East Asian Math. J.
Vol. 36 (2020), No. 2, pp. 147-172
http://dx.doi.org/10.7858/eamj.2020.013

중등학교에서 수학적 모델링을 위한 모델링 문항 구성에 관한 연구[1)]

A Study of Modelling Task for Mathematical Modelling in the Secondary Schools

오 춘 영[2)]

ABSTRACT. The purpose of this study is to provide to understand correctly for teachers and pre-service teachers who have the wrong conception of mathematical modeling. We present the differences modeling problems and general application problems to identify between general application and modeling problems. We propose the entire process from modeling tasks development to solve the problems of mathematical modeling. Additionally, the entire process of the possible solutions was concluded for the presented modeling problems. We proposed what students and teachers should perform at each stage of each phase of the modeling cycle. The concrete tasks were suggested for teachers and students at each phase of modeling cycles, with the specific role of the teacher in the overall process for students' modeling activities.

Ⅰ. 서론

1. 연구의 필요성 및 목적

교수·학습 방법은 시대의 변화와 필요에 의해 개발되고 발전되어 왔다. 1968년 한스 프로이덴탈은 '수학을 실용적이 될 수 있도록 가르치는 방법'(How to teach mathematics so as to be useful)에 관한 연설에서, 수학 교육이 실세계

Received January 7, 2020; Accepted February 21, 2020.
1)본 논문은 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임 (2017R1E1A1A03070901)
2010 Mathematics Subject Classification: 97D40
Key words: Mathematical modeling, Modeling problems, Modeling cycle,
2) Corresponding author

를 바탕으로 한 문제를 포함하여 학생들이 수학이 가치가 있음을 인식하도록 하는 수학교육을 주장했다. 수학적 모델링은 실세계 문제해결을 위해 수학이 유용하게 인식될 수 있도록 가르치는 방법들 중 하나라 할 수 있다.

학생들이 수학 지식을 키우고 기능을 습득하여 문제 해결능력을 키우는 전통적인 수학교육만으로는 학생들이 급격한 사회 환경의 변화에 대처하는 것이 충분하지 못한 시대가 되었다. 수학능력에 대해 Dunya, et.al(2016)은 1,000명의 공과대학생 1학년을 대상으로 한 연구에서 전통적인 SAT(Scholastic Aptitude Test)의 성취능력은 교실에서 수행하는 수학적 모델링 성취능력과 거의 상관관계가 없다고 하였다. 따라서 수학교육에서 수학적 모델링을 특수영역으로 분류하여 모델링 교육을 해야 할 필요가 있다고 주장하였다.

사회 환경의 변화에 따라 교육부(2015)도 “교육과정 구성의 중점은 미래사회가 요구하는 핵심역량을 함양하여 바른 인성을 갖춘 창의·융합형 인재를 양성하는 데에 중점을 두고 있으며, 다양한 분야의 지식과 경험을 융합하여 창의적으로 문제를 해결하고, 새로운 상황에 능동적으로 대처하는 능력을 기르고자 한다”고 하였다. 이에 '수학 기반 핵심 역량 육성', ‘수학 가치의 보급 및 유용성 인정', '고급 지식의 확립'등 지식 정보화 시대를 선도 할 창의적 인재와 합리적인 시민을 양성하고자 한다. 또한 학교교육을 위해 2015개정 교육과정은 문·이과 칸막이가 없는 인문·사회·과학기술에 관한 기본 소양을 토대로 미래 사회가 요구하는 인문학적 상상력과 과학기술 창조력을 두루 갖춘 창의·융합형 인재를 양성하는 교육과정으로 정했고, 또한 핵심역량을 반영하여 교육과정을 개선하였다(교육부, 2015).

지난 사십여 년 동안 수학적 모델링 및 응용 프로그램의 도입과 정보 기술의 도입은 아마도 전 세계적으로 가장 두드러진 수학 교육과정 개혁일 것이다. 이후 이에 관련된 많은 연구들(Lesh 2003; Pollak, 2007; Niss, Blum, & Galbraith, 2007; Haines, & Mcffie, 2016)이 있다.

국내에서도 수학적 모델링에 관해 1990년대 초 연구가 시작되어 연구결과들(강옥기 2010; 권기석, 박배훈 1997; 김인경 2012; 손홍찬, 류희찬 2007; 김민경 외 2009; 정미라 2015; 황혜정 2007; 이기열, 이병수 1999; 서지희 외 2013; 박슬희 2013; 홍정희, 송순희 1995; 황혜정, 민아람 2018; 홍지연 외 2010; 박선영, 한선영 2018; 정해윤 외 2018)이 많이 있다. 빠른 환경변화에 대응을 위해 수학적 모델링은 여전히 교수·학습에 대한 관심이 있는 주제다. 따라서 효과적인 교수·학습을 위한 연구가 필요하다.

