

## 파이썬(Python) 기반의 코딩교육을 적용한 대학 미적분학의 교수·학습

박 경 은 (성균관대학교 겸임교수)

이 상 구 (성균관대학교 교수)†

함 윤 미 (경기대학교 교수)

이 재 화 (성균관대학교 연구원)

본 연구에서는 다양한 배경을 가진 대학 신입생들이 단기간에 미적분학의 주요 개념을 이해할 수 있도록 돕고, 현실에서 접하는 복잡한 문제들에 대한 문제해결력도 기르면서, 동시에 컴퓨팅 사고력도 신장시킬 수 있는 미적분학 교수·학습에 대하여 논한다. 구체적인 방안으로, 본 연구진은 ‘파이썬(Python) 기반의 코딩(coding)교육을 적용한 대학 미적분학의 교수·학습’ 콘텐츠를 개발하고 실제 수업 현장에 적용하여 유의미한 성과를 거둔 사례를 보고한다. 즉, 파이썬 언어 기반의 코딩교육을 적용한 미적분학 I, II의 구체적인 교수·학습 설계, 실천 계획안 그리고 평가라는 전 과정이 실제로 진행된 사례와 그에 활용된 자료들을 정리하여 공유한다. 개발된 교안과 코드 및 사이버 실습실은 언제 어디서나 무료로 활용할 수 있으며, 교수자와 학생은 공유된 콘텐츠와 학생활동 기록을 참고하며, 자유롭게 미적분학을 교수·학습하고, 주어진 코드를 활용하여 실습하면서 미적분학의 직관적인 이해를 높임과 동시에 컴퓨팅 사고력도 신장시킬 수 있도록 하였다. 또한 교수자는 학생들의 질의·응답 참여, 보고서 발표, 팀워크 등이 포함된 플립드러닝(flipped learning)과 과정중심의 모든 데이터를 기반으로 평가함으로써 학생들의 미적분학 지식에 대한 상향평준화를 돕게 된다. 본 연구에서 제시한 대학 미적분학의 교수·학습 사례는 학생들이 미적분학 개념과 컴퓨팅 사고력을 동시에 신장시켜 사회가 필요로 하는 인재로 성장할 수 있도록 도울 수 있는 가능성을 보여주는 대학 수학 교육의 교수·학습 모델이 될 것으로 본다.

### I. 서론

2021년부터 학생들은 2015 개정 수학과 교육과정을 이수하여 대학에 입학한다. 2015 개정 수학과 교육과정은 문·이과 통합형 교육과정이므로 학생들은 문과와 이과 구분 없이 동일한 수학과 교과과정을 이수한다. 그 결과, 이전 교육과정과 비교해 수학과 교과과정의 난이도는 더 낮아지며, 이것은 2021년부터 이공 계열의 전공 이수를 위한 수학 기초가 충분하지 않은 학생이 늘어난다는 것을 의미한다(김윤아·김경미, 2017). 특히 미적분, 기하, 통계 중 한 과목만 선택 후 수능시험을 치르면 대학입학이 가능하므로 대학의 신입생에 대한 수학 기초학력의 하향평준화도 우려된다. 또한 최근 교육부가 2016년 12월에 발표한 ‘대학 학사제도 개선방안<sup>1)</sup>’에 따라 대학 4학년까지 전공변경이 허용되고, 도중에 융합전공을 선택할 수도 있으므로, 앞으로 계열을 서로 교차하여 전공을 변경하는 학생 수도 늘어날 것이기 때문에 그에 대한 대책도 필요하다. 따라서 2015 개정 교육과정을 이수한 학생

\* 접수일(2019년 5월 31일), 심사(수정)일(2019년 7월 1일), 게재 확정일(2019년 7월 16일)

\* ZDM 분류 : I15, U55, N85

\* MSC2000 분류 : 97U70, 97C80, 97U50

\* 주제어 : 미적분학, 코딩교육, 문제/프로젝트 기반 학습, 컴퓨팅 사고력, 파이썬(Python)

\* 이 논문은 2017년도 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업(No.2017R1D1A1B03035865).

† 교신저자 : sglee@skku.edu

1) 대학 학사제도 개선방안 <https://moe.go.kr/boardCnts/fileDown.do?m=020201&s=moe&fileSeq=284fd2d27ee3fc3e43e734771048980c>

들이 대학 입학 후 기초지식으로 꼭 갖추어야 하는 대학 미적분학의 교수·학습이 어떻게 변하게 될 것인지에 대해 예측해볼 필요가 있다.

과거 10년 전에도 이공계열 대학생들의 수학 실력과 관련해 유사한 우려가 있었다. 전평국(2008)은 2000년부터 시행된 7차 교육과정에 따라 수학과 과학을 선택하지 않고도 이공계 학과에 입학할 수 있게 되면서 학생들의 수학 실력이 현저히 떨어졌다는 점을 언급했으며, 이러한 상황은 우리나라의 초·중·고 수학교육이 당면한 문제점이 총체적으로 결합해서 나타난 하나의 단면이라 표현했다. 더불어 이에 대한 대안으로 필요시 AP (Advanced Placement) 수학 교과목을 개설해야 하고, 공인된 기관에서 검사를 통해 검증할 수 있도록 해야 한다는 의견도 함께 명시하였다.

동시에 현대 사회는 코딩(coding)과 인공지능이 화두이며, '컴퓨팅 사고력(Computational Thinking, CT)'을 갖춘 창의적인 인재양성을 요구하고 있다.<sup>2)</sup> CT란 인간의 사고에 디지털 기술을 통합하여 문제를 해결하기 위한 접근법으로, 추상화를 통해 문제의 핵심요소를 추출하고 컴퓨팅 기기를 통해 해법을 자동화하는 능력을 말한다.<sup>3)</sup> CT의 주요 기능으로는 예를 들어, 데이터 수집/분석/표현, 문제 분해/추상화/모델링, 자동화/병렬화/시뮬레이션 등이 있으며, 주로 인공지능(로봇 및 사용자 음성/인터페이스 인식), 컴퓨팅(유비쿼터스 컴퓨팅), 바이오 의학(유전자 치료 및 게놈 스캐닝) 분야 등에 응용되고 있다. 한국과학창의재단은 초·중등 단계에서부터 CT를 체계적으로 도입하기 위해, 2013년 10월부터 2014년 3월까지 '초·중등 단계 Computational Thinking 도입을 위한 기초연구'를 진행하여 필요한 이론적인 개념을 정립하고, 학령별·과목별 적용방안을 도출하였다(한국과학창의재단, 2014). 그리고 2014년 9월 24일 교육부가 보고한 '2015 문·이과 통합형 교육과정의 총론 주요 사항'에서 '과학기술 소양 교육을 위하여 컴퓨팅 사고력 함양을 위해 소프트웨어 교육을 활성화 한다'는 방침을 발표하면서 여러 대학교육에서도 CT에 대한 다양한 연구가 진행되고 있다. 연세대와 성균관대는 이미 모든 학생에게 '컴퓨팅 사고력' 수업 및 '소프트웨어와 코딩' 수업을 필수로 이수하게 하고 있고, 포스텍과 성균관대는 인공지능(Artificial Intelligence, AI) 과목을 모든 학생이 이수 하는 것을 필수 또는 권장하기 시작하였다.<sup>4)</sup> 이처럼 대학에서 CT 교육과 활용을 강조하는 이유는 선진국에서 이미 시작된 CT 교육의 방향에 발을 맞춘 결과이며, 특히 1990년대부터 지속적으로 수학교과에서 강조하고 있는 수학적 문제해결·추론·의사소통 과정에 첨단 디지털 기술을 활용한 수학교육이 적극적으로 이루어지고 있기 때문이다. 또한 21세기 디지털 첨단 모바일/인터넷 시대와 함께 4차 산업혁명 시대(사회)가 도래 하면서 대학수학교육에서도 기존과 다른 혁신적인 교육의 하나로 코딩 교육에 깊은 관심을 갖게 된 것이다. 이런 교육환경의 변화에 따라 본 연구진은 수년 전부터 문·이과의 모든 학생이 4차 산업혁명 시대(사회)로의 변화를 적극적으로 수용하고 대비할 수 있도록 코딩 교육을 포함한 다른 학교와 차별화된 교육 서비스를 제공받아 차별화된 인재로 성장할 수 있는 인프라를 구축해오고 있다(이상구·

2) 2017년 11월 13일 윤스메거진 원고, 내년부터 중학생·초등학생 필수과목! '코딩교육'이란 무엇일까?

<http://yoons-magazine.com/archives/11252>

2019년 4월 9일 매일경제 기사, 포스텍, AI 필수과목으로 내년1학기부터 전면 도입

<https://www.mk.co.kr/news/society/view/2019/04/218159/>

2018년 11월 7일 조선일보 기사, 모든 신입생에게 소프트웨어 교육... MIT와 복수학위도

[http://news.chosun.com/site/data/html\\_dir/2018/11/06/2018110601959.html](http://news.chosun.com/site/data/html_dir/2018/11/06/2018110601959.html)

3) 월간 과학창의, 2014년 2월호, Vol. 197, (공)저 한국과학창의재단.

