

# 외팔보의 비감쇠 진동시 가진력에 의한 동적 반응의 민감도 정식화 및 해석

윤성호\*.#

\*금오공과공대 학교 기계공학과

## Application of Sensitivity Formulation to Analyze the Dynamic Response due to the Excitation Force for the Undamped Vibration of Cantilever Beam

Seong-Ho Yun\*.#

\*Department of Mechanical Engineering, KUMOH NATIONAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

(Received 14 August 2020; received in revised form 25 August 2020; accepted 31 August 2020)

### ABSTRACT

In this study, a sensitivity formulation was applied to analyze the dynamic response due to the effect of the excitation force for the undamped vibration of the cantilever beam. The theoretically fundamental formulations were derived considering an eigenvalue problem and its modal analysis to govern the second order algebraic differential equation in terms of the change in the modal coordinate with respect to the design parameters. A representative physical quantity pertaining to the dynamic response, that is, the rate of change in the dynamic displacement, was observed by changing the design variables, such as the cross-sectional area of the beam. The numerical results were obtained at various locations, considering the application of the external forces and observation of the dynamic displacement. When the detection position was closer to the free end of the cantilever beam, the sensitivity of the dynamic displacement was higher, as predicted through the oscillating motion of the beam. The presented findings can provide guidance to compute the dynamic sensitivity for a flexibly connected structure under dynamic excitations.

**Key Words** : Sensitivity Analysis(민감도 분석), Rate of Change of Dynamic Displacement(동적 변위 변화율), Undamped Forced Vibration(비감쇠 진동), Modal Analysis(모달 해석)

### 1. 서 론

동적인 구조물을 설계하는데 있어서 부재의 형상, 물성치, 경계조건, 외력 등 다양한 설계 인자가 존재하게 된다. 일반적으로 최적의 동적인 거동을 목표로 질량, 감

쇠, 강성의 값을 변경함으로써 고유진동수의 민감도가 변화하는 과정을 관찰하는 것이다. 하지만 설계 변수의 변화에 따라서 정적 또는 동적 거동의 민감도를 우선적으로 관찰하는 것이 설계의 목표를 효과적으로 달성할 수 있는 방법이라고 말할 수 있다<sup>1,2)</sup>.

구조물에 외력이 작용할 때 발생하는 동적 거동은 피로나 공진현상으로 안정성 측면에서 내구성의 저하를 야기할 수 있는 요인이 된다. 설계 변수에 대한 동적 반응

# Corresponding Author : shyun@kumoh.ac.kr

Tel: +82-54-478-7324, Fax: +82-54-478-7319

Copyright © The Korean Society of Manufacturing Process Engineers. This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution-Noncommercial 3.0 License (CC BY-NC 3.0 <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

의 미분치를 계산하는 것을 설계 민감도 분석(design sensitivity analysis)이라고 하며, 이로부터 도출되는 민감 계수(sensitivity coefficient)는 재설계된 시스템의 반응 변화를 수월하게 예측할 수 있다. 또한 구조물의 거동에 미치는 인자들의 불확실성을 규명하게 할 수 있으며, 특히 많은 설계변수를 가진 대규모의 구조물은 재해석하는데 있어 많은 계산 시간을 요구할 수 있어 동적 반응의 민감도를 평가하는 것이 바람직한 방법이라고 할 수 있다 [3].