연구결과에서처럼 교사들이 수학적 모델링 교수·학습을 도입하여 학생들의 수학 능력을 향상시키려는 다양한 노력이 있지만, 여전히 교실에서 교사들의 수학적 모델링 교수·학습이 충분하지 않은 실정이다. 수학적 모델링 교수 학습을 위한 모델링 문제, 수학적 모델, 그리고 수학적 모델링에 대해 교사들이 가지고 있는 개념에 대한 연구를 살펴보면, Gould(2013)는 일부교사들은 수학적 모델링 문제 상황이 실 세계에서 발생하는 상황이란 것을 인식하지 못한 경우들이 있고, 이로 인해 수학적 모델링 상황이 때때로 기발하거나 비현실적인 상황에서 비롯될 수 있다고 생각한다고 하였다. 또한 많은 교사들이 수학

적 모델링 문제를 알기는 하지만, 수학적 모델링 문제와 모델링 문제가 아닌 문제와의 차이를 구별하지는 못한다고 주장하였다. 10년간의 국내 수학적 모델링에 관한 연구결과를 분석한 황혜정(2007)의 연구에서도 유사하게, '수학적 모델링 문제에 대해 어떤 문제가 수학적 모델링을 위한 문제가 될 수 있는지 명확하지 않았다'고 하였다.

본 연구자가 예비교사 7명과 교사 3명에 대해 수학적 모델링 문제 만들기 과제에 대한 설문조사에서, 교사들은 실생활 소재를 바탕으로 한 응용문제와 같다는 대답을 하였고, 예비교사의 일부는 막연하게 현실을 반영하는 어떤 문제일 것이라고 대답을 하였고, 일부는 모델링에 대한 인식이 없다는 대답을 하였다.

또한 Gould(2013)에서 수학적 모델에 대해, 일부 교사들은 수학적 모델이 물리적 조작으로 잘못 생각하고 있으며, 수학적 모델을 사용하여 실제 상황을 설명 할 수 있다는 것을 이해하지 못하여 수학적 모델 사용에 대한 오 개념을 나타낸다고 하였다.

Gould(2013)은 교사들이 수학적 모델링 과정은 순환 단계를 반복하는 과정이라는 특징을 가진다는 것을 알고 있으나, 수학적 모델링 순환과정의 단계에서 일반적으로 선택과 가정이 항상 있어야 한다는 사실을 인식하지 못한다고 하였다. 그리고 김민경 외(2009)는 교사들이 수학적 모델링에 관한 인식이 부족함을 지적하였다.

수학적 모델링을 수행하는 학생들에 대해, Blum & Ferri(2009)은 교실에서 수학적 모델링 활동을 수행하는 과정에서 지도하는 교사가 놓치는 세 가지 문제점을 지적하였다. 하나는 모델을 구성하는 단계에서 일반적인 문장제 문제를 해결했었던 것처럼 문제의 본질적인 상황을 고려하지 않고, 문제에 포함되어 있는 모든 수(numbers)에만 관심을 가진 점이다. 두 번째는 단순화하는 단계에서 적절한 상황 모델을 수행하였으나, 상황맥락에 포함되어 있는 내용의 본질적 가치를 알지 못하여 가정을 하지 못하였다. 마지막으로 수학적으로 도출한 해를 실세계에서 해석을 하고 유효한 해가 될 것인지에 대한 검증단계에서 전혀 확인하지 않는 점을 지적하였다. 이에 대해 교사가 수학적 모델링을 위한 문항을 어떻게 알고 있는지를 분명히 할 필요가 있고, 모델링 활동에 대한 경험이 필요함을 의미한다고 할 수 있다.

모델링 수업은 특별히 관심을 가져야 할 단계가 현실 세계에서 수학세계로의 전이단계인 수학화 단계와 수학적으로 해결한 해가 실세계에서 유효한지 유효성을 검증하는 수학세계에서 실세계로의 전이단계다. 그래서 일반적으로 모델링 활동에서 수학화로의 전이 단계가 어렵다는 것은 잘 알고 있으나, 반대의 경우는 일반적으로 학교에서 해결되는 모델링 문제의 유형에 따라 모델의 적절한 해가 구해졌을 것으로 기대하거나 수학적으로 구한해가 적절하기 때문에 검증을 소홀히 할 수 있다(Blum & Ferri, 2009; Voskoglou. M. G, & Phil M. 2011). 하지만 모델링 문제에서는 실세계 문제의 해를 구하는 것이므로 구한 해가 수학적으로 적절한 해가 될 수 있을지라도 전통적인 교과서에 있는 응용문제와 달리, 실세계 상황에서 유효하지 않는다면 해의 의미가 없기

때문에 실세계에서 분석을 하며 타당성을 검증을 해야 한다.

따라서 교실에서 교사가 수학적 모델링 교수학습을 위해서는 수학적 모델링 문제가 어떤 문제인지를 분명하게 알아야 할 필요가 있고, 교사스스로 수학적 모델링에 대한 충분한 이해와 풍부한 경험이 필요함을 인식할 필요가 있다.

2. 연구의 목적

연구자들에 의하면 수학적 모델링을 교실에서 활용하기 위해서는 모델링 활동에 대한 상당한 경험이 필요함을 시사한다(Malkevitch, 2012; Dunya, et. al., 2016). 본 연구의 목적은 모델링 문제나 수학적 모델링에 대한 오 개념을 가지고 있는 교사들과 예비교사들이 수학적 모델링 문제와 수학적 모델링에 대해 정확한 이해를 돕고, 수학적 모델링을 위한 문제 고안과 수학적 모델링 순환을 활용하는데 도움이 되고자 한다.