4) 2015년 4월 23일 매일경제 기사, 연세대, 신입생 대상 '컴퓨팅적 사고력' 수업 도입

<https://www.mk.co.kr/news/society/view/2015/04/389105/>

2019년 2월 20일 IT 동아 기사, 청소년 SW 교육, 코딩 의무교육 시행 앞두고 한층 활발해져

<https://it.donga.com/28742/>

2019년 3월 19일 매일경제 기사, 교육부·과기부, 소프트웨어 교육 선도학교 1832곳 선정

<https://www.mk.co.kr/news/society/view/2019/03/165170/>

이재화·박경은, 2017).

본 연구에서는 고등학교와 대학교의 미적분학 교육 사이의 지식에 대한 간격을 줄이고, 고등학교에서 미적분학 교육을 거의 받지 않은 대학생들조차도 단시간에 미적분학의 주요 개념을 이해하고, 현실에서 접하는 복잡한 문제들에 대한 해결력도 키우면서 동시에 컴퓨팅 사고력도 신장시킬 수 있는 미적분학 교수·학습에 관하여 소개한다. 본 연구자는 오랜 기간 동안 대학 현장에서 파이썬(Python) 기반의 코딩교육을 적용한 대학 미적분학의 교수·학습 콘텐츠와 교안을 개발한 후 실제 수업 현장에 적용하는 노력을 하였으며, 그 결과 기존의 미적분학 교육의 성과를 유지하는 동시에 자연스럽게 파이썬 기반 코딩경험도 해보고 컴퓨팅 사고력도 신장시켰으며, 그를 이용하여 새로운 지식을 창출하는 유의미한 성과를 거두었다고 판단하여, 그 내용과 과정을 본 원고를 통하여 공유하고자 한다. 그 결과, 문·이과 통합교육과 선택형 수능 수학을 포함하여 어떤 교육 및 입시 환경의 변화에도 각 대학이 선발한 학생들에게 미적분학에 대한 재교육과정 없이 본 연구진이 소개한 미적분학 교수·학습으로 전환이 가능하며, 이러한 시도는 현재의 중등학교 수학교사들이 장시간의 재교육 과정 없이 수학을 지도하면서 자연스럽게 코딩교육을 가능하게 하는 방법이 있는가하는 질문에 대한 답도 제공할 수 있을 것이다.

## II. 이론적 배경

### 1. 고등학교와 대학교의 미적분학 교과 운영

<표 II-1> 2015 개정 수학과 교육과정의 계열에 따른 선택과목

과목	일반선택				진로선택			
	수학 I	수학 II	미적분	확률과 통계	경제수학	실용수학	기하	수학과제 탐구
계열	· 지수함수와 로그함수 · 삼각함수 · 수열	· 함수의 극한과 연속 · 미분법 · 적분법	· 수열의 극한 · 미분법 · 적분법	· 경우의 수 · 확률 · 통계	· 수와 생활경제 · 수열과 금융 · 함수와 경제 · 미분과 경제	· 규칙 · 공간 · 자료	· 이차곡선 · 평면벡터 · 공간도형과 공간좌표	· 자율주제
경상	O	O			O			
이공	O	O	O				O	O
어문	O			O				
예술	O			O				

\* 'O' 표시는 과목을 선택함을 의미한다.

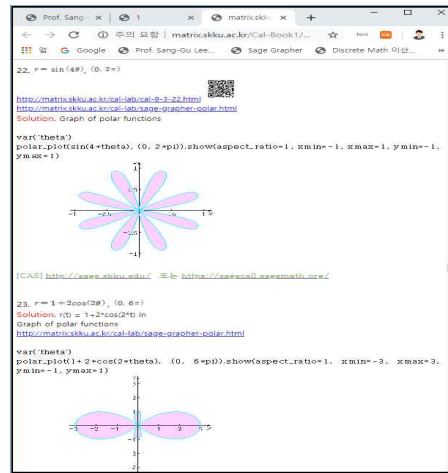
2021학년도 대학 신입생들은 중등교육과정에서 2015 개정 교육과정인 문·이과 통합형 교육과정을 이수한다. 따라서 학생들은 진로계열에 따라 선택교과와 진로교과 과목을 선택할 수 있다. 교육부가 제안한 수학 교과 선택에 대한 예시로는, 경상계열은 일반선택(수학 I, 수학 II)과 진로선택(경제수학)을, 이공계열은 일반선택(수학 I, 수학 II, 미적분)과 진로선택(기하, 수학과제 탐구)을, 어문계열과 예술계열은 일반선택(수학 I, 확률과 통계)이 가능하다(<표 II-1> 참조). 하지만, 실제적으로 학생들이 얼마나 구체적으로 진로를 탐색하고 중등교과 수학과목을 선택하게 될지는 아직까지 예상하기 어렵다. 현재까지 중등교육과정의 인문계열에서 제공하는 수학을 이수한 후 대학 이공계열 전공 선택이 가능한 교차 지원 또는 전공 변경이 계속되어 왔으며, 2015 개정 교육과정이 도입된 후에는 이전보다 전공 선택과 전공 변경의 폭이 넓어지게 된다. 따라서 2015 개정 교육과정을 이수한 신입생들을 맞이하기 위해서는 각 대학에서 보다 체계적으로 분석하여 대비해야 할 것이다. 왜냐하면 학생들이 본인

의 진로계열에 따라 고교 수학과목을 이수한다는 것은 수능 선택과목과 밀접한 관련성이 있는데, 실제 본인이 원하는 진로계열에서 필요로 하는 수학 과목과 선택하는 이수 과목이 다를 수 있기 때문이다. 그 결과 대학의 필수과목, 예를 들어 미적분학 과목을 선택하여 학습하는데 현실적으로 상당한 어려움이 발생할 수 있다.

또한 대학의 교양수학은 현실에서 발생하는 문제를 수학적으로 분석하고 해결하도록 하는 순수교양수학과 전공 이수 준비를 돕는 기초교양수학으로 나눌 수 있다(박형빈 · 이현수, 2009). 순수교양수학 교과목은 수학적 이론이나 원리 보다는 수학에 대한 긍정적인 인식을 높여 실제로 문제 해결에 수학을 활용하도록 하기 위한 목적으로 강의가 진행되지만, 기초교양수학 교과목은 대부분 이공계열 전공 학생이 전공과목을 이수할 때 필요한 기초적인 수학적 원리를 이해하고 습득하게 하는 것을 목적으로, 주로 미적분학을 중심으로 강의가 구성/운영된다(송윤희, 2012). 박형빈 · 이현수(2009)는 대학의 교양수학 과목은 합리적으로 분석하고 창조적으로 문제를 해결하도록 하는 데 필요한 교과목인데도 불구하고 대부분 이공계열 학생을 대상으로 전공 이수 준비에 필요한 미적분학 중심으로만 운영되고 있음을 지적하였다. 그리고 이공계열 학생을 포함한 다양한 전공학생들이 수학을 쉽게 이해하고 활용할 수 있도록 수학적 필요성을 인식시켜주고, 수학적 힘을 기르는 교양수학과목이 필요하다고 주장하였다. 그리고 기초 교양수학의 중요성을 강조하는 연구들은 미적분학 교과목을 중심으로 대학 교양수학과과정의 원활한 운영을 위한 다양한 방안을 제안하고 있다. 예를 들어, 중등 수학과 교육과정과 대입전형제도가 빈번하게 변화되어 발생한 대학 신입생들의 기초 수학 학력 저하 문제를 해결하기 위해, 수준별 교육과정을 운영하거나 원활한 전공 학습을 돕는 프로그램 개발에 대한 연구가 수행되었다(김희진 · 서종진 · 표용수, 2011; 박준식 · 표용수, 2013). 또한 전재복(2008)은 기초 수학 실력이 부족한 대학 신입생들이 공학계열 전공 수업을 따라가게 하려면 단순히 교육과정을 개선하여 수준별 분반을 운영하는 정도로는 근본적인 해결책이 될 수 없으므로, 보다 유기적인 교육과정을 설계하고 적용하여야 한다고 언급하였다.

<표 II-2> 본 연구진의 미적분학 교과 운영의 일부

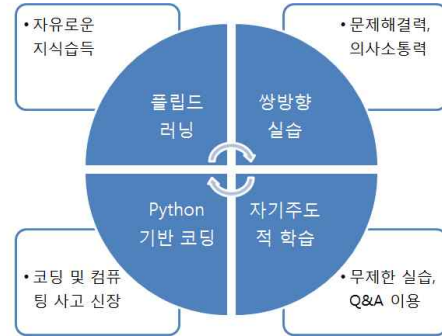
구분	교안 및 실습실(Lab)
Calculus I 일변수 미적분	<a href="http://matrix.skku.ac.kr/Cal-Book1/Ch1/">http://matrix.skku.ac.kr/Cal-Book1/Ch1/</a>
	<a href="http://matrix.skku.ac.kr/Cal-Book1/Ch2/">http://matrix.skku.ac.kr/Cal-Book1/Ch2/</a>
	<a href="http://matrix.skku.ac.kr/Cal-Book1/Ch3/">http://matrix.skku.ac.kr/Cal-Book1/Ch3/</a>
	<a href="http://matrix.skku.ac.kr/Cal-Book1/Ch9/">http://matrix.skku.ac.kr/Cal-Book1/Ch9/</a>
	<a href="http://matrix.skku.ac.kr/Cal-Book1/Ch10/">http://matrix.skku.ac.kr/Cal-Book1/Ch10/</a>
Calculus II 다변수 미적분	<a href="http://matrix.skku.ac.kr/Cal-Book1/Ch11/">http://matrix.skku.ac.kr/Cal-Book1/Ch11/</a>
	<a href="http://matrix.skku.ac.kr/Cal-Book1/Ch12/">http://matrix.skku.ac.kr/Cal-Book1/Ch12/</a>
	<a href="http://matrix.skku.ac.kr/Cal-Book1/Ch14/">http://matrix.skku.ac.kr/Cal-Book1/Ch14/</a>
	<a href="http://matrix.skku.ac.kr/Cal-Book1/Ch15/">http://matrix.skku.ac.kr/Cal-Book1/Ch15/</a>
실습실 (파이썬)	<a href="http://matrix.skku.ac.kr/SKKU-Calculus-LAB/">http://matrix.skku.ac.kr/SKKU-Calculus-LAB/</a> <a href="http://matrix.skku.ac.kr/Cal-Book1/">http://matrix.skku.ac.kr/Cal-Book1/</a>
연습문제	<a href="http://matrix.skku.ac.kr/Cal-Book/part1/part1.html">http://matrix.skku.ac.kr/Cal-Book/part1/part1.html</a> <a href="http://matrix.skku.ac.kr/Cal-Book/part2/part2.html">http://matrix.skku.ac.kr/Cal-Book/part2/part2.html</a>



