East Asian Math. J.
Vol. 36 (2020), No. 2, pp. 131–146
http://dx.doi.org/10.7858/eamj.2020.012

등주문제에서 해의 존재성 고찰

A Study on the Existence of the Solution in the Isoperimetric Problem

이 호 수 · 최 근 배*1)

ABSTRACT. The isoperimetric problem is a well-known optimization problem from ancient Greek. Among plane figures with the same perimeter, which is the largest area surrounded? The answer to the question is circle. Zenodorus and Steiner's pure geometric proofs, which left a lot of achievements in this matter, looked beautiful with ideas at that time. But there was a fatal flaw in the proof. The weakness is related to the existence of the solution.

In this paper, from a view of the existence of the solution, we investigate proofs of Zenodorus and Steiner and get educational implications.

Ⅰ. 서론

등주문제는 고대 그리스시대부터 잘 알려진 최적화 문제이다. 둘레의 길이가 일정한 평면도형들 중에서 둘러싸인 면적이 최대인 도형은 무엇일까? 라는 문제로, 그 답은 원(circle)이다. 이 문제에 많은 업적을 남긴 Zenodorus와 Steiner의 순수 기하적인 증명법은 당시에는 그 아이디어가 창의적인 관점에서 아름답게 보였다. 그러나 증명에 치명적인 약점이 있었다. 그 약점은 해의 존재성과 관련되어 있다. 이를 테면, Steiner의 four-hinge 증명법([4, pp. 533–534])의 기본적인 구조와 그 아이디어를 살펴보면 다음과 같다.

둘레의 길이가 일정한 평면도형들 중에서 둘러싸인 면적이 최대인 도형을 C라고 하면, C는 원이다. 왜냐하면, 만일 C가 원이 아니라고 가정하면 둘레의 길

Received February 3, 2020; Accepted February 20, 2020.
2010 Mathematics Subject Classification: 97D50
Key Words: polygon, isoperimetric problem
* 교신저자
** 이 논문은 2019학년도 제주대학교 학술진흥연구비 지원사업에 의하여 연구되었음

이를 변화시키지 않고 C보다 더 큰 면적을 가지는 도형을 항상 만들 수 있기 때문이다.

이 증명의 문제점은 '둘레의 길이가 일정한 평면도형들 중에서 둘러싸인 면적이 최대인 도형'의 존재성을 가정하고 있다는 것이다. 이와 관련된 최적화 문제에서 해의 존재성을 가정함으로 나타날 수 있는 위험성을 설명하기 위한 Perron의 역설[1]([12])를 소개하면 다음과 같다.

모든 양의 정수 중에서 1이 가장 크다. 이유는 다음과 같다. 모든 양의 정수 중에서 가장 큰 양의 정수를 n이라고 가정하고, 결론을 부정하자. 즉, n이 1이 아니라고 하자. 그러면 n^2은 n보다 큰 정수이다. 이는 가정에 모순이다. 따라서 n은 1이다.

기하학적 문제를 다른 수학적 영역으로 변환하여 해결하려는 방법이 해석기하학의 창시자인 데카르트 시대부터 하나의 커다란 목표였고, 대단히 성공적이었고, 또한 우리에게 강력한 수학적 무기를 제공했다. 그러나 직관적이고 창의적인 아이디어가 변환의 과정 중에 사장(死藏)될 수 있다. 기하학을 위해 싸움을 걸었던 수학자들 중 한 명이 Steiner였다. 그러나 등주문제에서 존재성의 문제 때문에 그는 수학적 전투는 졌다.

등주문제의 완전한 증명은 변분법(calculus of variation), 즉, 해석학과 미 · 적분학을 이용한 Weierstrass([19])와 Steiner의 대칭화 방법(symmetrization)을 적용한 기하적인 방법(finite existence proof, [4, pp. 544−546])을 사용한 Edler([5])에 의해서 제일 먼저 이루어 졌으며, 그 후 존재성의 가정에 자유로워짐으로써, 많은 다른 또는 보다 진보된 증명들이 나타났다([4, pp. 544−564] 참고).

이 논문에서는 해의 존재성을 관점으로 Zenodorus와 Steiner의 증명을 살펴보고, 수학에서 존재성과 관련된 교육적 시사점을 얻고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 등주문제 역사

이 절의 내용은 주로 Blasjo([4])의 논문을 참조하여 서술하였음을 밝혀둔다. 등주

1) https://en.wikipedia.org/wiki/Oskar_Perron

문제는 고대 그리스시대부터 잘 알려진 최적화 문제로, 이 문제와 관련된 역사적 고찰은 로마의 국가 서사시인 '아이네이스(Aeneid)'의 저자인 Virgil의 말을 인용하는 것부터 시작된다.