이를 위해 연구 내용은 일반적으로 전통적인 응용문제와 수학적 모델링 문제와의 차이를 분명히 하고, 모델링 문항을 개발하고 개발된 문제를 모델링 순환을 적용하여 해결이 가능한 방안을 제시한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 수학교육에서의 수학적 모델링

'모델링'이라는 단어는 라틴어 '모델루스`에서 유래했다. 모델루스는 현실에 대처하는 전형적인 인간의 방법을 설명한다. 천문학과 건축은 이미 기원전 4천년 경에 수학적 모델 역할을 수행한 분야다. 기원전 2,000년까지 적어도 세 개의 문화 (바빌론, 이집트, 인도)와 이들보다 늦은 황하문명은 수학에 대한 지식이 있었다. 일상적인 생활을 개선하기 위해 수학적 모델을 사용했다는 것은 잘 알려져 있는 사실이다(Pardalos & Hearn 2004, pp.24). 흔히 수학이 '자연을 설명하는 언어'라는 표현을 사용한다. 이는 실세계 상황을 수학으로 표현하는 수학적 모델을 의미한다. 위와 같이 수학은 수학적 모델링 교육을 통해 수학교육의 실용적인 가치를 제공할 수 있다.

현대 연구자들은 수학적 모델링에 대해 1970년대 이후 지난 40년 동안 수학적 모델링에 대한 연구를 해왔다. Blum & Leiß (2007)은 '좋은 수학 교육` 에 대한 교수학습에 대해 질적 기준을 설정하여 정의하였는데 그중 두 가지가 먼저 학습자의 능력, 특히 모델링 능력을 습득하여 수학내·외부의 다양한 연결 고리를 만드는 다양한 기회를 제공하는 수학적 주제를 가르친다. 다음으로는 학생들의 메타인지를 포함한 지속적인 인지 활동을 자극하고, 학생들의 자율과 독립을 촉진함으로 학습자의 인지능력을 활성화 하는 것이다. 이는 수학적 모델링 활동으로 학생들의 사고를 확장할 수 있는 도야적인 가치가 있

다고 할 수 있다.

수학 교육에서 교육적 관점의 주된 아이디어는 수학적 모델링과 모델을 통합하고 모델링을 수학 학습의 수단의 중요한 역량으로 활용하는 것이다. 수학적 모델링은 학생들의 실제 경험과 수학 사이의 간격을 연결한다. 학생들의 수학 학습에 동기를 부여하고, 학생들이 개념에 대한 인지적 지원을 직접 제공하며, 실제 생활 상황을 설명하고 이해하는 수단으로 문화부문에 수학이 활용되어 심미적 가치가 있다(Blomhøj, 2008).

이제 실제 현실 상황에서 수학을 사용하여 학생들이 실세계 문제를 해결하도록 하며 수학적 가치를 느낄 수 있는 목적을 위해 먼저 수학적 모델링과 관련된 용어들의 의미를 정의한다.

2. 용어의 설명과 특징

가. 수학적 모델

모델(model)은 실제 사물을 단순하게 설명한 것이다. 여기서 관심을 가진 모델은 수학적 모델로 실세계의 대상(real-world objects)을 수학 언어로 표현한, 공식화된 수학적 대상으로 표현(Pardalos & Hearn 2004)하는 것이다. 실제 대상과 그 대상의 거동을 수학적으로 표현한 것으로, 수학적 모델은 실제 상황이 어떠한 특정한 방식으로 일어나는 이유를 설명할 수 있고, 또한 미래에 대한 상황을 예측하기 위해 만든다. 수학적 모델에 대해 Pollak (2003)은 수학적 모델을 ‘실제 상황을 수학적으로 표현하는 것’으로 간단히 정의하였다.

나. 수학화(mathematising) 또는 추상화

프로이덴탈(1968)은 수학적 모델링 활동의 핵심을 ‘수학화(mathematising 또는 mathematisation)’라 하였다. 수학화란 ‘현상을 수학적 수단에 의해서 조직하는 것’을 의미하는 것으로 수학적 개념, 아이디어, 구조 등을 포함하는 수학적 수단에 의해 현실의 경험을 형식화, 체계화시켜 나가는 것을 의미한다.

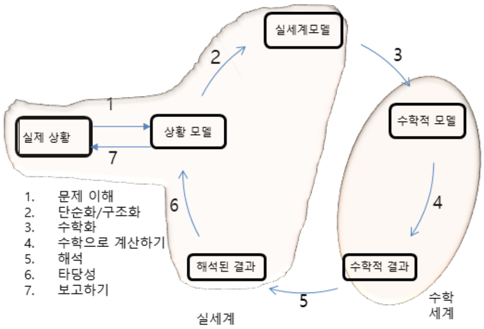
모델링 활동에서 수학적으로 설명하는 가장 어려운 과정이 수학화(Lesh, 2003, Voskoglou. M. G, & Phil M. 2011)단계다. 이는 수학 지식과 능력이 수학적 모델링에 대한 지식과 능력으로 전이되는 것은 아니기 때문이다. 수학화는 다양한 요소의 영향을 받으며 현실을 변화시키고, 확장하고, 심층적으로 계속되는 과정이다(Johnson & Lesh, 2003, 재인용: 김인경 2012).