[그림 II-1] 본 연구진의 미적분 실습 예시

본 연구진도 대학의 교양수학과과정의 원활한 운영을 위한 한 가지 대안으로, 문·이과 출신의 구분 없이 미적분학 교과를 선택하고 무리 없이 대학의 미적분학 전 과정을 학습할 수 있도록, 교육과정 및 그와 관련하여 필요한 모든 교육환경을 제공하려고 노력하였다. <표 II-2>와 [그림 II-1]은 본 연구진이 그간 개발한 미적분학

과목 사이버 실습실<sup>5)</sup>과 관련 이미지의 일부이다. 본 연구진이 대학에서 진행한 미적분학 교수·학습 과정은 자기 주도적 학습, 플립드러닝(flipped learning), 쌍방향 실습 그리고 파이썬 기반 코딩교육 등이 가능하다([그림 II-2] 참조). 구체적으로 학생들은 미적분학의 역사적 배경부터 각 단원별 내용과 문제풀이가 모두 담긴 동영상 강의와 웹 교안을 이용하여 오프라인에서 스스로 미적분학을 학습하고, 온라인에서는 학습관리시스템(LMS, Learning Management System) 등의 교육환경을 적절히 활용하여 주요 개념과 연습문제 풀이에 관한 학생들의 질문과 답변을 활성화 하였다. 그리고 코딩을 이용하여 복잡한 계산을 획기적으로 줄이면서 계산에 소요되던 많은 시간을 주요 수학적 개념의 이해, 관련 질문과 학생 답변 그리고 예제에 대한 풀이와 발표 등에 더 많이 배정함으로써 자유롭게 지식을 습득하고 문제해결력과 의사 소통력을 신장시킬 수 있었다. 또한 미적분학에 소개된 다양한 함수에 대한 극한, 연속, 미분과 적분 등의 계산과 문제 적용을 주어진 코딩을 활용하여 언제 어디서든 바로 확인하고 실시간으로 확장할 수 있도록, 파이썬 기반의 오픈소스 프로그램인 SageMath와 연동하였으며 그 결과로 코딩능력과 컴퓨팅 사고력이 신장되도록 환경을 조성하였다. 더불어 학생 스스로 학습 목표를 설정하고 학습을 수행하며 학습 결과도 스스로 평가하는 자기 주도적 학습 활동(교육인적자원부, 2009)이 가능하도록 오프라인, 온라인 또는 플립드러닝 등을 모아 PBL(Problem/Project-Based Learning, 문제/프로젝트 기반 학습) 보고서로 제출하고, 보고서 결과에 따라 준비된 학생의 발표와 문제풀이 공유 등을 통하여 동료 학생들의 학습 의욕을 자극하고, 실제 학습활동에 도움을 주어 전체적인 강좌의 질을 상향평준화하는 것이 가능하였다. 마지막으로 본 연구진이 최근까지 심혈을 기울여 집중한 부분은 학생들이 학습의 전 과정에서 수식을 쉽게 표현하도록 돕는 것이었다. 즉, 학생들이 수학의 개념과 수학 문제풀이에 대하여 자유롭게 논의할 때 수식을 표현하는 것이 가장 기초적이면서도 부담스러운 문제였으며, 이 문제를 해결하기 위하여 웹에서 모든 강의 자료는 물론 연습 문제와 풀이의 일부 및 관련 코드와 실습실 등의 자료를 무료로 공개하였다. 따라서 학생들은 학습 중에 생긴 궁금함을 질문할 때 관련 자료를 바로 복사하여 LMS의 QnA에 옮겨놓고 자료에 직접 표시하면서 구체적으로 질문할 수 있게 되었다. 이는 교안의 독창성과 무료 공개의 자신감이 있어야 가능한 일로 그간에 개발된 많은 자료들과 코드 및 클라우드 컴퓨팅 도구와 웹 작업에서의 축적된 기술력이 큰 도움이 되었다.



[그림 II-2] 파이썬 기반의 코딩을 활용한 대학 미적분학 교수·학습의 특징

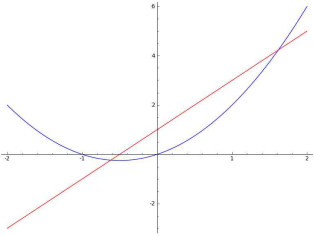
## 2. 파이썬 기반의 코딩교육

21세기 디지털 첨단 모바일/인터넷 시대와 함께 4차 산업혁명 시대(사회)의 도래는 대학수학교육에서 기존과 다른 혁신적인 교육을 요청하고 있으며, 특히 CT나 코딩교육에 대한 관심을 증가시키고 있다. 만일 학생들이 일찍부터 자연스럽게 CT나 코딩을 경험/이해할 수 있고, 문제/프로젝트 기반 학습을 통해 다양한 현실 문제들을 다루어 본 경험을 갖고 그런 경험 중에 성공한 사례들이 나타나게 된다면, 이는 우리나라를 혁신적으로 바꿀 수 있는 인재를 양성하는 역할에 부합한다고 할 수 있을 것이다.

미국의 경우 1980년대 이전부터 초등 및 중등학교 과정에서 TI-계산기, HP-Graphing Calculator나 맵스매터

5) 이후의 본문에 제시되는 실습실이란 모두 '사이버 실습실'을 의미함

카 등을 활용하여 학생들이 수학을 배우면서 자연스럽게 코딩에 대한 지식을 습득하고 CT에 대한 경험을 갖도록 노력해왔다. 그리하여 학생들은 컴퓨터 기반 환경에서 함수의 그래프를 그려보고, 방정식을 풀며, 또 시뮬레이션을 통해 예측을 하는 등 다양한 경험을 갖게 되었고, 이것이 바로 미국 대학의 경쟁력이 되었다. 한국도 1990년대부터 공학적 도구를 도입하여 소프트웨어를 활용한 교육을 시도하고 있으며, 2010년부터는 앞서 언급한 계산기와 소프트웨어를 넘어 스마트폰에서 직접 계산기와 그래프 등을 실행하고 있다. 특히 S대학에서는 대학수학과목(미적분학, 선형대수학, 미분방정식, 이산수학, 기초통계학, 공학수학, 빅데이터를 위한 수학 등)을 스마트폰을 포함한 모바일 기기를 이용해 교수·학습과 평가를 모두 진행하고 있다(이상구 외, 2015; 이상구·이재화·박경은, 2017; 이상구·이재화, 2019). 즉, 스마트폰을 포함한 모바일 기기를 효과적으로 활용하기 위해 따로 프로그램을 설치할 필요가 없고, 로그인 과정 없이 언제 어디서나 무료로 계산과 시뮬레이션이 가능하도록 자체 엔진과 콘텐츠를 구축하여 미적분학, 선형대수학을 비롯한 미분방정식, 공학수학, 복소수함수론, 기초 통계학, 수학적 모델링, 데이터사이언스를 위한 수학, 빅데이터를 위한 머신러닝 등의 학습이 가능한 사이버 실습실을 개발하여 그에 따른 교육 효과를 확인하고 있다. 본 연구에서도 이러한 전 세계적인 동향과 한국의 대학수학교육의 변화에 발을 맞추어 파이썬 기반의 코딩교육의 하나인 SageMath를 활용한 대학 미적분학의 교수·학습을 탐색한 것이다.

