韓國數學教育學會誌 시리즈 E <數學教育 論文集>
https://doi.org/10.7468/jksmee.2019.33.3.255
제 33집 제 3호, 2019. 9. 255-273

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 33, No. 3, Sep. 2019. 255-273

소수(prime) 개념 발전의 역사 분석에 따른 교수학적 논의

강 정 기 (진영중학교 교사)

소수의 개념적 측면에 대한 학생들의 이해 부족 현상이 목격되는바 본 연구는 학생들이 소수 개념의 본질을 바르게 이해하도록 돕고자, 소수 개념 발전 역사를 조망하고 교과서의 개념 도입 방법을 분석하였다. 고대 그리스에서 소수는 곱셈 원자였다. 당시 단위는 수가 아니었지만, 소수 표기 개발로 단위가 수로 통합되면서 1의 소수성이 문제시 되었다. 소인수분해의 유일성을 근거로 1이 소수에서 배제되었으며, 이후 발전을 거듭하여 prime 개념과 irreducible 개념이 자리 잡게 되었다. 소수 개념 발전의 역사는 소수가 곧 곱셈 원자라는 사실이 개념의 본질임을 명백히 드러낸다. 교과서 분석 결과, 교과서는 소수 개념을 결정론적 시각 혹은 게임으로 도입하여 개념 본질을 드러내지 못하는 문제, 개념 도입 후 분석적 개념 정의로 급진적 전개가 이루어지는 문제 등이 있었다. 분석 결과에 기초하여 소수의 개념적 면에 주목하도록 돕는 것과 관련하여 몇 가지 교수학적 시사점을 제공하였다.

Ⅰ. 서론

소수(素數, prime)는 수학의 핵심 대상이다. Sautoy(2003)는 다음과 같이 소수를 경외의 대상으로 묘사하기도 하였다.

> 소수는 수학자들이 수세기 동안 탐험한 무한 우주의 광대한 창공에 박힌 보석이다. 소수는 물리적 현실과 무관한 어떤 세계에 존재하는 영원한 숫자로 수학자들에게 경외감을 심어줬다. 소수는 자연이 수학자에게 준 선물이다(Sautoy, 2003).

수학에서 소수는 늘 중요한 교육 주제였고, 교육과정 개정의 내용 축소에도 불구하고 소수는 단 한 차례도 빠짐없이 학습내용으로 등장하였다.

그러나 학교수학에서 소수의 개념적 측면에 대한 이해 부족 현상이 목격된다. 조경희, 권오남(2010)은 중학교 1학년 학생 198명을 대상으로 소수 개념 이해도를 조사하였다. 그 결과 학생들은 개념적인 면을 강조한 정의보다 기능적인 면을 강조한 정의를 선호하였다. 다시 말해, 더 이상 쪼개어질 수 없는 기본 단위로서 소수의 개념이 중요함에도 불구하고, 학생들은 소수의 개념적인 면을 보지 못하고 약수의 개수에 주목하여 주어진 자연수가 소수인지 아닌지를 구별하기 위한 기능적인 정의를 선호하였다.

Zazkis & Liljedahl(2004)는 116명의 예비교사를 대상으로 소수 개념에 대한 이해도를 조사하였는데, 이 연구에서 예비교사들의 소수 개념에 대한 이해 부족 현상이 목격된다. 검사 문항 중 151×157이 소수인지를 묻는 문항이 있었는데, 무려 42명의 예비교사가 소수라고 답하였다. 그 중 한 예비교사는 '$151\times157=23707$, $\sqrt{23707}=154$, 154보다 작은 모든 소수를 체크해 보았는데, 어떤 것도 23707을 나누지 못하므로 이 수는 소수'라는 반응을 보였다. 이는 명백히 소수 개념에 대한 이해 부족을 보여준다.

---

* 접수일(2019년 5월 31일), 심사(수정)일(2019년 7월 1일), 게재확정일(2019년 8월 3일)
* ZDM분류 : U22
* MSC2000분류 : 97U20
* 주제어 : 소수, 소수 개념 발전 역사, 소인수분해, 산술 기본 정리

조경희, 권오남(2010)의 연구에서 해당 단원의 학습이 종료된 시점으로부터 일주일 이내에 소수 개념을 묻는 설문이 실시되었음에도 1/3에 해당하는 학생들이 부적절한 응답을 하거나 아예 응답하지 않은 것으로 드러났다. 또 비록 캐나다의 연구이긴 하지만 Zazkis & Liljedahl(2004)의 연구에서 약 32%의 예비교사들이 부적절한 응답을 나타냈다. 이는 학생들이 소수 개념에 본질적으로 다가갈 수 있는 의미 있는 교수-학습 활동 및 지도방안이 강구되어야 할 필요가 있음을 시사한다.

소수 개념의 역사 발전을 조망해보는 것은 개념에 본질적으로 다가갈 수 있도록 돕는 방안을 마련하는 하나의 방법이 될 수 있다. Toeplitz에 따르면, 수학의 진정한 이해는 수학적 사실의 단순한 전달을 통해서 달성될 수 없으며, '관점'의 전달이 필요하다. 그는 본질적인 것은 지식 자체가 아니라 관점으로 보았으며, 이를 전달하기 위해서는 역사적 발달의 논리를 파악하여 이를 교수학적으로 번역해야 한다고 주장하였다(민세영, 2002). 이런 차원에서 소수 개념의 발전 역사에 대한 연구가 필요하며, 이는 개념적 차원에서 소수의 본질을 볼 수 있도록 돕는 교육 방안을 마련하는 기초가 될 수 있을 것이다.

이에 본 연구에서는 소수 개념의 역사 발전을 조망하고, 교과서의 개념 도입 방법을 분석해보고자 한다. 이를 통해 소수의 개념적 면에 주목할 수 있도록 돕는 것과 관련한 교수학적 시사점을 제공하고자 한다. 먼저 기존의 소수 연구의 초점과 실제적 응용을 간단하게 살펴보고, 기존 연구와 차별된 본 연구만의 고유한 특성을 밝히고자 한다. 다음 문헌 고찰로 소수 발전의 역사를 세 가지 차원인 고대 그리스에서의 소수 개념, 1의 소수성에 대한 논란, 소인수분해와 소수 개념 분화에 대해 살펴볼 것이다. 마지막으로 교과서 개념 도입을 비판적으로 분석하고, 이러한 분석에 기초하여 소수의 개념적 면에 주목하도록 돕는 것과 관련하여 몇 가지 교수학적 시사점을 제공하고자 한다.

Ⅱ. 소수 연구의 초점과 실제적 응용

소수에 대한 수학자들의 연구는 소수 분포와 관련되는데, 상당수의 문제가 미해결 혹은 부분적 해결로 남아있다(Stein & Mazur, 2007).

소수 분포와 관련한 두 가지 주요 문제가 있다. 첫째, '정수 중 어느 것이 소수인가?'하는 문제인데, 이는 Eratosthenes의 체의 발견으로 이어졌다. Eratosthenes(BC 276-194)는 주어진 정수의 제곱근보다 작은 소수가 그 정수의 약수가 아니라면 그 정수는 소수라는 사실을 이용해 소수를 선별하는 방법을 고안하였다. Eratosthenes의 체는 주어진 정수 목록에서 어떤 수가 소수인지 선별하는 하나의 방법이지만, 수가 클수록 오랜 계산이 요구되므로 실제 적용 측면에서 비효율적이다(Curtis & Tularam, 2011). Eratosthenes의 체는 계산을 무한 번 해야 모든 소수를 선별할 수 있기 때문에 사실상 실행 불가능한 방식이다.

둘째, 소수가 규칙성을 가지는지 여부이다. 구체적으로 '특정수 N에 대하여 그 다음 소수 혹은 그 이전 소수를 결정하는 간단한 공식이 존재하는가?'라는 것인데 상당수가 미해결로 남아있다. 예컨대, 11, 13과 같은 쌍둥이 소수의 무한성 문제가 대표적이다. 이 문제는 컴퓨터 계산으로 극도로 큰 숫자에 이르기까지 탐구되었다(Oladejo and Adetunde, 2009; Stein & Mazur, 2007). 컴퓨터 계산은 실험적인 증거가 될 수 있지만 무한히 계속되는지 여부는 수학적으로 입증되지 않았다(Curtis & Tularam, 2011). 이외에도 Goldbach의 추측, Riemann 제타 함수와 관련된 추측 등은 소수의 패턴을 찾기 위한 노력과 관련된다.

소수는 실제 세계와 무관해 보이지만 사실은 그렇지 않다. Euclid(BC 약325-약265)는 수를 기하 차원에서 다루었다는 점에 주목할 필요가 있는데, 이는 추상적인 수가 실제 세계와 무관하지 않음을 보여주는 대목이다. <Euclid 원론>의 제 Ⅸ권의 명제 20에서 소수의 무한성에 대한 Euclid의 증명은 정수를 선분으로 표현하고, 측정은 그 선분의 분해 가능성으로 표현하는 것과 관련된다. Euclid는 선분이라는 측정 할 수 있는 물리적 양이라

는 수의 실제적 측면에서 접근하려고 시도했기 때문에 소수의 무한성 증명이 가능했다고 추정할 수 있다(Curtis & Tularam, 2011). 이처럼 소수는 실세계를 기반으로 탐구되었으므로 실세계와 밀접한 관련을 지닌다.

