

수학 교육과정 국제 비교·분석 연구 - 한국, 싱가포르, 영국, 호주, 미국의 각 관련 내용 중심으로

최 은 (서울대학교 대학원 학생)
김 서 영 (서울대학교 대학원 학생)[†]
권 오 남 (서울대학교 교수)

각 개념은 교육과정 전반에 걸쳐 나타나는 개념이며, 기하 단원에서 기본적인 개념이다. 각은 다면적인 성격을 갖고 있으며 이후 학습에 영향을 주므로 학생들이 다양한 각 개념을 이해하는 것이 필요하다. 본 연구에서는 싱가포르, 영국, 호주, 미국을 비교 대상국가로 정하여 교육과정에서 나타나는 각 관련 내용 요소와 학습시기를 전체적으로 살펴본 뒤 각에 대한 관점과 각의 크기 측면을 상세하게 살펴보고 이를 바탕으로 우리나라 교육과정에 시사점을 주고자 한다. 분석 결과 우리나라를 제외한 4개국은 보각, 여각, 직선 위의 각, 한 점에서의 각, 각도 구하기를 교육과정에 명시하여 다루고 있으며, 특정 학년에서 집중적으로 각 관련 내용을 학습하는 우리나라에 비해 대부분의 국가가 여러 학년에 걸쳐 점진적으로 각 관련 내용을 다루고 있었다. 대부분의 국가가 각의 정의는 정적인 관점에서, 각의 크기는 동적인 관점에서 서술하고 있었으며, 동적인 관점을 초등학교에서 도입하는 다른 국가에 비해 우리나라는 비교적 낮은 중학교에서 동적인 관점이 처음으로 나타났다. 교육과정에서 다루는 각의 크기의 범위는 우리나라가 다른 국가보다 좁았다. 이를 통해 우리나라 교육과정에 각의 성질과 관련된 다양한 내용 요소를 어떻게 배치하고 전개해 나갈지 논의할 것, 각의 다면적인 성격을 고려하여 정적인 관점뿐만 아니라 동적인 관점을 모두 활용하여 각을 다룰 것, 회전량으로서 각의 크기를 도입하여 우각 및 180° , 360° 크기의 각을 학습할 것을 제안한다.

I. 서론

각은 초등학교 3학년에서 정의를 학습한 이후 도형의 성질을 파악하는데 활용되거나 기울기, 삼각함수에서의 호도법과 같이 중등학교에서 학습하는 개념과 연결된다는 점에서 교육과정 전반에 걸쳐 나타나는 개념이라고 할 수 있다. 실제로 각 개념은 도형의 성질을 파악하거나 어떤 도형으로 분류되는지 판단하는 근거가 되므로 기하 단원에서 기본적인 개념이라고 할 수 있다. 또한 각 개념은 다양한 도형들의 이해뿐만 아니라 삼각비, 삼각함수 등의 상위 수학 개념과 연결된다. 과거에는 경도를 결정하기 위해 별과 달 사이의 각 거리(angular distance)를 측정하였고(Lankford, 2013) 현재까지 별까지의 거리를 재는 기본적인 방법으로 별이 이동한 것으로 보이는 각도인 시차를 계산한다는 것은 수학 외에도 측량, 천문학 등의 분야에서 각 측정이 중요하게 다뤄진다는 것을 나타낸다. 따라서 학생들이 각 개념을 제대로 학습하는 것은 수학뿐만 아니라 다른 과목과 실생활을 이해하는데 도움이 될 수 있다. 그러나 한국 초등학생들이 각 및 각의 주변 개념에 대한 이해 정도가 낮다는(김수미, 2018) 것은 각 개념의 지도에 대해 면밀히 살펴볼 필요성을 뒷받침해준다. 학생들은 각 개념 자체의 다면성 때문에 각을 이해하는데 어려움을 느낀다. 고대에서부터 각에 대해 여러 정의가 있어왔던 것으로 보아 알 수 있듯이 각

* 접수일(2019년 7월 22일), 심사(수정)일(2019년 8월 23일), 게재확정일(2019년 8월 23일)

* ZDM분류 : D10

* MSC2000분류 : 97D10

* 주제어 : 수학과 교육과정 국제 비교, 각, 각에 대한 관점, 각의 크기

† 교신저자 : ksy0952@snu.ac.kr

개념은 다면적이다. 각은 기울어진 정도, 두 직선이 향하는 방향차, 회전량, 두 반직선으로 이루어진 도형 등 다양한 면을 갖고 정의되지만 학생들은 이중 일부만을 각으로 이해한다. 실제로 많은 연구들은 학생들이 각의 다양한 관점에 대해 통합적으로 이해하는 것을 어려움을 주장했다(Mitchelmore, White, 1998, 2000; Foxman, Ruddock, 1984). 각에 대해 단편적으로 이해하는 것은 비단 각 학습에서의 어려움만으로 그치지 않는다. 삼각함수를 학습하는 학생들은 각을 회전량 측정, 회전하는 체화 감각(embodied sense of turn), 궁극적으로는 함수의 독립변수로서 이해해야 하지만(Watson, 2008) 이를 이해하는 것에 어려움을 겪는다. 학생들이 이전에 경험하는 것은 주로 펼쳐진 자, 45° 크기의 각과 같이 형태에 초점을 맞춘 도형으로서의 각이지만 삼각비와 삼각함수에서 각도가 변하는 역동적인 상황을 이해하기 위해서는 정적인 양을 나타내는 각보다는 변하는 양으로서 각을 인식할 필요가 있다(Moore, 2010). 우리나라의 경우 고등학교에서 삼각함수가 도입되므로 초등학교, 중학교에서의 각 학습 경험이 고등학교에서의 학습에도 영향을 줄 수 있다.

각에 대한 국내 연구는 주로 초등학교 수학과에서의 각 관련 내용에 대해 다루고 있다. 박교식(2010)은 초등학교 수학과에서 각도¹⁾ 관련 내용을 분석하면서 각의 크기가 180°인 경우, 180°보다 크고 360°보다 작은 경우, 360°인 경우가 그림으로 제시되지 않았음에도 불구하고 삼각형과 사각형의 내각의 크기의 합을 구하는 과정에서는 크기가 180°, 360°인 각이 제시되는 비약에 대해 비판했다. 김수미(2018)는 초등학교 교육과정에서 각을 도형 관점과 측정관점이 혼재되어 있으므로 이를 배치하고 전개하는 방법과 중등수학 교과서에서 각을 어떻게 정의하고 이후 활동이 전개되는 방식에 대해 분석할 필요성에 대해 제안했으며 김상미(2018)는 우리나라 수학 교과서에서 회전량의 측면이 거의 다루이지 않음을 밝혔다. 또한 사각형의 내각의 합이나 오목 다각형의 내각을 설명하는 것과 관련하여 회전각의 도입을 고려할 필요가 제기되기도 했다(박교식, 2015). 이상을 종합해보면 각 학습에서 각의 크기와 각에 대한 관점이 교과서에서 어떻게 다루지는지가 주된 연구 주제였다. 이러한 연구들은 초등학교 교육과정만을 분석했지만 중학교에서 각과 각의 크기가 다시 정의된다는 점과 작은 중학교와 고등학교에서도 지속적으로 제시된다는 개념이라는 점을(김수미, 2018) 고려해보면 초등학교에서 중학교에 이르기까지의 각에 대한 관점과 각의 크기가 어떻게 지도되는지 살펴보는 것이 필요하다. 또한 각에 대한 선행연구에서 대부분 우리나라의 교과서를 분석했으며 비교연구로는 일본의 초등학교 교과서와 비교한 연구(박교식, 2015)만 있으므로 각 학습에 대해 국제적으로 교육과정을 분석한 연구는 새로운 시사점을 제공할 수 있다. 수학과 교육과정의 국제 비교는 여러 국가의 학생들이 학교 수학교육을 통해 구체적으로 학습하는 내용과 방법을 파악할 수 있으므로 국제적인 동향을 참조하여 우리나라 교육과정을 분석할 수 있다는 장점이 있다(방정숙 외, 2015). 따라서 본 연구에서는 각 관련 내용요소와 각에 대한 관점, 각의 크기에 대한 교육과정 국제 비교를 통해 우리나라 수학 교육과정에 대한 시사점을 도출하고자 한다. 그러기 위해 먼저 한국, 싱가포르, 영국, 호주, 미국의 교육과정에서 각과 관련된 내용을 전체적으로 살펴본 뒤 각에 대한 관점, 각의 크기 측면에서 상세히 살펴볼 것이다. 구체적인 연구 질문은 다음과 같다.

1. 한국, 싱가포르, 영국, 호주, 미국의 교육과정에서 각 관련 내용 요소 및 학습시기는 어떠한가?
2. 한국, 싱가포르, 영국, 호주, 미국의 교육과정에서 각에 대한 관점은 어떠한가?
3. 한국, 싱가포르, 영국, 호주, 미국의 교육과정에서 각의 크기는 어떻게 서술되는가?

II. 문헌 검토

1) 각 개념 안에는 각의 측정이라는 면이 포함되어 있다. 이 글에서는 각의 측정을 다루고자 할 때는 각의 크기, 각도, 크기가 ○○인 각 등의 용어를 통해 구분하였다.

1. 국제 교육과정 및 교과서 비교 연구

먼저 2015 개정 교육과정과 외국의 교육과정을 비교한 연구로는 한국과 일본의 수학과 교육과정에서 개정의 방향, 내용요소의 도입 시기, 내용 수준, 교수 학습 방법 및 유의점, 교과 역량과 구현 방식 등을 비교한 김부미와 김운민(2019)의 연구, 남한과 북한의 교육과정의 구성 체제, 수학 교과목 체계, 수학 수업 시수, 수학과 의 성격과 목표 및 내용을 비교한 나귀수(2019)의 연구, 한국의 2009, 2015 개정 수학과 교육과정과 일본의 2009, 2017 수학과 교육과정을 초, 중, 고등학교급 전반에 걸쳐 직전 교육과정과의 변화를 살피고 비교한 권오남 외(2019)의 연구, 우리나라 수학과 교육과정의 기하영역을 싱가포르와 홍콩의 해당영역과 비교한 권석일(2016)의 연구 등이 있다. 이 중 권석일(2016)은 3개국의 초등 기하 교육과정을 비교하기 위해 먼저 문서 체제를 분석하였고, 이어서 내용 요소를 분석하였으며, 마지막으로 교육과정에서 다루어지고 있는 교수 및 학습 활동을 분석하였다.

2009 개정 교육과정과 외국의 교육과정을 비교한 연구로는 한국과 중국의 교육과정을 비교·분석한 유재혁과 이대현(2013)의 연구, 한국과 일본의 초등학교 수학 교과서에서의 각 및 각도 지도 내용을 비교한 박교식(2015)의 연구 등이 있으며 방정숙 외(2015)는 도형 영역을 중심으로 우리나라와 중국, 일본, 미국의 초등학교 교육과정을 비교·분석하였다. 그 결과 물체의 위치와 방향에 대한 학습 내용을 포함할 것, 공간감각과 관련하여 쌓기 나무로 만든 입체도형의 내용을 재구성하고, 좌표평면에 대한 내용을 검토할 것, 도형 영역에 해당하는 내용이 다른 영역에 있는 것에 대해 제시방법을 재고할 필요가 있다는 것을 시사점으로 제시하였다.

위의 내용을 종합하면, 기하 영역과 관련하여 다른 나라의 수학과 교육과정을 비교, 분석한 연구는 대부분 초등학교 교육과정에 한정된 연구였으며, 교육과정의 문서 체제 및 형태에 대한 내용이나 수학 교육의 목표, 학교 급별 내용 요소의 분석에 대한 내용이 주를 이루었다. 이는 교육과정을 개정할 때 수학 교육의 목표와 문서 체제, 학교급별 내용 요소 등이 국가별로 서로 다른 양상인 경우, 여러 나라의 교육과정을 비교, 분석함으로써 우리나라 교육과정의 개정에 반영할 수 있는 정보를 제공해 줄 수 있기 때문이다. 하지만 선행연구들은 기하 영역 전체에 대한 교육과정의 비교, 분석이 주를 이루고 있기 때문에, '각'과 관련된 구체적인 수학과 내용 요소에 대한 시사점을 얻기에는 제한이 있다. 또한 초등학교 교육과정에 한정되어 있기 때문에 초등학교 이후의 '각' 관련 학습이 어떻게 전개되어지는지 파악하기 어렵다. 이에 본 연구에서는 초등학교뿐만 아니라 중학교의 기하영역까지 연구 범위를 넓혔으며, 우리나라 교육과정만이 아닌 국제 교육과정을 비교·분석 한다. 이를 통해 각의 지도 시기, 지도 내용, 각 개념의 도입 방법 및 전개에 대한 시사점을 얻고자 한다.