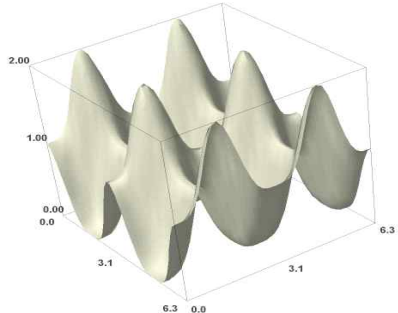
학습 목표	SageMath를 이용하여 $y = f(x)$ 와 $y = f'(x)$ 의 그래프를 한 번 확인하기.
코딩	<code>show(plot(f(x), (x, -2, 2))+plot(g(x), (x, -2, 2), color="red"))</code>
그 래 프	

[그림 II-3] 함수와 도함수의 2차원 곡선의 그래프 예시

오픈 소스인 파이썬 기반의 언어들은 시간과 장소의 제약 없이 누구나 무료로 활용할 수 있다. 특히 스마트폰과 같은 모바일 기기의 사용이 증가하고 있는 추세에 맞추어 언제 어디서든 쉽게 프로그래밍에 접속하여 학습, 수정 및 실행이 가능하므로 실습 효과를 높일 수 있다. 또한 공학적 도구를 이용하여 효과적으로 수학을 교수·학습하기 위해서는 이론과 실습의 병행이 필요한데, 기존의 상업용 수학 소프트웨어(매쓰매티카, 메이플, 매트랩 등)가 가진 비용, 유지/보수, 프로그래밍 언어 학습 등의 한계점을 극복한 혁명적인 방법이다. 그리고 이미 몇몇의 연구에서도 검증된 바와 같이(이상구·이재화·박경은, 2017; Karjanto 외, 2019) 설명과 예제 및 미리 입력된 명령어를 이용하기만 하면 실습할 때마다 매번 명령어를 따로 입력해야하는 번거로움 없이 마우스로 [실행(Evaluate)] 만을 클릭하면서 실습을 진행하고, 그와 유사한 다른 문제에 대하여는 함수와 조건을 변경하여 바로 사용할 수 있다. 더불어 학생들은 수학 교과 내용을 배우면서 교수·학습이 진행되는 동안 자연스럽게 파이썬과

R 등의 코드를 경험하며 복잡한 계산 및 시뮬레이션을 스스로 적용하고 응용할 수 있게 된다. 이런 경험을 바탕으로 학생들은 자신의 전공에서 접하는 다양한 문제들을 실제로 해결할 수 있는 능력을 갖추게 된다. 특히 계산이 많고 복잡한 다변수 미적분학의 경우, 계산과 코딩 과정에서 시간을 충분히 절약할 수 있으므로, 이후의 시간 동안 미적분학이 다루는 광범위한 주제에 대하여 교수진 및 동료학생들(classmate)과 질문하고 답하면서 내용 깊이를 이해하고 문제를 해결하며, 그 과정을 정리하고 발표하는데 집중할 수 있게 된다.

오픈소스 소프트웨어를 활용한 미적분학 교수·학습은 그 적용가능성이 꾸준히 소개되고 있다. 이상구·신준국·김경원(2014)은 고등학교 미적분학 단원을 중심으로 SageMath를 활용한 실습사례를 개발하고 적용한 결과, 문제 풀이에 요구되는 계산 시간을 줄여 스토리텔링을 전개하는데 있어서 학습시간을 조절할 수 있으므로 개념 학습 시간을 충분히 확보하였음을 확인하였다([그림 II-3] 참조). [그림 II-4]는 미적분학에서 학습하는 3차원 곡면의 수식과 이에 대한 코드, 출력 결과물 그리고 참고할 수 있는 링크이다.

수식	$\begin{cases} f_x = v \\ f_y = u \\ f_z = \sin^4 u + \cos^4 v \end{cases}$ $(0 \leq u, v \leq 2\pi)$	출력 결과	
코딩	<pre>u, v = var('u, v') # 변수 선언 f_x = v; f_y = u; f_z = sin(u)^4 + cos(v)^4 # 수식 정의 a = parametric_plot3d( [f_x, f_y, f_z], (u, 0, 2*pi), (v, 0, 2*pi), color='beige') # 3D 객체 생성 show(a) # 3D 객체 보이기</pre>		
링크	<a href="http://matrix.skku.ac.kr/3d-print/htmls/Egg_carton.html">http://matrix.skku.ac.kr/3d-print/htmls/Egg_carton.html</a> (크롬 브라우저 이용)		

[그림 II-4] 파이썬 언어 기반의 SageMath를 이용한 3차원 곡면의 코드와 출력 결과

### III. 파이썬 기반의 코딩교육을 적용한 대학 미적분학 교수·학습

본 연구진은 4차 산업혁명 시대를 대비하여 21세기 수학교육 모델(<표 III-1> 참조)을 구축하고, 이를 효과적으로 수업 현장에 적용하기 위해 다년간 수학 사이버 실습실을 준비하고 대학수학의 여러 과목(미적분학, 선형대수학, 공학수학, 이산수학, 기초 통계학 등)을 위한 강좌에 적용하였다. 이와 같은 과정을 통해 대학수학 교과목을 배운 학생들은 자연스럽게 파이썬과 R 등 코딩에 필요한 지식을 습득하고, 이를 직접 적용한 문제/프로젝트 기반 학습을 통해 다양한 현실 문제들을 다루어 본 경험을 갖게 되어 차별화된 인재로 성장할 수 있으며, 더 나아가 고교 및 대학 과정에서 수학을 지도하면서 자연스럽게 CT와 코딩 교육<sup>6)</sup>이 동시에 가능하게 되어 최종

<sup>6)</sup> <http://matrix.skku.ac.kr/2018-album/Math-Coding.htm>



적으로는 수학교육의 환경과 내용 및 질에 혁신적 변화를 줄 수 있다고 보았다. 본 연구 또한 앞서 소개한 이전의 연구들과 동일한 취지를 가지면서 동시에 현 고등학교 교육과정에서 교육내용과 교수법이 축소 및 하향평준화 되고 있는 미적분학에 대한 효과적인 교수·학습법으로 '파이썬 기반의 코딩을 활용한 대학 미적분학에 대한 교수·학습'을 소개한다.

<표 III-1> 기존의 수학교육과 21세기 수학교육 모델 비교(이상구·이재화·박경은, 2017)

항목	기존의 수학교육 모델	21세기 수학교육 모델
교재	종이(서책형) 교과서	전자책(e-book), 웹 링크·코딩·시뮬레이션·계산 기능 등이 자유로운 디지털 교과서
실습실	PC가 설치된 전산실	WI-FI가 가능한 모든 장소, 본인의 노트북·태블릿·스마트폰 등을 기자재로 이용
강의실 / 강의	칠판이 있는 강의실 / 판서로 강의	인터넷 PC와 스크린 및 칠판이 있는 강의실 / 인터넷 자료와 클라우드 컴퓨팅을 통한 시뮬레이션 및 수학계산 과정이 포함된 강의 (녹화하여 언제든지 다시 볼 수 있으며 학생과 공유 가능)
학습 활동	교과서의 과제풀이 / 조교(TA)의 튜터링	디지털 교과서와 LMS를 활용하여 예습·질문·토론·과제 모두를 포함한 과제풀이 / 개인별로 자신의 학습기록을 모아 PBL 보고서로 작성·제출 및 발표
평가	출석·과제·지필고사 합산	온/오프라인 출석·디지털활동참여·지필고사·PBL보고서 등 모든 활동의 결과물에 가중치를 주어 합산

### 1. 파이썬 기반의 학습에 따른 컴퓨팅 사고력 신장

파이썬 기반의 코딩을 활용한 미적분학 교수·학습에서는 학생들이 실행된 결과를 눈으로 직접 확인해보고, 다양한 함수와 조건을 입력하여 문제를 좀 더 효과적으로 이해할 수 있으므로 수학 문제 이해 및 해결에 대한 자신감을 크게 향상 시킨다. 예를 들어, 아래 [그림 III-1]과 같이 이변수 함수가 그리는 영역의 부피를 구하는 문제<sup>7)</sup>에서 코드를 이용하여 2차원 또는 3차원의 그림을 그리게 되면, 주어진 문제의 함수의 모양과 적분구간을 쉽게 파악할 수 있고, 복잡한 계산도 쉽게 할 수 있는 장점이 있다. 그리고 학습자가 손으로 풀어서 얻은 답과 코드를 이용하여 그 답이 맞는지 확인하는 과정에서 중요한 학습 효과의 변화가 발생한다. 더구나 주어진 문제의 본질을 더욱 가깝게 접근하게 되어 실제 그 문제뿐만 아니라 그런 유형의 모든 문제를 해결할 수 있게 한다. 이는 학생들의 수학 문제 이해 및 해결에 대한 자신감을 크게 향상시킨다. 그밖에 더 많은 사례는 각주의 웹 사이트<sup>8)</sup>에서 확인이 가능하다.

특히, 2015 개정 교육과정에서 미적분학과 관련하여, 예를 들면, '구분구적법'과 같은 아주 기본적인데서 중요한 내용이 삭제되었기에 대학에서 2021학년도 신입생들을 위한 미적분학 교과목을 설계할 때, 구분구적법에 대한 개념을 자세하게 제공해주어야 한다. 이 경우에도 코딩을 활용하여 다양한 면적과 부피를 구하는 구분구적법의 개념을 값을 구하는 것은 물론, 시각적으로 그리고 직관적으로 이해하도록 지도하고 실제 다양한 문제해결에 적용함으로써 학생들이 구분구적법의 의미를 깊이 있게 이해하고 다양하게 활용할 수 있다. 본 연구진은 이미 수 년 동안 파이썬 기반의 오픈 소스인 SageMath를 기반으로 자체적으로 구축한 연산서버를 통해, 다양한 수학

<sup>7)</sup> [http://matrix.skku.ac.kr/cal-lab/cal-14-2-4\(new\).html](http://matrix.skku.ac.kr/cal-lab/cal-14-2-4(new).html)

<sup>8)</sup> 미적분학 & Coding, 생산한 콘텐츠 <http://matrix.skku.ac.kr/Cal-Book1/>



영역(미적분학, 선형대수학, 기초 통계학 등) 교육을 위한 웹/모바일 콘텐츠를 개발하고 이들을 교육에 꾸준히 활용하고 있다(고래영 외, 2009; 이상구 외, 2015; 이상구·이재화·박경은, 2017; 이상구·이재화, 2019).