실제로 선분이라는 물리량과의 관련성을 차치하더라도, 소수는 실세계에서 다양한 응용력을 지니고 있다. 암호는 소수의 실질적 응용이 이루어지는 대표 분야이다. 암호에서는 소인수분해하는 것이 거의 불가능한 큰 수의 소수를 이용하는데, 신용 카드 번호와 같은 중요한 정보를 다른 수신기에서 해독 불가능한 형태로 덮어씌우는 방식을 취한다(Curtis & Tularam, 2011). 이처럼 소수는 중요한 정보를 안전한 형태로 보호하는데 이용되고 있다.

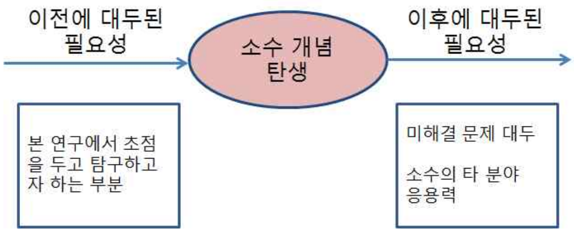
소수는 음악에도 활용되었는데, 음악가들이 소수를 간접적으로 사용했다고 전해진다. 예컨대, 어떤 음악가는 전통 음악을 지배하는 규칙으로부터 자유로운 느낌을 주기 위해 소수를 이용하여 작곡을 시도하기도 하였다. Olivier Messiaen은 자신의 음악 전체에 소수를 사용한 대표적 작곡가이다(Starbird, 2008).

자연 그 자체에서도 소수가 이용되기도 하는데, 곤충들의 삶에서 소수 사용을 엿볼 수 있다. 매미는 5년, 7년, 13년, 17년과 같은 소수의 기간 동안 땅 속에 살며 그 기간이 끝날 무렵 성충이 되어 나타난다(Goles, Schulz, & Markus, 2000). 이처럼 소수는 수학과 과학뿐만 아니라, 자연과도 연결되는 신비로움이 있다.

이상에서 소수 연구는 소수 분포와 관련된 난제 해결에 초점을 두고 있음을 알 수 있었다. 비록 소수가 실세계와 무관한 듯 보이지만 실제로는 수학, 과학, 음악, 심지어 자연에까지 응용되고 있었다.

Curtis & Tularam (2011)은 소수에 대한 고등학교 학생들의 흥미 수준이 지속적으로 감소하고 있으므로, 소수 연구가 왜 중요한지를 부각함으로써 소수 연구에 대한 흥미를 진작시키고자 하였다. 그들은 소수 연구의 필요성을 미해결 문제와 소수의 실제적 응용력에서 찾고 있다. 그러나 이는 소수라는 개념이 생기고 나서 파생된 필요성이다.

소수 개념을 처음 도입하는 중학교의 교육을 위해서는 소수 개념 탄생 이전의 필요성이 파악되어야 한다. 그래야 개념을 아직 접하지 못한 학습자가 본질적 필요성을 좇아 개념을 탐구하고 발견할 수 있게 된다. 이에 본 연구에서는 완성된 개념으로서의 소수보다 완성되어가는 과정으로서의 소수 개념에 초점을 두고 소수 개념 발전 역사를 조망해보고자 한다.



[그림 II-1] 소수 개념 학습 필요성의 두 측면

Ⅲ. 소수 개념 발전 역사

본 장에서는 고대 그리스에서의 소수 개념, 1의 소수성에 대한 논란, 소인수분해와 소수 개념 분화라는 세 가지 차원에서 소수 개념 발전 역사를 조망해보고자 한다. 3가지 차원의 구분은 시대별 쟁점의 변화에 따른 것이다. 1절은 고대, 2절은 중세, 3절은 근대에서 쟁점이 된 개념을 중심으로 서술하였다.

1. 고대 그리스에서의 소수 개념

어떤 물질을 이루는 기본 단위인 원자(atom)는 '더 이상 나누거나 분해할 수 없는 물질'이라는 뜻인데, 원자 개념을 수에 적용한 것이 곧 소수이다. 다시 말해, 어떤 수를 분해할 때 '더 이상 분해할 수 없는 수'라는 원자 유추로 탄생한 개념이 소수이다.

인도 유럽어에서 쓰이는 atom은 고대 그리스어 a-tomos(a-: 부정, tomos: 쪼갬)에서 온 것으로서 더 이상 나뉠 수 없는 것이라는 뜻을 갖고 있다. atom이라는 낱말은 언어적으로 고대 그리스어에 뿌리가 있을 뿐만 아니라, 그 추상적 개념은 이미 BC 5세기에 고대 그리스 철학자 Democritus(BC 약460-약370)가 쓴 것이다 (Wikipedia, 2017).

Democritus의 활동 시기가 Euclid 이전임을 감안하면, 그의 원자론이 수의 근원에 대한 탐구심을 촉발하는 계기였을 것으로 생각된다. 때문에 그리스인들은 이전 시대[1]에 비해 소수에 보다 많은 관심을 기울였던 것으로 해석된다. Sautoy(2003)에 따르면 소수는 바로 산술의 원자로, 고대 그리스인들은 BC 4세기에 수의 구성 요소로서 소수의 진정한 효능을 처음 발견한 사람이었다.

<Euclid 원론> 제 Ⅶ권에 정의 1, 정의 2, 정의 11에 각각 단위, 수, 소수를 다음과 같이 정의하고 있다 (Fitzpatrick, 2007).

α′. Μονάς ἐστιν, καΘ’ ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται.
1. A unit is (that) according to which each existing (thing) is said (to be) one.
(단위는 각각의 존재하는 것들을 만드는 것이며, 이것을 1이라고 부른다)

β′. ’ΑριΘμὸς δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆΘος.
2. And a number (is) a multitude composed of units.
(수는 단위를 가지고 만든 것이다)

ια′. Πρῶτος ἀριΘμός ἐστιν ὁ μονάδι μόνῃ μετρούμενος.
11. A prime number is one (which is) measured by a unit alone.
(소수는 단위로만 측정되어지는 수이다)

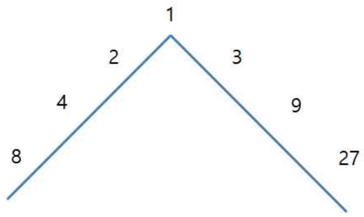
위 정의는 그리스인들이 단위와 소수를 위계적으로 보고 있음을 보여준다. 그리스인들은 소수와의 엄격한 구분을 위하여 1을 수의 기원이나 수의 생성원으로 인정하였다. 1과 소수를 구별하는 입장은 Plato(BC 427-347)의 TimaioΣ[2]를 통해 확인 가능하다. Plato의 수 구성에서 단위와 소수 간의 위계에 대한 정조를 확인할 수 있다.

Plato는 3단계의 수학적 조작을 통해 우주혼을 구성하는데, 이것은 구성의 첫 번째 단계이다. 이를 통해서 1, 2, 3, 4, 9, 8, 26의 수 계열이 성립한다. 이것은 2배 간격의 수 계열인 1, 2, 4, 8과 3배 간격의 수 계열인 1, 3, 9, 27로 나뉜다. 이를 도식화하면 [그림 2]와 같다(박종현·김영균 역, 2000).

---

1) 소수에 대한 최초의 기록은 고대 이집트로 거슬러 올라간다. 이집트의 <Rhind papyrus>에는 소수와 합성수가 다른 형태로 표기되어 있는데(wikipedia, 2017), 당시에 이미 소수 개념이 출현되었음을 알 수 있다.

2) TimaioΣ는 B.C. 360경에 쓴 Plato의 저작이다. 이 저작에서는 대화 형식을 통해 우주의 형상과 안정적 질서와 아름다움에 대해 설명한다(Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2019).



[그림 III-1] Plato의 우주혼을 구성하는 수학적 조작(박종현, 김영균 역, 2000)

Plato의 수학적 조작에서 가장 상위에는 1이 존재하는 것을 확인할 수 있는데, 이를 통해 1과 소수 간의 위계를 의식하고 있음을 확인할 수 있다. Plato의 수학적 조작은 모든 자연수를 구성하지는 못하지만, 당시의 단위와 소수의 위계에 대한 인식을 확인시켜 준다.

<Euclid 원론> 제 Ⅶ권의 단위, 수, 소수의 정의는 합의 관점에서 수 개념을 정립하였음을 보여준다. '수는 단위를 가지고 만든 것이다'는 단위의 합으로 모든 수들이 생성되었음을 보여준다. 또 '소수는 단위로만 측정되어지는 수이다'는 단위 이외의 수의 합으로는 생성될 수 없는 수가 소수라는 점을 보여준다.

비록 합의 관점에서 소수가 정의되었지만, 소수의 활용에는 곱의 관점이 내포되어 있다. <Euclid 원론> 제 Ⅶ권 명제 32 '어떤 수는 소수이거나, 아니면 어떤 소수로 잴 수 있다'를 보면(Fitzpatrick, 2007), 소수에 의한 동수누가로서의 곱의 관점[3]이 엿보인다. 이는 소수가 곧 곱의 관점에서의 원자임을 보여준다.

자연수의 곱셈 관점에서의 원자가 곧 소수이다. 1의 덧셈으로 자연수를 구성할 때와는 달리 곱셈으로 자연수를 만들고자 한다면 1을 아무리 많이 거듭제곱하여도 그 결과는 항상 1이므로 1 이외의 다른 수가 필요하다. 예를 들어, 2를 두 번 곱하면 4, 세 번 곱하면 8이 되므로 3, 5, 6, 7 등의 수들은 2를 아무리 여러 번 곱해도 만들 수 없고 3, 5, 또는 7이 필요하다. 따라서 곱셈으로 모든 자연수를 만들려면 2, 3, 5, 7, 11 등과 같은 소수가 모두 필요하다(조경희, 권오남, 2010). 이는 소수가 곱셈의 측면에서 새로운 원자임을 보여준다.