2. 각 개념

각 개념은 어느 한 관점을 강조할 것인지 역사적으로 다양한 주장이 있어왔다. 그리스의 철학자들은 각이 양인지, 질인지, 관계인지에 대해 이 중 어떤 범주에 속할 것인지에 대해 많은 논쟁을 했다(이무현 역, 2018). 각을 '양'의 범주에 넣은 사람들은 평면의 각은 선으로, 입체의 각은 면으로 나눌 수 있다는 사실을 근거로 들었으며 각이 더 크다, 작다는 말을 한다거나 각을 이등분할 수 있다는 점을 내세웠다. 각을 '질'이라고 주장한 철학자들은 아리스토텔레스가 질이란 어떤 사물에 존재하는 형태나 생김새, 쪽 끝음, 굽음 등과 같은 것들이라는데 근거하여 각은 꺾임으로 정의되는 일종의 도형이므로 질의 범주에 속한다고 주장했다. 유클리드는 <원론>에서 각을 '평면에 있는 두 선이 서로 만나고 한 직선 위에 놓여있지 않을 때, 두 선이 서로 기운 정도'로 정의하여 각을 '관계'의 범주에 포함시켰다(이무현 역, 2018, p.42). Proclus는 각에 대해 다른 정의들을 소개하며 Carpus가 각이란 선들이나 면들 사이의 거리를 말하며 각을 '양'의 범주에 넣었음을 주장했다. 이 때 Carpus는 거리를 '직선과 다르게 한 방향으로 뻗어 있는'이라는 표현을 덧붙여 회전할 때라는 상황을 나타내고자 했다(이무현 역, 2018). 19세기 말, Schotten은 각을 두 선 사이의 방향차, 한 변이 원래의 위치로부터 다른 변까지의 위치까지 움직이는

데 필요한 회전량, 두 직선 사이에 포함된 평면의 영역이라는 세 범주로 정의했다(Shreves, 1998). Freudenthal(1986)은 정적인(static) 접근으로 각이란 각의 변, 각으로 둘러싸인 평면이나 공간의 일부로 볼 수 있고 동적인(kinematic) 접근에서는 회전으로 볼 수 있음을 서술했다.

이종희(2001)는 각과 각도 개념 모두의 역사적, 교수학적 분석을 서술하며 유클리드 기하와 공간 기하는 정적인 접근, 삼각법과 해석기하는 동적인 접근에 포함시킬 수 있다고 밝혔다. 김수미(2018)는 1차 교육과정부터 2009 개정 교육과정에 이르기까지의 초등학교 수학 교과서에서 각에 대한 관점을 분석하기 위해 각 정의, 직각 정의를 고찰하여 각을 전적으로 도형관점으로 정의했지만 그림 보기에는 각의 측정 관점이 일부 드러나기도 했음을 밝혔다. 또한 김상미(2018)는 각의 개념을 보는 관점과 학습 계열의 구성을 분석하고자 각을 회전량이라는 양의 측면, 기하적 도형이라는 질적 측면, 면이나 선과 같은 요소로 구성되는 관계적 측면에서 다뤘다. 양, 질, 관계로 범주화한 것은 Euclid와 Heath의 논쟁을 참고한 것으로(이무현 역, 2018) 당시 각을 '양'으로 보는 관점 중 Carpus의 주장에서만 회전량이 드러났지만 다른 연구들을 참고하여 양의 관점을 회전량으로 정의했다. 그 결과 각의 정의와 표현 방법, 각의 구성요소를 통해 각을 정의하는 방식이 기하적 도형에서 관계적 접근으로 변화했으며 각을 도입하는 활동을 양적 측면, 질적 측면, 관계적 측면으로 나누어 분석하였다. 이를 정리해보면 각은 다양한 관점을 갖고 있으며 역사적으로 양/질/관계의 관점, 정적/동적 관점, 도형/측정 관점 등에 의해 분류될 수 있으며 국내에서 교과서에 서술된 각에 대한 관점을 밝히기 위해 주로 지난 교육과정부터 현재까지의 각의 정의 및 도입 활동을 분석했음을 알 수 있다.

각도 개념은 각의 동적인 관점과 연결되어 있다. 학교 수학에서 다루는 각도는 각의 꼭짓점을 중심으로 한 회전량으로 설명되고 있으며 이는 각의 동적인 측면과 관련되지만 교실에서는 측정의 원리를 이해하지 않고 각 도구를 도입한다고 비판했다(최은아, 강향임, 2015). 실제로 각도 개념은 어떤 원에서의 현의 길이와 현에 대한 중심각의 크기와의 관계로부터 발전했으며 호에 기초한 각 단위인 라디안은 1873년에 정의되었다(Jones, 1998). 따라서 원 안에 들어있는 중심에서의 각은 회전이나 회전량으로 정의한 동적인 각 개념과 연결된다. Keiser(2004)는 각도를 측정할 때 학생들은 어디를 측정해야하는지에 대해 잘 이해하지 못하며 각의 변의 길이가 길수록 각도가 크다고 답하기도 하고 짧을수록 각도가 크다고 생각하기도 한다고 주장했다. 각의 크기를 측정할 때 학생들이 겪는 어려움을 해결하기 위해 회전적인 측면을 강조할 필요성이 제기되었다. Clements와 Burns(2000)는 움직임으로서의 회전 스키마와 양으로서의 회전 스키마가 통합되었을 때 각도를 측정하고자 하는 수학적 대상에 마치 각도기를 댄 것처럼 상상할 수 있다고 주장했다. 반지름이 일정한 원에서의 호의 길이는 각에서 회전량을 측정할 수 있는 요소이다. Keiser(2004)는 0° , 180° , 360° 크기를 갖는 각을 각으로 이해하는 데 어려워했던 학생의 인터뷰를 바탕으로 기존에 각에 대해 갖고 있는 개념이미지에 회전적인 면이 포함되지 않았으며, 회전적인 면을 각의 개념이미지로 포함하기 위해 고군분투하고 있음을 설명했다. 역사적으로도 크기가 180° , 360° 인 각을 정의에서 제외하거나 회전 측면에만 초점을 맞춘 정의가 적었다는 사실을 들어 학생들이 0° , 180° , 360° 크기의 각을 인식하는 것을 어려워하는 것이 자연스러운 일임을 주장했다(Keiser, 2004). 한편, 0° , 180° , 360° 크기의 각을 인식하는데 겪는 어려움을 Mitchelmore와 White(2000)의 관점에서 해석할 수도 있는데 Yigit(2014)는 0° , 360° 크기의 각은 두 변이 모두 보이지 않는 경우, 180° 크기의 각은 한 개의 변만 보이는 경우로 서술했다. 이 관점에 따르면 학생들은 변이 보이는 개수에 따라 군집들을 분류하고 변이 한 개 보이거나 두 변이 모두 보이지 않는 경우 추상 각 개념을 형성하기 어려우므로 0° , 180° , 360° 크기의 각이 다른 크기의 각보다 어렵게 느껴질 수 있다.

한편 학생들이 어떻게 각 개념을 발달시키는지에 대해 Mitchelmore와 White(1998)는 다음과 같이 주장했다. 각 개념 발달은 상황적(situated) 각 개념 단계, 문맥적(contextual) 각 개념 단계, 추상적(abstract) 각 개념 단계를 거쳐 나타난다. 아동은 일상생활에서 각을 발견할 수 있는 다양한 상황을 경험한다. 예를 들어 아동은 언덕을 오르내리는 경험, 차를 타고 언덕을 오르내리는 경험을 통해 '언덕'이라는 개념을 형성하는데 이러한 개념을 상

황적 각 개념이라고 한다. 가위, 타일, 교차로, 지붕, 구부러진 막대 등의 개념도 상황적 각 개념에 해당한다. 두 번째 단계에서 아동은 각을 인식할 수 있는 물리적 상황들 간의 유사성을 인식하여 이 유사성을 새로운 정신적 대상, 즉 개념으로 형성한다. 예를 들어, 언덕과 지붕 간에 경사(slope)라는 유사성이 있음을 인식하고 이제 경사진 대상(sloping object)들을 모두 경사라는 개념으로 그룹화한다. 이 개념을 문맥적 각 개념이라고 하는데 여기에는 경사 문맥, 교차 문맥, 모서리 문맥, 회전 문맥 등이 있다. 세 번째 단계는 이러한 문맥적 각 개념들 사이에서 유사점을 발견하여 추상적 각 개념으로 그룹화하는 것이다. 여기서 ‘한 점’을 갖고 있다는 개념은 모서리와 교차 문맥을 연관시킬 때 사용하며, ‘하나의 경사진 선’이라는 개념은 경사와 회전 문맥 간의 유사성을 발견할 때 활용된다. ‘한 점에서 만나는 두 기울어진 선’이라는 개념은 앞에서 설명한 두 개념보다 더 다양한 문맥들을 연관시킬 수 있었다. 각의 다면성을 통합하는 것을 어려워한 것은 각 문맥 간의 유사성을 인식하는 과정에서 오는 어려움이라고 할 수 있으므로 학생들의 각 개념 이해를 돕기 위해서는 각 문맥 간의 유사성을 인식하도록 하는 것이 필요하다. 이 때 ‘한 점에서 만나는 두 기울어진 선’이라는 개념이 각의 다면적이 상황을 대부분 연관시킬 수 있는 개념이므로 이를 표준 각 개념(standard angle concept)으로 설정하고 학생들이 다양한 문맥에서 표준 각 개념을 인식할 수 있어야 한다고 주장했다(Mitchelmore, White, 1998).

본 연구에서는 각의 다면적 측면에 대해 여러 연구에서 지적인 회전량 측도, 회전각, 측도 관점의 요소를 분석하고자 각 개념을 정적 관점과 동적 관점, 두 가지 관점에서 다루기로 한다. 이는 각을 두 반직선에 의해 만들어진 점의 집합의 합집합 또는 평면 또는 선으로 만들어지는 하나의 도형을 정적인 관점, 반직선의 회전량으로 정의되는 것을 동적인 관점으로 해석할 수 있다는 선행연구들을 참고한 것이다. 정적 관점과 동적 관점에서 기존의 각 관련 국내 연구를 분석해보면 김상미(2018)의 연구에서 분류한 기준에서 양적 측면은 동적 관점, 질적 측면과 관계적 측면은 정적 관점으로 판단할 수 있으며 김수미(2018)의 도형 관점은 정적 관점으로 분류할 수 있다. 기존의 국내 연구는 교과서에 서술된 각의 개념이나 각을 표현한 그림 등을 분석했지만 각도 개념이 동적 관점과 관련이 깊다는 점에서 각도 개념까지 포함하여 각에 대한 관점을 살펴볼 필요가 있다. 또한 교육과정에 서술된 각 내용이 학생들의 각 개념 이해를 돕기 위한 방향으로 서술되었는지 고려할 필요가 있다. 따라서 본 연구에서는 각의 정의뿐만 아니라 각의 크기에 대한 설명을 포함하여 정적 관점과 동적 관점으로 분석할 것이다.

III. 연구방법

1. 분석 대상

각 내용이 외국의 교육과정에서 어떤 시기에 어떻게 다루어지는지 조사하기 위해 4개의 비교 대상 국가를 선정하였다. 선정한 국가는 우리나라의 각 관련 교육과정에 시사점을 줄 수 있도록 과학기술 연구 수준이 높으며 교육과정이 국제적으로 영향력이 있어 세계적인 수학과 교육과정의 동향을 파악할 수 있는 나라 중, 각 관련 내용을 다루는 학년이 다르거나 우리나라의 교육과정에서 다루지 않는 내용을 서술하고 있는 것으로 보이는 국가로 선정했다. 선정 국가들은 우리나라에서 교육과정을 개정할 때마다 분석 대상으로 포함되어 본 연구 목적인 우리나라 교육과정에 시사점을 제공할 수 있는 국가로 판단했다. 비교 대상 국가의 수학과 교육과정은 가장 최근의 교육과정으로 하였으며 개정시기와 출처는 <표 III-1>과 같다.