[그림 III-1] 미적분학 문제 풀이와 그에 대한 코드 및 3차원 곡면 그래프의 예시(이중적분)

학생들의 QnA 활동 상황

Solved/Revised by 변희성, 우시명, Final 문지호, Final OK

Calculus p.190 Chapter 5.2 Problem 21

Evaluate the integral. (You should mention which method you use.)

$$\int_{-3}^6 (-x^2 - x + 6) dx$$

Sol)  $\int_{-3}^6 (-x^2 - x + 6) dx = \left[ -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6x \right]_{-3}^6$

$$= -72 - 18 + 36 - \left( 9 - \frac{9}{2} - 18 \right) = -\frac{81}{2}$$

```
var('x'); # http://sage.skku.edu/
f(x) = -x^2 - x + 6
print integral(f(x), x, -3, 6)
plot(f(x), (x, -5, 0)) + plot(f(x), (x, -3, 6), fill=true) + plot(f(x), (x, 6, 9))
```

**Answer:**  $\int_{-3}^6 (-x^2 - x + 6) dx = -\frac{81}{2}$  ■

[그림 III-2] 미적분학 LMS에서 학생들의 QnA 활동 상황

그 결과 학생들은 각 강좌에서 코딩과 컴퓨팅 사고력의 중요성에 대하여 알게 되었으며, 대학에서 새로운 수학의 개념과 내용을 배운 후, 쉬운 문제를 손으로 풀고, 주어진 코드를 이용하여 자신이 푼 답이 맞는 것을 확인하며, 이어서 교재 뒤의 연습문제를 풀어가면서 점점 계산이 복잡해지는 여러 문제들을 주어진 코드와 그 코드들을 수정하여 쉽게 풀게 되었다. 그리고 이러한 과정에서 자연스럽게 코딩과 컴퓨팅 사고력을 익힌 것에 대하여 학생들의 만족도가 높았다. 미적분학 수강한 학생들이 생산한 과제 및 자체평가 기록은 각주의 웹사이트<sup>9)</sup>의

9) 학생들의 자체평가 기록, <http://matrix.skku.ac.kr/Cal-Book1/Calculus-2/> (하단)

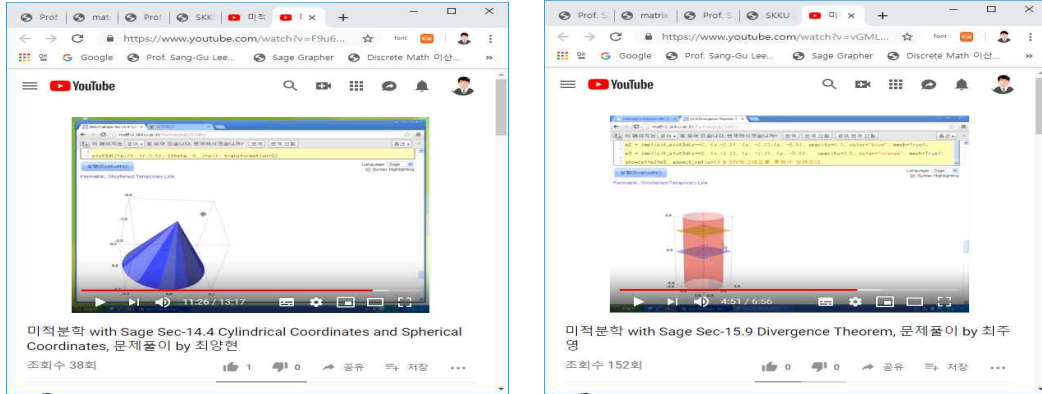
하단에서 확인할 수 있다.

<표 III-2> 미적분학 교육을 통한 동영상 강의, 학생 문제풀이 발표 및 성과 일부 기록

장별	웹 사이트 주소	
Chapter 1	동영상 강의	<a href="http://youtu.be/cl8GqIWIRD0">http://youtu.be/cl8GqIWIRD0</a>
	학생 문제풀이	곽** <a href="http://youtu.be/BNKUzSohiD8">http://youtu.be/BNKUzSohiD8</a>
		장** <a href="http://youtu.be/x0E0ZMxZ3Og">http://youtu.be/x0E0ZMxZ3Og</a>
Chapter 3	학생 문제풀이	김** <a href="http://youtu.be/vx7GCWY68Zw">http://youtu.be/vx7GCWY68Zw</a>
Chapter 4	동영상 강의	김** <a href="http://youtu.be/JmBOv6_D6qA">http://youtu.be/JmBOv6_D6qA</a>
		이** <a href="http://youtu.be/cZrAF_77On4">http://youtu.be/cZrAF_77On4</a>
	학생 문제풀이	김** <a href="http://youtu.be/SVOWADHlzV8">http://youtu.be/SVOWADHlzV8</a>
Chapter 5	동영상 강의	이** <a href="http://youtu.be/fdBHQ46g9RE">http://youtu.be/fdBHQ46g9RE</a>
	학생 문제풀이	정** <a href="http://youtu.be/Pa4Z38KkDVY">http://youtu.be/Pa4Z38KkDVY</a>
Midterm Exam		<a href="http://youtu.be/QAEI7A2DMMM">http://youtu.be/QAEI7A2DMMM</a>
Chapter 6	동영상 강의	<a href="http://youtu.be/qMlzf8qeX8">http://youtu.be/qMlzf8qeX8</a>
	학생 문제풀이	신** <a href="http://youtu.be/gNaKkA0UNHg">http://youtu.be/gNaKkA0UNHg</a>
Chapter 14	동영상 강의	<a href="http://youtu.be/olQgihl5aZg">http://youtu.be/olQgihl5aZg</a>
		<a href="http://youtu.be/q3FKd2UxV_I">http://youtu.be/q3FKd2UxV_I</a>
	학생 문제풀이	이** <a href="http://youtu.be/jpsObxtZ50A">http://youtu.be/jpsObxtZ50A</a>
Chapter 15	동영상 강의	최** <a href="http://youtu.be/F9u6pMubVRs">http://youtu.be/F9u6pMubVRs</a>
		<a href="http://youtu.be/wHINlpNXYaU">http://youtu.be/wHINlpNXYaU</a>
		<a href="http://youtu.be/WxdTbaSb_ZI">http://youtu.be/WxdTbaSb_ZI</a>
	학생 문제풀이	<a href="http://youtu.be/3BmcFr81kuQ">http://youtu.be/3BmcFr81kuQ</a>
		김** <a href="http://youtu.be/ZdRjCfJeHM8">http://youtu.be/ZdRjCfJeHM8</a>
		서** <a href="http://youtu.be/wLTHYaANwtI">http://youtu.be/wLTHYaANwtI</a>
미적분학 1, 2 (Math & Coding) 강의 (학생들이 제출한 과제/평가) 기록		최** <a href="http://youtu.be/vGMLoGWF1Is">http://youtu.be/vGMLoGWF1Is</a>
<a href="http://matrix.skku.ac.kr/Cal-Book1/Calculus-1/">http://matrix.skku.ac.kr/Cal-Book1/Calculus-1/</a>		<a href="http://matrix.skku.ac.kr/Cal-Book1/Calculus-2/">http://matrix.skku.ac.kr/Cal-Book1/Calculus-2/</a>

또한 학생들이 문제풀이 과정에서 얻은 결과를 LMS를 통해 동료 및 교수자와 함께 질문, 답변, 토론하며 개념에 대해 깊게 이해하고 설명할 수 있도록 하였다. 이 과정은 평가에 적절히 반영되어 학생들이 학습하는 과정에서 자신의 문제를 해결해가는 과정을 서술하고, 발표하는 비판적 사고 능력을 자연스럽게 갖추도록 함으로써 학습자의 자기 주도적 학습이 가능하도록 노력하였다. 위의 [그림 III-2]는 학생들이 미적분학 강좌를 수강하면서 LMS를 통하여 주도적으로 예습하고, 질문하고, 답변하고, 복습하고, 발표한 기록의 이미지이다. <표 III-2>와 [그림 III-3]은 본 연구진이 그간 개발한 미적분학 교안과 콘텐츠 그리고 실습실을 활용한 미적분학 교육의 성과를 보여주는 학생의 기록으로 일부만 소개한다. 자세한 내용은 각주의 웹 사이트<sup>10)</sup>를 참고할 수 있다.