수학화 과정에서 이루어지는 수학적 활동의 대표적인 예는 형식화, 공리화, 도식화 등을 들 수 있다. 여러 상황에서 수학적인 내용을 발견하여 추상화, 일반화하고 도식화하고 국소적으로 조직하고 형식화하며 관점의 전환에 의해 공리화에 이르기까지 전 과정에는 여러 가지 활동이 포함되는데 이와 같은 과정을 수학화라 한다.

다. 모델링 순환(cycle) 혹은 모델링 과정

모델링 문제를 해결하는 과정에서는 종종 여러 단계를 거쳐 어떤 단계로 되돌아올 수 있는 사실을 반영하기 때문에 수학적 모델의 해를 구하는 과정에 순환(cycle)이 포함(참고.[그림1])되는 의미에서 모델링 순환이라 한다. 이처럼

문제를 해결하는 과정에 순환이 필수적으로 포함되어 있다(Blum & Leiß, 2007, 강옥기 2010, Kaiser & Stenter, 2013, Schoenfeld, 2013, Bliss, et al. 2014, GAIMME, 2016, Carlson, et.al., 2016). NCTM(1989, 재인용: 강옥기 2010)은 수학적 모델링의 가장 기본적인 순환 과정 4단계를 제시하였다. Blum, & Leiß, (2006)의 모델링 순환의 예시는 [그림 1]과 같다. 또한 모델링 순환에 대한 많은 연구들이 있는데 연구자에 따라 4단계에서 7단계까지 분류(Maaß, 2010; GAIMME 2016; Jacob & Zwaneveld, 2012; 정해윤 외 2018)한다. 또한 모델링 문제의 해를 도출하기 위해, 문제를 정의하고, 가정과 변수를 정하고, 해를 구하여 모델에 대한 분석, 검증을 통래 결과를 보고하는 활동전체를 모델링 과정이라 부른다.



[그림1]. Blum & Leiß, (2006)의 모델링 순환 모델

라. 응용문제

오랫동안 교과서에 실린 문제로 언어(language)로 표현된 문제이기 때문에 종종 문장제 문제나 응용문제라 부른다. 언어로 표현되기 때문에 모두 문장제 문제이며, 수학이 응용에 사용되는 문장제 문제를 수학의 응용으로 여긴다. 이 경우 단지 문제해결 과정에서 수학을 사용하여 문제의 해를 구하는 것만을 의미한다. 일부 응용문제에는 수학적 모델이 제공되는 특징을 가지며 문제에 대한 모든 관련정보를 제공한다(Bliss. et al. 2014). 응용이라는 개념이 실세계와 수학을 연결하는데 사용(Niss, Blum, Galbraith, 2007, p.11)되기는 하나 모델링 순환의 일부분이 적용될 수 있다.

마. 수학적 모델링

수학 내에서는 비교적 새로운 용어다. 설명이나 '정의 된' 방식은 분야마다 조금씩 다르다. GAIMME(2016, p.10)에서는 '수학적 모델링은 수학을 사용하여 실제 현상을 표현, 분석, 예측하기 위해 실세계 현상에 대한 통찰력을 제공하는 과정이다'라 하였다. 모델링은 실세계 문제를 해결하는 것으로 정의하는데 이는 실세계에 상황을 기본으로 하는 모델링 문제가 현실세계와 수학 사이를 왕복한다. 모델링 과정은 현실을 기반으로 하는 문제로 시작한다(Maaß, 2010). 실세계 상황을 바탕으로 한 문제를 수학적으로 해결하는 과정으로 "수학적 모델링 순환"을 사용하여 설명하는 것이 공통적이다([그림1]).

3. 선행 연구 고찰

가. 국내연구 내용

국내의 수학적 모델링 연구의 범주에서, 대다수 연구의 경우는 교실에 수학적 모델링 교수학습을 학생들에게 도입하기 위해 연구자가 모델링 문제를 개발하거나 알려진 문제를 수학적 모델링 문제로 재구성하여 적용한 연구다.

교실에서 학생들에게 수학적 모델링을 적용한 연구내용의 종류로 학생들의 성취능력에 관한 연구, 학생들의 모델링 활동에 대한 사례연구와 학생들의 메타인지에 대한 내용들이다(홍정희, 송순희, 1995; 정미라 2015; 박슬희 2013; 서지희, 윤종국, 이광호 2013; 박선영, 한선영 2018; Kaiser 2005; Oliveira & Barbosa, 2008; Blum 2011; Voskoglou & Phil 2011; Niss, 2015; Blum & Ferri, 2016).