> 마침내 그들은 착륙했고, 당신의 눈은 먼 곳에서 부터
> 새로운 카르타고(Carthage)가 부상하는 터렛(turrets)을 볼 수 있다.
> 그곳에서 Byrsa[2])로 불리는 땅을 샀다.
> 황소 가죽으로 먼저 둘러싸고 그리고 벽을 만들었다.
> ([18, Book 1, p. 12], [4, p. 526], MAA[3]))

위의 인용문은 Dido 여왕의 전설을 언급한 것이다. Tyre의 왕의 딸 Dido는 남편을 죽인 동생 Pygmalion에게서 도망쳐 북아프리카의 해변에 상륙하여 Iarbas 왕으로부터 황소 가죽으로 둘러쌀 수 있는 만큼의 땅을 사기로 협상했다. 그녀는 수학적인 기지를 발휘하여 황소 가죽을 아주 미세한 스트립으로 자르고, 잘린 스트립을 사용하여 해안선을 지름으로 생각한 반원형의 경계선을 표시함으로써 가능한 한 최대한의 영역을 에워쌌다. 그곳에서 그녀는 카르타고의 도시를 세우고 여왕이 되었다. 이는 이야기의 전개뿐만 아니라 수학에도 의미가 깊다. Dido는 카르타고를 로마의 강적으로 군림하는 대국으로 만들었고 카르타고는 오랫동안 번영을 누렸다. Dido는 아이네아스(Aeneas)가 살아남은 트로이인들을 이끌고 새로운 정착지를 찾아 항해하는 도중에 겪은 일화 중에 등장한다. 분명한 목적지 없이 바다를 떠돌던 아이네아스 일행은 카르타고 항구에 닿았다. 처음에는 이 일행을 경계했던 Dido는 아이네아스를 깊이 사랑하게 되었다. 아이네아스 일행은 융숭한 대접을 받았고 다음 항해를 위한 충분한 준비를 할 수 있었다. 아이네아스가 새로운 정착지를 찾아 다시 떠나자 절망한 Dido는 아이네아스의 칼 위에 몸을 던져 자결하였다. Dido 여왕의 죽음과 관련하여 Kline은 다음과 같이 언급하고 있다([4, p. 526] 에서 재인용).

> 경직된 마음을 가진 배은망덕하고 지각없는 사람이 잠재적인 수학자를 잃게 했다. 이것은 로마인들이 다루었던 수학의 첫 번째 타격이었다([10, p. 135]).

등주문제와 관련하여 Zenodorus가 같은 둘레를 가진 어떤 다각형보다 원이 더 넓

2) Byrsa는 튀니지의 고대 카르타고에 있는 페니키아 항구 위의 성벽 요새였으며 그 위에 있던 언덕의 이름이다.

3) The Sagacity of Circles: A History of the Isoperimetric Problem - The Isoperimetric Problem in Literature https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/the-sagacity-of-circles-a-history-of-the-isoperimetric-problem-the-isoperimetric-problem-in

은 영역을 가지고 있다는 것을 증명했지만 그의 논문(결과물)은 분실되었다. 우리는 그것에 대해 주로 알렉산드리아의 Pappus와 Theon을 통해 안다. Pappus에 의한 그 주제에 대한 소개는 문학적인 걸작으로 여겨진다(the collection, Book V. Preface on the Sagacity of Bees, [9, pp. 389-396]). 이와 관련하여 Heath는 다음과 같이 언급하고 있다.

> 예를 들어 서문을 쓸 기회가 생겼을 때처럼 수학의 기술적 언어의 구속으로부터 자유로울 때마다 철학자, 역사학자, 시인의 언어에 필적할 수 있었던 것은 위대한 그리스 수학자들의 특징이다([9, p. 389])

한편, 벌집(honeycomb) 추측은 Pappus에 의해서 기인된 것으로, 정육각형 격자 또는 벌집 형 격자는 표면을 최소의 전체 둘레로 동일한 면적의 영역으로 분할하는 가장 좋은 방법이라는 것이다. 이 추측은 2001년 수학자 Hales([8])에 의해 비로소 증명이 되었다. Pappus는 그의 수학 모음집 Book V에서 벌의 육각형 격자 구조인 거의 완벽한 기하학적 구조와 관련하여 다음과 같이 언급하고 있다.

> 물론 신이 일반적으로 가장 완벽한 지혜와 특히 수학적인 과학의 개념을 부여한 것은 인간에게 있지만, 비이성적인 생물들 중 일부에게도 부분적인 몫을 할당했다. 이성을 부여받은 인간에게 그는 모든 것을 이성과 실증 속에서 행해야 한다고 했지만, 다른 동물에게는 이성을 부인하면서도, 특정한 자연적 본능에 의해 각자가 삶을 지탱하는데 필요한 만큼의 것을 얻어야 한다고 허락했다. 이러한 본능은 많은 다른 종의 생물에도 존재한다고 관찰될 수 있지만, 무엇보다도 벌들 사이에 나타난다. 애초에 질서정연함과 그들의 영지에서 통치하는 여왕들에 대한 순종은 참으로 존경스럽지만, 훨씬 더 존경할 만한 것은 그들의 에뮬레이션, 꿀을 모을 때의 청결함, 그리고 그들이 그 양육에 헌신하는 사전 숙고와 가정적인 보살핌이다. 의심할 바 없이, 신으로부터 인류의 성취된 부분에 이러한 형태의 진미(ambrosia)의 몫을 가져다주는 임무를 맡기는 것을 믿는 그들은 그것을 부주의하게 흙이나 나무나 다른 보기 흉하고 불규칙한 물질에 붓는 것이 적절하다고 생각하지 않지만, 가장 아름다운 꽃의 단것을 수집한다. 땅 위에서 그들은 꿀을 받기 위해, 우리가 벌집이라고 부르는 그릇들(세포와 함께)이 서로 같고 비슷하고 인접하며, 그 형태는 육각형이다.
>
> 그들이 이것을 우리가 추론할 수 있는 일정한 기하학적 예측에 따라 고안했다는 것이다. 그들은 다른 어떤 것도 틈새에 빠져서 그들의 일을 더럽히기 위해서 반드시 그 형태들이 서로 인접하고 그들의 옆구리가 공통적으로 있어야 한다고 생각할 것이다. 이제 세 개의 직선 도형(한 점에서 만나는 도형의 수)만이 이 조