<표 III-1> 비교 대상 국가의 수학과 교육과정의 개정시기와 교육과정 출처

국가명	개정시기	교육과정 출처
한국	2015	http://ncic.kice.re.kr
싱가포르	2012	https://www.moe.gov.sg/education/syllabuses/sciences
영국	2014	https://www.gov.uk/government/publications/national-curriculum-in-english-and-mathematics-programmes-of-study
호주	2012	https://www.australiancurriculum.edu.au/f-10-curriculum/mathematics/
미국	2010	http://www.corestandards.org/Math/

한국은 창의·융합형 인재를 양성하고 교과 역량을 강조하며 학습량 적정화를 위해 교육내용의 질적인 감축을 이루는 동시에 수학교육의 국제 동향을 반영하는 것을 목표로 2015년 개정 고시되었다. 개정의 중점 사항으로 수학 교과 역량 구현, 학습 부담의 경감 추구, 학습자의 정의적 측면 강조, 공학적 도구의 활용을 강조하고 있다(교육부, 2015).

싱가포르의 초등학교, 중학교의 교육과정은 2012년부터 단계적으로 싱가포르 교육부의 교육과정 담당 부서(Curriculum Planning and Development Division)에 의해 개발되었으며, 고등학교 교육과정은 2015년까지는 국가 교육과정 대신 싱가포르 교육평가원(Singapore Examinations and Assessment Board)에서 발행하는 평가요목이 교육과정의 역할을 하였다가, 2015년 말부터 교육부에 의해 교육과정이 공표되어 시행되었다. 싱가포르의 수학교육 목표는 수학적 개념과 기술들을 익히고 적용하는 것, 문제 해결에 수학적으로 접근함으로써 인지적, 메타인지적 기술을 개발시키는 것, 수학에 대해 긍정적인 태도를 갖도록 발달시키는 것이다. 이를 위해 문제해결을 강조하고 있으며 수학교육의 틀로 메타인지, 과정, 개념, 기술, 태도의 5개의 영역을 설정하여 개발하는 것을 목표로 하고 있다(Ministry of Education, Singapore, 2012a). 싱가포르는 초등학교를 졸업하는 6학년 때 학업 성취도 평가인 PSLE(Primary School Leaving Examination)의 결과에 따라 4년 과정인 중등학교의 세 가지 트랙으로 나누어 진학하는데, 이 중 가장 보편적인 과정인 Express를 기준으로 분석하였다(Ministry of Education, Singapore, 2012b)

영국은 1988년 국가교육과정이 제정된 이후로 4년마다 개정이 이루어지고 있고, 현재 교육과정의 경우 초등학교와 중학교는 2013년, 고등학교는 2014년에 개정되었다(DfE, 2014). 국가 교육과정은 교육 목표에 앞서 수학이 창의적이고 내적으로 연결된 학문이며 실생활에서 필수적임을 강조한다. 따라서 질 높은 수학교육은 세상을 이해하고 수학적으로 추론하며 수학의 아름다움과 힘을 인식하고 즐거움과 호기심 제공하므로 수학을 학습해야 한다고 명시하였다. 이를 위해 모든 학생들이 수학의 기초에 능통해 질 것, 수학적으로 추론할 수 있을 것, 수학을 적용하여 정형문제와 비정형 문제를 해결할 것을 목표로 하고 있다.

호주는 2009년 연방정부에 의해 설립된 호주 교육과정평가원(Australian Curriculum Assessment and Reporting Authority, ACARA)의 주도 아래 새로운 교육과정 개발이 이루어졌다. 새로 개발된 호주 교육과정은 공평과 기회, 다른 학습 영역과의 연결, 교육과정의 명확성, 학습의 폭과 깊이, 디지털 기술의 역할, 학습자(F-12학년)의 특성, 일반역량, 통합 교육과정의 관점을 고려하여 개발되었다. 호주 수학 교과의 기본적인 목적은 학생들을 활동적이게 하며, 시민을 생각하고, 수학적으로 세계를 해석하게 하고, 개인과 금융에 대한 우선순위를 스스로 예측하여 의사결정할 수 있도록 돕고, 수학을 통해 많은 다른 분야에서의 연구와 실천을 풍부하게 하는 것이다(ACARA, 2013).

미국은 2010년 이전에는 각 주들이 자체적으로 학교 교육과정을 개발하여 사용하고 있었지만 2010년 전국 단

위로 Common Core State Standards(CCSS)를 개발하였다. CCSS를 바탕으로 학교 교육을 위한 Common Core State Standards for Mathematics(CCSSM)를 개발하기 위해 많은 교사들이 포함되었고, 초안에 대해 여론조사를 거쳐서 CCSSM이 개발 되었다. CCSSM은 넓고 깊은 주제를 다루기보다는 상당히 좁고 깊게 문제를 다루며, 각 학년의 성취기준을 집중적으로 깊게 다루어 학생들의 강력한 학습의 토대를 마련하고자 한다. 또한 학년별 내용 기준이 상세하며 높은 학년에 진학함에 따라 동일한 내용의 학습 주제를 심화시켜가도록 구성되었다(CCSSI, 2010).

비교 대상 국가의 수학과 교육과정에 나타난 학년(군) 구성 및 내용 영역을 정리하면 <표 III-2>와 같다. 본 연구는 각 관련 내용에 대한 학습 시기 및 서술 방식을 분석하고자 하므로 각 국가의 교육과정을 비교할 때 나이와 상관없이 학년을 기준으로 다루었다.

<표 III-2> 비교 대상 국가의 수학과 교육과정에 나타난 학년(군) 구성 및 내용 영역

국가	학년/학년군										
	내용 영역										
연령(만)	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
한국	초등학교 1~2학년군		초등학교 3~4학년군			초등학교 5~6학년군		중학교 1~3학년군			고등학교
	도형						기하				
싱가포르	초1	초2	초3	초4	초5	초6	중1	중2	중3	중4	
	측정과 기하						측정과 기하				
영국	핵심단계1		핵심단계2				핵심단계3			핵심단계4	
	1	2	3	4	5	6	기하와 측정			기하와 측정	
	기하						기하와 측정			기하와 측정	
호주	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
	측정과 기하						측정과 기하				
미국	K	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	기하						기하			기하	

본 연구의 분석 대상은 교육과정이고 각 관련 내용에 대해 교육과정 문서에 나타난 내용에 한정하여 비교할 예정이므로 교과서에 대한 분석은 포함하지 않는다. 그러나 각 내용에 대해 한국 교육과정에서 해당 학년에 어떤 내용을 다루는지 명확하지 않은 경우에는 부가적으로 교과서, 지도서를 참고 자료로 활용하였다. 예를 들어, 교육과정 상에 학년군으로 서술되어 있는 내용에 대해 교과서를 참조하여 학년별 내용을 구분하였다. 이에 교육과정 교과서, 지도서 등을 모두 교육과정 자료로 보았으며, 분석에 참고한 자료를 교육과정이라 통칭하겠다.

2. 분석 절차 및 방법

이 연구에서는 각국의 교육과정 비교를 위해 Adamson & Morris(2014)의 교육과정 비교 연구를 위한 틀을 참조하였다(권오남 외, 2019 재인용). 교육과정 비교 연구를 위해 연구자는 목적과 관점을 설정한 뒤, 해당 관점에 따라 교육과정의 초점을 선정하고 초점에 부합하는 표징을 규명하여 연구를 진행한다. 즉, 연구 목적과 관점의 설정, 교육과정 초점의 선정, 적절한 교육과정의 표징이 모두 고려되어야 한다. 이 연구는 각국의 각 관련 내용의 교육과정 비교를 통해 여러 국가의 각 도입 내용과 각 관련 내용에서 보이는 특징을 분석하고 설명하는 데에 목적을 지닌 해석적 관점의 연구이다. 이에 따라 비교의 대상으로 한국, 싱가포르, 영국, 호주, 미국의 수학과 교육과정의 내용 영역 및 내용 요소에 초점을 맞추었다. 각국의 특징을 드러내어주는 교육과정의 표징으로

각 도입 내용과 각 관련 내용의 내용 요소 및 성취기준이 적절할 것으로 판단하였다.

각은 정의, 성질을 비롯하여 도형의 성질, 기울기, 삼각비, 호도법 등 여러 단원에서 나타나므로 먼저 본 연구에서 다루고자하는 각 관련 내용을 먼저 정하고자 한다. 우리나라의 교육과정에 시사점을 제공할 수 있도록 먼저 우리나라에서 학습하는 각 관련 내용에 기반을 두고 각 이해하기, 직각 이해하기, 수직과 평행, 각의 크기, 각의 성질 내용을 선정하였다. 다만 각이 평면도형의 구성 요소로 다루지는 중심각, 원주각, 직각 삼각형, 삼각형의 분류 등의 내용은 제외하기로 했으며 호도법을 학습하기 전까지의 각 교육과정 내용을 분석하기로 했다. 각 이해하기에서는 각의 개념을 학습하는 내용이므로 각의 정의와 각을 정의하기 전에 도입하는 내용을 포함하였다. 각의 크기로는 예각과 둔각, 1도($^{\circ}$) 단위의 학습과 각 크기 측정 및 그리기, 크기가 180° 보다 큰 각 내용을 포함하기로 했다. 각의 성질에서는 직선 위의 각, 한 점에서의 각, 맞꼭지각 내용을 선정했다. 이 중 연구 질문 2에 답하기 위해 선행연구에서 제시되었던 각의 다면적 개념과 각의 크기에 대한 내용 요소를 참고하여 각 관련 내용 중 초점을 맞출 내용을 정하였다. 본 연구에서는 각에 대한 관점이 정적인 관점인지, 동적인 관점인지를 분석했다. 교육과정에서는 교과서와 달리 자세한 각 서술 및 그림이 나타나지 않으므로 양, 질, 관계의 세 관점에서 분석하기보다는 교육과정의 서술을 통해 판단할 수 있는 정적 및 동적 관점으로 분석하는 것이 교육과정 연구 방법으로 적절하다고 판단했다. 선행연구에서 제시되었던 각 관련 내용 요소를 참고하여 관점을 분석하기 위해 초점을 맞출 내용을 정하였으며 각 관련 내용 중 각의 인식, 각의 정의와 같은 각의 도입 내용 요소를 추출했다. 또한 회전한 양이라는 속성은 각의 크기를 학습할 때 강조될 수 있으므로 각의 크기 정의 및 도입 내용도 분석 대상에 포함했다. 그러나 각의 크기 내용 중 ‘예각이나 둔각과 같은 용어 사용하기’와 같이 관점을 판단하기 어려운 내용은 분석하는 대상에서 제외하였다. 또한 각도 내용 요소에 대한 교육과정 비교를 위해 박교식(2010)의 연구를 참고하여 크기가 180° , 360° 인 각이 교육과정에서 서술되는 방식과 나아가 교육과정에서 서술되어 있는 각도의 범위 내용을 선정하였다. 이러한 초점은 우리나라는 180° , 360° 크기의 각을 다루는 것도, 다루지 않는 것도 아닌 것으로 보이는 교육과정에 대한 비판점과 초등학교에서 다루는 각의 크기가 명시적으로는 180° 를 넘지 않는다는 점, 학생들이 0° , 180° , 360° 크기를 갖는 각을 이해하는 데 어려워한다는 점을 다른 선행연구를(박교식, 2010; 최은아, 강향임, 2015; Keiser, 2004) 참고하여 선정하였다.