모델링 문제와 관련된 모델링 연구는 기존의 문제를 모델링 문제로 재구성하거나 연구자가 개발한 학습자료 연구들(이기열, 이병수 1999; 권기석, 박배훈 1997; 강옥기 2010; 인은경 2012)이 있는데, 이기열, 이병수(1999)는 구성주의 입장에서 모델링 문제를 제시하였고, 제시한 문제를 모델링 순환의 4단계를 적용하여 문제해결 방법을 제시하였다. 권기석, 박배훈(1997)은 수학적 모델링 문제를 개발하여 교사들에게 수학적 모델링 자료가 고등학교에서 모델링 문제를 활용하는 것이 수학교육에 도움이 될 것인지에 대한 교사들을 대상으로 한 설문을 수행한 연구다. 그리고 강옥기(2010)는 교과서에 있거나 기존에 있던 문제들을 수학적 모델링 문제로 재구성하여, 그 문제들이 정교화가 가능함을 보여주었고 6단계의 수학적 모델링 순환을 적용한 문제 개발이다. 인은경(2012)은 실생활 문제를 4단계 순환을 적용하여 해결방법을 제시하였는데 수학적으로 구한해가 실세계에서 유효한 해가 될 수 있는지에 대한 타당성 언급은 생략되었다.

나. 수학적 모델링 문제

지난 3-40년 동안 "응용과 모델링"이라는 용어는 현실 세계와 수학 사이의 모든 종류의 관계를 나타내는 데 점점 더 많이 사용되어 왔다. 반면에, "모델링"이라는 용어는 현실에서 수학으로 방향에 초점을 맞추는 경향이 있고, 일반적으로, 관련 과정을 강조한다. 이와는 대조적으로, "응용"이라는 용어는 반대 방향인 수학에서 현실로 초점을 맞추는 경향이 있으며, 일반적으로, 수학적으로 풀이가 가능하고, 관련되는 수학적 모델이 이미 존재하는(만들어진) 현실 세계의 내용들과 관련된 대상을 강조한다. 응용문제를 해결하는데 수반되는 변환과정은 간단하다. 이는 모델링 순환에서 부분적으로 제한된 단계만 필요하다(Niss, Blum & Galbraith, 2007, p.10).

다. 수학적 모델링을 위한 문제설계

수학적 모델링을 위한 문제 진술을 위해 Gould et al.(2012)은 수학적 모델링 활동을 위한 모델링 문제와 문제 구성형식을 개발하였다(참고, [표 1]). 문제의 목적, 문제 진술, 선수학습, 학교 교과과정, 활동지, 필수적이거나 선택적

인 자료까지 6개의 영역을 포함한 구성형식과 문제 진술형식을 제시하였다(예시로 <부록 1> 참조).

문제 내용에 대해 학생들의 모델링 역량을 키울 수 있는 모델링 문제에 대해, Blum & Ferri (2016, p.72)는 모델링 문제를 설계하는 기준을 다음과 같이 제안하였다. - 가정과 변수 선택에 따라 여러 가지 해가 나올 수 있는 개방적이고, - 당연하지 않고 충분히 복잡해야하고, - 현실적인 실세계 내용이며, - 과제를 해결하기 위해 필요한 수학적 지식을 인지하여 문제에 접근을 가능하게 하고, - 해를 구하는데 흥미가 있는 문제로, - 모델링 주기의 모든 단계를 필요로 하는 문제로 6가지 기준을 제안했다. Zawojewski et. al.,(2003)에 의하면 공학적인 내용이 있는 모델링 활동에 대한 일부 학생들의 모델링 활동에 대한 첫 번째 반응은 좌절을 나타내었다고 하였다. 따라서 수학적 모델링은 “알고 싶어 하는 현실 세계에서의 어떤 것"을 확인하는 것으로 시작한다(Pollak 2007, p. 111)고 하였다.

(NCSM, 1977 Lenchner, 1983, 재인용: 김인경 2010)에서 제시한 ‘좋은 문제’의 특징에 대해 다음 사항들을 유념할 필요가 있다;

- 학생들의 흥미를 유발하며 도전하고 싶은 것이어야 하며, - 문제해결을 위해서는 다양한 방법이나 전략을 활용하도록 해야 하고, - 학생들의 능력과 수준에 적절해야하며, - 다양한 사고를 할 수 있는 기회를 제공해야 하고, - 문제 해결 과정에서 얻어진 지식과 경험을 또 다른 문제 해결에 전이가 가능하도록 도와주는 것이어야 한다고 하였다.

모델링 문제 교육 원칙에 대해 GAIMME(2016, p23)에서는 다음과 같은 5가지를 원칙을 참고하여 진술한다. - 현실세계가 개방적이고 복잡한 것처럼 모델링 문제는 개방적이고 복잡하다. - 교실에서 진정한 실세계 문제로 선택한다. - 큰 문제거나 작은 문제거나 시작이 중요하다. - 평가는 결과가 아니라 과정에 초점을 맞춘다. - 수학적 모델링은 모두 연결되어있다고 하였다.