근래까지 민감도 분석에 대한 연구는 대표적으로 세 가지로 분류할 수 있다. 첫째, 수치해석 과정을 이식하기 용이한 유한 차분 근사법(finite difference approximation)을 사용한다. 이는 설계 변수가 많고 계산 시간이 비교적 많이 소요되고 정확한 해를 구할 수 있으며 축약된 알고리즘을 적용함으로써 계산 시간을 감소시킬 수 있다. 둘째, 정확한 해를 구하고자 해석적인 방법을 사용하는데 형상 최적화와 같은 문제는 해석 과정을 이식하기가 어렵다. 셋째, 전자의 두 가지 방법을 혼용한 유사적인 해석방법(semi-analytical method)으로서 알고리즘을 이식하기 쉽지만 다소 부정확한 결과 값을 초래할 수 있다. 이러한 방법들 중에서 계산의 정밀도, 계산 시간, 알고리즘 이식화의 용이성에 따라서 민감도 해석을 수행하게 된다. 각각의 장단점을 서로 고려하여 설계 목표에 적합한 것을 선택하여 동적 응답의 변화를 관찰하게 된다[4,5].

본 연구에서는 고유치 해석 이론을 바탕으로 외력을 적용시킨 진동을 다룰 것이다. 유한요소 분할을 적용하여 다자유도를 가진 1차원 오일러-베르누이 외팔보에 대하여 살펴볼 것이다. 외력의 위치와 동적 변위의 검출 위치를 다양하게 설정하여 동적 응답의 변화율을 관찰할 것이다. 설계 변수인 외팔보의 단면적을 변화시켜 운동방정식인 미분대수방정식을 변화시킴으로서 검출 위치에서 동적 응답의 변화율을 살펴 볼 것이다. 모달 해석으로부터 비연성된(uncoupled) 변화율을 표현하는 미분방정식을 제시할 것이다. 모드 형상과 고유치를 나타내는 모달 쌍(modal pair)의 설계 변수에 대한 변화율의 계산은 유한 차분법을 적용하였다. 즉, 외팔보의 강제 진동에서 설계 변수의 변화에 따른 질량과 강성의 변화에 의한 동적 응답의 거동을 정식화하고 정량적인 동적 변화율을 계산하는 일련의 알고리즘을 제시하였다.

## 2. 이론 및 해석

### 2.1 강제진동의 모달 정식화

감쇠가 없고  $n$  자유도계를 가진 동적 시스템의 외력에 의한 강제진동에 대한 운동방정식은 다음과 같다.

$$M\ddot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = \mathbf{f}(t) \quad (1)$$

여기서  $M$ 은 질량 행렬,  $K$ 는 강성 행렬,  $\mathbf{f}$ 는 외력 벡터,  $\mathbf{x}$ 는 구하고자 하는 변위 벡터이고  $(\dot{\quad})$ 는 시간  $t$ 에 대한 미분을 나타낸다.

선형 시스템으로 가정했을 때, 모드의 중첩을 고려하여 실제적으로 물리적인 변위  $\mathbf{x}$ 를 일반화된 변위  $\mathbf{u}$ 로 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{x} = \Phi \mathbf{u} \quad (2)$$

여기서  $\Phi$ 는  $n$ 개의 고유 벡터 또는 모달 벡터  $\phi_k$  ( $k=1, \dots, n$ )로 구성하는 모달 행렬이고 다음과 같이 정규화 된다.

$$\Phi^T M \Phi = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

고유치  $\lambda_k$  또는 원주고유진동수의 제곱인  $\omega_k^2$ 를 사용하면 다음과 같이 고유치 문제로 표현할 수 있다.

$$(K - \lambda_k M) \phi_k = \mathbf{0} \quad (4)$$

식 (2)를 식 (1)에 대입하고  $\Phi^T$ 를 식의 앞에 곱하면 운동방정식은 다음과 같이 일반화된 좌표  $\mathbf{u}$ 에 대하여 표현된다.

$$\ddot{\mathbf{u}} + \Omega^2 \mathbf{u} = \mathbf{Q}(t) \quad (5)$$

여기서 고유치  $\Omega^2$ 은 다음과 같다.

$$\Omega^2 = \Phi^T K \Phi = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

식 (6)을 식 (5)에 대입하면  $n$ 개의 비연성된 운동방정식

이 도출된다.

$$\ddot{u}_k + \omega_k^2 u_k = Q_k, \quad (k = 1, \dots, n) \quad (7)$$

여기서 우변의 외력에 대한 항은 다음과 같다.