<sup>10)</sup> <http://matrix.skku.ac.kr/2018-album/2018-Lectures-sglee.htm>



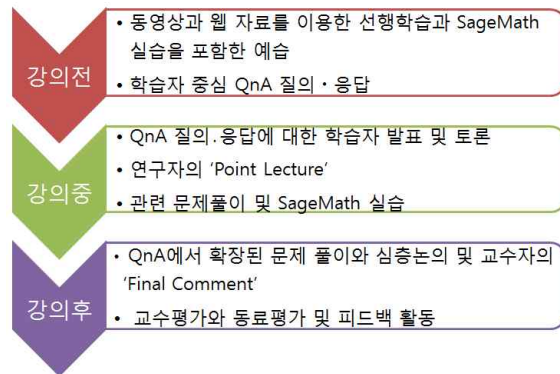
[그림 III-3] 학생들의 참여 예시

2. 플립드러닝 및 학습과정 중심의 데이터 기반 평가 방법

최근 대학 교육의 새로운 교육 방법으로 테크놀로지와 교실 수업이 접목된 블렌디드 러닝(blended learning, 혼합형 학습) 형태의 수업방법들이 연구되고 있으며 그 중의 하나가 플립드러닝이다. 선형대수학 강의를 플립드러닝으로 운영하고 보고한 연구(박경은·이상구, 2016; Karjanto 외, 2019)에 의하면, 교수자는 기존의 설명식 강의에서 가졌던 강의 이해와 실습 및 과제 풀이에서의 시간적인 부담을 줄이고 교과 내용을 시각적으로 또는 직관적으로 깊이 이해할 수 있도록 설계가 가능하며, 학생들은 미리 온라인 동영상 강의를 듣고 수업에 참여하므로 다양한 학습자 중심의 활동으로 구성이 가능하며, 자기 주도적 학습 활동을 경험한 학생들은 자연스럽게 수학적 지식 습득에 성취감과 자신감 그리고 도전의욕이 증가된다. 특히 강의식 수업에서 유효한 성과를 얻기 어려웠던 수학강좌에 공학적 도구가 자연스럽게 적용되면서, 학생들은 시간과 장소의 제약 없이 자기 주도적으로 복잡한 반복계산을 처리하는 능력을 얻게 된다. 본 연구에서도 이런 장점을 살려 ‘파이썬 기반의 코딩교육을 적용한 대학 미적분학의 교수·학습’을 설계하고 실천하는 데 집중하였다.

본 연구자는 오랫동안 대학 미적분학 강의를 직접 진행하면서 개발한, 미적분학 내용·연습문제·실습에 대한 유튜브(YouTube) 동영상과 웹에서도 읽기·쓰기·복사하기·수정하기 등이 가능한 교재를 준비하였다. 그리고 개발된 자료와 학생 참여, 상호 작용의 결과물, 경험한 내용에 근거한 심화 프로젝트 등을 포함하여 연구자와 수강생들은 역동적인 ‘강의 전-강의 중-강의 후’ 교수·학습을 전개하였다([그림 III-4] 참조).<sup>11)</sup>

학생들은 강의 전에 교수자가 미리 제공한 동영상과 웹 자료를 이용한 선행학습과 SageMath실습을 포함한 예습을 하며, LMS의 QnA에서 학습자

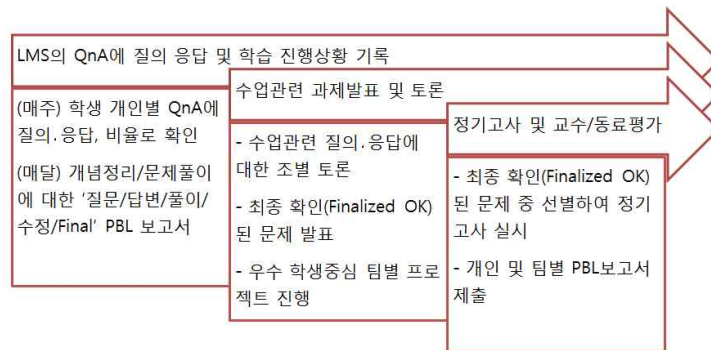


[그림 III-4] 대학 미적분학 플립드러닝 강의 모델 3단계

<sup>11)</sup> <http://matrix.skku.ac.kr/SKKU-LA-FL-Model/SKKU-LA-FL-Model.htm>

중심의 질의/응답을 진행한다. 교수자는 본 강의에서 QnA의 질의/응답 상황에 따라 주요 질문에 대한 답을 학생들과 함께 토론하며, 관련 문제 풀이 및 SageMath 실습을 진행한다. 강의를 마친 후에는 교수자가 제시한 연습문제를 학생들이 수정/변형하여 풀이한 후 QnA에 업로드 하고, 다른 학생들이 풀이한 문제를 검토/수정하거나, 이해가 필요한 부분은 반복하여 질문하면서 QnA에서 토론하도록 유도한다. 교수자는 활동이 매주 꾸준히 이어질 수 있도록 정기적으로 살펴봐야 필요에 따라 적절한 참고자료 등 피드백을 제공한다.

교수·학습의 공정하고 효과적인 평가를 위해 데이터 기반 평가방법을 활용하였다. 데이터 기반 평가방법은 본 연구진이 다년간 운영하면서 보완해 온 포트폴리오식 평가방법으로, 대학 이산수학 강의에서 학생들의 문제 해결력 신장 및 토론을 통한 지식 공유 활성화와 같은 학습의 변화 등에 긍정적인 효과를 거두었음이 이미 보고되었다(이상구·이재화, 2019). 따라서 본 연구자는 데이터 기반 평가방법이 대학 미적분학 강의의 평가에서도 동일하게 적용될 수 있다고 보고 [그림 III-5]와 같이 활용하였다.



[그림 III-5] 대학 미적분학의 데이터기반 평가 적용 내용

본 연구의 데이터 기반 평가방법은 매주-매달-정기고사-교수/자기/동료평가 모두를 합산하여 이루어진다. 평소 수업의 참여율에 대해서는 매주 QnA에 질의·응답한 비율과 매달 제출하는 PBL 보고서로 평가된다. 중간고사는 QnA에서 교수자/조교에 의해 최종 검토를 거친(Finalized OK)된 문제들 중심으로 약 50% 정도가 출제된다. 중간고사 후, 우수성적 학생을 조장으로 팀을 구성하고 학기말까지 팀별로 기말 프로젝트/시험/발표가 점검되며 개인 및 팀별로 PBL 보고서를 제출하고 발표하여 상호 평가한다. 이후 최종 평가는 각자의 학습과정에 참여한 기록과 생성된 결과물 그리고 발표에 대하여 교수 및 동료 평가 항목에 적절한 비율을 주어 합산한다.

지금까지 소개한 미적분학 교수·학습 과정에서 학생들과 교수진 모두는 수학 수업에서 발생한 모든 질문과 답변을 무리 없이 QnA 게시판을 이용하여 나누며, 수학에 대하여 서로 이야기하는 문화를 만들었다.<sup>12)</sup> 그리고 이런 과정에서 생산된 자료들은 PBL 보고서가 되어 제출되고, 수업시간에 발표되며, 이렇게 공유된 자료와 학생들의 학습과정 및 문제풀이 발표 등 다양하게 생성된 자료들에 근거하여 평소학습, 참여, 중간고사와 기말고사 등 데이터 기반의 평가가 이루어지는 환경이 형성되었다. 더불어 모든 평가 사항에는 미적분학 내용에 대한 이해와 적용뿐 아니라 코딩에 대한 실습과 그 활용도 함께 포함되어 컴퓨팅 사고력도 꾸준히 평가할 수 있는 환경을 조성하였다(<표 III-3>). 따라서 본 연구진이 선택한 데이터 기반 평가방법은 현재 학생들을 주도적으로

<sup>12)</sup> 미적분학 강좌 운영 소개 <http://youtu.be/XWEQFlv4jKc>

<http://matrix.skku.ac.kr/Mobile-Sage-G/sage-grapher.html>

<http://matrix.skku.ac.kr/Calculus-Story/>

<http://matrix.skku.ac.kr/Lab-Book/Sage-Lab-Manual-1.htm>

<http://matrix.skku.ac.kr/Calculus-Appendix/>

<http://matrix.skku.ac.kr/Calculus-Map/>

<http://matrix.skku.ac.kr/cal-lab/Math-CAS.htm>

학습과정에 참여하게 하는 학생 중심의 강의 운영에 최적화된 평가 방법이 될 수 있다고 본다.

<표 III-3> 본 연구진의 미적분학 평가 문항 예시

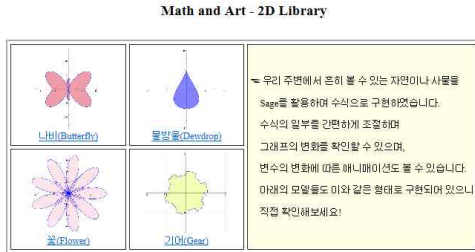
문제	모범답안
<p>2. <math>\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(x-5)^2} = \infty</math>                      입을 <math>\epsilon - \delta</math> 방법으로 보이시오.</p>	<p><b>Proof :</b> <math>\forall</math> Large number <math>M &gt; 0</math>, [Find <math>\delta</math>] Let <math>\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}</math> <span style="float: right;"><math>(\Rightarrow \frac{1}{\delta^2} = M)</math></span></p> <p>if <math>0 &lt;  x-5  &lt; \delta</math>, then <math> f(x)  = \frac{1}{(x-5)^2} &gt; \frac{1}{\delta^2} = M</math></p> <p><math>\therefore \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(x-5)^2} = \infty</math> ■</p> <p>[Side calculation] Since <math>M &gt; 0</math>, <math>(x-5)^2 &gt; 0</math>, <math>\sqrt{(x-5)^2} =  x-5  &gt; 0 \Rightarrow  x-5  &lt; \delta</math></p> <p><math>\frac{1}{(x-5)^2} &gt; \frac{1}{\delta^2} = M \Rightarrow \delta = \frac{1}{\sqrt{M}}</math></p>
<p>3. Verify the formula <math>\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = -\sin^{-1} \frac{1}{x} + C</math> (<math>x &gt; 0</math>), by Sage .</p> <p>► <b>Proof :</b> Let <math>x = \csc t</math>, <math>dx = -\csc t \cot t dt</math> <math>\Rightarrow \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\csc t \sqrt{\csc^2 t - 1}} = \frac{1}{\csc t \cot t}</math></p> <p>Thus <math>\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \int \frac{1}{\csc t \cot t} (-\csc t \cot t) dt = -\int dt = -t + C</math></p> <p><math>x = \csc t \Rightarrow \frac{1}{x} = \sin t \Rightarrow t = \sin^{-1} \frac{1}{x}</math>. Hence <math>\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = -\sin^{-1} \frac{1}{x} + C</math>.</p> <p>Verify the above formula by Sage</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content;"> <pre>var('x') f = 1/(x*sqrt(x^2-1)) assume( x &gt; 0 ) integral( f, x )</pre> </div> <p>► Sol</p> <p><math>-\arcsin(1/x) \# = -\sin^{-1} \frac{1}{x} + C</math></p> <p><math>\Rightarrow</math> LHS (좌변) = RHS (우변) ■</p>	