각 국가의 교육과정에서 다루는 각 관련 내용을 분석하기 위해 다음과 같은 절차를 거쳤다. 먼저 우리나라의 초등학교와 중학교 교육과정에서 학년별로 각 관련 내용의 성취기준을 표로 정리하였다. 성취기준이란 수업 후 학생이 할 수 있어야 할 능력, 즉 학생이 배워야 할 지식과 기능을 나타내며 교사에게 수업의 방향을 제시하는 것이다(이광우 외, 2014). 싱가포르의 내용(content)과 학습경험(learning experiences), 영국의 법적 요구사항(Statutory requirements), 호주 교육과정의 내용 설명(content descriptions)과 구체화(elaborations), 미국 CCSSM의 묶음(cluster)의 내용은 교육과정 내용과 학생이 도달해야 하는 목표가 함께 서술되어 있다는 점에서 우리나라 교육과정의 성취기준에 해당한다고 판단하였다. 이후 각 국가의 교육과정을 기술할 때, 국가마다 제시하는 수학 내용 요소와 관련된 성취기준의 서술 방식이 다르기 때문에 우리나라의 성취기준과 비슷한 방식으로 통일하여 제시하였다. 예를 들어 싱가포르 교육과정에서는 내용의 ‘각의 개념’과 학습경험의 ‘지오스트립(geostrip)과 구부러진 빨대(riveted straw)를 이용하여 회전의 양으로 각을 설명하고, 각을 설명하기 위해 ‘예각’과 ‘둔각’과 같은 용어 사용하기’를 ‘각의 개념을 이해하고, 회전의 양으로 각 설명하기’, ‘각을 설명하기 위해 ‘예각’과 ‘둔각’과 같은 용어 사용하기’와 같이 통합하여 서술하였다. 또한 각 관련 내용을 번역할 때 우리나라 교육과정의 수학 용어를 기준으로 번역했다. 예를 들어 호주 교육과정에서 arms of angle은 각의 팔로 번역하지 않고 각의 변으로 번역하였으며 reflex angle의 경우 교사용 지도서에 있는 해설을 참고하여 우각(優角)으로 번역하였다(우정호 외, 2013). rotation, turn은 모두 회전으로 번역하였으나 영국의 경우 turn과 rotation을 구분한다는 성취기준에 대해서는 두 단어의 차이를 구별하도록 turn은 선회(旋回)로, rotation은 회전으로 번역하였다.

IV. 연구결과

1. 각 관련 내용의 학습 시기

각 관련 내용의 성취기준을 모두 정리하면 <표 IV-1>과 같다. 우리나라에서 각은 초등학교 3학년에서 처음 도입되며, 구체적인 사례나 활동을 통해 각을 이해하고 직각을 이해하는 활동을 통해 각과 직각이 함께 도입됨을 알 수 있다. 우리나라와 같이 한 학년에서 각과 직각을 함께 다루는 국가는 싱가포르, 영국, 미국이며 호주는 3학년 때 각을 학습한 뒤 4학년 때 직각을 학습한다. 우리나라의 성취기준인 ‘직각과 비교하는 활동을 통하여 예각과 둔각을 구별할 수 있다.’, ‘교실 및 생활 주변에서 직각인 곳이나 서로 만나지 않는 직선을 찾는 활동을 통하여 직선의 수직 관계와 평행 관계를 이해한다.’와 같이 직각은 이후 예각과 둔각, 수직선과 평행선의 학습과도 연결된다. 모든 국가에서 각의 크기 단위인 1도(°)를 학습한 뒤 각도기를 이용하여 각을 측정해보고, 주어진 각도와 크기가 같은 각 그리기가 성취기준으로 제시되고 있다.

<표 IV-1> 각 관련 내용의 학습 시기

학년 국가	2	3	4	5	6	7
한국		<ul style="list-style-type: none"> · 각 이해하기 · 직각 이해하기 	<ul style="list-style-type: none"> · 직각과 비교하는 활동을 통해 예각과 둔각 구별하기 · 교실 및 생활 주변에서 직각인 곳이나 서로 만나지 않는 직선을 찾는 활동을 통하여 직선의 수직 관계 및 평행 관계 이해하기 · 각의 크기의 단위인 1도(°)를 알고 각도기를 이용하여 각의 크기 측정 및 어렵하기 · 주어진 각도와 크기가 같은 각 그리기 			<ul style="list-style-type: none"> · 각 이해하기 · 평행선에서 동위각과 엇각의 성질 이해하기
싱가포르		<ul style="list-style-type: none"> · 각의 개념을 이해하고, 회전의 양으로 각 설명하기 · 각을 설명하기 위해 ‘예각’, ‘둔각’과 같은 용어 사용하기 · 실생활에서 각을 찾고 직각, 직각보다 작은 각, 직각보다 큰 각을 구별하기 위해 ‘중이 직각’ 사용하기 	<ul style="list-style-type: none"> · 각을 나타내기 위해 $\angle ABC$, $\angle a$ 사용하기 · 각도 측정하고 시계 방향 또는 반 시계 방향으로의 회전 각도를 도(degree)단위로 측정하고 회전의 양과 연관 짓기 · 각을 어렵해본 뒤 각도기로 각 측정하기 · 각도기를 이용하여 주어진 	<ul style="list-style-type: none"> · 직선위의 각, 한 점에서의 각, 맞꼭지각과 같은 다양한 각의 성질을 서술하고 설명하기 · 서로 다른 유형의 각의 예 찾기 · 각의 성질을 이용하여 모르는 각을 찾고 설명하기 		<ul style="list-style-type: none"> · 직각, 예각, 둔각, 우각 조사하기 · 맞꼭지각, 직선위의 각, 한 점에서의 각 조사하기 · 동위각, 엇각, 내각 조사하기

			<p>크기의 각 그리기</p> <ul style="list-style-type: none"> 회전의 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ 전체를 각도로 나타내기 8점 컴퍼스를 이용하여 각도 구하기 			
영국	<ul style="list-style-type: none"> 직선 방향으로의 이동, 1회전, $\frac{1}{4}$, 반, $\frac{3}{4}$ 회전(시계 방향 및 반시계 방향)과 직각의 관점에서 선회(turn)과 회전(rotation)을 구분을 포함한 위치, 방향 및 움직임을 수학 용어를 사용하여 나타내기 	<ul style="list-style-type: none"> 각을 모양의 속성 또는 회전에 대한 설명으로 인식하기 직각을 확인하고, 두 직각이 반회전(반 바퀴)을 만들고, 세 직각이 $\frac{3}{4}$ 회전을, 네 직각이 한 바퀴 회전을 만든다는 것을 인식하기, 어떤 각이 직각보다 크거나 작은지 확인하기 수평선과 수직선, 평행한 직선과 수직인 직선을 확인하기 	<ul style="list-style-type: none"> 예각 및 둔각을 확인하고 크기에 따라 두 직각까지의 각들의 크기를 비교하고 정렬하기 	<ul style="list-style-type: none"> 도 단위($^{\circ}$)를 이용하여 각이 측정됨을 알기: 예각, 둔각, 우각을 추정하고 비교하기 주어진 각을 그리고 각도 측정하기 한 점에서의 각과 일회전의 각(총360°) 확인하기 직선 위의 각과 반회전의 각 확인하기(총180°) 90°의 배수 각 확인하기 	<ul style="list-style-type: none"> 한 점에서의 각, 직선 위의 각, 맞꼭지각 인식하기 빠진 각도 구하기 	<ul style="list-style-type: none"> 각 그리기, 측정하기 한 점에서의 각, 직선 위의 각, 맞꼭지각의 성질 적용하기(보각, 여각) 평행선에서 엇각과 동위각 이해하고 사용하기
호주		<ul style="list-style-type: none"> 회전의 양으로 각 인식하기 일상생활에서 각 크기 비교하기 	<ul style="list-style-type: none"> 각 비교하고 직각과 같은, 더 큰, 더 작은 각으로 분류하기 디지털 기술을 이용하여 각을 그리고, 직각과 비교하기 	<ul style="list-style-type: none"> 도($^{\circ}$)를 이용하여 각도 어렵, 측정, 비교하기 180°, 360° 각도기를 이용하여 각 측정 및 그리기 각에는 변과 꼭짓점이 있고, 크기는 한 변이 다른 변과 일치하는데 필요한 회전량을 알기 	<ul style="list-style-type: none"> 직선에서 각, 한 점에서의 각, 맞꼭지각 조사하기 각의 성질을 이용하여 모르는 각도 구하기 직각의 크기를 90°로 인식하고 예각, 둔각, 평각, 우각을 정의하고 각을 측정하고 어렵하고 비교하며 크기에 따라 각을 분류하기 	<ul style="list-style-type: none"> 두 직선과 다른 한 직선이 만날 때 생기는 동위각과 엇각, 동측내각을 알고 두 직선이 평행할 때의 관계를 조사하기 보각, 여각, 인접각, 맞꼭지각과 같은 각의 쌍을 정의하고 분류하기
미국			<ul style="list-style-type: none"> 두 개의 반직선이 공통 끝점을 공유할 때 형성되는 기하학적 모양으로 각을 인식하고, 각 측정 개념을 이해하기 각도기를 사용하여 자연수 각도로 각 측정하고 정해진 크기의 각 그리기 실생활과 수학 문제에서 그림으로 나타난 모르는 각도를 구하기 위해 			<ul style="list-style-type: none"> 다단계 문제에서 보각, 여각, 맞꼭지각, 인접각에 대한 사실을 이용하여 도형에서 알 수 없는 각에 대한 간단한 방정식을 작성하고 해결하기

			더하기 및 빼기 문제를 해결하기, 예를 들면 모르는 각도 문제를 기호가 있는 방정식을 사용하여 해결하기. · 각(직각, 예각, 둔각), 수직선, 평행선을 그리고 평면 도형에서 확인하기			
--	--	--	---	--	--	--

각, 직각, 예각, 둔각, 도 단위로 각 측정, 수직선, 평행선, 맞꼭지각은 모든 국가에서 공통으로 다루는 각 관련 내용이며 한국은 예각, 둔각을 배우기 전에 도 단위로 각 측정하기를 학습하고, 나머지 4국가는 모두 위에 제시된 순서대로 학습한다. 각 크기 측정 이후에 다루는 학습 내용은 국가마다 다양하다. 교육과정에 명시되어 있는 각 관련 내용 중 공통인 것과 그렇지 않은 것을 구분하여 나타내면 <표 IV-2>과 같다. 여기서 공통 학습 내용은 각, 직각, 예각, 둔각, 도 단위로 각 측정, 수직선, 평행선, 맞꼭지각이다.

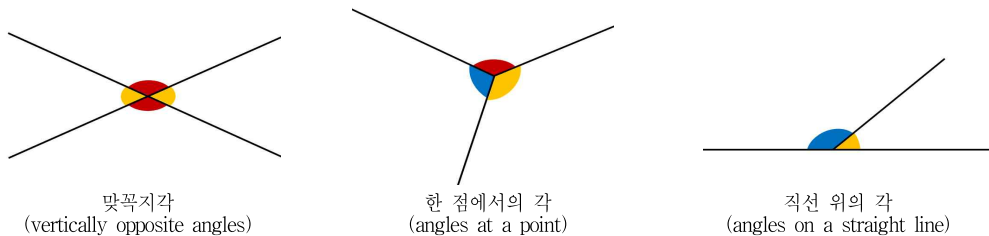
<표 IV-2> 교육과정에 명시된 각 관련 내용 비교

국가 \ 내용	공통 *	보각	여각	직선 위의 각	한 점에서의 각	각도 구하기
한국	■					
싱가포르	■			■	■	■
영국	■	■	■	■	■	
호주	■	■	■	■	■	
미국	■	■	■			■

* : 각, 직각, 예각, 둔각, 도 단위로 각 측정, 수직선, 평행선, 맞꼭지각

싱가포르, 영국, 호주는 맞꼭지각²⁾을 다룰 때 직선 위의 각, 한 점에서의 각을 각의 성질로 함께 학습한다. 여각, 보각에 관한 성취기준은 우리나라와 싱가포르를 제외한 세 국가에서 언급하고 있으며, 각도 구하기에 관해 명시한 국가는 우리나라를 제외한 네 국가이다. 이 중 싱가포르, 호주, 영국은 한 점에서의 각, 직선 위의 각, 맞

2) 맞꼭지각은 두 직선이 한 점에서 만날 때 생기는 교각 중 서로 마주보는 교각을 말하며 그러한 두 각의 크기가 같음을 학습한다. 한 점에서의 각(angles at a point)은 반직선들의 공통 끝점을 중심으로 하는 원을 기준으로 각의 크기의 합이 360°임을 이용하여 학습하며, 직선 위의 각(angles on a straight line)은 직선 위의 한 점을 기준으로 하여 측정하는 각이며 직선 위의 각들의 크기의 합은 180°임을 학습한다.