라. 수학적 모델링 활동

수학적 모델링을 수행하는 일을 수학적 모델링 활동이라 하고, 이 활동에 대해서 (GAIMME, 2016)는 모델링 구성요소가 모델링 전체 과정에 어떻게 적용되는지 인식하는 것이 중요하며, 전체적으로 과정이 어떻게 작동하는지 이해가 중요 하다.

주어진 모델링 문제에 대해 모델링을 수행하기 위해 Carlson et.al. (2016)은 - 상황에 내재되어 있는 어떤 맥락 적 요인들이 고정되고 어떤 요인들은 변할 수 있는지, - 제약 조건과 변수를 조정하면 수학적 모델링의 해가 어떤 변화가 있는지를 조사해야 한다고 하였다. 그리고 수학적인 해의 검증에 대해 교사는 - 학생들은 어떤 가정하였는지 - 이 문제의 장점과 한계는 무엇이고 - 학생자신의 모델에 새로운 가능성이 있는지를 교사는 질문을 할 수 있다. 또한 - 학생의 수준에 따라 먼저 구한 해를 수정하게 할 수 있는지, - 상황에 대한 새로운 이해와 새로운 관점에서 모델링 순환의 어떤 단계에서 다시 시작할 수 있는지 살펴본다.

학생들이 모델링 활동을 위해 교실에서 교사의 역할에 대해 Carlson et. al.

(2016, p.123)은 그룹을 조직하고 학생들의 활동을 관찰하면서 필요시 그룹을 재조정하고 학생들의 활동에 대한 예측과 개입을 한다고 하였다. 또한 학생들이 모델링 과정에 참여하면서 수학적 내용을 발전시킬 수 있는지, 모든 학생들이 흥미롭고 접근할 수 있는 설정은 무엇인지, 모델링 과정에 참여할 때 어떤 수학적 이해와 통찰력이 나타날 수 있는지 자문해볼 것을 제안하였다. 그리고 (Maria. et. al., 2017)는 학생들이 창의적인 활동으로 참여하도록 어떻게 자극을 해야 할 것인가와 같은 내용들을 고려가 필요하다.

Ⅲ. 연구방법 및 절차

1. 연구 내용

가. 응용문제와 수학적 모델링 문제

수학적 모델링 문제에 대한 문헌들을 살펴보았을 때 국내의 경우는 모델링 문제를 제시한 연구들은 있으나 모델링 문제에 관한 연구는 없었다. 문헌들을 종합적으로 검토한 결과 수학적 모델링을 위한 문제의 상황과 특징은 전통적인 교과서에 사용되고 있는 응용문제와는 차이가 있다. 교과서에서 사용되고 있는 응용문제는 일반적으로 교과 내용에 필요한 수준만큼만 다루는 것이 일반적이다. 따라서 교과과정 수준에 따라 모델링 순환에서 어느 단계가 적용되어질 수는 있으나 모델링 순환 전체 과정이 적용되는 모델링 문제와는 다르다.

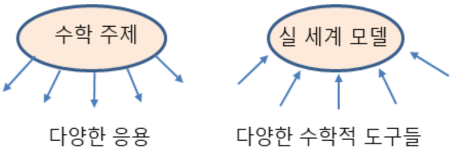
전통적인 응용문제와 수학적 모델링 문제 사이에는 다음과 같은 특징의 차이가 있다;

1)모델링 문제의 대상이 실세계 상황에서의 상황 모델이 대상이지만, 응용문제는 실세계 상황모델이거나 비현실적인 상황모델에서도 응용문제의 모델이 문제가 될 수 있다.

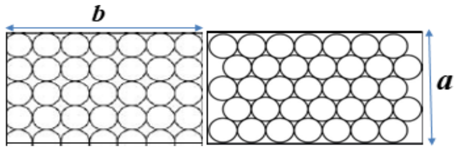
2)모델링 문제에서는 실세계 상황모델에서 단순화과정에서 일반적으로 가정과 제한을 한다. 이때 실세계 상황인 문제의 본질을 고려한 가정과 제한을 하지만, 응용문제에서는 문제의 본질까지 고려없이 할 수 있다.

3)방향성에 있어서 [그림2]의 (B)와 같이 실세계 상황을 바탕으로 문제가 먼저 제기되고 이 모델링 문제에 대해 필요한 수학내용을 도구로 사용하여 문제를 해결한다. 즉, 현실 상황문제를 어떤 수학 내용을 사용하여 주어진 문제를 해결 할 것인가를 고려하지만, 전통적인 응용문제([그림 2](A))는 제시된 수학내용을 가지고 이 수학내용을 어떻게 응용할 것인가를 생각하는 문제기 때문에 방향이 서로 다르다.

(A) (B) (A) (B)



[그림 2] 응용문제(A)와 수학적 모델링(B) 문제



[그림3] 박스내부에 원을 두 가지 방법으로 채우는 형태

4)응용문제는 구해진 해가 수학적으로 적절하고 내용에 적절하면 해가 의미가 있고 모델링 주기에서 제한된 일부가 필요할 수 있으나, 수학적 모델링 문제에서는 구해진 해가 수학적으로 풀이가 적절했을지라도 실세계로 돌아와 실세계에서의 상황모델의 본질에 유효한 의미가 있는지, 단순화 단계에서 제한과 가정을 했는데 가정과 제한에 대해 해가 어떻게 얼마나 변하는지에 따라 해가 의미를 갖게 되거나, 혹은 해가 의미가 없기 때문에 순환의 어떤 단계부터 다시 풀이를 계속해야한다.