$$Q_k = \sum_{i=1}^n \Phi_{ki}^T f_i(t) \quad (8)$$

## 2.2 설계변경에 의한 동적거동 변화

시스템의 설계 변수  $d_j (j = 1, \dots, p)$ 를 변화시켰을 때 동적 반응, 즉 변위가 얼마나 변하는지를 정량화할 수 있는 지를 파악해야 한다. 이를 위하여 식 (2)를 설계 변수  $d_j$ 에 대하여 미분하면 변위의 변화율을 다음 식과 같이 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial d_j} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial \phi_k}{\partial d_j} u_k + \phi_k \frac{\partial u_k}{\partial d_j} \right) \quad (9)$$

여기서 우변 첫 번째 항의 미분식은 설계 변수에 대한 모달 벡터의 변화율로서 기준 벡터와 변경된 벡터와의 차이를 분자로 하고 기준 설계 변수  $d_o$ 와 변경된 설계 변수와의 차이  $\delta d_j$ 를 분모로 하여 계산될 수 있다. 즉 유한 차분법을 활용한 모달 벡터와 고유치의 변화율은 다음의 식으로 표현될 수 있다.

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial d_j} = \frac{\phi(d_o + \delta d_j) - \phi(d_o)}{\delta d_j} \quad (10)$$

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial d_j} = \frac{\lambda_k(d_o + \delta d_j) - \lambda_k(d_o)}{\delta d_j} \quad (11)$$

우변 두 번째 항의 미분식은 식 (5)를 설계 변수  $d_j$ 에 대하여 미분하면 다음과 같은 미분방정식을 도출할 수 있다.

$$\frac{\partial \ddot{u}_k}{\partial d_j} + \omega_k^2 \frac{\partial u_k}{\partial d_j} = \frac{\partial Q_k}{\partial d_j} - \frac{\partial \omega_k^2}{\partial d_j} u_k \quad (12)$$

또한 다음의 매개 미분식 (13.a,b)를 도입하고 식 (8)을 이

용하면 식 (14)가 도출된다.

$$q_k = \frac{\partial u_k}{\partial d_j}, \quad \dot{q}_k = \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial d_j} \quad (13.a, b)$$

$$\ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k = \frac{\partial \phi_k^T}{\partial d_j} \mathbf{f} + \phi_k^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial d_j} - \frac{\partial \omega_k^2}{\partial d_j} u_k \quad (14)$$

이러한 변화율에 대한 미분방정식의 정식화에서 주목할 점은 식 (5)와 (14)에서 좌변은 동일한 형태를 가지나 우변은 서로 상이하다는 것이다. 설계 변수의 변화가 발생하기 전  $t=0$ 에서  $q_k = \dot{q}_k = 0$ 이라는 초기조건을 가진다.

설계 인자의 변경으로 인한 변위의 변화율을 구하는 해석 절차를 정리하여 해석 흐름도를 Fig. 1에 나타냈다. 먼저 모달 해석의 식(4)에서 고유치  $\lambda_k$ 와 모달 벡터  $\phi_k$ 를 구하고 식 (10)과 (11)에서 설계 변수에 대한 모달 벡터와 고유치의 변화율  $\partial \phi_k / \partial d_j$ 와  $\partial \lambda_k / \partial d_j$ 를 각각 계산한다. 비연성 모달 방정식 (7)에서  $u_k$ 를 구하고 식 (14)의 우변항을 계산하여 변화율에 대한 미분방정식에서  $q_k$ 를 산정한다. 이 때 미분방정식들의 해인  $u_k$ 와  $q_k$ 의 형태는 가해지는 외력의 형태에 따라서 매우 상이하게 표현된다. 이로부터 최종적으로 식 (9)의 우변에 있는 항들을 계산함으로써 동적 응답의 변화율을 계산할 수 있다.