꼭지각을 학습한 뒤 이 성질을 이용하여 모르는 각도(unknown angle, missing angle) 구하기가 교육과정에서 서술되어 있으며, 미국은 실생활 및 수학 문제에서 그림으로 나타난 모르는 각도(unknown angle) 구하기, 방정식을 사용하여 각도를 찾는 문제를 해결하기가 성취기준으로 제시되어있다. 우리나라는 각도 구하기와 관련된 성취기준이나 내용요소를 별도로 제시하지 않았다. 다만 교과서에서는 각의 크기를 구하는 문제는 다루고 있었다. 분석 결과 우리나라 교육과정에서는 공통의 내용 이외에 추가로 제시된 학습 내용을 찾아볼 수 없었다. 각 관련 내용을 가장 많이 다루는 나라는 영국과 호주이며, 싱가포르와 미국도 우리나라와 비교하여 더 많은 각 관련 내용을 교육과정상에 구체적으로 명시하여 다루고 있다.

각 관련 내용에 대한 학습시기를 국가별로 비교하면, 우리나라는 초등학교 3학년, 4학년, 중학교 1학년에서 각 관련 내용을 다루며, 미국은 초등학교 4학년과 중학교 1학년에서, 싱가포르, 호주는 초등학교 3학년에서부터 중학교 1학년까지, 영국은 초등학교 2학년에서부터 중학교 1학년까지 매 학년에 걸쳐 각 관련 내용이 제시되고 있다. 각 관련 내용의 학습시기를 비교하기 위해 우리나라와 가장 큰 차이를 보이는 영국을 선택하여 한국과 영국의 시기별 학습 내용을 간략하게 정리하면 [그림 IV-1]과 같다.



[그림 IV-1] 한국과 영국의 각 관련 내용의 학습시기

3개 학년에서 집중적으로 각 관련 내용을 학습하는 우리나라와 비교하여 영국은 핵심단계1(초등학교 2학년)에서부터 핵심단계3(중학교 1학년)까지 6년간 지속적으로 각 관련 내용을 학습한다. 구체적으로 살펴보면 우리나라에서 초등학교 3학년, 4학년에 각과 직각의 뜻, 예각과 둔각, 각의 측정을 모두 배우는 것과 다르게 영국에서는 초등학교 2학년에서 회전하는 경험을 통해 각을 정의하기 전에 관련된 활동을 한 뒤, 3학년에서 각과 직각의 개념을 다루고 있다. 4학년에서는 예각과 둔각을 확인하며 각의 크기를 비교하는 활동을 한 뒤 이를 심화시켜 5학년에서 도 단위를 이용하여 각을 측정하고 4학년에서 배운 예각과 둔각 등을 측정하도록 하고 있다. 우리나라는 초등학교 4학년 이후 각 관련 내용에 대한 학습이 없다가 중학교 1학년에서 각과 각도의 정의, 각의 성질 등을 다루는데 영국은 초등학교 6학년에서 각의 성질을 다룬 뒤 7학년에 이를 심화시켜 평행선에서의 각의 성질을 다루고 있다. 즉, 우리나라에 비해 각 관련 내용을 기본적인 내용에서부터 심화된 수준까지 매 학년 점진적이고 내용을 세분화하여 다룰 수 있도록 교육과정이 구성되어있음을 알 수 있다.

2. 각에 대한 관점

교육과정 상에서 정적인 관점과 동적인 관점은 다음과 같이 나타난다. 싱가포르는 3학년에서 각을 회전량으로 설명한다고 서술되어 있으므로 각을 동적인 관점에서 정의한다고 할 수 있다. 각의 크기 또한 도(degree)로 측정되는 각과 회전량을 연관 짓는다는 서술을 통해 동적인 관점을 찾을 수 있다. 영국은 초등학교 2학년부터 동적인 관점에 따른 각 경험이 교육과정에 나타났다. 2학년에서 1/4, 1/2, 3/4 회전과 직각을 연결하여 회전(rotation)을 적용하여 선회(turn)를 설명하는 각의 개념을 사용하도록 하고 있다. 3학년에서는 정적인 관점과 동적인 관점이 모두 서술되어 있는데, 각을 모양의 속성 또는 회전의 설명으로 이해하도록 한다. 5학년에서 각의

크기를 학습할 때도 정적인 관점과 동적인 관점이 모두 나타났는데 도(°)로 측정하는 과정에서 직선의 한 점에서의 각과 1/2 회전을 학습하도록 했다. 직선의 한 점에서의 각은 직선 위의 한 점을 각의 꼭짓점, 그 점을 기준으로 양 끝으로 뻗어나가는 두 반직선을 각의 변으로 보는 정적인 관점이며 1/2 회전은 동적인 관점이다. 호주는 3학년에서 동적인 관점을 통해 각의 정의와 각의 크기를 도입한다. 회전한 양으로 각을 인지(identify)하고 구체화에서는 이와 관련하여 문을 부분적으로 그리고 완전히 열면서 생기는 각의 크기를 비교하는 활동을 서술하여 각과 각도 정의를 본격적으로 다루기 전에 동적인 관점에서 학습 경험을 제공한다. 5학년에서는 각에는 변과 꼭짓점이 있다는 데에서 정적인 관점으로 각을 정의하며 각의 한 변이 다른 변과 일치하는데 필요한 회전량을 각의 크기로 정의하여 동적인 관점을 드러냈다. 미국의 경우 4학년에서 ‘두 반직선이 공통 끝점을 공유할 때 형성되는 기하학적 모양으로 각을 인식한다.’는 규준이 서술되어 있다. 각을 기하학적 모양으로 인식하는 것은 두 반직선에 의해 만들어진 점의 집합이라는 정의에 부합하므로 미국은 각의 정의를 도입할 때 정적인 관점에서 서술한다고 할 수 있다. 또한 두 반직선의 교점을 중심으로 하는 원에 대해 원과 두 반직선이 교차하는 점 사이의 원호의 비율을 고려하여 각의 크기를 학습하는 것으로부터 알 수 있듯이 정적인 관점에서 각의 크기를 설명하지만 n° 의 각을 설명할 때는 n 개의 1° 각을 회전한다고 설명하여 동적인 관점이 포함되어 있으므로, 각의 크기는 정적인 관점과 동적인 관점이 동시에 나타난다고 할 수 있다. 우리나라는 초등학교와 중학교 모두 각을 한 점에서 그은 두 반직선으로 이루어진 도형으로 정의하여 각의 정의에서는 정적인 관점을 드러냈다. 각의 크기와 관련해서는 초등학교에서는 벌어진 정도로 설명하여 정적인 관점, 중학교에서는 회전량으로 정의하여 동적인 관점으로 바뀌었다.

교육과정에 서술된 교구를 통해 각에 대한 관점을 드러낸 국가도 있었다. 싱가포르는 지오스트립(geostrip)³⁾과 구부러진 빨대(riveted straw)를 사용하는데 지오스트립의 경우 각의 꼭짓점을 고정된 채 각의 두 변을 움직일 수 있는 교구이므로 동적인 관점에서의 각을 학습할 수 있는 교구이다. 직각을 학습할 때는 종이 직각(paper right angle)을 이용하도록 하는데 이 교구는 종이를 접었을 때 생기는 선을 점의 집합으로 인식하므로 정적이 관점의 교구도 사용했다. 호주의 경우 문을 열거나 시계 침을 돌리는 활동을 통해 주변의 상황을 교구로 사용하였는데 동적인 관점에서의 각을 학습하는 데 도움을 줄 수 있는 교구이다. 이를 정리해보면 다음과 같다. 각에 대한 관점에서 동적인 관점은 D(Dynamic), 정적인 관점은 S(Static)로 표시했으며, 각 관련 내용에 대해서 각의 정의는 d(definition), 각의 크기는 m(measure)로 표시하였다. 자세한 코드 내용은 <표 IV-3>와 같으며 <표 IV-4>에서 국가 및 학년 별로 코드를 표시하여 분석했다.

<표 IV-3> 성취기준에 따른 각에 대한 관점 코드

코드	의미	예시
Sd	정적인 관점에서 각의 정의 내용을 다룸	한 점에서 그은 두 반직선으로 이루어진 도형을 각이라고 정의 (한국, 3학년)
Dd	동적인 관점에서 각의 정의 내용을 다룸	각을 회전의 설명으로 이해하도록 함 (영국, 3학년)
Sm	정적인 관점에서 각의 크기 내용을 다룸	원과 두 반직선이 교차하는 점 사이의 원호의 비율을 각의 크기로 고려 (미국, 4학년)
Dm	동적인 관점에서 각의 크기 내용을 다룸	각의 한 변이 다른 변과 일치하는데 필요한 회전량을 각의 크기로 정의 (호주, 5학년)

³⁾ 지오스트립이란 여러 개의 균등한 간격의 구멍을 가진 플라스틱 스트립이며 구멍에 고정하는 물건을 통해 스트립끼리 연결할 수 있다(Kleinhaus, 1976).

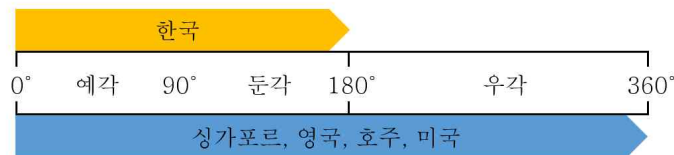
<표 IV-4> 각에 대한 관점

학년 국가	2	3	4	5	6	7
한국		Sd	Sm			Sd, Dm
싱가포르		Dd, Dm	Dm			
영국	Dd, Dm	Sd, Dd		Sm, Dm		
호주		Dm		Sd, Dm		
미국			Sd, Sm, Dm			

먼저 국가별로 살펴보면 초등학교 교육과정에서 각에 대한 관점 중 한 가지만 나타난 국가는 한국과 싱가포르다. 한국과 싱가포르는 각각 정적인 관점과 동적인 관점에서 각의 정의와 각의 크기를 다룬다. 다만 한국의 경우 7학년에서 동적인 관점으로 각의 크기를 다시 학습한다. 우리나라 교육과정에서 정적인 관점이 동적인 관점보다 먼저 서술된 점과 두 학교급에 걸쳐 서로 다른 관점이 제시된 점은, 초등학교에서 정적인 관점보다 동적인 관점이 먼저 등장하거나 두 관점이 같은 시기에 모두 등장한다는 점에서 다른 4개국과 구별되는 점이다. 이러한 분석은 한국에서 교수요목기부터 2015 개정 교육과정까지의 초등학교 교과서에서 각 개념을 도입하는 차시에서 과제와 활동을 분석한 결과 정적인 관점에 해당하는 질적 측면과 관계적 측면을 주로 다루고 있었다(김상미, 2018) 연구와도 일치한다. 다음으로 각의 정의와 각의 크기에 대해 살펴보면, 각을 정의하는 내용에서는 싱가포르를 제외한 4개국은 정적인 관점의 각의 정의를 서술하고 있어 대부분의 국가가 정적인 관점을 포함했다. 각의 크기를 학습할 때에는 이와 달리 대부분 동적인 관점으로 서술하거나 두 관점 모두 서술되어 있다. 싱가포르와 호주는 각의 크기를 동적인 관점에서 서술하며 영국, 미국은 정적인 관점과 동적인 관점을 한 학년에서 모두 학습하고 있다. 우리나라의 경우 처음에는 정적인 관점에서 각의 크기를 학습하다가 이후 동적인 관점에서 다시 학습하고 있다. 싱가포르와 영국의 경우 동적인 관점에서 각을 지도할 때 각의 방향성도 다루고 있다. 싱가포르는 4학년에서 시계 방향 또는 반시계 방향으로의 회전 각도를 측정한다는 성취 기준을 서술하고 영국은 2학년에서 회전에 대해 시계 방향과 반시계 방향이라는 추가 설명을 통해 방향이 있는 회전을 다룬다.

3. 각의 크기

각의 크기 내용에서는 교육과정에서 다루는 각의 크기와 180°, 360° 크기를 갖는 각이 교육과정에서 어떻게 서술되는지 두 가지를 분석하였다. 각 국에서 다루는 각의 크기의 범위는 [그림 IV-2]와 같다.