물질로 비유하자면 합의 맥락에서 수의 생성원인 1은 양성자, 중성자, 전자 정도의 위치에 해당되며, 소수는 곱셈 원자로서의 지위가 획득되었다. 1은 묘한 수인데 1을 더해서 모든 자연수 구성이 가능하지만, 곱해서는 1밖에 못 만드는 수이다. 곱의 관점에서 1은 더 이상 원자로서의 역할을 하지 못하기 때문에 1은 상위 근본으로, 소수는 하위 근본으로 수체계의 질서를 부여한 것으로 볼 수 있다.

고대 그리스에서는 소수와 서로소를 같은 시각에서 바라보았던 것으로 생각된다. <Euclid 원론>의 기술 형태를 보면 소수와 서로소는 관련 개념임을 확인할 수 있다. <Euclid 원론> 제 Ⅶ권 정의 11, 정의 12, 정의 13, 정의 14는 각각 소수, 서로소, 합성수, 서로합성의 정의가 제시되는데(Fitzpatrick, 2007), 이들은 나란히 제시될 뿐만 아니라 표현 역시 prime, prime to one another, composite, composite to one another로 되어 이들을 관련된 것으로 이해한 당시의 인식을 확인시켜준다. 이처럼 소수와 서로소를 대등한 개념으로 이해한 것은 곱셈 원자라는 공통점에서 비롯된 것으로 보인다.

ια΄. Πρῶτος ἀριθμός ἐστιν ὁ μονάδι μόνη μετρούμενος.
11. A prime number is one (which is) measured by a unit alone.
(소수는 단위로만 잴 수 있는 수이다)

---

3) <Euclid 원론> 제 Ⅶ권 정의 15 '어떤 수에다 다른 어떤 수를 곱한다는 말은, 다른 어떤 수를 어떤 수에 들어 있는 1의 개수만큼 더해서 새로운 수를 만드는 것이다(Fitzpatrick, 2007)'는 곱셈을 동수누가로서 바라보고 있음을 보여준다.

ιβʹ. Πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί εἰσιν οἱ μονάδι μόνῃ μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ.
12. Numbers prime to one another are those (which are) measured by a unit alone as a common measure.
(서로소인 수들은 공통으로 잴 수 있는 것이 단위 밖에 없는 수들이다)

ιγʹ. Σύνθετος ἀριθμός ἐστιν ὁ ἀριθμῷ τινι μετρούμενος.
13. A composite number is one (which is) measured by some number.
(합성수는 어떤 수[4]로 잴 수 있는 수이다)

ιδʹ. Σύνθετοι δὲ πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί εἰσιν οἱ ἀριθμῷ τινι μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ.
14. And numbers composite to one another are those (which are) measured by some number as a common measure.
(서로합성인 수들은 어떤 수로 공통으로 잴 수 있는 수들이다)

소수가 수의 곱셈 원자인 반면, 서로소는 비율의 원자로 인식했던 것으로 보인다. <Euclid 원론> 제 Ⅷ권 명제 1을 보면 '서로소는 비율이 같은 수들 중 가장 작은 수'라는 것을 표명함으로써(Fitzpatrick, 2007), Euclid는 서로소를 비율이 같은 동치류의 생성원으로 이해하고 있음을 알 수 있다.

αʹ. Ἐὰν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.
1. If there are any multitude whatsoever of continuously proportional numbers, and the outermost of them are prime to one another, then the (numbers) are the least of those (numbers) having the same ratio as them.
(차례차례 구한 비율이 같은 수들이 몇 개라도 좋으니 있다고 하자. 그리고 양 끝의 수들이 서로소라고 하자. 그러면 이 수들은 이들과 비율이 같은 수들 중에 가장 작은 수들이다)

고대 그리스인들은 수를 기하적으로 다루었던 만큼, 수를 결정의 시각에서 바라보았다. 결정론적 시각은 <Euclid 원론> 이전부터 있던 것이다. Theon(AD 335-405)은 '합성수들 중에서 두 수로 되어 있는 수를 평면수(평면)라 불렀다. 이들은 길이와 폭, 이렇게 이차원을 갖고 있기 때문이다. 그리고 세 수로 되어 있는 수를 입체수(입체)라 불렀다(Heath, 1908). 이는 기하학적 관점에서 수를 다루면서 생긴 자연스런 곱의 관점이다.

Euclid 역시 수를 결정론적 시각에서 이해하고 있었다. <Euclid 원론> 제 Ⅶ권 정의 16, 정의 17은 평면수와 입체수를 정의하는데(Fitzpatrick, 2007), 이는 명백히 수를 결정론적 시각에서 바라보고 있음을 보여준다.

ιϛʹ. Ὅταν δὲ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος ἐπίπεδος καλεῖται, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί.
16. And when two numbers multiplying one another make some (other number) then the (number so) created is called plane, and its sides (are) the numbers which multiply one another.
(두 수를 곱해서 다른 수를 만들 때, 새로운 수를 평면이라 부르며, 서로 곱한 두 수들은 이들의 변이라고 한다)

---

4) Euclid는 단위를 수로 간주하지 않았으므로 '어떤 수'는 단위를 제외한 수를 의미한다.

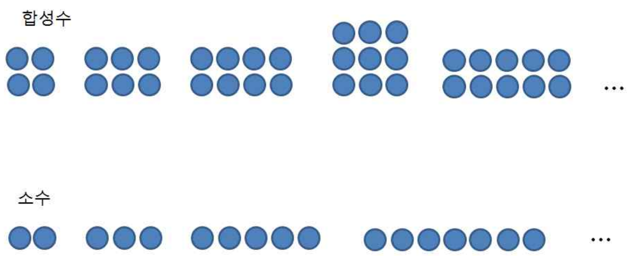
ιζʹ. Ὅταν δὲ τρεῖς ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος στερεός ἐστιν, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί.
17. And when three numbers multiplying one another make some (other number) then the (number so) created is (called) solid, and its sides (are) the numbers which multiply one another.
(세 수를 곱해서 다른 수를 만들 때, 새로운 수를 입체라고 부르며, 서로 곱한 세 수들을 이들의 변이라고 한다)

결정론적 시각은 소수에 원자로서의 지위 부여를 확신하게 만든 계기였을 것으로 생각된다. 왜냐하면 소수와 합성수의 결정 모양에서 나타나는 차이 때문이다. 차원의 입장에서 소수는 일차원이며, 합성수는 이차원 이상이다. Aristotle(BC 384-322)은 '어떤 수들은 합성수이며, 이들은 일차원이 아니라 평면, 입체이다. 평면은 얼마 곱하기 얼마, 입체는 얼마 곱하기 얼마 곱하기 얼마이다'라고 하였는데(Heath, 1908), 이는 소수가 일차원적 결정이며, 평면 및 입체의 결정으로 나타나는 합성수와 구별됨을 의미한다.

동일 차원에서의 결정론적 시각 역시 소수와 합성수를 구별해 준다. 이차원 평면을 가정할 때, 소수는 결정 모양이 오로지 하나로 나타나는 수인 반면, 합성수는 2개 이상의 모양으로 나타나는 수이다. Pythagoras 학파의 수에 대한 신념이 이와 같다. Pythagoras 학파는 앞선 지식과는 다르게 수를 구분했는데, 이는 기하학적 특징을 분류의 기준으로 하였다. 홀수, 짝수, 합성수, 소수, 삼각수, 사각수 등의 정의는 수를 평면에서의 기하학적 결정으로 이해하고 있음을 보여준다(Heaton, 2015).

합성수
정수가 1을 제외한 2개의 더 작은 정수의 곱이라면 합성수이다. 점들의 어떤 합성수는 직사각형으로 배열 가능하다.

소수
소수는 합성수가 아니다. 그래서 그것들은 직선과는 다른 형태의 직사각형으로 배열되지 않는다.



[그림 III-2] 합성수와 소수에 대한 Pythagoras 학파의 결정론적 시각(Heaton, 2015)

이상에서 고대 그리스인은 단위와 소수를 위계적으로 이해하였음을 알 수 있다. 단위는 합의 시각에서 모든 수를 생성하는 상위 근본이며, 소수는 곱의 시각에서 수를 생성하는 하위 근본이다. '단위로만 잴 수 있는 수'라는 소수의 정의는 합의 시각이지만, 소수의 사용은 곱의 시각으로의 변화를 요구하였다. 고대 그리스인들은 동일 비율의 원자인 서로소와 단일수에서의 원자인 소수를 대등하게 바라보았는데, 이것은 두 개념 모두 곱셈의 원자라는 공통점에서 비롯된 인식으로 보인다. 그들의 시각에서 서로소는 비율의 곱셈 원자, 소수는 수의 곱셈 원자였던 것이다. 또한 그들은 수를 기하적으로 다루었으므로, 소수와 합성수를 결정의 시각에서 바라보았다. 소수는

일차원적이며, 합성수는 다차원적이었다. 동일 차원을 전제하더라도 소수는 1개의 모양으로, 합성수는 2개 이상의 모양으로 결정된다. 결정론적 시각은 소수와 합성수의 명백한 시각적 차이를 보여주기 때문에 곱셈 원자로서의 소수의 지위는 더욱 공고히 하는 계기가 되었을 것으로 생각된다.