### 3. 미적분학 내용의 다양한 활용 및 적용

본 연구진이 제안하는 방식으로 학습한 학생들은 주어진 미적분학 내용을 다양하게 활용하여 더욱 더 깊은 미적분학 적용을 경험할 수 있게 된다. 예를 들어, 함수를 이용하여 모든 2차원, 3차원 그래프를 생성하는 것이 가능해진다. 또한 자신이 생성한 2차원, 3차원 그래프의 면적, 부피, 표면적을 모두 계산할 수 있다. 왜냐하면 학생들은 이미 매개변수, 음함수를 다루고, 선적분, 다중적분을 활용하는데 이론과 더불어 실제 그래프를 그려 보고 계산해보았으며, 이를 위한 도구들을 언제 어디서나 무료로 적용할 수 있기 때문이다.

생성한 2차원, 3차원의 시각화가 가능하게 된 것은 프로그램이 데이터를 생성하여 그것을 모니터에 보여주었기 때문이다. 예를 들어, 생성된 데이터를 STL 파일 형식으로 저장하라는 명령어를 서버에 추가하기만 하면 실제 학생들이 만든 2차원, 3차원의 다양한 함수의 (3차원) STL 파일을 쉽게 무료로 만들 수 있다([그림 III-6, III-7] 참조). 이와 관련된 사례들을 웹 사이트 <http://matrix.skku.ac.kr/3d-print/> 에서 직접 확인할 수 있다. 이어서 Cura 프로그램<sup>13)</sup>을 다운받아 설치 후 실행하여 출력할 모델(STL파일)을 업로드하고, 자신이 원하는 3D 프린터를 설정한 후 G-코드를 생성한 후, 3D 프린팅을 하면 자신이 원하는 그리고 자신이 생각하고 함수를 주어서 만

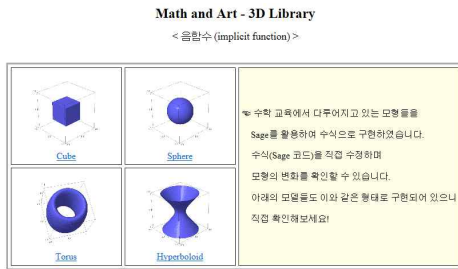
들고, 계수를 바꾸고 변수를 조정하며 만든 세상에서 유일한 자신의 예술적 작품을 실제 손안에 가질 수 있게 된다.



**SKKU Sage 3D Mathematics and Applications: 3D-Printing with Sage for Linear Algebra and Calculus**

Rules for STL file Output using Sage

Parametric Function 3D Model Generator	Examples of 3D Parametric Function Models	Matrix Transformation 3D Model Generator	Examples of 3D Implicit Function Models
Other Models & Applications			2D to 3D Stamp Creator



**How to Use**

\* By changing the variables and equations, different functions can be generated and viewed.

\* Right-click and select "Save file as..." to save the STL file to your computer. Note: You must add the extension ".STL" to your file name!

\* We recommend using the free program MeshLab to view and edit STL files you create here.

**NOTE:**



[그림 III-6] <http://matrix.skku.ac.kr/mathlib/>

[그림 III-7] <http://matrix.skku.ac.kr/3d-print-e/>

실제로 위의 내용은 2014년 제1회 대한민국 과학기술 창작대전에서 본 연구진과 지도학생들이 함께 <DIY 수학교구 3D 프린팅>이란 제목으로 출전하여 우수상 및 한국과학창의재단 이사장 상<sup>14)</sup>을 수상하였다. 관련 내용은 [Math, Art & 3D printing]<sup>15)</sup>에서 확인할 수 있다([그림 III-8] 참조).

**ArtSurf : 대수방정식과 매개변수로 표현되는 곡면의 3D프린팅**

**3D-Printing Tools for Algebraic & Parametric Surfaces**

Sage를 이용한 차버릴 용이 최적	다양한 대수곡면(Algebraic surfaces) 3D 모델제작기	다양한 매개변수곡면(Parametric surfaces) 3D 모델제작기	다양한 합성변환(Matrix Transformation) 3D 모델제작기	3D-Stamp 프랑 생성기	다양한 응용 곡면들
---------------------	---------------------------------------	------------------------------------------	------------------------------------------	-----------------	------------

**사용방법**

- \* 사교 변수를 수정하여 다른 함수들을 표현할 수 있습니다.
- \* 마우스 오른쪽 버튼을 통해 '다른 이름으로 저장'하여 STL 확장자를 지정해주세요.
- \* 무료 프로그램인 MeshLab 등을 이용하여 생성된 STL 파일을 확인 또는 수정 가능합니다.

MeshLab ("MeshLab" 다운로드)

**주의사항**

- JAVA 애플릿 구동이 원활한 '구글 크롬' 또는 '사파리'로 접속해주세요.
- STL과 파일을 제작하시기 전에, 미리 JAVA를 설치해주세요.
- JAVA ("JAVA" 설치)
- 불보라우리의 보안설정이 높을 경우, 실행시 보안 경고가 나타날 수 있습니다.

더 많은 내용은 아래의 주소를 참고하세요

<http://matrix.skku.ac.kr/cal-lab/Math-CAS.htm>  
("Math and Art" 링크)

**Simulation**  
Using the Online Server made by Open-Source Software "Sage"

**Students**  
Increasing the demand of the interactive contents  
Increasing the Demand of more information "need" with class  
Only need the Mathematical concepts

**3D-Printing**  
Generating .STL files

**Calculation**  
Algebraic & Geometric Properties

**Circumstance**  
E-Learning Environments  
E-Campus, E-Campus

**ArtSurf (Web Tool)**

[그림 III-8] <http://matrix.skku.ac.kr/artsurf/>

13) STL파일을 3D 프린팅이 가능하도록 G-코드로 변환해준다.  
 14) <http://www.youtube.com/watch?v=vggS8IObnms>  
 15) <http://matrix.skku.ac.kr/artsurf/>    <http://matrix.skku.ac.kr/cal-book1/grapher/>



#### IV. 결론 및 제언

본 연구에서는 고등학교에서 미적분학 교육을 거의 받지 않은 대학생들조차도 단시간에 미적분학의 주요 개념을 이해하고, 현실에서 접하는 복잡한 문제들에 대한 문제해결력도 키우면서 컴퓨팅 사고력도 동시에 신장시킬 수 있는 미적분 교수·학습의 가능성으로 ‘파이썬 기반의 코딩교육을 적용한 대학 미적분학의 교수·학습’의 콘텐츠를 개발하고, 실제 수업 현장에 적용하여, 유의미한 성과를 거둔 예를 방안으로 제시하였다. 이와 같은 연구는 최근 수학과 고등학교 교육과정의 학습부담 경감을 위한 학습내용 축소라는 동향의 결과로 미적분학 내용이 감소되면서 대학 미적분학 교육에서 야기되는 심각한 문제점을 해결하기 위해서이다. 즉, 교육과정의 잦은 변화와 내용삭감 등으로 학교 현장 교사와 학생들 그리고 대학에서도 교육의 질 관리에 어려움이 더 커졌고, 고등학교에서 미적분을 제대로 학습하지 않고 대학, 특히 공과대학에 진학하게 되면서 전공 학업을 전개해 나가는데 많은 지장을 토로하고 있다(이정례·이경희, 2011). 또한 2015 개정 수학과 교육과정(문·이과 통합형 교육과정)을 이수한 학생들이 졸업하여, 2021년부터 자연, 공학 계열의 전공 학업을 위한 수학 기초가 준비되지 않은 대학 신입생 비중이 크게 늘어나게 되고, 문·이과 교차지원자가 늘어나며, 융합전공 학생 비중도 늘어나게 되어 이에 대한 대책의 필요성 때문이다. 근본적으로는 학생들이 수학과 선택을 기피하는 현상을 개선하고 학생이 수학을 즐기면서 학습하고, 배운 후 이전에 할 수 없던 많은 일을 할 수 있게 되었다는 자신감을 가질 수 있도록 하는 혁신적인 변화를 이루는데 주력하기 위해서이다.

본 연구에서는 파이썬 언어 기반의 미적분학 I, II의 구체적인 교수·학습 설계, 실천 계획안 그리고 평가라는 전 과정의 실제 진행된 사례와 그에 활용된 자료들을 보고하고 공유하였다. 본 연구진이 선택한 방법은 비교적 쉽게 주어진 코드를 활용하여 이해와 계산 능력을 향상시키고, 이 모든 내용과 도구 전체를 무료로 제공하는 것이다. 파이썬 기반의 코딩교육을 적용하여 대학 미적분학을 교수·학습한 결과 다음과 같은 효과를 얻었다.