[그림 IV-2] 교육과정에 명시된 각 크기 범위

싱가포르는 3학년에서 각을 설명하기 위해 ‘예각’과 ‘둔각’의 용어를 도입하며, 직각, 직각보다 작은 각, 직각보다 큰 각을 구분하는 활동을 한다. 4학년에서 시계 방향 또는 반시계 방향으로의 회전 각도를 도 단위로 측정하고 회전의 양과 연관 짓는 활동을 하면서, 1/4회전은 90°, 1/2회전은 180°, 3/4회전은 270°, 한 바퀴 회전은 360°임을 학습한다. 5학년에서는 직선 위의 각, 한 점에서의 각을 다루어 초등학교 과정에서 0°보다 크고 360°보다 작거나 같은 각을 모두 다루며, 7학년에서는 직각, 예각, 둔각, 우각의 개념을 통해 직선 위의 각과 한 점에서의 각을 심화하여 학습한다. 영국은 3학년에서 두 개의 직각은 반 회전(rotation), 세 개의 직각은 3/4 회전, 4개는 한 바퀴의 회전을 만든다는 것을 인식하도록 하여 180°, 270°, 360°의 각을 각의 측정을 배우기 전에 경험한다. 실제로 도 단위로 각을 측정하는 것을 학습하는 5학년에서는 예각, 둔각, 우각을 다루도록 하여 0°보다 크고 360°보다 작거나 같은 각을 다룬다. 이 때 360° 각의 경우 한 점을 한 바퀴 회전한 각, 180° 각은 직선의 한 점에서의 각과 1/2 회전(turn)을 이용하여 서술되고 있다. 6학년에서는 한 점에서의 각, 직선 위의 각을 다루며 7학년에서는 이러한 각의 성질을 이용하여 보각과 여각을 구하는 경험을 하도록 한다. 호주는 3학년과 4학년에서 각의 크기를 비교하는 활동을 경험하며, 4학년에서 직각과 같거나 더 크거나, 더 작은 각을 분류하는 활동을 한다. 5학년에서는 도 단위를 이용하여 각을 어렵해보고 각도기를 이용하여 직접 측정하는 활동을 하며, 이때 180° 각도기뿐만 아니라 360°각도기도 사용하여 각을 측정하고 구성하는 경험을 한다. 6학년에서 직각의 크기가 90°임을 학습한 뒤 이전 학년에서 직관적으로 구성했던 직각, 예각, 둔각, 평각, 우각의 개념을 정의한다. 0°보다 크고 360°보다 작거나 같은 각을 측정하고, 어렵하고, 비교하며 크기에 따라 각을 비교하는 활동을 경험한다. 미국은 4학년에서 두 반직선의 교점을 중심으로 하는 원에 대해 원과 두 반직선이 교차하는 지 사이의 원호의 비율을 고려하여 각의 크기를 도입하는데 이때 원의 1/360을 통과하는 각도를 ‘1도 각’이라고 하며 이 크기를 이용하여 각을 측정한다. n개의 1도 각을 n도 각으로 다룸으로서 0°보다 크고 360°보다 작거나 같은 각 중 각의 크기가 $360^\circ \times \frac{n}{360}$ (n은 자연수)인 각의 크기를 표현하는 활동을 하며, 이후 각도기를 사용하여 각 측정하기, 직각, 예각, 둔각 그리기를 경험한다. 우리나라는 초등학교 3학년에서 직각을, 4학년에서 직각, 예각, 둔각을 비교해 보는 활동을 통해 0°보다 크고 180°보다 작은 각을 학습한다. 이후 중학교 교육과정에서는 평각이 학습요소에 포함되어 180°인 각을 다룬다. 다만 초등학교 4학년에서 삼각형과 사각형의 내각의 합을 다루는 것으로 미루어 교과서에서 다른 각에 대한 학습 내용이 있을 것이라고 판단하여 교과서의 내용을 참고한 결과 크기가 180°인 각과 360°인 각 그림이 주어졌을 때, 각도를 재는 문제가 각각 한 문제씩 제시되어 있음을 확인하였다. 다만 여기서 제시된 문제는 크기가 360°인 각을 각도기를 통해 재야하지만 학생들은 180° 각도기만 이용할 수 있으므로 크기가 360°인 각을 재려면 각도의 합을 이용해서 해결할 수밖에 없다. 그러나 두 문제 모두 4학년에서 각도기를 이용해 각의 크기를 재어보는 차시에서 학습하며 아직 각 그리기와 예각, 둔각, 각도의 합과 차를 배우기 전이다. 즉 360° 크기의 각에 대한 설명이 부족한 채 각도를 재는 활동이 나타났다. 또한 교과서에는 삼각형과 사각형의 내각의 합이 180°, 360°라는 설명이 나오기 전에 두 문제 외에는 크기가 180°, 360°인 각에 대한 설명 및 그림을 찾을 수 없어 이전 교육과정에서 지적했던 각도 학습의 비판점이 여전히 존재했다(박교식, 2010).

각국에서 학습하는 각의 크기와 180°, 360° 크기의 각과 관련된 내용을 종합하면, 모든 비교 대상 국가에서 각의 크기를 다룰 때 직각을 기준으로 예각과 둔각을 다루었다. 이후, 영국과 호주는 직각의 n배로 180°, 270°, 360°를 도입하며, 싱가포르는 1회전의 n/4배로, 90°, 180°, 270°, 360°를 학습한다. 또한 미국은 n개의 1°로 자연수 크기의 각을 모두 다룬다. 호주는 유일하게 각을 측정할 때, 360도 각도기의 사용을 서술하고 있다.

V. 결론 및 논의

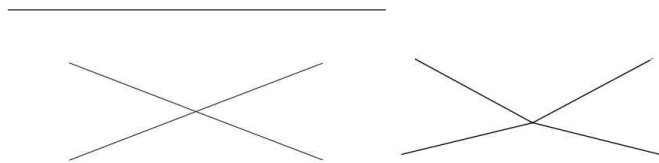
본 연구는 서론에서 제기했던 연구 질문을 해결하고자 한국, 싱가포르, 영국, 호주, 미국의 초등학교에서 중학

교까지의 각 관련 내용의 지도 내용을 비교·분석하였다. 교육과정 분석에 앞서 문헌분석을 통해 각 관련 내용을 선정하였으며 각에 대한 관점을 정적 관점과 동적 관점으로 명확히 하였다. 이후 연구 질문 1을 해결하기 위해 각 관련 내용을 내용 요소와 학습시기를 중심으로 거시적인 관점에서 학습 내용에서 나타나는 특징을 분석하였으며 국가별로 보이는 학습 시기상의 특징을 서술하였다. 연구 질문 2와 관련하여 국가별로 각에 대한 관점을 비교했을 뿐만 아니라 각의 도입과 각의 크기를 바라보는 관점에 대해 분석했다. 마지막으로 연구 질문 3을 해결하기 위해 국가별로 다루는 각 크기의 범위를 제시하고 관련 내용이 교육과정에서 어떻게 서술되어 있는지에 대해 분석했다. 여기서는 국가별로 각 관련 내용 서술의 특징과 공통점 및 차이점이 나타나는 이유에 대한 우리의 논의와 함의점을 밝히고 각 관련 내용과 각의 다양한 관점을 배치하고 전개하는 방법 및 다루는 각 크기의 범위에 대해 시사하고자 한다.

첫째, 각 관련 내용과 학습 시기에서 나타난 특징과 그에 대한 논의는 다음과 같다. 싱가포르, 영국, 호주는 맞꼭지각과 한 점에서의 각을 각의 성질로 함께 학습하고 있었다. 맞꼭지각을 학습할 때 다루는 상황은 한 점에서의 각을 학습할 때 다루는 상황에 포함된다는 관계는 학생들이 헷갈려하는 내용이기도 하다. 즉, 맞꼭지각을 다루는 상황은 한 점에서의 각을 다루는 상황이 될 수 있지만 한 점에서의 각을 다루는 상황 중에는 맞꼭지각이 아닌 상황이 있다.⁴⁾ 그러나 학생들은 두 각이 한 꼭짓점에서 만날 때 두 각의 크기가 같으면 맞꼭지각이라고 생각하는데 이는 맞꼭지각이 교각이라는 전제를 생각하지 못하고 크기가 같다는 성질만 떠올려 형성될 수 있는 오개념이다(최승현, 남금천, 류현아, 2013). 한 점에서의 각을 다루는 상황이지만 맞꼭지각이 아닌 상황은 학생들이 가진 오개념에 대한 반례에 해당한다. 오개념 교정을 위해서는 학생들이 인지적 갈등을 유발할 수 있는 문제와 사례를 제시하는 것을 통해 학습을 돕는다는 점에서(최지선, 2003) 싱가포르, 영국, 호주의 교육과정에서 맞꼭지각과 한 점에서의 각 내용을 함께 다루는 것은 학생들의 각의 성질에 대한 이해를 도울 수 있다.

또한 한국을 제외한 4개국의 교육과정에는 각도 구하기와 관련된 내용이 서술되어 있다. 한국 교육과정에서 각도 구하기와 관련된 내용은 없었지만 다루지 않는 것은 아니다. 초등학교 4학년 교과서에는 사각형에서 다른 세 각의 크기를 제시하고 각의 크기를 제시하지 않은 나머지 한 각의 크기를 묻는 문제를 다루며 중학교 1학년 도 맞꼭지각이나 평행선에서 동위각과 엇각의 성질을 이용하여 모르는 각의 크기를 찾는 문제가 등장한다. 다른 4개국과의 차이점이라면 이러한 내용을 우리나라에서는 직접 성취기준에 서술하지 않다는 것이다. 다만 교과서의 내용과 우리나라의 교육과정의 진술을 참고했을 때 ‘측정 영역의 문제 상황에 적합한 문제 해결 전략을 지도하고, 문제 해결과정을 설명하게 하여 문제 해결 능력을 기르게 한다.’, ‘평행선에서 동위각과 엇각의 성질을 이해한다.’와 같은 교육과정 내용이 각도 구하기 내용을 포함하고 있다고 할 수 있다. 즉, ‘각도 구하기’ 활동을 개념을 이용해 해결하는 문제 상황이나 성질을 이해하는 것에 포함되는 것으로 여기고 있다. 성취기준이란 국가 교육과정 상의 수학과의 목표와 내용이 뜻하는 바를 구체적으로 정해 현장에서 어느 정도로 다뤄야 하는 지에 대한 기준이 된다는 점에서(최승현, 황혜정, 신항균, 2002) 우리나라 교육과정에서는 내용을 응용하여 해결하는 ‘각도 구하기’보다는 개념이나 성질을 이해하는 것을 뚜렷한 목표로 삼고 있다고 할 수 있다.

둘째, 각에 대한 관점에 대한 논의는 다음과 같다. 교육과정에서 각 관련 내용에 대해 정적인 관점과 동적인



4) 맞꼭지각, 한 점에서의 각 학습에서 사용할 수 있는 예시 한 점에서의 각을 학습할 때만 사용할 수 있는 예시

관점으로 분석한 결과 대부분 각의 정의는 정적으로 서술하고 있다. 학교수학에서 제시되는 정의는 여러 정리 중 특정한 것을 선택한 것이므로 그것을 통하여 달성하고자 하는 목적이 있을 수 있다(우정호, 조영미, 2001). 표준 각 개념(standard angle concept)은 한 점에서 만나는 두 기울어진 선으로 정의된다는 점에서 각의 정적인 관점에 해당한다. 표준 각 개념은 각의 다면성 통합을 도와줄 수 있는 개념이므로(Mitchelmore, White, 1998, 2000) 대부분의 국가에서 정적인 관점에서 각을 정의한 것은 일상생활이나 다른 학문에서 제시되는 다양한 각 상황과 각 문맥에 적용할 수 있는 개념을 정의로 정했다고 할 수 있다. 각의 크기는 동적인 관점으로 서술한 경우가 많았다. 싱가포르, 영국, 호주, 미국은 초등학교에서 동적인 관점으로 각의 크기를 다루며 우리나라는 중학교에서 동적인 관점으로 각의 크기를 다루고 있다. 바빌로니아와 그리스의 천문학자들은 천체의 운동을 분석하는 수단으로 각도 개념을 이용하였으며(Jones, 1998) 원 안에 들어있는 중심에서의 각의 크기를 측정하는 맥락은 회전한 양이라는 동적인 관점과 연결된다. Carpus가 각을 양의 범주로 분류하며 회전하는 상황을 언급한 것도 각의 크기와 동적인 관점 사이의 관계를 드러낸다. 따라서 각의 크기를 다룰 때 동적인 관점을 도입하는 것은 역사발생적으로 자연스러운 접근이다. 또한 동적인 관점에서 각을 다루는 것은 각의 방향성을 포함하는데(Clements, Burns, 2000) 실제로 싱가포르와 영국의 경우 초등학교 동적인 관점에서 각의 정의나 각의 크기를 학습한 뒤 각의 방향성을 교육과정에서 서술한다는 것은 이를 뒷받침해준다.