2. 1의 소수성에 대한 논란

고대 그리스에서 1은 소수가 아니었다. Euclid에게 소수는 '단위로만 측정되어지는 수'로서 수의 하위 범주인데, 1은 수가 아니므로 1이 소수가 아니라는 것은 말할 필요가 없는 명백한 것이었다. 1이 소수인지 아닌지에 대한 주장 자체가 그리스 시대에는 성립되지 않았다는 것인데, 이는 Smith(1958)의 논의에서도 확인할 수 있다.

> Aristotle, Euclid, Theon은 언어적으로 작은 변형이 있긴 하지만 '단위를 제외한 수에 의해 측정되지 않는 수'라는 의미로 소수를 정의하였다. 단위는 수로서 간주되지 않았기 때문에 그것은 언급조차 되지 않았다 (Smith, 1958).

이처럼 대부분의 고대 그리스 수학자들은 1을 수로서 간주하지 않았기 때문에 1의 소수성에 대한 의문조차 없었다.

심지어 후세의 학자들은 소수는 3부터 시작해야 한다는 주장을 펼치기도 하였다. Martinus(AD 365-440), Iamblichus(AD 245-325), Boethius(AD 477-524) 등은 소수가 홀수의 집합이므로 1과 2를 제외해야 하며 가장 작은 소수는 3이라고 하였다. 그러나 대부분의 고대 그리스인들은 2를 가장 작은 소수로 인정했으며, 1이 소수의 논의 대상이 아니라는 입장은 약 2000년 동안 지속되었다(Caldwell & Xiong, 2012).

1이 수로서 허용된 것은 Simon Stevin(AD 1548-1620)의 공적 때문이다. Simon Stevin은 1585년에 현대의 십진법 확장을 위한 토대를 마련한 '10분의 1에 관하여(De Thiende)'를 출판했는데, 여기서 자연수와 크기(magnitudes, 기하적 대상의 길이)를 동일한 표기와 알고리즘을 사용한 표기법과 연산 방법을 보여주었다(Reddick & Xiong, 2012). 수(numbers)와 크기(magnitudes)를 이원화하여 다룬 Euclid와는 다르게 Stevin은 이들을 통합한 표기법과 연산 방법을 개발하였다(Caldwell, Reddick, Xiong, & Keller, 2012). Stevin에 의한 표기의 변화는 수를 어떻게 보는가에 대한 근본적 변화로 이어졌다. Stevin은 현대적 소수 표기법의 기초를 창안해서, 제곱근, 무리수, 음수와 같은 양이 모두 수로 다루어져야 한다고 주장했으며, 1 역시 수라고 주장했다(Katz & Katz, 2011).

Stevin의 표기법 개발 이후 수학자들은 1을 수로서 인정하기 시작했으며, 1이 소수인지 아닌지에 대한 논의가 촉발되기 시작하였다. 1679년 Maxon은 만약 1이 수가 아니라면 $3-1=3$이라는 점을 근거로 들어 1을 소수에 포함시켜야 한다고 주장했는데, 이는 설득력 있는 은유이다. Stevin의 표기 관점에서 보면 표기적으로나 알고리즘적으로 1과 다른 수 사이의 근본적 차이를 찾기 어렵다.

1이 수로서의 지위를 획득하긴 했지만, 이 시기 1의 소수성에 대한 논의는 혼란 속에 있었다. 많은 학자들은 소수에서 1을 배제시키는 전통에 집착했다. 예를 들어, Mersenne, Schooten(AD 1615-1660), Euler(AD 1707-1783)가 대표적이다. 또 1을 소수로 간주한 사람들도 있었는데, Wallis(AD 1616-1703), Prestet(AD 1648-1691), Goldbach(AD 1690-1764)가 대표적이다. Goldbach가 Euler에게 보낸 유명한 편지의 일부 내용은 1을 소수로 간주한 태도를 분명히 보여준다(Caldwell & Xiong, 2012).

$$4=\begin{cases}1+1+1+1\\1+1+2\\1+3\end{cases}\qquad 5=\begin{cases}2+3\\1+1+3\\1+1+1+2\\1+1+1+1+1\end{cases}\qquad 6=\begin{cases}1+5\\1+2+3\\1+1+1+3\\1+1+1+1+2\\1+1+1+1+1+1\end{cases}$$

[그림 III-3] Euler에게 보낸 Goldbach의 편지에서 소수의 합에 관한 예

소인수분해와 관련한 산술 기본 정리야 말로 1의 소수성에 대한 논의를 종결짓는 시발점이 되었다.

고대 그리스에 산술 기본 정리는 정리 그 자체가 연구의 주요 초점이 아니었다. 실제로 산술 기본 정리는 <Euclid 원론>에 등장하지는 않는다. 그럼에도 <Euclid 원론> 제 Ⅶ권과 제 Ⅸ권에서 산술 기본 정리와 관련된 명제를 포함함으로써 산술 기본 정리의 완성에 중요한 역할을 하였다(Heath, 1908).

산술 기본 정리는 13세기 중동의 al-Farisi(AD 약1260-약1320)에 의해 완성되기 시작하였다. al-Farisi는 그의 저서 『Tadhkirat al-Ahbab fibayan al-tahabb(출판일 불명)』에서 소인수분해의 존재성을 입증하고 유일성을 증명할 때 필요한 모든 것을 제공하였다. 그의 저서의 명제 9는 소인수분해로부터 주어진 수의 모든 약수가 결정된다는 내용을 담고 있다(Ağargün & Özkan, 2011).

그러나 당시에 소인수분해는 그 자체로 관심의 대상이 아니었으며, 단지 약수를 찾는 수단이었다(Ağargün & Özkan, 2011).

> 존재성의 증명은 al-Farisi때문이지만, 그는 유일성을 증명하지 않았다. 주로 그의 관심이 소인수분해 그 자체보다 수의 약수에 있었기 때문이다. (중략) 만약 수학자의 관심이 최대공약수, 완전수, 친화수에 있었다면, 약수는 결정적 대상인 반면 소인수분해는 단지 그 수단일 뿐이다(Ağargün & Fletcher, 1997).

중동에서의 연구 결과가 유럽으로 유입되면서 학자들은 서서히 산술 기본 정리를 정수 연구에서 중요하다고 보고 산술 기본 정리 자체를 연구의 대상으로 삼기 시작하였다. al-Farisi와 유사한 결과가 Prestet의 저서 『Nouveaux Elemens de Mathématiques(1689)』에서도 발견되었다. 이후 Euler는 『Vollständige Ainleitung Zur Algebra(1770)』에서 산술 기본 정리의 존재성을 가정하고 al-Farisi와 Prestet의 것과 유사한 결과를 언급하였다. 나중에 Legendre(AD 1752-1833)는 『Théorie des nombres(1978)』에서 산술 기본 정리의 존재성을 입증하고 유일성을 가정했다(Ağargün & Özkan, 2011).

드디어 Gauss(AD 1777-1855)를 통해 소인수분해와 관련된 산술 기본 정리는 산술의 중심이 된다. Gauss는 1801년 『산술에 관한 논고(Disquisitiones arithmeticae)』에서 산술 기본 정리를 언급했을 뿐 아니라 부분적으로 증명했다. Gauss는 고유한 인수 분해를 정수에 대한 이해의 중심으로 삼는 기초를 세웠다.

소인수분해의 유일성은 수학자들 사이에 1이 소수라는 견해가 붕괴되는 주요 원인이 되었다. 왜냐하면 1이 소수라면 산술의 기본정리는 제한 조건을 추가하여 언급되어야 하거나 제한 조건이 추가되지 않는다면 유일성이 위배되기 때문이다(Reddick & Xiong, 2012).

Gauss는 가우스 정수(Gaussian integer)와 같은 '정수의 일반화'를 논의함으로써 수학자들이 소인수분해에서 1의 역할에 더욱 주목하게 만들었다. Gauss의 영향으로 많은 사람들은 계속해서 단위가 소수가 아니라고 주장했다. Legendre, Cayley(AD 1821-1895), Kronecker(AD 1823-1891), Dirichlet(AD 1805-1859)는 1이 소수라는 주장에 대항하는 강력한 논의를 제공했다(Caldwell & Xiong, 2012).

정수가 여러 방면으로 일반화되었는데, 이를 통해 소수를 재정의 할 필요성을 얻게 되었다. 예컨대, 음수를

추가할 때, -3은 소수인가? 또 가우스 정수 $a+bi(a,\ b\in\mathbb{Z})$에 관해 3, -3, $3i$, $-3i$는 소수인가? 이러한 예는 단위에 대한 시각 변화를 촉구했다(Reddick & Xiong, 2012).

그 결과 1을 나누는 수는 단위라는 특수한 범주로 분리되게 된다. 예컨대, 정수에서는 1과 -1이, 가우스 정수에서는 i와 $-i$가 단위로 간주된다. 이 관점에서 보면 단위의 소수 배제가 필요하다. 왜냐하면 자연수의 산술 기본 정리에서 유일성을 보장하기 위해서는 조건 '1보다 크다'를 추가하면 되지만, 다른 수체계로 일반화될 때 이러한 조정은 매우 어렵기 때문이다. 따라서 현대 수학은 1, -1과 i, $-i$이 단위이므로 근본적으로 소수 명단에서 편의상 1을 생략할 것을 요구한다.