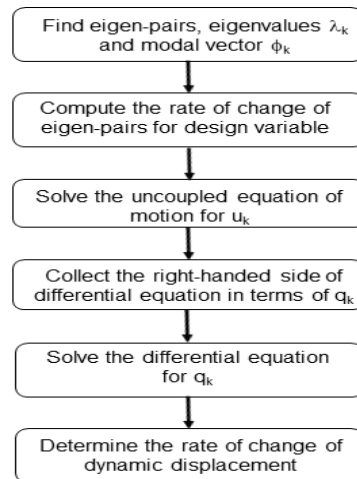


Fig. 1 A flow chart for algorithm for predictions on the rate of change of dynamic displacement

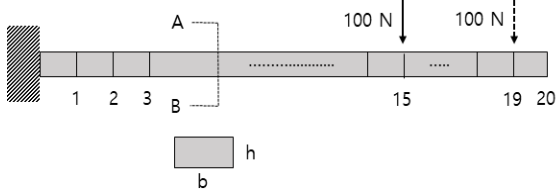


Fig. 2 A finite element model for the cantilever beam

### 2.3 수치해석

본 연구에서는 보의 전체 길이  $\ell = 1.2m$ , 유한요소 길이  $\ell_e = 0.06m$ , 재료의 밀도  $\rho = 7,850kg/m^3$ , 재료의 탄성계수  $E = 2 \times 10^{11}N/m^2$ 을 사용하였다. Fig. 2에서 보는 바와 같이 외팔보를 20개의 유한요소로 분할하였고 절점의 번호를 1부터 20까지 부여하였다. 외팔보의 유한요소 절점 15와 19위치에서 다음과 같은 외력을 가하였다.

$$f(t) = \begin{cases} 100N, & (0 \leq t \leq 3\text{초}) \\ 0, & (t > 3\text{초}) \end{cases} \quad (15)$$

설계 변수의 변화는 외팔의 단면적을 선택하고자 한다. 기준 단면적은 폭( $b$ ) $\times$ 두께( $h$ )가  $50mm \times 25mm$ 이고 첫 번째는 단면적의 변화가  $75mm \times 25mm$ 로 하고 절점 19에 외력을 가하는 경우이다. 두 번째는 단면적의 변화가  $50mm \times 50mm$ 로 하고 절점 15에 외력을 가하는 경우이다.

식 (5)에서 상기의 직사각형 외력을 적용하면 동적 변위  $u_k(t)$ 는 컨볼루션 적분(convolution integral)에 의하여 다음과 같이 구해진다.

$$u_k(t) = \frac{Q_k}{\omega_k^2} (1 - \cos\omega_k t) \quad (16)$$

식 (14)의 첫 번째 항에서 단면적 변화에 의한 모드 형상의 변화는 없는 것으로 파악되었다. 이는 모드를 정규화한 모달 벡터가 일관성 있게 유지되었음을 의미한다. 두 번째 항에서 외력은 두 경우 모두 단면적 변화는 외력에 무관하므로 그 영향은 존재하지 않는다. 그러므로 식 (14)는 세 번째 항만 존재하게 되어 미분방정식의 해  $q_k$ 는 또 다른 컨볼루션 적분을 통하여 다음과 같이 구해

질 수 있다.

$$q_k(t) = \frac{Q_k}{\omega_k^4} \frac{\partial \omega_k^2}{\partial d_j} (1 - \cos\omega_k t)^2 \quad (17)$$

이와 함께 식 (10)을 식 (9)에 최종적으로 대입하여 동적 변위의 변화율을 구할 수 있다.