건을 만족한다. 즉, 불규칙한 형태가 벌들에게 불쾌감을 줄 정도로 등변이고 등각인 정규적인 형태를 의미한다. 그 때 세 개의 도형들이 그들 스스로 그 공간을 정확히 채울 수 있게 되었는데, 그들의 본능적인 지혜의 이유로 벌들이 가장 많은 각도를 가진 형상을 선택하게 되었다. 왜냐하면 그들은 그 형상이 다른 두 가지 형상 (정삼각형, 정사각형)에 비해 더 많은 꿀을 함유할 것이라고 생각했기 때문이다.

그렇다면 벌들은 어떤 것이 자신에게 도움이 되는지, 정육각형이 정사각형 및 정삼각형보다 더 크고 만드는데 사용되는 동일한 재료 지출에 더 많은 꿀을 담을 것이라는 사실을 알고 있다. 그러나 우리는 우리가 벌보다 지혜에 더 큰 몫을 할 때, 여전히 더 넓은 범위의 문제, 즉 동일한 둘레를 가진 모든 정사각형 및 정사각형 모양의 문제, 즉 더 많은 각도를 갖는 각도가 항상 더 큰 문제, 그리고 그것과 동일한 둘레를 가진 모든 사람의 가장 큰 평면 도형을 조사할 것이다. 그 답은 원이다([9, pp. 389-390], [16, pp. 588-593]).

등주 문제의 동기는 천문학에서 비롯되었다. Zenodorus의 증명에 대한 Theon의 설명은 Ptolemy의 Almagest에 대한 그의 논평에서 찾을 수 있다. Ptolemy의 말을 인용해 보자.

다음 고려 사항은 또한 하늘의 구형의 개념으로 이어진다. 다른 가설은 없지만 이것은 해시계 구조가 어떻게 올바른 결과를 산출하는지 설명할 수 있다. 더욱이, 천체의 움직임은 모든 움직임 중에서 가장 손상되지 않고 자유롭고, 가장 자유로운 움직임은 원에 대한 평면 도형과 구에 대한 단단한 모양 사이에 속한다. 유사하게, 동일한 경계를 갖는 상이한 형상으로 인해, 더 많은 각도를 갖는 형상은 [면적 또는 부피]에서 더 크고, 원은 [다른 모든] 표면보다 크고, 구는 [다른 모든] 입체보다 크다; 마찬가지로 하늘도 다른 모든 몸체보다 크다(*Almagest*, Toomer's 번역, [17, pp. 39-40]).

우리는 또한 분명히 고대에는 도형의 둘레가 그 영역을 결정한다는 것이 일반적인 믿음이었다는 것을 언급해야 한다. 이 문제에 대한 잘못된 생각은 비수학자들 사이에서 만연했다.

Proclus는 우리에게 도시의 크기를 도시의 둘레로 추론한 나라들의 해설자들에 대해 말한다. 그는 또한 그들 자신이 가져간 음모보다 더 넓지만 더 적은 면적의 땅을 그들에게 주어서 명성을 얻음으로써 그들의 동료를 속인 특정 공산주의 사회의 구성원들을 언급한다. 솔직히 말해서, 그들은 사실 그들의 몫보다 더 많은

수확물을 가져갔다. Thucydides는 같은 오해의 유행을 보여주는 고대의 저자들의 몇 가지 발언을 통해 시칠리아의 크기를 주변을 도는데 소요되는 시간에 따라 추정한다. Polybias는 같은 주변 지역의 수용소가 다른 수용력을 가질 수 있다는 것을 이해하지 못하는 사람들이 있다는 것을 관찰했다. Quintilian도 비슷한 말을 하고 있는데, 칸토르도 자신의 마음속에 길이에 폭을 더하여 지구의 다른 부분의 크기를 비교하는 Pliny의 계산을 가지고 있었을지도 모른다고 생각한다. ([9, pp. 206-207]).

Gandz([6])는 이것이 이미 바빌로니아 수학자들을 자극했을지도 모른다고 추측한다([4, p. 528]).