각을 학습한 뒤 경험하는 평면도형이나 입체도형에서 찾을 수 있는 각은 정적인 관점인 경우가 대부분이다. 도형의 구성요소로서의 각은 두 반직선에 의해 만들어진 점의 집합의 합집합 또는 두 반평면의 교집합으로 정의한 것으로 기능하는 경우가 대부분이기 때문이다. 그러므로 한국의 경우 중학교에서 각의 크기를 동적인 관점에서 학습하기 전까지 초등학교 전반에 걸쳐 정적인 관점에서의 각 서술이 강조되고 있다고 할 수 있다. 그러나 정적인 관점에 의해 학습한 각 개념으로는 회전으로서의 각에 대한 경험이 어렵고 각 개념에 대해 제한적인 생각을 가질 수밖에 없다. 실제로 학생들은 주변 사물에서 회전과 관련된 경험을 하므로 이를 이용하여 각 개념을 설명하는 것은 학생들에게 부담스러운 과제가 아니다. 시계나 다른 도구에서 익숙한 회전 감각으로 각 개념을 도입해야하며 오히려 회전각(turn around angle)을 다루지 않는 것이 부자연스럽다(Freudenthal, 1973). 역사적으로도 각을 동적인 관점에 아닌 다른 관점으로 정의한 교과서는 대부분 각과 회전의 관계를 설명하는 내용을 덧붙여 놓았는데, 이는 각의 본질이 회전과 밀접한 관련이 있기 때문이다(이무현 역, 2018). 한국의 경우 삼각함수를 학습할 때 다루는 각 개념은 동적인 관점에서 서술되므로 정적인 관점에 편중된 경험은 학생들이 일반각과 호도법을 배우는 어려움에 대한 원인이 될 수 있다.

셋째, 각의 크기를 다루는 범위가 한국이 다른 국가보다 좁은 것에 대한 논의는 다음과 같다. 한국은 초등학교 교육과정에서 각의 크기와 관련하여 예각, 직각, 둔각만 서술하고 있으며 중학교 교육과정에서 평각이 학습요소로 등장한다. 비록 각도기를 이용하여 각의 크기를 측정하는 활동에 관한 예제 중 두 문제에서 180° 와 360° 의 각이 등장하지만, 각의 크기를 어렵하여 측정한 값과 비교하는 활동, 주어진 각도와 크기가 같은 각을 그리는 활동 등 각과 관련된 다른 활동에서는 180° 보다 작은 각만 다루었다. 따라서 초등학생들의 각에 대한 시각 이미지는 크기가 180° 보다 작은 각에 머물게 되지만(박교식, 2010) 삼각형과 사각형의 내각의 크기의 합을 구하는 과정에서는 180° 와 360° 의 각이 활용된다. 이는 2006년 초등학교 교육과정부터 제기된 비판점이므로 이러한 비약을 해결하기 위한 방법을 검토해볼 필요가 있다(박교식, 2010). 한국에서 180° 가 넘는 각을 거의 다루지 않는 이유는 각의 동적인 관점, 즉 회전이라는 측면이 드물게 등장하는 것과 관련이 있다. 학생들은 180° , 360° 크기를 갖는 각을 각이라고 인식하기 어려워한다. Keiser(2004)는 6학년 학생들을 대상으로 한 연구에서 180° 각에 대해 두 반직선을 구분하기 어려운 점, 두 반직선이 어디서 시작되는지 찾을 수 없으며 각의 두 반직선의 방향이 다른 방향을 향하고 있는지 알 수 없으므로 각으로 인식하기 어렵다는 점을 알아냈으며 360° 각의 경우도 비슷하게 점이나 두 선을 갖고 있어야하지만 보이지 않으며 다른 반직선이 처음 반직선의 위에 있는 것을 상상하기 어려웠다고 밝혔다. 이러한 어려움은 공통적으로 각에서 두 변과 꼭짓점을 찾기 어려워한다는 데에서 기인한

다. 즉, 정적인 관점에서 각을 인식할 때, 학생들은 직선각의 경우 두 변이 아니라 한 개의 변으로 인식하거나 어디를 각의 꼭짓점으로 봐야하는 것인지에 대해 의문을 가질 수 있다. 따라서 180° , 360° 크기의 각을 이해할 때 회전량으로 설명하는 것이 더 적절할 수 있다. 학생들이 회전과 관련된 각 경험을 통해 개념이미지에 동적인 관점이 포함된다면 180° , 360° 각을 이해하는 것을 도울 수 있다(Keiser, 2004). 예를 들어, 영국이나 호주는 한 바퀴 회전을 360° 로 이해하고 반 바퀴, $3/4$ 바퀴의 회전을 통해 180° 각과 우각을 학습하도록 하였다, 또한 미국은 n° 의 각을 설명할 때, n 개의 1° 를 회전하는 것으로 설명하여 0° 와 360° 사이에서 자연수 크기의 각을 갖는 임의의 각을 회전을 이용하여 자연스럽게 도입하고 있다. 한국의 경우 중학교에서 동적인 관점에서 각의 크기를 학습하므로 우각에 대해 회전을 이용해 설명할 수 있지만 실제로 각의 크기를 정의할 때를 제외하고는 동적인 관점에서의 서술이나 문제가 거의 서술되지 않는다. 이는 여전히 중학교 학생들이 갖고 있는 각에 대한 시각 이미지가 180° 보다 작다는 사실로 드러난다(최승현 외, 2013).

마지막으로 우리나라의 교육과정이 다른 네 국가와 다른 점을 보이는 배경에 대한 논의는 다음과 같다. 학습 시기 및 학습 내용과 관련하여 싱가포르, 영국, 호주 국가별 교육과정은 각 관련 내용이 초등학교 2학년 또는 3학년에서부터 중학교 1학년까지 매 학년에서 심화 및 반복되어 제시되는데 이는 해당 국가들이 나선형 교육과정의 특징을 보이고 있기 때문이다. 이에 반해 우리나라는 다른 나라에 비해 각 관련 내용이 특정한 학년에서 집중적으로 다루어지고 있다. 이는 우리나라의 교육과정이 학습 내용 감축 등의 요구에 의해 제 7차 교육과정에서부터 나선형에서 선형 방식으로 전환(정영욱 외, 2016)되어 온 영향으로 보인다. 실제로 2009 개정 교육과정에 따른 초등학교 3학년 교과서에서는 '직각만큼 돌리기' 등의 활동을 통해 동적인 관점이 반영되었지만(박교식, 2015) 2015개정 교육과정에 따른 3학년 교과서에는 동적인 관점을 반영한 내용이 없었다. 또한 이전 교육과정에 따른 3학년 교과서에서는 직각의 2배만큼 돌리기, 직각의 3배만큼 돌리기 등의 과제를 통해 180° , 270° 에 대한 각 경험을 제공하고 있지만 2015 개정 교육과정에 따른 교과서에서는 180° , 360° 각의 크기를 측정하는 문제 2개 미만만 나타났다. 따라서 한국의 경우 최근 교육과정의 개정이 학습량 경감을 목표로 하였기 때문에 서술되던 내용이 생략되거나 간소화되면서 차이를 보이게 되었을 것이다. 한편 호주는 각 관련 연구가 활발히 수행되어 온 국가다. 호주의 경우 각 개념 이해와 관련하여 여러 연구가 수행되었으며(Mitchelmore, White, 1998, 2000; White, Mitchelmore, 1999, 2001; Mitchelmore, Prescott, White, 2002) White, Mitchelmore, Thomas(2002)의 연구에서는 각의 꼭짓점과 두 변이 열리는(opening) 동적인 관점의 영향을 인식하고 매칭시킬 수 있어야 함을 설명하면서 이 연구를 바탕으로 각(angle) 단원이 2002년에 개정될 것이라고 밝히고 있다. 실제로 호주 교육과정에서는 각의 정의는 정적으로, 각의 크기는 동적으로 접근하는 등 다양한 관점에서 각을 다루고 있다. 이를 미루어 볼 때 호주에서 수행된 각 관련 연구가 호주의 교육과정에서 각 내용에 영향을 끼쳤다고 짐작해볼 수 있다.

이 연구의 결과에 근거하여, 앞으로 교육과정에서의 각 관련 내용에 다음 내용을 제안하고자 한다.

첫째, 각 관련 내용과 학습 시기에 대한 고려이다. 한 점에서 각은 맞꼭지각과 비교하여 학생들의 인지적 갈등을 줄여주는 내용 요소이며 직선 위의 각이나 보각, 여각은 각의 성질에 대한 이해를 돕고, 향후 중등과정에서 삼각비나 삼각함수 등의 학습을 돕는 내용 요소이다. 따라서 각의 성질을 다룰 때 관련된 내용 요소를 어떻게 배치하고 전개해 나갈 것인가에 대해 논의할 필요가 있다. 예를 들어 한 점에서의 각과 직선 위의 각은 180° , 360° 크기의 각과 관련이 있으므로 삼각형이나 사각형의 내각을 다루기 전에 배치하는 것에 대해 검토할 수 있다. 초등학교에서 한 점에서의 각과 직선 위의 각을 학습할 경우 중학교에서 맞꼭지각을 학습할 때 비교하여 다룰 수 있다.

둘째, 각에 대한 관점을 다양하게 다루는 것에 대한 고려이다. 정적인 관점과 동적인 관점 모두를 활용하여 각을 다루면 각각의 관점이 적용되는 상황이 다르므로 여러 상황에서 각 개념을 이용하는데 도움이 될 수 있다. 한 가지 관점에서의 각의 학습은 각 개념에 대해 제한적으로 생각하게 한다(이중희, 2001). 또한 각의 다양한 측면을 고려했을 때, 학생들에게 특정한 관점만을 제공할 경우 각의 여러 개념을 제시하여 학생들이 그 것들 간에

구분하는 법을 배울 수 없다(Freudenthal, 1973). 이에 초등학교에서 처음 각을 학습할 때 각 도입 이전에 회전을 경험하게 하고, 이후 각 도입 시 동적인 관점과 정적인 관점을 모두 반영하여 교육과정과 교과서에 서술하는 것을 고려해볼 수 있다. 또한 초등학교에서 각의 크기를 도입할 때도 정적인 관점과 동적인 관점을 모두 반영하여 각과 각의 크기의 학습할 때 처음부터 다양한 관점을 모두 접할 수 있도록 하는 교육과정과 교과서 구성이 필요하다.