Fig. 3~5는 외팔보의 단면적이  $75mm \times 25mm$ 로 변하였고 절점 19에서  $100N$ 을 3초 동안 가했을 때 절점 6, 11, 19에서 동적 변위의 변화율을 3초 동안 관찰한 그래프이다. 각 절점에서 변화율의 형상은 유사하지만 절점이 자유단에 가까울수록 변위의 변화율이 순차적으로 커짐을 관찰할 수 있다. 최대치와 최소치는 항상 일정한

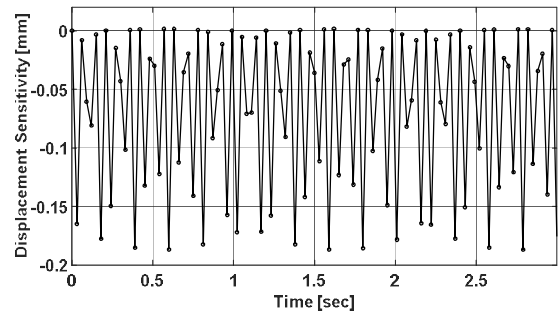


Fig. 3 The rate of change of dynamic displacement at node 6 by applying 100N at node 19 and by changing cross-sectional area to  $75mm \times 25mm$

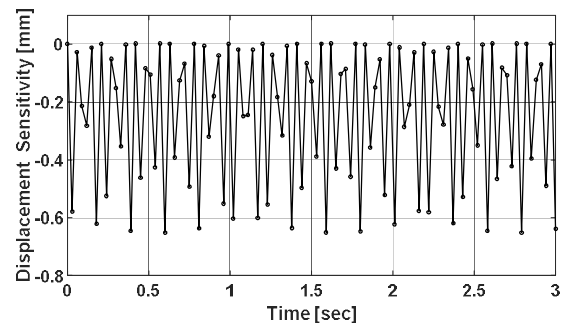
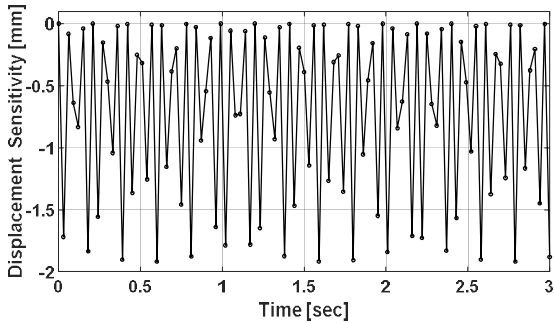
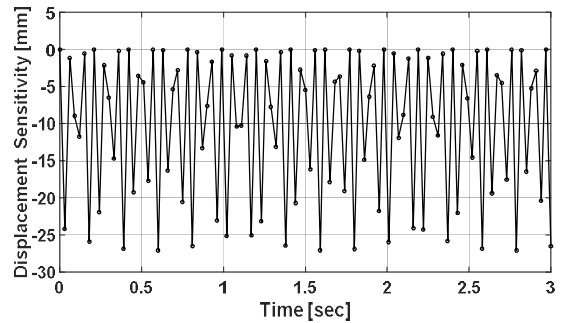


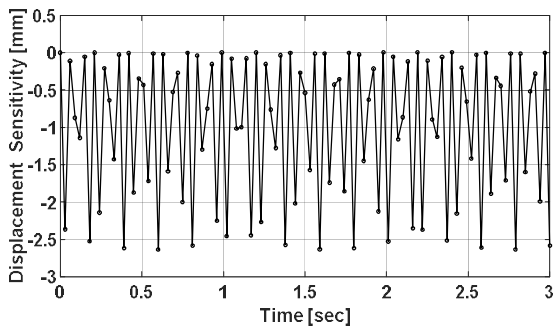
Fig. 4 The rate of change of dynamic displacement at node 11 by applying 100N at node 19 and by changing cross-sectional area to  $75mm \times 25mm$