바빌로니아 수학에서 모든 이차 방정식의 전형적인 형태는 다음과 같다: 둘레 $x+y=a$와 면적 $xy=b$: 길이 x와 너비 y를 찾는 것은 ... 이 구식적인 형태의 2차 방정식의 기원을 그 면적의 수용력 계산에서 평민을 속이려 했던 사람들의 전술한 계략의 영향으로 볼 가능성이 크다.

오늘날 등주문제는 하나 또는 그 이상의 체적 제약조건 하에서 그리고 추가적인 경계 및 대칭 조건 하에서 둘레-최소화 표면 (또는 초 표면)을 찾으려고 시도하는 광범위한 클래스에서의 문제를 의미한다.

2. Zenodorus

Philonides의 전기에서 묘사된 바와 같이, Zenodorus가 Philonides와 친구로 아테네로 두 번 정도 여행을 했을지도 모르지만, 그의 생애에 대해서는 거의 알려져 있지 않다. 그의 문체로 보아 Archimedes보다 훨씬 늦게 살았던 것으로 알려져 있다[4].

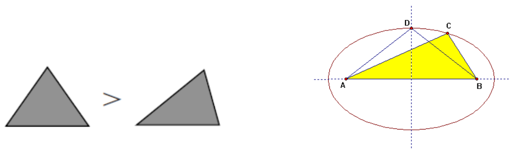
Zenodorus는 고대 그리스 수학자였으며 ‘등거리 도형에 관하여(On isometric figures)’라는 저술의 저자로 알려져 있으며, 이 저술에서 그는 같은 크기의 둘레 길이를 갖는 서로 모양이 다른 도형들을 연구하였다. 그러나 불행하게도 그의 저술은 분실되었으며, 저술 중 일부분은 Pappus와 Theon과 같은 다른 수학자들에 의한 참고문헌을 통해서 남아있다. Zenodorus는 등주문제와 관련된 중요한 네 개의 명제를 남겼다([15] 참조).

1. 동일한 둘레의 길이를 가지는 다각형들 중에서 가장 많은 각도를 가진 다각형이 면적이 가장 크다.
2. 원의 넓이는 동일한 둘레의 길이를 가지는 다각형 보다 크다.

4) https://en.wikipedia.org/wiki/Zenodorus_(mathematician)

3. 동일한 변의 수와 동일한 둘레를 가진 모든 다각형들 중 정다각형이 면적에서 가장 크다.
4. 동일한 표면적을 가지는 입체 중에서 구는 부피에 있어 가장 크다.

다각형의 등주문제에서 등변을 밝히는 Zenodorus의 핵심아이디어는 ‘같은 길이의 밑변을 가지는 삼각형 중에 이등변 삼각형이 가장 큰 넓이를 가진다.’ 즉, [그림 1]과 같이 변 길이의 평균화와 같다.



[그림 1] 등변을 밝히는 핵심아이디어([4, 2005])와 타원으로의 매장

3. Steiner

Jakob Steiner는 등주문제를 언급할 때 빼놓을 수 없는 위대한 영웅이다. 데카르트의 시대부터 기하학적 문제의 해결을 대수적 계산으로 변환·축소하여 해결 방법이 기계적이고 일반적이 되도록 하는 것이 노골적인 목표였다. 이 계획은 물론 대단히 성공적이었고, 그것이 이끌어 낸 수학은 정말 강력한 무기였다. 그러나 공식을 만지작거리는 것은 낭만적인 결과를 가져왔기 때문에, 우리는 기하학을 위해 싸움을 걸었던 19세기 수학자들이 있었을 것이라고 기대한다. 그들 중 한 명이 Steiner이었다. 그러나 말할 필요도 없이, 그는 전투에서 졌다.

반란의 목적은 Geiser([7])에 의한 Steiner에 관한 인명록에 있다([4, p. 532]에서 재인용).

불행히도, 이 학문적 역사 글은 또한 아킬레스건을 가지고 있는데, 프랑스에서 "Éloges"라고 불리는 것이 아무 이유 없이 된 것은 아니다. 냉정하고 두드러진 어조는 모든 의심스러운 점에 대한 자제력을 필요로 하고, 주위에 작용될 수 없는 모순을 가장 세련된 표현에 넣어야 하는데, 이는 우리 모두가 알다시피 결국 아무도 더 이상 알아채지 못할 정도로 세련된 방식으로 웃었던 Immermann의 소설에 나오는 von Münchhausen의 웃음처럼 말이다. 이런 식으로, 이러한 칭찬의 연설은 가장 화려한 아닐린 색상이 그림 같은 휘장을 자홍색과 푸른색으로 증가시키기 위해 사용되는 현대의 성스러운 그림들을 떠올리게 한다. 그때 긴 금발 곱슬머리는 가장 화려한 배열로 나타날 필요는 없다.
모든 머리가 그러한 그림의 모델로 적합한 것은 아니다. 예를 들어, 사람들은

Steiner의 거친 머리를 학구적인 패션으로 만들기 위한 빗을 찾을 것인가?

