "Evaluation of Protective Performance of Fiber Reinforced Concrete T-Wall." *Journal of the Korea Institute of Building Construction*, Vol. 13, No. 5, pp. 465-473.
- [6] Lee, I.W., Kim, S.H., Choi, T.J., Hong, B.T., Kim, H.H., Won, J.P. (2011). "Fracture Performance of Structural Synthetic Fiber Reinforced Concrete." *Conference paper on Korea Concrete Institute*, Vol. 23, No. 2, pp. 103-104.
- [7] Lubkin, J.L., Reissner, E. (2015). "Stress distribution and design data for adhesive lap joints between circular tubes." *J. Appl. Mech*, Trans. ASME. pp. 78-81.
- [8] Mobasher, B., Shah, S.P. (1990). "Interaction between fibers and the matrix in glass fiber reinforced concrete, Thin-Section Fiber Reinforced Concrete and Ferrocement." SP 124, American Concrete Institute, Detroit, MI, 1990, pp. 137-156.
- [9] Soroushian, P., Khan, A., Hsu, J.W. (1992). "Mechanical Properties of Concrete Materials Reinforced with Polypropylene or Polyethylene Fibers." *ACI Materials Journal*, Vol. 89, No. 2, pp. 535-540.
- [10] Yoon, J.H., Jeon, I.K., Jeon, C.K., Lee, S.C. (2012). "Experimental Construction of Polyamide Fiber Reinforced Shotcrete Technology." *Journal of the Korean Recycled Construction Resource Institute*, Vol. 7, No. 2, pp. 78-83.