셋째, 초등학교 교육과정에서 회전량으로서 각의 크기를 도입하는 것에 대한 고려이다. 회전량으로 각의 크기를 설명하면 우각 및 360° 크기의 각을 학습하는 자연스럽게 평면 도형의 내각과 외각 구하기에서 각의 합을 360° 까지 확장시키기에 도 용의하다. 이는 박교식(2010)이 지적한 각의 크기 학습과 다각형의 내각의 합 학습 사이의 비약을 해결할 수 있는 방안이 될 수 있다. 따라서 동적인 관점의 각의 크기를 학습하면서 평각과 우각, 360° 의 각에 대한 학습이 이뤄질 수 있는 방안에 대해 적극적인 검토가 필요하다. 이 때 앞서 살펴본 다른 국가의 교육과정 내용을 참고할 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

- 교육부 (2018a). 수학 3-1. 서울: (주)천재교육.
 Ministry of Education (2018a). Mathematics 3-1. Seoul:Chunjae.
- 교육부 (2018b). 수학 4-1. 서울: (주)천재교육.
 Ministry of Education (2018b). Mathematics 4-1. Seoul:Chunjae.
- 교육부 (2015). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제2015-74호 [별책 8]
 Ministry of Education (2015). *Mathematics Curriculum*, Ministry of education notice 2015-74[supplement 8].
- 권석일 (2016). 초등학교 수학과 교육과정 기하 영역 국제 비교. 학습자중심교과교육연구, **16**, 693-712.
- Kwon, S. I. (2016). International comparison of elementary school geometry curriculum: focusing on Korea, Singapore, and Hong Kong. *Journal of Learner-Centered Curriculum and Instruction*, **16**, 693-712.
- 권오남 · 이경원 · 이아란 · 한채린 (2019). 한·일 수학과 교육과정의 외·내적 체제 비교 분석 : 직전 교육과정과의 변화를 중심으로. 수학교육, **58(2)**, 187-223.
- Kwon, O. N., Lee, K. W., Lee, A. R. & Han, C. R. (2019). A comparative study on the external & internal structure of mathematics curriculum between Korea and Japan : Focusing on the aspects of recent revisions. *The Mathematical Education*, **58(2)**, 187-223.
- 김부미 · 김윤민 (2019). 한국과 일본의 수학과 교육과정 비교-통계영역을 중심으로. 학습자중심교과교육연구, **19**, 495-523.
- Kim, B. M. & Kim, Y. M. (2019). Comparisons of the Revised Mathematics Curriculum between Korea and Japan: focusing on statistics. *Journal of Learner-Centered Curriculum and Instruction*, **19**, 495-523.
- 김상미 (2018). 초등학교 수학 교과서에 제시된 각의 개념과 도입 방법 분석. 초등수학교육, **21(2)**, 209-221.
- Kim, S. M. (2018). Angle concepts and introduction methods of angles in elementary mathematics textbooks. *Education of Primary School Mathematics*, **21(2)**, 209-221.
- 김수미 (2018). 한국 초등학교 수학교과서에 제시된 각(角)의 정의에 대한 고찰. 수학교육학연구, **28(3)**, 265-282.
- Kim, S. M. (2018). Research of the Definitions of Angles in the Past Korean Elementary Mathematics Textbooks. *Journal of Educational Research in Mathematics*, **28(3)**, 265-282.
- 나귀수 (2019). 남한의 2015 수학과 교육과정과 북한의 2013 수학과 교수요강의 비교. 수학교육학연구, **29(1)**, 17-43.

- Na, G. S. (2019). A comparison study on 2015 mathematics curriculum of South Korea and 2013 mathematics gysusyoyang of North Korea. *Journal of Educational Research in Mathematics*, **29(1)**, 17-43.
- 박교식 (2010). 우리나라 초등학교 수학과에서의 각도 관련 내용의 분석과 비판. *학교수학*, **12(1)**, 45-60.
- Park, K. S. (2010). An analysis and criticism on contents related on angular measure in Korean elementary mathematics subject. *School Mathematics*, **12(1)**, 45-60.
- 박교식 (2015). 우리나라와 일본의 초등학교 수학 교과서에서의 각 및 각도 지도 내용 비교 연구. *학교수학*, **17(1)**, 35-46.
- Park, K. S. (2015). A comparative study on teaching contents for angle and measure of an angle in elementary mathematics textbook between Korea and Japan. *School Mathematics*, **17(1)**, 35-46.
- 방정숙 · 이지영 · 이상미 · 박영은 · 김수경 · 최인영 · 선우진 (2015). 한국 · 중국 · 일본 · 미국의 초등학교 수학과 교육과정 비교 · 분석 - 도형 영역을 중심으로. *한국학교수학회논문집*, **18(3)**, 311-334.
- Pang, J. S., Lee, J. Y., Lee, S. M., Park, Y. E., Kim, S. K., Choi, I. Y. & Sunwoo, J. (2015). Comparative analysis school mathematics curricula in Korea, China, Japan, and USA. *Journal of the Korean School Mathematics Society*, **18(3)**, 311-334.
- 우정호 · 조영미 (2001). 학교수학 교과서에서 사용하는 정의에 관한 연구. *수학교육학연구*, **11(2)**, 363-384.
- Woo, J. H. & Cho, Y. M. (2001). A study on the definitions presented in school mathematics. *Journal of Educational Research in Mathematics*, **11(2)**, 363-384.
- 우정호 외 16인 (2013). *중학교 수학 1 교사용 지도서*. 서울: 두산동아
- Woo, J. H. et al. (2013). *Middle School Mathematics 1 Teacher's Guide Book*. Seoul: Doosandong
- 유재혁 · 이대현 (2013). 우리나라와 중국의 초등수학 교과서의 도형영역 비교, 분석. *초등수학교육*, **16(1)**, 57-70.
- Yu J. H. & Lee, D. H. (2013). Comparative analysis of elementary mathematics textbooks in Korea and China: Focused on the area of geometry. *Education of Primary School Mathematics* **16(1)**, 57-70.
- 이광우 외 (2014). *교과 교육과정 개발 방향 설정 연구*. 한국교육과정평가원 연구보고 CRC, 7(2014), 12.
- Lee, K. W., et al. (2014). *A Study on the Guidelines for Subject Curriculum Development*. Report of Korea Institute for Curriculum and Education CRC, 7(2014), 12.
- 이무현 (2018). 기하학 원론 - 평면기하 (Euclid 지음, 이무현 역). 서울: 교우사.
- Lee, M. H. (2018). *The elements of geometry - plane geometry*. (Written by Euclid, translated by Lee, M.H.) Seoul: Kyowoo.
- 이종희 (2001). 각 개념에 대한 수학교육적 분석. *학교수학*, **3(1)**, 25-44.
- Lee, C. H. (2001). An analysis on angle concepts on mathematics education. *School Mathematics* **3(1)**, 25-44.
- 최승현 · 황혜정 · 신향균 (2002). 수학과 성취기준과 평가기준 및 예시 평가도구 개발 연구: 국민공통교육기간을 중심으로. *수학교육학연구*, **12(1)**, 145-162.
- Choi, S. H., Hwang, H. J. & Shin, H. K. (2002). Research and Development of Achievement and Assessment Standards for School Mathematics Based on the 7th National Curriculum. *Journal of Educational Research in Mathematics*, **12(1)**, 145-162.
- 최승현 · 남금천 · 류현아 (2013). 수학 학습 부진 학생을 위한 오개념 교정 지도 자료 개발 연구. *수학교육학연구*, **23(2)**, 117-133.
- Choe, S. H., Nam, G. C. & Ryu, H. A. (2013). Development of Instruction Materials for Underachieving Students to Correction of Misconception. *Journal of Educational Research in Mathematics*, **23(2)**, 117-133.
- 최은아 · 강향임 (2015). 호의 측도로 도 (Degree) 와 라디안 이해하기. *학교수학*, **17(3)**, 447-467.
- Choi, E. A & Kang, H. I. (2015). Understanding of degree an radian by measuring arcs. *School Mathematics*, **17(3)**, 447-467.
- 최지선. (2003). *중등학교 수학 학습에서 나타나는 오개념에 대한 고찰*. 서울대학교 석사학위논문.

- Choi, J. S. (2003). *A study on the misconceptions in the learning of the secondary school mathematics*. Master thesis, Seoul National University.
- Adamson, B., & Morris, P. (2014). Comparing curricula. In M. Bray, B. Adamson, & M. Mason(Eds.), *Comparative education research: Approaches and methods* (pp. 309-332). Hong Kong: Comparative Education Research Centre, the University of Hong Kong.
- Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority. (2015). The Australian curriculum Mathematics. Retrieved from <http://www.australiancurriculum.edu.au/Download/F10>.
- Clements, D. H., & Burns, B. A. (2000). Students' development of strategies for turn and angle measure. *Educational Studies in Mathematics*, **41**(1), 31-45.
- Common Core State Standards Initiative. (2010). Common Core Standards for Mathematics. Retrieved from http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards.pdf.
- Department for Education, England. (2014). National curriculum in England: mathematics programmes of study. Retrieved from <https://www.gov.uk/government/publications/national-curriculum-in-england-mathematics-programmes-of-study/national-curriculum-in-england-mathematics-programmes-of-study>
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, The Netherlands: Reidel.
- Freudenthal, H. (1986). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Springer Science & Business Media.
- Foxman, D. & Ruddock, G. (1984). Assessing mathematics: 3. concepts and skills: line symmetry and angle. *Mathematics in School*, **13**(2), 9-13.
- Jones, P. S. (1998). Angular measure. In John K.B., Duane E. D., Bruce R. V. & Arthur E. H.(Eds.) *Historical topics for the mathematics classroom*, Reston, VA: NCTM.
- Keiser, J. M. (2004). Struggles with developing the concept of angle: Comparing sixth-grade students' discourse to the history of the angle concept. *Mathematical thinking and learning*, **6**(3), 285-306.
- Kleinhaus, S. R. (1976). *Development of Materials to Be Used in a Laboratory Approach to a Mathematics Content Course for Pre-service Elementary Teachers and the Effects of This Approach on Achievement and Attitude..* Oklahoma State University Doctoral dissertation.
- Lankford, J. (Ed.). (2013). *History of astronomy: an encyclopedia*. Routledge.
- Ministry of Education Singapore. (2013a). Mathematics syllabus Primary One to Six. Retrieved from https://www.moe.gov.sg/docs/default-source/document/education/syllabuses/sciences/files/mathematics_syllabus_primary_1_to_6.pdf
- Ministry of Education Singapore. (2013b). Mathematics syllabus Secondary One to Four. Retrieved from [https://www.moe.gov.sg/docs/default-source/document/education/syllabuses/sciences/files/mathematics_syllabus-sec-1-to-4-express-n\(a\)-course.pdf](https://www.moe.gov.sg/docs/default-source/document/education/syllabuses/sciences/files/mathematics_syllabus-sec-1-to-4-express-n(a)-course.pdf)
- Mitchelmore, M., & White, P. (1998). Development of angle concepts: A framework for research. *Mathematics Education Research Journal*, **10**(3), 4-27.
- Mitchelmore, M. C. & White, P. (2000). Development of angle concepts by progressive abstraction and generalisation. *Educational Studies in Mathematics*, **41**(3), 209-238.
- Moore, K. C. (2010). *The role of quantitative reasoning in precalculus students learning central concepts of trigonometry*. Arizona State University Doctoral dissertation.
- Shreves, J. W. (1998). Angle. In John K.B., Duane E. D., Bruce R. V. & Arthur E. H.(Eds.) *Historical topics*

- for the mathematics classroom*, Reston, VA: NCTM.
- Watson, A. (2008). Working group on trigonometry: meeting 5. *Proceeding of the British Society for Research into Learning Mathematics*, **28(3)**, 148-150.
- White, P. & Mitchelmore, M. (1999). Learning Mathematics: A New Look at Generalisation and Abstraction.
- White, P., Mitchelmore, M. C. & Thomas, T. T. M. (2002). Teaching and learning mathematics by abstraction. *Intelligence and understanding in mathematics*, 235-256.
- Yigit, M. (2014). *Learning of trigonometry: An examination of pre-service secondary mathematics teachers' trigonometric ratios schema*. Purdue University Doctoral dissertation.

An International Comparison study in Mathematics Curriculum - Contents for Angle among the Korea, Singapore U.K., Australia and U.S.

Choi, Eun

Graduate School of Seoul national University
E-mail : eunidat@snu.ac.kr

Kim, Seo Yeong[†]

Graduate School of Seoul national University
E-mail : ksy0952@snu.ac.kr

Kwon, Oh Nam

Seoul national University
E-mail : onkwon@snu.ac.kr

Angle concept is widely used in all mathematics curriculums and is a basic concept in geometric domain. Since angle have a multifaceted and affect subsequent learning, it is necessary for students to understand various angle concepts. In this study, Singapore, U.K., Australia, and U.S. are selected as comparable countries to examine the angle-related contents and learning process that appear in the curriculum as a whole, and then look at the perspectives and the size aspects of angle in detail and give implications to the Korean curriculum based on them. According to the analysis, the four countries except Korea, supplement angle, complement angle, angles on a straight line, angles at a point, and finding angle were explicitly covered in the curriculum. And most countries gradually covered angle-related contents over several years, compared to Korea which intensively studied in a particular school year. In common, definition of angle was described as static, measurement of angle was described as dynamic. But in Korean curriculum, dynamic views on angles are described later and less compared to other countries, and range of angle size was narrower than in other countries'. From this comparison, this study suggest to discuss how to place and develop various contents of characteristics of angle in curriculum, address the angle using both static and dynamic perspectives, and introduce the angle size as the amount of rotation to learn the reflex angle, 180° , 360° angle.

* ZDM Classification : D10

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D10

* Key words : comparative study of international mathematics curriculum, angle, perspective on angle, angle measurement

† corresponding author