Steiner는 등주문제의 다섯 가지의 증명을 제시했다. 그의 증명 아이디어가 우아하기는 하지만, 공격당하기 위한 점을 열어두었다: 모든 증명은 해의 존재를 가정한다. 즉, 그의 증명 전략은 항상 원이 아닌 도형을 취해서 그 면적을 더 크게 만들 수 있다는 것을 보여주는 것이다. 이것은 처벌받지 않았지만, 오늘날까지 많은 저자들은 동정을 드러내면서 수학에서 존재성은 절대 사사로운 것이 아니라고 지적한다.

등주문제에 대한 Steiner의 첫 번째 논문([14])은 반드시 증명되어야 한다는 어떠한 표시도 없이 해의 존재를 명백히 가정한다. 이 출판물에 대한 비평이 따랐어야 한다고 생각한다. 그의 다음 논문([15])에서 나온 다음의 터무니없는 구절은 아마도 비평가들을 침묵시키기 위한 어정쩡한 시도로 보인다.

> 주어진 둘레에 대해, 다른 형태의 무한히 많은 형상이 있다는 것은 분명하며, 그것은 또한 다른 면적을 가지고 있을 수 있다. 왜냐하면 항상 주변에 비례하여 면적을 초과하는 도형을 만들 수 있기 때문이다. 그러한 도형은 예를 들어 둘레의 중간점이 있고 주어진 둘레의 반과 같은 반경을 가진 원이다. 그러나 동일한 주어진 둘레에 대해 도형이 다른 영역을 가질 수 있지만 이러한 크기가 임의로 클 수 없는 경우 반드시 다른 모든 영역보다 더 큰 영역을 갖는 하나의 도형이 있거나 이 속성을 가진 여러 다른 모양의 도형이 있어야한다. 즉 그들 사이의 면적은 동일하지만, 다른 것보다 넓은 면적을 갖는 것이다([4, p. 533]에서 재인용).

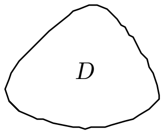
4. Weierstrass

Weierstrass는 1879년 변분(variation)의 미적분에 관한 그의 강연에서 등주문제에서의 해의 존재성을 증명했고, 그것으로 등주문제의 첫 번째 엄격한 증명이 완성되었다. Weierstrass는 이러한 결과를 발표하지 않았다. Weierstrass는 Steiner의 증명에 대해 다음과 같이 말하고 있다.

> Steiner는 변분의 미적분 방법이 완전한 증거를 제시하기에 충분하지 않다고 생각했기 때문에, 이 등주문제에 대한 상세한 논의가 바람직하다. Weierstrass는 Steiner가 입증한 것에 주목한다. 그러나 변분의 미적분은 우리가 나중에 보여드릴 것처럼 이 모든 것을 증명할 수 있는 위치에 있다. 게다가 그것은 Steiner가 할 수 없는 것, 즉, 최대치가 실제로 존재한다는 것을 보여줄 수 있다. 많은 경우에 이것은 기하학적 방법으로도 증명될 수 있지만, 예를 들어, 주어진 둘레에 대해 가장 큰 영역(추가 조건 없이)을 둘러싸는 곡선을 요청했을 때, Steiner는 둘레를 반으로 자르는 선을 그어 이 선이 대칭축이 아닌 경우 더 큰 영역의 곡선이 생성된다는 것을 보여준다. 이

제 원만이 그러한 특성을 가지고 있다는 것은 분명하지만, 이는 단지 상한이 아니라 실제 최대치가 있다는 것을 증명하지 못한다([19, pp. 259−260], [4, p. 537]에서 재인용).

Weierstrass에 의해서 개발된 변분계산을 이용한 방법은 등주문제의 보다 높은 차원의 문제를 증명하는데 사용될 수 있다.



$C : D$ 의 경계

편의상 $C : r(t) = (x(t), y(t))$로 매개변수화 하고 여기에 그린(Green)의 정리를 적용하면 등주문제는 다음과 같이 표현된다.

최대화: $$A(D) = \frac{1}{2}\int\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)dt$$

고정된 둘레의 길이: $$L = \int\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

이제 라그랑지의 배수(Lagrange multiple) λ를 사용하여 다음의 함수를 생각하자.

$$H = \frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) + \lambda\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

이로부터 두 개의 오일러−라그랑지 방정식을 얻는다.

$$\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial x_t}\right) = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial y_t}\right) = 0$$

여기서 $x_t = \dfrac{dx}{dt}$, $y_t = \dfrac{dy}{dt}$ 이다. 이 두 방정식을 풀면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$(x(t) - C_1)^2 + (y(t) - C_2)^2 = \lambda^2$$

여기서 C_1 과 C_2 는 적분상수이다. 위 식은 반지름이 λ인 원을 의미한다.

Ⅲ. 존재성 문제 증명의 구체화

앞 장에서 살펴본 바와 같이 등주문제에서의 해의 존재성 문제는 Zenodorus와 Steiner의 우아한 기하적인 증명에 발목을 잡았다. 이들의 일반적인 증명의 논리는 '해가 있다면 그것은 정 n-각형(원)이다.'는 것이다. 즉, 'S를 둘레의 길이가 일정한 n-각형(단일폐곡선) 중에서 면적이 최대인 것이라고 하면, S는 정 n-각형(원)이다.'에서 해(면적이 최대인 도형)의 존재성을 가정하고 있다.