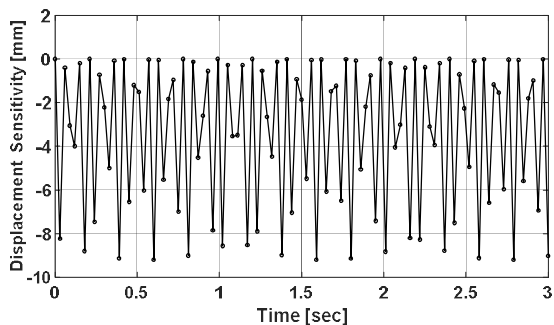
**Fig. 5** The rate of change of dynamic displacement at node 19 by applying 100N at node 19 and by changing cross-sectional area to  $75mm \times 25mm$



**Fig. 6** The rate of change of dynamic displacement at node 19 by applying 100N at node 15 and by changing cross-sectional area to  $50mm \times 50mm$



**Fig. 6** The rate of change of dynamic displacement at node 6 by applying 100N at node 15 and by changing cross-sectional area to  $50mm \times 50mm$



**Fig. 7** The rate of change of dynamic displacement at node 11 by applying 100N at node 15 and by changing cross-sectional area to  $50mm \times 50mm$

범위에서 거동하며 이는 강성이 더욱 커져서 거동이 음의 변화율로 나타남을 알 수 있다. Fig. 6~8은 단면적이  $50mm \times 50mm$ 로 변화였고 절점 15에서 100N을 가했을 때 절점 6, 11, 19에서 동적 변위의 변화율을 관찰한 그래프이다. 마찬가지로 변화율의 형상은 유사하지만 절점이 자유단에 가까울수록 변위의 변화율이 순차적으로 커지며 절점 19에서 외력을 가했을 때 보다 변화율이 훨씬 크게 관찰되었다.

### 3. 결론

본 연구에서는 외팔보에 대하여 비감쇠 강제진동의 경우 설계 변수를 변화시킴으로써 동적 응답의 변화율을 예측할 수 있도록 정식화하고 이를 해석하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 단면적의 변화를 통하여 질량 및 강성 민감도를 고려하여 동적 변위의 변화율을 표현하는 2차 미분 대수방정식을 도출하였다. 이에 따른 변위의 민감도를 파악할 수 있는 알고리즘을 작성하였다.
- (2) 외력이 가해지는 위치와 동적 변위의 검출 위치를 달리하여 동적 변위의 변화율을 관찰하였고 검출 위치가 자유단에 가까울수록 변화율이 커짐을 확인하였다.
- (3) 향후 결합 구조물에서 결합부분의 강성 변화와 다양한 외력의 영향으로 구조물의 원하는 위치에서

동적 반응의 민감도를 파악할 수 있는 기반을 마련하였다.

## 후 기

“이 연구는 금오공과대학교 학술연구비로 지원되었음(2018-104-019)”

## REFERENCES

1. Yun, S.-H., “Analysis of the Dynamical Characteristics and Prediction of Stiffness for the Joint between Members,” Journal of Korean Society of Manufacturing Process Engineers, Vol. 18, No. 2, pp. 58-64, 2019.
2. Song, B.-C., Jo, Y.-J., Lee, K.-H. and Park Y.-C., “Structure Optimization for a Lower Control Arm Using Sensitivity Analysis,” Journal of Korean Society of Manufacturing Process Engineers, Vol. 7, No. 1, pp. 17-21, 2008.
3. Yun, S.-H., “Prediction of Natural Frequency via Change in Design Variable on Connection Area of Lap Joint,” Journal of Korean Society of Manufacturing Process Engineers, Vol. 18, No. 11, pp. 57-62, 2019.
4. Lua, Z. R. and Law, S. S., “Features of Dynamic Response Sensitivity and Its Application in Damage Detection,” Journal of Sound and Vibration, Vol. 303, Issues 1~2, pp. 305-329, 2007.
5. Bogomolni, M., Kirsch, U. and Sheinman I., “Efficient Design Sensitivities of Structures Subjected to Dynamic Loading,” International Journal of Solids and Structures, Vol. 43, Issues 18~19, pp. 5845-5500, 2006.