나. 수학적 모델링을 위한 교수·학습자료

수학적 모델링 교수·학습을 위해서는 과제를 선택하거나 개발하는 것부터 시작한다. 수학적 모델링에 관련된 참고문헌들을 참고하여 수학적 모델링에 대한 정의와 특징을 분석하고, 이를 통해 교수학습 자료는 [예비설계]를 하였다. 학습자료 개발은 [예비설계] --> [교수실험]--> [문제 수정과 보완] 단계를 통해 개발하였다.

1) 수학적 모델링 문항 설계

본 연구에서는 먼저 [예비설계 단계]에서는 문항 설계를 위해 수학적 모델링에 관한 국내·외의 선행연구와 참고문헌들을 검토하였다. 또한 2015년 개정 수학과 교육과정의 내용 영역인 수와 연산, 문자와 식, 함수, 기하, 확률과 통계의 5개 영역으로 구성된 수학 교육과정 내용에서 수학적 모델링 과정 속에서 다양한 수학적 개념·원리·법칙을 활용하여 문제를 해결할 수 있는 실세계 문항을 선정 수학적 모델링의 목적에 맞게 설계한다.

[교수실험 단계]에서는 실험 대상은 중학교 2학년 영재교육원 학생 17명을 3모둠으로 구성하여 오후 1시에서 4시까지 과제를 수행하였다. 모둠 활동이 모두 마무리 된 후 각 팀별로 10분 동안 팀별로 풀이를 설명하도록 하였다.

마지막으로 [문제 수정과 보완단계]에서는 교수 실험을 통해, 얻은 정보로 문제를 정교하게 하였다.

2) 모델링 문항자료 구성형식

수학모델링 활동을 위한 모델링 문제 구성형식만은 Gould et al.(2012)에서 개

발한 구성형식에서 [표 1]에서 (4. 학교교과 과정) 항목에 국내 중등학교 교과 영역인 다섯 영역과 관련과목을 추가한 형식을 사용하였고, 문항 서술형식은 <부록 1>과 같은 형식을 사용하였다.

모델링 활동의 구성형식은 6가지로 내용으로 구성되었는데 본고에서는 문헌 연구에 근거하여 각각의 구성요소에 다음과 같이 제안 한다;

가) 목적 : 수학교육의 목적에서 실용성과 관련된 수학적 모델링의 문제를 바탕으로 Smith & Morgan (2016)의 교과과정 방향 논의에서 주요 근거인 ‘도구로서의 수학’인 교육목적과, 교육부(2015)의 교육과정 구성에서 창의·융합형 인재 양성과, 학생들이 어떠한 수학을 좀 더 깊게 이해할 수 있고, 수학의 유용성을 알고 학생들이 수학을 배우는 이유를 느낄 수 있음을 목적으로 한다.

나) 모델링 문제 진술 : 모델링 문제설계는 Blum & Ferri (2016)가 제안한 기준과, GAIMME(2016)에서 제시한 교육원칙과 연구자들이 공통적으로 제안한 ‘좋은 모델링 문제’를 활용하여 진술한다. −현실 세계의 상황과 관련하여 실세계 문제를 바탕으로 −개방적인 문제로 풀이 방법이 다양한 전략을 활용할 수 있고 −학생들의 흥미를 유발하면서 도전하고 싶은 것과 알고 싶어 하는 내용이고, −수학적 모델링 문제가 학습자들의 지식보다 좀 더 심화·발전된 형태로 고차원적인 사고를 요하는 문제여야 한다. −문제 해결 과정에서 얻어진 지식과 경험을 또 다른 문제 해결에 전이가 가능하도록 도와주는 것이어야 한다.

제 목:

1. 목적 :
2. 문제 진술:
3. 사전 지식 : 제시된 문제를 해결하기 위해 필요한 수학적 지식
4. 학교 교과 과정 : 관련 영역
 (1). 수와 연산
 (2). 문자와 식
 (3). 함수
 (4). 확률과 통계
 (5). 기하
 (6). STEAM과 기타 관련된 내용
5. 활동지:
(1) 수학 내용을 위한 활동지
(2) 수학 외적인내용을 위한 활동지
6. 기타 자료
(1) 필수 자료 : 문제를 위한 필요 자료들
(2) 선택된 자료: Internet, ICT 혹은 기타자료

[표 1] 수학적 모델링을 위한 구성형식

또한 다양한 분야의 지식과 경험을 연결하여 융합이나 협업과 창의적으로 문제를 해결할 수 있는(교육부, 2015), 기회를 제공할 수 있는 문제를 진술한다. 그리고 실세계 문제이기 때문에 구한 해가 유용한 해가 될 것인지 고려한다. 위와 같은 내용이 함의된 문제를 학생들에게 친숙한 시나리오를 구성하여 진술한다.