이 장에서는 다각형의 등주문제에 한정해서 해의 존재성의 문제를 고찰한다. 즉, "둘레의 길이가 일정한 n-각형 중에서 면적이 최대인 것이 존재하는가?" 다각형의 등주문제에 대한 해의 존재성 문제는 ([4, p. 542])에 나타나있지만 이 장에서는 좀 더 쉽게 접근할 수 있는 구체적인 방법으로 증명을 하고자 한다. 여기에서 두 가지의 방법을 생각해 본다. 하나는 해의 존재성 가정을 회피하는 좀 더 구성적인 방법과 또 다른 하나는 직접적으로 존재성을 증명하는 방법이다.

먼저, 해의 존재성 가정을 회피하는 방법을 생각해보자. 우선, 존재성 문제와 관련된 Zenodorus의 등변화 아이디어 [그림 1]을 살펴보자. 그의 아이디어는 다음과 같이 요약될 수 있다.

> [그림 1]의 아이디어를 사용해서, P를 n-각형 중에서 넓이가 최대인 도형[5]이라고 두고, P가 등변다각형임을 보이자. 만일 등변이 아니라면 '인접한 서로 다른 길이의 두 변'이 존재한다.[6] 그러면 위에서 언급한 아이디어를 사용해서 둘레의 길이는 같지만 넓이가 더 넓은 다각형을 만들 수 있다. 이것은 P가 넓이가 최대인 도형이라는 데 모순이 된다. 따라서 P는 등변 다각형이다.

여기서, 해의 존재성 문제를 수열의 관점에서 회피하는 방법, 즉 점차적으로 등변다각형이 되어가는 방법을 생각해 보자. 만일, 주어진 다각형이 등변이 아니라면 인접한 다른 길이의 변이 존재한다. 이 경우 [그림 2]의 등변화 아이디어를 사용하면 둘레의 길이 변화 없이 면적이 증가하는 다각형을 얻을 수 있다. 이러한 아이디어를 계속 사용하면 면적을 수열로 가지는 유계인 단조 증가 수열(bounded monotone increasing sequence)을 만들 수 있다. 따라서 이 수열은 수렴하게 되고 결과적으로

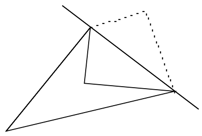
---

5) 등주문제의 해와 관련된 존재성 문제의 일반적인 논의는 Spivak([13, pp. 441-444])에 잘 나타나 있으며 또한 Blasjo([4, p. 542])는 다각형에서의 해의 존재성 문제를 다루고 있다.
6) 다각형에서 서로 다른 길이의 두변이 존재하면 인접한 서로 다른 길이의 두 변이 존재한다.

등변다각형을 얻을 수 있다. 실제로, 극한은 [그림 1]과 같은 타원변형의 조작으로 더 이상 넓이를 키울 수 없는 상태, 등변인 경우를 의미한다.

이제, 변분법을 사용하지 않고, 직접적으로 존재성을 증명하는 방법을 생각해 보자. 이는 긴밀공간(compact space)에서 연속함수는 최댓값을 가진다는 잘 알려진 정리를 사용하여 존재성 문제를 살펴보는 것이다. 즉, 다각형의 면적을 주는 함수가 연속함수가 됨을 구체적으로 알아본다.

둘레의 길이가 일정한 경우 오목 다각형보다 볼록다각형이 면적이 크기 때문에 ([그림 2] 참조) 여기서는 볼록다각형인 경우만 고려해도 무방하다.



[그림 2] 오목다각형과 볼록다각형

먼저, 삼각형 T인 경우를 생각해보자. 일반성을 잃지 않고 삼각형 T의 세 꼭짓점이 반시계 방향으로 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$의 순서평면에 놓여 있다고 생각하자. 이 경우 T의 면적 A_T는 다음과 같이 주어진다([3, p. 87]).

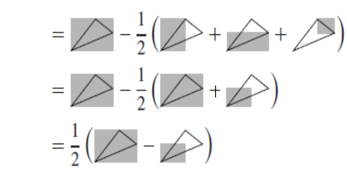
$$A_T = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)\}^{7)}$$

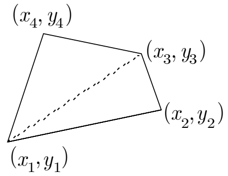
이제 사각형 R인 경우를 생각해보자. [그림 3]과 같이 (x_1, y_1)을 중심으로 두 개의 삼각형으로 분리해서 생각하면 사각형 R의 면적 A_R은 다음과 같다.

$$A_R = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}$$

---

7) 식의 가장 오른쪽은 아래와 같은 기하적인 방법으로 알 수 있다([4, p. 531]).