이상을 종합하면 그리스 시대에 단위는 수가 아니었으므로 소수가 아니었다. 16세기 Stevin이 개발한 소수 표기로 1이 수로 통합되면서 1의 소수성이 본격적으로 문제시 되기 시작했다. 당시에 산술 기본 정리는 약수를 구하기 위한 도구였지 그 자체가 주요 대상은 아니었다. 그러나 Gauss가 산술 기본 정리를 증명함으로써 소인수분해가 산술의 중심으로 자리 잡았으며, 소인수분해 유일성과 단위의 일반화로 오늘날 1이 소수에서 배제되었다.

3. 소인수분해와 소수 개념 분화

소인수분해는 원자로서의 소수 역할을 명확히 하고 자연수의 곱셈 구조를 파악하게 해주는 도구이다. 소인수분해와 관련한 산술 기본 정리는 <Euclid 원론>에 등장하지는 않지만 제 Ⅶ권의 명제 30을 통해 유일성, 명제 31을 통해 존재성을 드러냈다(Ağargün & Özkan, 2011).

제 Ⅶ권 명제 30
Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, τὸν δὲ γενόμενον ἐξ αὐτῶν μετρῇ τις πρῶτος ἀριθμός, καὶ ἕνα τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρήσει.
If two numbers make some (number by) multiplying one another, and some prime number measures the number (so) created from them, then it will also measure one of the original (numbers).
(두 수의 곱으로 만들어진 수를 잴 수 있는 소수는 두 수 중 하나를 잴 수 있다)

제 Ⅶ권 명제 31
Ἅπας σύνθεντος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.
Every composite number is measured by some prime number.
(모든 합성수는 어떤 소수로 잴 수 있다)

오늘날 수학자들은 이 명제를 이용하여 산술 기본 정리의 입증할 수 있게 되었다. 예컨대, 유일성은 '어떤 수가 두 가지 형태의 소인수분해 $p_1\cdots p_n=q_1\cdots q_m$라고 가정하면, <Euclid 원론> 제 Ⅶ권 명제 30을 통해 $p_1|q_i\ (i\in\{1,2,\cdots m\})$이므로 $p_1=q_i$이다. 같은 방법으로 계속하면 각각의 p_j와 q_k가 같고 $n=m$이다'라는 것이 증명 가능하다.

하지만 Euclid는 제 Ⅶ권에서 산술 기본 정리를 언급하지 않았다. <Euclid 원론> 제 Ⅸ권 명제 14가 산술 기본 정리와 유사한 정리로 이는 일종의 유일성에 관한 정리이다(Ağargün & Özkan, 2011). 이 정리는 현재의 산술 기본 정리와 다른 관점으로 기술된 점이 흥미롭다. 현재의 산술 기본 정리는 주어진 수를 전제로 소인수분해 방식을 논하는 반면, 구성 방식을 중요시하는 <Euclid 원론>에서는 소수로 구성 가능한 최소의 수를 논의하고 있다.

제 Ⅶ권 명제 14

Ἐὰν ἐλάχιστος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτων ἀριθμῶν μετρῆται, ὑπ᾽ οὐδενὸς ἄλλου πρώτου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται παρὲξ τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρούντων.

If a least number is measured by (some) prime numbers then it will not be measured by any other prime number except (one of) the original measuring (numbers).

(어떤 소수들로 잴 수 있는 가장 작은 수는 그 소수들을 제외한 다른 소수로는 잴 수 없다)

<Euclid 원론> 제 Ⅸ권 명제 14는 소수들로 측정되는 가장 작은 수는 원래 소수를 제외한 다른 어떤 소수로는 측정되지 않는다는 진술로 소인수분해의 유일성과 관련된다. 소수 2, 3, 5로 측정되는 가장 작은 수 30은 2, 3, 5를 제외한 다른 소수로 측정되지 않는다는 것으로 이는 소인수분해의 유일성을 부분적으로 입증한 것이다 (André, 2007). <Euclid 원론>의 제 Ⅸ권 명제 14는 $24=2^3\times3$와 같은 수의 소인수분해의 유일성까지는 다루지 않기 때문에 부분적인 입증인 것이다. 왜냐하면 24는 2와 3으로 잴 수 있는 가장 작은 수가 아니기 때문이다.

원자의 관점에서 이 정리를 재해석하면 원자로 구성된 최소한의 수에서 다른 원자는 찾을 수 없다는 진술로 해석 가능하다. 이는 소수가 곧 수의 독자적 구성 원자임을 보증하는 진술이다.

<Euclid 원론>의 제 Ⅶ권의 명제 30은 '$p|ab$이면 $p|a$ 또는 $p|b$'로 소수의 원자로서의 의미를 드러내는데, 이는 '$p=ab$이면 $a=1$ 또는 $b=1$'이라는 기능적 측면의 의미로 변환되어 사용되기 시작하였다. 다시 말해, 원자로서의 소수가 약수 측면에서 재해석되어 사용되기 시작하였다. 전자는 prime, 후자는 irreducible이라는 개념인데 동일 개념의 다른 표현으로 간주되었다.

'$p|ab$이면 $p|a$ 또는 $p|b$'라는 prime의 정의는 곱셈 구조에서 분해 불가한 최소 단위로서의 원자의 의미에 가깝다. 반면 '$p=ab$이면 $a=1$ 또는 $b=1$'이라는 irreducible의 정의는 p의 약수가 1과 자기 자신 뿐이라는 의미로 현재의 학교수학에서 소수의 의미이다. 따라서 prime과 irreducible 두 가지 측면은 곧 원자 맥락과 약수 개수 맥락이라는 의미 분화를 의미한다.

현대대수학의 발전으로 언제나 동치라고만 여겼던 두 개념이 완전히 같은 것은 아니라는 것이 밝혀지게 되었다. 자연수와 정수에서는 irreducible과 prime가 동치인 반면 환 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$에서는 동치가 아니다. 왜냐하면 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$에서 3은 irreducible이지만 $3\,|\,(2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5})=9$이므로 prime은 아니기 때문이다 (Hungerford, 2013).

결국 prime과 irreducible로의 개념 분화는 소인수분해의 유일성의 의미를 더욱 정확하게 이해하는 계기가 되었다. 어떤 환에서나 소인수분해의 유일성이 보장되는 것은 아니며, 소인수분해의 유일성은 수학적으로 prime과 irreducible의 개념이 동치라는 의미를 지닌다.

이처럼 소인수분해는 <Euclid 원론>의 제 Ⅶ권의 명제 30 '$p|ab$이면 $p|a$ 또는 $p|b$'에서 시작되었다가 현대에 이르러 원자 맥락의 prime과 약수 개수 맥락의 irreducible 두 개념으로 분화되었다. 전자는 소수의 개념 탄생을 촉발한 의미론적 개념인 반면, 후자는 약수 개수라는 측면에서 접근한 분석적 개념이다. 결국 소인수분해는 의미론적 맥락에서 출현했다가 의미와 분석적 측면이라는 두 관점으로 분화되어 오늘날에 이르렀다.

이상에서 소수는 자연수의 곱셈 관점에서의 원자이고, 소인수분해는 원자로서의 소수의 역할을 명확히 한 도구였다. <Euclid 원론>에서 산술 기본 정리를 언급하지는 않지만, '$p|ab$이면 $p|a$ 또는 $p|b$'를 통해 소인수분해의 유일성을 명시함으로써 원자로서의 소수를 명확히 하였다. 이는 점차 '$p=ab$이면 $a=1$ 또는 $b=1$'이라는 의미로 해석되어 가면서, 오늘날 학교 수학에서의 기능적 정의가 자리 잡게 되었다. 소인수분해의 유일성이 보장되는 공간에서 소수는 prime 개념과 irreducible 개념이 동치가 되어 구분 없이 사용 가능하다. 그러나 환의 연구가 깊어지면서 이 두 개념이 완전히 같은 것은 아니라는 것이 밝혀지게 되었고 개념 분화가 일어났다. 그

결과 오늘날 원자 맥락의 prime 개념과 약수 맥락의 irreducible 개념이 자리잡게 되었다.

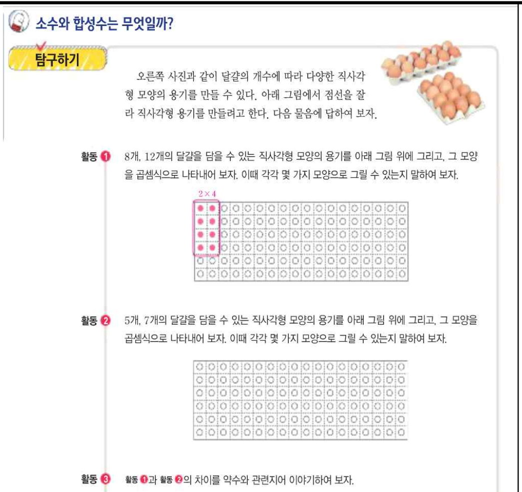
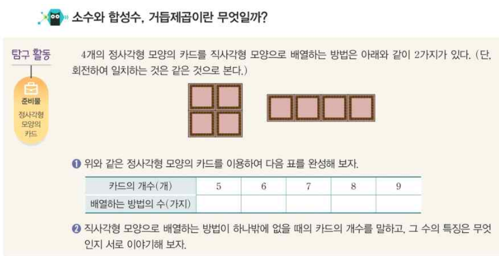
Ⅵ. 교과서 개념 도입 분석5)

이준열 외(2018), 장경윤 외(2018)는 각각 달걀 배열 방식, 카드 배열 방식으로 결정론적 시각에 입각하여 소수를 도입한다. 이는 결정론적 시각으로 소수가 갖는 특별한 의미를 드러내기 위한 목적을 지닌다.