- ① 코딩을 활용하여 대학 미적분학의 내용을 유의미하게 이해하도록 도왔다. 즉, 복잡한 문제를 지필로 풀면서 사용하던 시간을 획기적으로 줄여 미적분학에 대한 관련 지식을 깊고 풍부하게 이해하도록 도왔으며, 더불어 현실에서 접하는 다양한 문제들에 대한 해결력도 키워주었다.
- ② 파이썬 기반 학습을 통해 코딩 경험도 갖추게 하면서 학생들의 컴퓨팅 사고력을 신장시켰고, 이를 이용하여 새로운 지식을 창출하는 유의미한 성과를 거두게 되었다.
- ③ 학습자가 본 수업 과정에서, QnA를 통한 토론을 활용하며 자기 주도적 학습 능력과 그 결과물들을 취합하여 만든 보고서를 제출하고, 수정하여 발표하고 또 다른 학생의 발표를 평가하는 과정에서 전체적인 이해를 가지게 됨과 함께, 새로운 문제에 대한 자신감을 갖도록 하였다.

본 연구진이 제안하는 방식으로 학습한 학생들은 언제 어디서나 활용할 수 있는 도구들과 코드 및 자료들을 무료로 손안에 가지고 있으므로, 주어진 미적분학 내용을 다양하게 활용하여 더욱 더 깊은 미적분학 적용을 경험할 수 있게 된다. 이렇게 새롭게 배운 학생들은 그런 새로운 경험을 바탕으로 새로운 시야로 세상을 보고, 자신들의 새로운 미래를 열어 갈 것을 믿어 의심치 않는다.



## 참 고 문 헌

- 고래영 · 김택선 · 박진영 · 이상구 (2009). 모바일 환경에서의 Sage-Math의 개발과 선형대수학에서의 활용, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **23(4)**, 1023-1041.
- Ko, R. Y., Kim, D. S., Bak, J. Y. & Lee, S.-G. (2009). Development of Mobile Sage-math and its use in Linear Algebra, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education*, **23(4)**, 1023-1041.
- 교육인적자원부 (2009). 2009년 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정, 교육과학기술부 고시 제2011-361호.
- Ministry of Education, Science and Technology (2009). *Commentary about the 2009 Revised Mathematics Curriculum*.
- 김윤아 · 김경미 (2017). 2015 개정 교육과정을 반영한 대학 미적분학 교과에 대한 탐색, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **31(3)**, 349-366.
- Kim, Y. A. & Kim, K. M. (2017). A Study on the Curriculum of University Calculus Reflecting the 2015 Revised Curriculum, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education*, **31(3)**, 349-366.
- 김희진 · 서종진 · 표용수 (2011). 대학 입학예정자를 위한 기초수학 수준별 학습지도 방안, 한국학교수학회논문집, **14(3)**, 339-354.
- Kim, H.-J., Seo, J. J. & Pyo, Y.-S. (2011). A Teaching Method of Basic Mathematics for the Matriculants by Ability Grouping, *Journal of the Korean School Mathematics Society*, **14(3)**, 339-354.
- 박경은 · 이상구 (2016). 선형대수학 플립드러닝(Flipped Learning) 강의 모델 설계 및 적용. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **30(1)**, 1-22.
- Park, K.-E. & Lee, S.-G. (2016). Flipped Learning teaching model design and application for the University's Linear Algebra, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education*, **30(1)**, 1-22.
- 박준식 · 표용수 (2013). 대학 기초수학 교과목 수준별 학습지도 개선 방안, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **27(1)**, 19-37.
- Park, J.-S. & Pyo, Y.-S. (2013). Improvement strategies of teaching methods for university basic mathematics education courses by ability grouping, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education*, **27(1)**, 19-37.
- 박형빈 · 이현수 (2009). 대학생들의 교양수학에 대한 인식과 교양수학의 긍정적 인식변화를 위한 방안, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **23(4)**, 999-1014.
- Park, H. B. & Lee, H. S. (2009). On the awareness of mathematics by college students and a suggestion to elevate such awareness in universities, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education*, **23(4)**, 999-1014.
- 송윤희 (2012). 대학 교양수학 수업에서 성취목표, 자기효능감, 불안 및 학습성과와의 관계, 교과교육학연구, **16(4)**, 1001-1020.
- Song, Y. H. (2012). The Relationships among Achievement Goal, Self-efficacy, Anxiety, and Learning Outcomes in Calculus, *Journal of Research in Curriculum & Instruction*, **16(4)**, 1001-1020.
- 이상구 · 신준국 · 김경원 (2014). 스토리텔링 수학 교과서에서 공학적 도구의 활용과 미분적분학 단원에 관한 개발 사례, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **28(1)**, 65-79.
- Lee, S.-G., Shin, J. & Kim, K.-W. (2014). A Case Study of Perceptions on Storytelling Mathematics Textbooks with Computer Algebra System, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education*, **28(1)**, 65-79.
- 이상구 · 이광희 · 최용석 · 이재화 · 이지영 (2015). R을 활용한 '대화형 통계학 입문 실습실' 개발과 활용, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **29(4)**, 573-588.

- Lee, S.-G., Lee, G. H., Choi, Y. S., Lee, J. H. & Lee, J. J. (2015). Interactive Statistics Laboratory using R and Sage, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education*, **29(4)**, 573-588.
- 이상구 · 이재화 · 박경은 (2017). 디지털 시대의 대학수학교육: 선형대수학을 중심으로, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **31(4)**, 367-387.
- Lee, S.-G., Lee, J. H. & Park, K.-E. (2017). Linear Algebra Teaching in the Digital Age, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education*, **31(4)**, 367-387.
- 이상구 · 이재화 (2019). 학생중심의 대학 이산수학 강의 운영사례, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **33(1)**, 1-19.
- Lee, S.-G. & Lee, J. H. (2019). Student-Centered Discrete Mathematics Class with Cyber Lab, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education*, **33(1)**, 1-19.
- 이정례 · 이경희 (2011). 수학 기초학력과 대학수학능력시험 수리영역 성적의 관계 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **25(4)**, 629-639.
- Lee, J. R., & Lee, G. H. (2011). A Study on the relation between Mathematical Scholastic Ability and Scholastic Aptitude Test, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education*, **25(4)**, 629-639.
- 전재복 (2008). 바람직한 대학기초수학 교육과정 운영방안 : 공학기초수학을 중심으로, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **22(4)**, 399-416.
- Jun, J.-B. (2008). Desirable Management of Basic Mathematics Curriculum in College, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education*, **22(4)**, 399-416.
- 전평국 (2008). 한국의 수학교육, 무엇이 문제인가?, 한국수학교육학회 <전국수학교육연구대회 프로시딩>, **40**, 1-10.
- Jun, P. K. (2008). What is the problem in Korea's mathematics education, *Korea Soc. Math. Ed. Proceedings of National Meeting of Math. Ed.*, **40**, 1-10.
- 한국과학창의재단 (2014). 초·중등 단계 Computational Thinking 도입을 위한 기초연구, 공고 제2013-087호.
- KOFAC (2014). *Research for Introducing Computational Thinking into Primary and Secondary Education*, Report.
- Karjanto, N. Lee, S.-G. & Lee, J.H. (2019). Flipped Class with Electronic Book and SageMathCell for Linear Algebra, *The Electronic Journal of Mathematics & Technology (eJMT)*, **13(1)**, 109-120.

## Teaching and Learning of University Calculus with Python-based Coding Education

**Park, Kyung-Eun**

Department of Mathematics Education, Sungkyunkwan University, Seoul 03063, Korea  
E-mail : postmedu@skku.edu

**Lee, Sang-Gu<sup>†</sup>**

Department of Mathematics, Sungkyunkwan University, Suwon 16419, Korea  
E-mail : sglee@skku.edu

**Ham, Yoonmee**

Department of Mathematics, Kyonggi University, Suwon 16227, Korea  
E-mail : ymham@kyonggi.ac.kr

**Lee, Jae Hwa**

Department of Mathematics, Sungkyunkwan University, Suwon 16419, Korea  
E-mail : jhlee2chn@skku.edu

This study introduces a development of calculus contents which makes to understand the main concepts of calculus in a short period of time and to enhance problem solving and computational thinking for complex problems encountered in the real world for college freshmen with diverse backgrounds. As a concrete measure, we developed ‘Teaching and Learning’ contents and Python-based code for Calculus I and II which was used in actual classroom.

In other words, the entire process of teaching and learning, action plan, and evaluation method for calculus class with Python based coding are reported and shared. In anytime and anywhere, our students were able to freely practice and effectively exercise calculus problems. By using the given code, students could gain meaningful understanding of calculus contents and were able to expand their computational thinking skills. In addition, we share a way that it motivated student activities, and evaluated students fairly based on data which they generated, but still instructor’s work load is less than before. Therefore, it can be a teaching and learning model for college mathematics which shows a possibility to cover calculus concepts and computational thinking at once in a innovative way for the 21st century.

---

\* ZDM Classification : I15, U55, N85

\* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U70, 97C80, 97U50

\* Key Words : Calculus, Coding Education, Problem/Project-Based Learning, Computational Thinking, Python

\* This research was supported by Basic Science Research Program through the National Research Foundation of Korea(NRF) funded by the Ministry of Education(2017RID1A1B03035865).

<sup>†</sup> Corresponding author