[그림 3] 점 (x_1, y_1)을 중심으로 한 삼각형화

일반적으로 $n-$각형 P의 면적 A_P는 다음과 같이 주어진다.

$$A_P = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_{k+1} & y_{k+1} & 1 \\ x_{k+2} & y_{k+2} & 1 \end{vmatrix}$$

한편, 평면 R^2에서의 $n-$각형 전체 집합은 유클리드 공간 $(R^2)^n = R^{2n}$으로 간주할 수 있다. 따라서 둘레의 길이가 L인 $n-$각형 전체 집합 P_L은 $(R^2)^n = R^{2n}$의 부분집합으로 생각할 수 있다. 즉, P_L은 다음과 같은 집합이다.

$$P_L = \{P = \left((x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n) \right) \mid l(P) = L\}$$

여기서, $l(P)$는 다각형 P의 둘레의 길이를 나타낸다. 둘레의 길이 함수 l은 평면에서의 두 점 사이의 거리함수의 합으로 나타나기 때문에 l은 R^{2n}상에서 연속함수이다. 따라서 $P_L = l^{-1}(L)$은 R^{2n}상에서 닫힌 집합(closed set)이다. 한편 P_L은 R^{2n}에서 유계(bounded)인 집합이다. 실제로, $t_{(-x_1, -y_1)}(P_L) \subseteq I \times I$, 여기서 $t_{(-x_1, -y_1)}$은 $(-x_1, -y_1)$만큼의 평행이동이고, $I = [-L, L]$이다. 따라서 P_L은 R^{2n}의 긴밀(compact) 부분집합이다.

이제, 행렬식 함수가 연속함수(유클리드 공간에서의 덧셈과 곱셈이 연속)이기 때문에 유클리드 공간 R^{2n}상에서 면적 함수 $A : R^{2n} \to R$, $A(P) = A_P$는 연속함수이고 따라서 면적 함수 A의 P_L상의 제한함수(restriction of A on P_L) $A|_{P_L} : P_L \to R$는 연속함수이다. 따라서 최대·최소 정리([11, p. 175])에 의해서 면적이 최대인 $n-$각형 P가 존재한다.

Ⅳ. 교육적 시사점

등주문제는 로마 건국 신화에서 언급된 Dido 여왕의 문제로 알려진 고대 그리스시대로까지 거슬러 올라가는 오래된 최적화 문제이다. Zenodorus와 Steiner의 우아한 기하적인 증명은 해의 존재성 가정이라는 치명적인 약점을 가지고 있었음에도 불구하고 매우 직관적인 아이디어를 우리에게 제공하고 있다. 1879년 비로소 Weierstrass에 의한 변분(variation)법을 이용한 해의 존재성이 엄격하게 증명되었다.

일반인의 세계, 심지어 수학영역을 제외한 다른 학문영역의 세계에서는 존재성의 문제를 크게 중시하지 않는 경향이 있다. 특히, 구성주의(constructivism)가 하나의 교육철학으로 바탕이 되고 있는 현 교육현장에서는 더욱 더 그러하다. 등주문제의 역사와 존재성의 문제를 살펴보고 얻을 수 있는 교육적 시사점은 다음과 같다.

첫째, 등주문제의 역사적 과정 속에 드러난 해의 존재성 논쟁을 통해 수학내적인 과정을 알아볼 수 있는 기회를 얻을 수 있다. 이는 수학화의 관점에서 역사 발생적 측면([1, pp. 131-146])을 강조하는 수학교육의 좋은 사례가 될 수 있다.

둘째, 서론에서 언급한 Perron의 역설처럼 수학적인 세계에서는 존재성의 문제가 매우 중요하며 존재성의 가정이 치명적인 위험성을 내포하고 있음을 볼 수 있다. 다음 <표 1>은 삼각형의 등주문제와 Perron의 역설의 증명과정을 비교 설명하고 있다.

<표 1> 삼각형의 등주문제와 Perron의 역설

	삼각형의 등주문제	Perron의 역설
명제	둘레의 길이가 같은 삼각형 중에서 넓이가 가장 큰 삼각형은 정삼각형이다.	모든 양의 정수 중에서 1이 가장 크다.
증명	모든 둘레의 길이가 같은 삼각형 중에서 넓이가 가장 큰 삼각형을 T라고 가정하고, 결론을 부정하자. 즉, T가 정삼각형이 아니라고 하자.	모든 양의 정수 중에서 가장 큰 양의 정수를 n이라고 가정하고, 결론을 부정하자. 즉, n이 1이 아니라고 하자.
	그러면 T의 어느 두 변의 길이가 다르다. 그 두 변을 a,b라고 하자. 그 나머지 한 변의 길이를 고정하고 두 변 a,b 길이의 평균을 두 변의 길이로 가지는 새로운 이등변 삼각형은 둘레의 길이는 T와 같지만 T보다 면적은 더 크다. 이는 가정에 모순이고, 따라서 T는 정삼각형이다.	그러면 n^2은 n보다 큰 정수이다. 이는 가정에 모순이고, 따라서 n은 1이다.