결정론적 시각에 입각한 소수 개념 도입은 발생 맥락에 따른 것이 아니다. 소수는 곱의 관점에서 불가분해한 원자를 찾는 과정에서 발생한 개념이라는 점에서, 유일 결정이라는 소수의 기하학적 의미는 수의 원자인 소수의 본질적 의미와 구별된다. 전술하였듯 소수의 기하학적 의미는 개념 발생의 요인이 아니라 개념의 지위를 공고히 하는 수단이었다. 따라서 결정론적 시각에 입각한 도입은 분해 맥락에서 출연한 원자로서의 의미를 온전히 드러내지 못하는 한계를 지닌다.

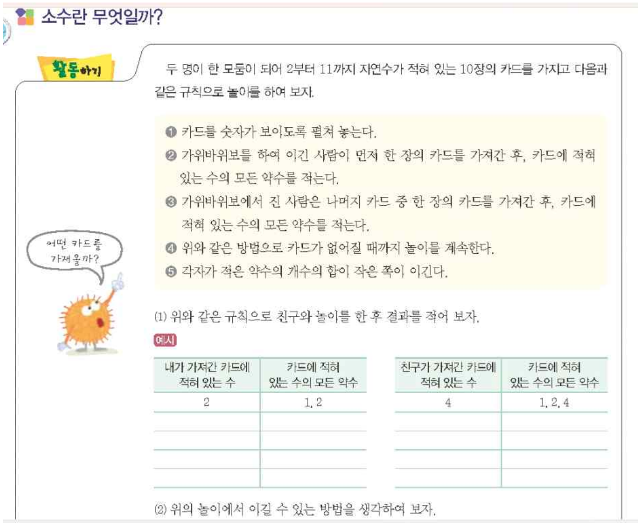
활동을 통해 소수는 유일하게 결정되는 수라는 인식을 제공하지만, 약수 개수에 입각한 분석적 개념 정의로 급진적으로 나아감으로써 탐구 활동과 개념 정의 사이의 단절이 발생하기 쉬울 것으로 보인다. 예컨대, 이준열 외(2018)의 탐구 활동에서 '카드의 개수를 말하고, 그 수의 특징을 이야기해 보자'라고 하지만, 이후의 개념 정의는 탐구 활동에서 예상되는 수의 특징과 연결점을 찾기 어렵다.

<표 Ⅳ-1> 결정론적 시각에 입각한 도입

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>달걀의 배열 방식(장경윤 외, 2018)</td>
<td>카드 배열 방식(이준열 외, 2018)</td>
</tr>
</table>

고호경 외(2018)는 카드 게임이라는 흥미를 진작시키는 방법으로 소수를 도입한다. 가져간 카드에 적혀있는 수의 약수를 모두 기록함으로써 각 수의 약수를 관찰하는 방식으로 소수 개념을 이끌어 내고자 한다. 특히 놀이에서 이길 수 있는 방법으로서 소수 개념을 유도하려는 점이 타교과서의 개념 도입과 차별된다. 흥미를 진작시킨다는 측면에서 새로운 방식으로 볼 수 있지만, 소수 출현의 본연의 맥락을 일깨워주기는 어려울 것으로 생각된다.

5) 교과서 분석을 위해 3종의 교과서(고호경 외, 2018; 이준열 외, 2018; 장경윤 외, 2018)를 살펴보았다.


소수란 무엇일까?

활동하기 두 명이 한 모둠이 되어 2부터 11까지 자연수가 적혀 있는 10장의 카드를 가지고 다음과 같은 규칙으로 놀이를 하여 보자.

❶ 카드를 숫자가 보이도록 펼쳐 놓는다.
❷ 가위바위보를 하여 이긴 사람이 먼저 한 장의 카드를 가져간 후, 카드에 적혀 있는 수의 모든 약수를 적는다.
❸ 가위바위보에서 진 사람은 나머지 카드 중 한 장의 카드를 가져간 후, 카드에 적혀 있는 수의 모든 약수를 적는다.
❹ 위와 같은 방법으로 카드가 없어질 때까지 놀이를 계속한다.
❺ 각자가 적은 약수의 개수의 합이 작은 쪽이 이긴다.

(1) 위와 같은 규칙으로 친구와 놀이를 한 후 결과를 적어 보자.

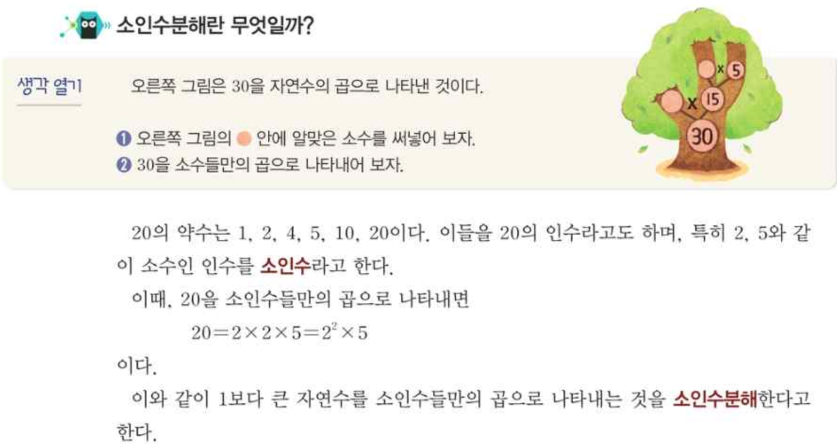
예시

내가 가져간 카드에 적혀 있는 수	카드에 적혀 있는 수의 모든 약수	친구가 가져간 카드에 적혀 있는 수	카드에 적혀 있는 수의 모든 약수
2	1, 2	4	1, 2, 4

(2) 위의 놀이에서 이길 수 있는 방법을 생각하여 보자.

[그림 Ⅳ-1] 카드 게임을 통한 소수 도입(고호경 외, 2018)

소인수분해의 도입과 관련하여 고호경 외(2018), 이준열 외(2018), 장경윤 외(2018)는 필요성을 의식하지 않고 기능적 측면에서 개념을 제시한다. 이는 곱셈 원자라는 소수의 본질적 의미에서 자연발생적으로 분해의 필요성이 제기될 것이라는 기대로 인한 것으로 풀이된다. 그러나 결정론적 시각에 입각한 도입 혹은 게임을 통한 도입은 수의 원자로서의 소수의 의미를 충분히 드러내지 못하기 때문에 학생들에게 소인수분해는 소수의 본질적 의미와 단절된 형태로 전달될 가능성을 지닌다.


소인수분해란 무엇일까?

생각 열기 오른쪽 그림은 30을 자연수의 곱으로 나타낸 것이다.

❶ 오른쪽 그림의 ● 안에 알맞은 소수를 써넣어 보자.
❷ 30을 소수들만의 곱으로 나타내어 보자.

20의 약수는 1, 2, 4, 5, 10, 20이다. 이들을 20의 인수라고도 하며, 특히 2, 5와 같이 소수인 인수를 **소인수**라고 한다.

이때, 20을 소인수들만의 곱으로 나타내면

$$20=2\times2\times5=2^2\times5$$

이다.

이와 같이 1보다 큰 자연수를 소인수들만의 곱으로 나타내는 것을 **소인수분해**한다고 한다.

[그림 Ⅳ-2] 소인수분해의 필요성 없이 기능적 측면 위주의 개념 제시(이준열 외, 2018)

소인수분해는 3개 교과서에서 모두 약수, 약수 개수, 공약수, 최대공약수, 공배수, 최소공배수를 구하기 위한

수단으로 활용된다. 지나치게 소인수분해와의 연결을 의식해서 ‘소인수분해를 이용하여’ 라고 명시하고 있다. 이는 소인수분해와 이들 개념 사이의 인위적 연결이라는 문제점을 지닌다.

이준열 외(2018), 장경윤 외(2018)에서 서로소의 개념 역시 공약수 개념에 이어 형식적으로 도입된다. ‘최대공약수가 1인 두 자연수’를 서로소라고 분석적으로 정의함으로써 서로소가 갖는 동일 비율의 원자로서의 본질적 의미를 깨닫기 어렵게 하는 문제점이 있다. 다시 말해, 서로소가 왜 필요한지에 대한 맥락이 제시되지 않는 전개이므로 서로소의 개념은 단순히 받아들여야 하는 대상이 될 수 있다.

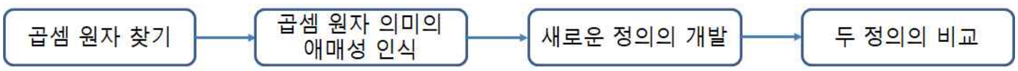
요컨대 교과서는 소수를 결정론적 시각에 입각한 도입 혹은 게임을 활용하여 흥미를 진작시키는 도입을 하지만, 이는 분해 맥락에서 출현한 원자로서의 의미를 온전히 드러내지 못한다. 또 결정론적 시각의 탐구 활동에서 약수 개수라는 분석적 개념 정의로 급진적 전개가 이루어짐으로써, 소수의 의미적 개념과 분석적 개념 사이의 단절이 우려된다. 소인수분해의 이점에 대한 탐구 기회 제공 없이 ‘소인수분해를 이용하여 주어진 것을 구하라’는 식의 전개로 소인수분해는 문제 해결 상의 하나의 제약으로 인식될 위험이 있다. 한편, 서로소의 개념 역시 단조롭게 최대공약수에 입각한 분석적 정의를 제시함으로써 본질적 의미 파악에서 학생들의 어려움이 예상된다.