그러나 등주문제를 중심으로 한 영재 프로그램에서 강사들조차도 해의 존재성 문제를 크게 염두에 두고 있지 않음을 알 수 있다 ([2, p. 445] 참조).

셋째, 3장에서 논의한 것처럼 해의 존재성 문제를 어려운 변분법을 사용하지 않고 좀 더 쉽게 접할 수 있는 방법인 수열과 연속성을 사용하여 구체화할 수 있는 기회를 가질 수 있음을 보여준다. [그림 4]는 수열을 이용하는 재귀적인 방법을 Python으로 코드 한 예를 보여준다.

```
import numpy as np
import sys
sys.setrecursionlimit(10000)

def heron(a,b,c):
    if a + b <= c or a + c <= b or b + c <= a:
        return 0
    else:
        s = (1 / 2) * (a + b + c)
        return np.sqrt(s * (s-a)*(s-b)*(s-c))

def iso(a, b, c):
    if a != b:
        print(round(heron(a,b,c),12))
        return iso((a+b) /2, (a+b) /2, c)
    else:
        if b != c:
            return iso(b, c, a)
        else:
            print(round(heron(a,b,c),12))
```

```
>>> iso(10, 2, 9)
8.181534085977
17.858821349686
20.621590627301
21.046822800603
21.177956921644
21.207350352752
21.215100161289
21.216986199445
21.217464054114
21.217582719688
21.217612485529
21.217619914539
21.217621773347
21.217622237854
21.217622354005
21.21762238304
21.217622390299
21.217622392114
21.217622392568
21.217622392681
21.217622392709
21.217622392716
21.217622392718
21.217622392719
21.217622392719
21.217622392719
```

[그림 4] 삼각형의 등주문제

끝으로, 해의 존재성 문제 때문에 등주문제의 기하적인 방법이 해석·대수적인 방법과의 전투에서 패배를 했음에도 불구하고 Steiner의 우아하고 창의적인 아이디어는 직관적 사고를 중시하는 수학교육적인 측면에서 그 가치를 인정해야 한다.

참고문헌

[1] 우정호 (2006). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울대학교출판부, 서울.

[2] 최근배 (2011). 초등 영재 교수·학습을 위한 평면에서의 등주문제 내용구성 연구-기하적인 방법을 중심으로-, 한국수학교유학회지 시리즈 A <수학교육> 50(4), 435-460.

[3] Anton, H. (1981). Elementary linear algebra. John Wiley & Sons, Inc. USA.

[4] Blasjo, V. (2005). The Evolution of the Isoperimetric Problem, *The American Mathematical Monthly, 112*, pp. 526-566.

[5] Edler, F. (1882). Vervollständigung der Steinerschen elementargeometrischen Beweise für den Satz, daß der Kreis grösseren Flächeninhalt besitzt, als jede andere ebene Figur gleich grossen Umfanges, *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg−Augusts−Universität zu Göttingen* 73-80.
[6] Gandz, S. (1940). Isoperimetric problems and the origin of quadratic equations, *Isis* **32** 103-115.
[7] Geiser, C. F. (1874). Zur Erinnerung an Jakob Steiner, Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft 56 215-251.
[8] Hales, T. C. (2001). The Honeycomb Conjecture. *Discrete and Computational Geometry,* 25 (1): 1-22.
[9] Heath, T. L. (1921) *A History of Greek Mathematics*, vol. 2, Clarendon Press, Oxford.
[10] Kline, M. (1985), *Mathematics for the Nonmathematician*, Dover, New York.
[11] Munkres, J. R. (1975), Topology: a first course, Prentice−Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.
[12] Perron, O. (1913). Zur Existenzfrage eines Maximums oder Minimums, *Jahresber. Deutsch. Math.−Verein.* **22** 140-144.
[13] Spivak, M. (1979), A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, vol. 4, 2nd ed., Publish or Perish, Berkeley, CA.
[14] Steiner, J. (1838). Einfache Beweise der isoperimetrischen Hauptsatze, *J. Reine Angew. Math.* **18** 281-296.
[15] Steiner, J. (1842). Sur le maximum et le minimum des figures dans le plan, sur la sph`ere et dans l'espace engeneral. premier memoire, *J. Reine Angew. Math.* **24** 93-162.
[16] Thomas, I. (1941). *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics*, vol. 2, Harvard University Press, Cambridge.
[17] Toomer, G. J. (1984). *Ptolemy's Almagest,* Gerald Duckworth & Co. Ltd, London.
[18] Virgil (Edited by Anthony Uyl). (2016). The Aeneid, Woodstock, Ontario, Canada.
[19] Weierstrass, K. Mathematische Werke, vol. 7, Mayer & Muller, Berlin, 1927.

Hosoo Lee
Department of Mathematics Education, Teachers College
(Elementary Education Research Institute)
Jeju National University
Jeju 63294, Korea
E-mail: hosoo@jejunu.ac.kr

Keunbae Choi
Department of Mathematics Education, Teachers College
(Elementary Education Research Institute)
Jeju National University
Jeju 63294, Korea
E-mail: kbchoe@jejunu.ac.kr