Ⅴ. 교육적 시사점

소수 개념의 발전 역사를 조망하고 교과서 개념 도입을 분석함으로써 몇 가지 교육적 시사점을 얻을 수 있었다.

첫째, 원자론적 관점에서 출발하여 분석적 정의로 이행되는 점진적인 수학화가 이루어지도록 소수 개념을 도입할 필요가 있다. 소수의 개념은 곱의 관점에서 수의 원자를 찾는 시도에서 탄생했다. 이후 수의 원자라는 의미를 어떻게 수학적으로 명확하게 표현할지 고민하면서 irreducible의 개념과 prime의 개념이 출현하게 되었다. 다시 말해, 소수는 원자 의미로 출현하였다가 수학적으로 통용 가능한 언어인 분석적 정의로 이행했다. 이런 점에 비추어 볼 때, 소수의 교수·학습 시 원자론적 관점에서 시작되는 점진적 접근이 필요해 보인다.

교과서 분석에서 나타났듯 소수는 결정론에 입각하여 도입되는 경우가 적지 않았는데, 이는 소수 개념의 곱셈 원자로서의 본질을 명백히 드러내지는 못한다. 기하 결정 모양은 오히려 소수의 기능적인 면을 강하게 드러낸다. 왜냐하면 소수의 기능적인 면을 나타내는 약수 개수가 2개인 특징에 의하여 기하 결정 모양이 일차원 이거나 평면상에서 유일한 결정으로 나타나기 때문이다. 따라서 결정론에 입각하여 소수 개념을 도입할 경우 곱셈 원자라기보다 기하 결정 모양이 유일한 결정으로 정해지는 것이라는 개념 이미지를 갖기 쉬울 것으로 예상된다. 조경희, 권오남(2010)에 따르면, 학생들이 개념적인 면보다 기능적인 면에 치중하고 있기 때문에 개념적인 면에 주목할 수 있도록 개념을 도입할 필요가 있다.



[그림 Ⅴ-1] 원자론적 관점에서 출발하여 분석적 정의로 이행하는 점진적 수학화

본 연구에서는 개념적인 면에 주목하도록 돕기 위한 방법으로 [그림 Ⅴ-1]과 같은 소수 개념 도입을 제안한다. 곱셈 원자를 찾을 것을 요구하는 활동에서 시작하여 ‘곱셈 원자’라는 용어의 애매성을 인식하게 한다. 다음 곱셈 원자를 통용 가능한 언어로 표현할 필요성을 이해하고 이를 분석적으로 정의하고 표현할 기회를 제공한다. 마지막으로 이렇게 개발된 정의를 최초의 정의(곱셈 원자)와 비교하게 함으로써 소수 정의가 완성되는 전반적 과정을 이해하도록 돕는다. 이러한 지도는 수학적 정의가 고정된 것이 아니라 변화하면서 완성되어가는 것임을

인식시키는 목적을 지닌다. 특히 마무리 단계에서 두 정의를 비교하는 것은 양 갈래로 분화된 원자 맥락의 prime 개념과 약수 맥락의 irreducible 개념을 의식하고 학교 수학의 차원에서 어느 개념이 적합할지를 스스로 판단하는 기회를 제공하는 목적을 지닌다.

마찬가지로 서로소의 개념 역시 원자론적 관점에서 출발하여 분석적 정의로 이행하는 점진적 수학화가 이루어지도록 개념을 도입할 필요가 있다. 동일 비율의 원자 찾기 → 동일 비율의 원자 의미의 애매성 인식 → 새로운 정의의 개발(분석적 정의) → 두 정의의 비교 순으로 진행되는 도입 방식을 제안해 본다.

둘째, 소수 개념 발전 역사에서 보았듯 1의 소수성이 첨예한 대립의 중심이었던 만큼 학교 수학에서도 이를 활발한 의사소통의 주제로 활용하는 방안을 생각해 볼 수 있다. 현 교과서는 소수의 기능적 정의를 처음부터 제시함으로써 1을 소수에서 곧 바로 제외시켜 버리고 만다. 따라서 현재의 개념 도입 방식은 수학에서 의사소통을 할 수 있는 좋은 주제를 충분히 활용하지 못하는 격이 된다.

소인수분해의 유일성을 보장하기 위해 어떤 노력이 필요한지 학생 스스로 생각해 보게 함으로써, 1을 소수에서 배제하게끔 자연스럽게 유도하는 것이 필요하다. 이를 위해서는 처음부터 소수의 정의를 제시함으로써 1의 소수성에 대한 논란을 종식시켜서는 안 될 것이다. 각각의 학생들이 소수의 분석적 정의를 개발하게 한 다음, 각자의 정의에 비추어 1의 소수성에 대해 토론하게 하게 할 필요가 있다. 열띤 토론이 이루어진 다음 교사가 소인수분해의 유일성을 보장하려 한다는 제약을 제공하였을 때, 어떤 노력이 필요한지를 숙고해보게 한다. 이러한 접근 방식은 소수의 개념 정의에 대한 보다 깊은 이해를 도울 것으로 생각된다. 궁극적으로는 개념 정의는 인간 활동의 산물임을 이해하는 계기가 될 것이다.

셋째, 소인수분해의 장점을 충분히 이해시킬 수 있는 방안을 개발할 필요가 있다. 현 교과서에서 소인수분해는 약수, 약수 개수, 공약수, 최대공약수, 공배수, 최소공배수를 구하기 위한 수단으로 활용된다. 지나치게 소인수분해와의 연결을 의식해서 '소인수분해를 이용하여 ∼을 구하라' 고 명시하고 있다. '소인수분해를 이용하여'라는 문구는 다른 방법을 이용하지 말라는 하나의 제약으로 인식될 위험이 있다. 다른 방법으로 약수, 약수 개수, 공약수, 최대공약수, 공배수, 최소공배수를 구해보지 않을 경우 소인수분해의 장점을 충분히 이해하기란 쉽지 않다. 왜냐하면 어떤 것의 장점은 다른 것과의 비교하는 활동을 통해 파악되기 때문이다. 따라서 소인수분해의 장점을 충분히 이해시킬 수 있는 방안 개발이 요구된다.

본 연구에서는 다음과 같은 절차를 거침으로써 소인수분해의 장점을 파악할 수 있도록 돕는 방법을 제안한다.

1단계: 약수, 약수 개수, 공약수, 최대공약수, 공배수, 최소공배수 구하기
2단계: 학생들이 개발한 방법으로 구하기 쉽지 않거나 번거로운 큰 수 제시
3단계: 보다 효율적 방법 개발 권고
4단계: 소인수분해가 아닌 인수분해와 소인수분해의 비교

1단계에는 소인수분해를 이용하라는 제약을 제공하지 않는다. 따라서 학생들은 다양한 방법으로 약수, 약수 개수, 공약수, 최대공약수, 공배수, 최소공배수를 구할 것으로 예상된다. 2단계에는 소인수분해 없이 구할 경우 놓치기 쉬운 제법 큰 수를 제공한다. 예컨대, 638의 약수를 구하라는 문제를 제공하는 것이다. 3단계에는 보다 효율적 방법의 개발을 권고하는 것이다. 학생들이 고착된 사고로 어려움을 겪을 경우 '수의 분해'를 권고할 수 있다. 4단계에는 $28=4\times7$과 $28=2\times2\times7$의 두 분해를 비교하게 한다. 전자의 관점에서 약수, 약수 개수, 공약수, 최대공약수, 공배수, 최소공배수를 구해보게 하고, 후자의 관점에서 이들을 구해보게 하는 것이다.

이러한 4단계를 통한 접근은 두 가지 이점을 가질 수 있다. 첫째, 소인수분해가 왜 필요한지를 파악할 수 있는 기회가 된다. 둘째, 소인수 분해의 의미를 파악하는 기회가 된다. 다시 말해, 4×7와 소인수분해 사이의 비

교 활동은 소인수분해란 원자 수준에서 최대한 분해한 것이라는 개념 이미지와 그 효용성을 파악할 수 있는 기회가 될 수 있을 것으로 보인다. 나아가 원자 수준에서 최대 분해라는 소인수분해의 개념 이미지는 소수와 수인수분해의 자연스러운 연결을 도울 수 있을 것으로 기대된다.

Ⅵ. 결론

본 연구는 소수의 기능적 정의를 선호하고 개념적 측면을 파악하지 못하는 학생들이 적지 않다는 현실적 문제에서 출발하여, 학생들이 소수 개념의 개념적 측면에 주목하도록 돕는 것과 관련한 몇 가지 교수학적 시사점을 제공하고자 하였다. 이를 위해 소수 개념 발전 역사를 조망하고, 교과서의 개념 도입 방법을 비판적으로 분석하였다.

그 결과 고대 그리스인에서 단위는 합의 시각에서의 상위 근본이며, 소수는 곱의 시각에서의 하위 근본이었다. 고대 그리스 시대에 단위는 수가 아니었지만, 16세기에 Stevin이 계발한 소수 표기로 단위가 수로 통합되었다. 이로 인해 그 동안 문제시되지 않았던 1의 소수성이 전면적으로 대두되었다. 1을 소수에 포함시켜야 하느냐 마느냐의 문제는 Gauss가 산술 기본 정리를 증명함으로써 종시되게 되었다. 소인수분해의 유일성과 단위의 일반화를 근거로 오늘날 1이 소수에서 배제되게 되었다. 한편, <Euclid 원론>에서 촉발된 두 개념인 prime과 irreducible은 사실상 동일한 개념으로 간주되었는데, 환의 연구가 깊어지면서 동치가 아니라는 사실을 밝혀지게 되었다. 그리하여 오늘날 원자 맥락의 prime 개념, 약수 맥락의 irreducible 개념이 자리잡게 되었다. 이처럼 소수 개념은 곱셈 원자에서 출발하여 1의 소수성에 대한 논란을 거쳐 원자 맥락의 prime과 약수 맥락 irreducible의 두 개념으로 분화되었다. 소수 개념 발전의 역사는 곱셈 원자라는 사실이 소수 개념의 본질임을 명백히 드러낸다.

하지만 교과서 분석 결과, 소수 개념 도입은 이러한 본질을 명확하게 드러내지 못하는 한계가 있었다. 교과서는 소수를 결정론적 시각에 입각하여 도입하거나 게임을 활용하여 흥미를 진작시키는 방법으로 도입하지만, 이는 곱셈 원자로서의 의미를 온전히 드러내지 못한다. 또 결정론적 시각의 탐구 활동에서 약수 개수라는 분석적 개념 정의로 급진적 전개가 이루어짐으로써, 소수의 개념적 의미와 분석적 개념 사이의 단절이 우려된다. 한편, 소인수분해의 이점에 대한 탐구 기회 제공 없이 '소인수분해를 이용하여 주어진 것을 구하라'는 식의 전개로 소인수분해는 문제 해결 상의 하나의 제약으로 인식될 위험이 있다.

분석 결과에 기초하여 소수의 개념적 면에 주목하도록 돕는 것과 관련한 몇 가지 교수학적 시사점을 얻을 수 있었다. 첫째, 원자론적 관점에서 출발하여 분석적 정의로 이행되는 점진적인 수학화가 이루어지도록 소수 개념을 도입할 필요가 있다. 둘째, 소수 개념 역사 발전에서 보았듯 1의 소수성이 첨예한 대립의 중심이었던 만큼 학교 수학에서도 이를 활발한 의사소통의 주제로 활용하는 방안을 생각해 볼 수 있다. 셋째, 소인수분해의 장점을 충분히 이해시킬 수 있는 방안을 개발할 필요가 있다.

교수학적 시사점에서 제시한 방법은 아직까지 학교수학에서 다루어지지 않은 만큼, 이를 적용했을 때 나타날 수 있는 교육적 효과와 관련한 후속 연구가 필요할 것이다.

참 고 문 헌

고호경 · 김응환 · 김인수 · 이봉주 · 한준철 · 최수영 · 김정현 · 김화영 · 정시훈 · 조준모 · 최화식 · 최화정 (2018). 중학교 수학 1. 서울: 교학사.

Ko, H., Kim, E., Kim, I., Lee, B., Han, J., Choi, S., Kim, J., Kim, H., Jeong, S., Jo, J., Choi, H., & Choi, H. (2018). *Secondary mathematics 1*. Seoul: Kyohaksa.

민세영 (2002). 역사발생적 수학 학습-지도 원리에 관한 연구. 서울대학교 박사학위논문.

Min, S. Y. (2002). *A study on the historico-genetic principle of learning and teaching mathematics*. An unpublished doctoral dissertation at the Graduate School of Seoul National University.

박종현 · 김영균 역 (2000). Plato의 티마이오스. 서울: 서광사.

Park, J., & Kim, Y. (trans.) (2000). *Plato's Timaeus*. Seoul: Seokwangsa.

이준열 · 최부림 · 김동재 · 이정례 · 김상미 · 원유미 · 김해기 · 김성철 · 강순구 (2018). 중학교 수학 1. 서울: 천재교육.

Lee, J., Choi, B., Kim, D., Lee, J., Kim, S., Won, Y., Kim, H., Kim, S., & Kang, S. (2018). *Secondary mathematics 1*. Seoul: Chunjae education.

장경윤 · 강현영 · 김동원 · 안재만 · 이동환 · 박진형 · 정경희 · 홍은지 · 김민정 · 박정선 · 지영명 · 구나영 (2018). 중학교 수학 1. 서울: 지학사.

Chang, K., Kang, H., Kim, D., Ahn, J., Lee, D., Park, J., Jeong, K., Hong, E., Kim, M., Park, J., Ji, Y., & Goo, N. (2018). *Secondary mathematics 1*. Seoul: Jihaksa.

조경희 · 권오남 (2010). 소수 개념에 대한 중학생의 이해. 학교수학, 12(3), 371-388.

Jo, K., & Kwon, O. (2010). Middle school students' understanding about prime number. *School Mathematics,* 12(3), 371-388.

Ağargün, A. G., & Fletcher, C. R. (1997) The fundamental theorem of arithmetic dissected, *Math. Gazette,* 81, 53 - 57.

Ağargün, A. G., & Özkan, E. M. (2011) A historical survey of the fundamental theorem of arithmetic, *Historia Math.* 28, 207 - 214.

André, W. (2007) *Number Theory: An Approach through History from Hammurapi to Legendre*. Modern Birkhäuser Classics. Boston, MA: Birkhäuser.

Caldwell. C. K., Reddick, A., Xiong, Y., & Keller, Wilfrid (2012). The history of the primality of one: a selection of sources. *Journal of Integer Sequences,* 15, 1-40.

Caldwell, C. K., & Xiong, Y. (2012). What is the smallest prime? *Journal of Integer Sequences,* 15, Article 12.9.7

Curtis, M., & Tularam, G. A. (2011). The importance of numbers and the need to study primes: the prime questions. *Journal of Mathematics and Statistics, 7*(4), 262-269.

Euler, L. (1770). *Vollständige Anleitung zur Algebra (2 vols.)*, der Wiss., St.-Petersburg: Kays. Acad.

Fitzpatrick, R. (2007). *Euclid's elements of geometry. The Greek text of J. L. Heiberg(1883-1885) from Euclids Elementa, edidit et Latine interpretatus est I. L. Heiberg, in aedibus. B. G. Teubneri, 1883-1885.* (R. Fitzpatrick, Ed., & R. Fitzpatrick, Trans.).

Goles, E., Schulz, O., & Markus, M. (2000). A biological generator of prime numbers. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems,* 3, 208-213.

Heath, T. L. (1908). *The thirteen books of Euclid's elements translated from the text of Heiberg with introduction and commentary. Volume II books III-IX*, Cambridge: Cambridge University Press.

Heaton, L. (2015). *A brief history of mathematical thought: key concepts and where they come form*. London: Robinson.

Hungerford, T. W. (2013). *Abstract algebra: an introduction (3rd ed.)*. Cengage Learning.

Katz, K. U., & Katz, M. G. (2011) *Stevin numbers and reality*, available from http://arxiv.org/abs/1107.3688v2.

Oladejo, N. K., & Adetunde, I. A. (2009). A numerical test on the Riemann hypothesis with applications. *Journal of Mathematics and Statistics,* 5(1), 47-53.

Prestet, J. (1689). *Nouveaux elemens des mathematiques*, Paris: André Pralard.

Reddick, A., & Xiong, Y. (2012). The search for one as a prime number: from ancient greece to modern times. *Electronic Journal of Undergraduate Mathematics. Volume 16*, 1-13.

Sautoy, M. (2003). *The Music of the Primes: Searching to Solve the Greatest Mystery in Mathematics*. New York: HaperCollins.

Smith, D. E. (1958). *History of Mathematics, Vol. II*, New York: Dover.

Stanford Encyclopedia of Philosophy (2019). *https://plato.stanford.edu/entries/plato-timaeus.*

Starbird, M. L. (2008). The mathematics behind prime numbers. *J. Math. Comput. Sci. Scholarship,* 1, 15-19.

Stein, W., & Mazur, B. (2007). *What is Riemann's hypothesis?* Lecture presented at Summer Institute for Mathematics at the University of Washington, DC.

Wikipedia (2017). *https://en.wikipedia.org/wiki/Prime_number*

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2004). Understanding Primes: the role of representation. *Journal for Research in Mathematics Education,* 35(3), 164-186.

A pedagogical discussion based on the historical analysis of the the development of the prime concept

Kang, Jeong Gi

Jinyeong Middle School, Gimhae 50862, Korea
E-mail: jeonggikang@gmail.com

In order to help students to understand the essence of prime concepts, this study looked at the history of prime concept development and analyzed how to introduce the concept of textbooks. In ancient Greece, primes were multiplicative atoms. At that time, the unit was not a number, but the development of decimal representations led to the integration of the unit into the number, which raised the issue of primality of 1. Based on the uniqueness of factorization into prime factor, 1 was excluded from the prime, and after that, the concept of prime of the atomic context and the irreducible concept of the divisor context are established. The history of the development of prime concepts clearly reveals that the fact that prime is the multiplicative atom is the essence of the concept. As a result of analyzing the textbooks, the textbook has problems of not introducing the concept essence by introducing the concept of prime into a shaped perspectives or using game, and the problem that the transition to analytic concept definition is radical after the introduction of the concept. Based on the results of the analysis, we have provided several pedagogical implications for helping to focus on a conceptual aspect of prime number.

* ZDM Classification : U22
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U20
* Key Words : Prime number, History of prime concept development, Factorization into prime factor, Fundamental theorem of arithmetic.