다)사전지식 : 수학 교실에서 전통적으로 문제해결을 잘하는 학생들에게 모델링 활동은 특히 도전일 수 있다. 수학적 모델링에서는 문제 선정이 먼저지만, 학교 교과 과정이 있기 때문에 학교 교과 과정에 적절한 문제를 선택하고, 모델링 문제를 해결하기 위해 필요한 내용이 무엇인지 제시하는 것이 도움일 될 수 있다. 학생들이 알기 어려운 수학외적 내용에 대해 문제 해결을 위한 융합이나 협업이 필요하다. 수학외적인 사전지식도 필요하다. 수학외적인 내용에 대해서는 필요하면 담당분야의 교사나 전문가의 도움을 받는다.

라) 학교교과 과정 연계: 모델링 문제는 학교 교육과정의 수학영역 내용과 관련될 분야가 어느 분야인지, 수학외적 분야의 어떤 내용과 관련이 되는지 교사는 미리 준비한다.

마) 활동지: 모델링을 처음 시작하는 학생들을 위해서는, 문제에 필요한 내용이나 아이디어들을 활동지 [표2]에 기록하게 하는 것이 도움이 된다. 기록한 내용들에서 모델링 수행과정에서 현실적이지 않거나 사용되지 않은 아이디어는 나중에 수정하거나 제거하면 된다. 단순화 과정에 필요한 내용은 수학내용과 수학외적 내용들이 될 수 있다.

[표 2] ⓒ는 모델링 활동이 모두 끝나고, 이 문제에 사용된 수학내·외적 내

제 목		
팀 이름		
진술 문제		
ⓐ 문제에 필요한 수학 외적인 내용		
ⓐ/ⓑ(실제 상황)	단순화/ 구조화/추상화 과정에 필요한 내용	가정과 제한, 변수내용
ⓑ 필요한 수학적인 내용과 도구		
ⓒ (풀이에서 요구된 수학내용과 개념 정리)	수학적 개념, 수학적 방법, 수학외적인 내용	

[표 2] 모델링 초보자를 위한 활동지

용을 기록함으로 학생 스스로 무슨 내용들이 활용되었는지 반성을 하는 기회를 가질 수 있다. 모델링 활동에 익숙한 학생들의 경우는 <부록 1>의 문제지만을 사용이 가능하다.

바) 기타 자료: 문제해결을 위해 팀원들은 토의를 통해 문제해결을 위해 필요한 정보는 무엇인지, 문제로부터 어떤 정보를 알 수 있는지, 정보를 어디에서 구할 것인가를 결정한다. 이를 위한 인터넷이나 참고자료가 필요하다. 즉, 문

제를 해결하는데 필요한 필수적인 자료와 선택적인 자료가 있다.

3) 모델링 응용문제와 모델링 문제 설계

전통적인 응용문제는 맥락을 통한 내용으로 주어진다. 따라서 학생들이 가질 수 있는 확장된 질문이나 학생들의 생각을 키우기 위해 문제 맥락에 맞는 어떤 기회를 제공하지 않는 닫힌 문제가 될 수 있다. 모델링 문제는 교사가 선택한 문제에 대해 문제를 해결해야하는 학생들 자신의 방법에 따라 문제 일부에 학생들의 의견을 추가 할 수도 있다.

본 논문에서는 모델링 문제를 두 가지 수준으로 설계한다. 응용문제를 수정하여 모델링 문제로 바꿀 수 있는 방법과, 실세계 상황을 기반으로 시나리오를 구성하여 모델링 문제를 설계하는 방법이다.

다음 문제는 중학생들을 대상으로 한 전통적인 응용문제라 할 수 있다.

“가로가 60cm이고 세로가 40cm이고 높이가 25cm인 박스에 음료수병을 담으려고 한다. 박스 안에 밑면의 반지름이 2.5cm이고 높이가 12cm인 음료수병을 한 박스에 가장 많은 음료수 병들을 담으려고 한다. 몇 병을 담을 수 있는지 구하시오.”

이 문제에는 학생들의 의견을 추가할 만한 기회가 없는 닫힌 문제다. 하지만 이 문제에서 음료수병의 반지름을 언급하지 않았다면 학생자신들의 의견을 첨가할 수 있다.

이 문제를 개방문제로 수정한다면 첫 번째로 음료수 캔이나 음료수 병으로 문제를 제공할 경우 대부분 학생들은 밑면이 둥근 용기를 생각하지만, 음료수 캔(병)을 음료용기라고 했을 경우 중학교 2학년을 대상으로 한 교수실험에서 3팀 중 2팀은 음료 용기를 육면체 모양의 용기를 선택했고 한 팀은 용기의 밑면이 원 모양의 캔 종류를 선택했다. 학생들의 사고활동을 확장하기 위해서는, 문제를 설계할 때 학생들의 생각을 제한하게 하는 용어 사용에 유의할 필요가 있다.

둘째는 박스의 가로, 세로와 높이의 길이에 관해서도 학생들 의견을 반영할 수 있게 하거나 가로, 세로와 높이의 각각의 길이를 “a cm와 b cm와 c cm”로 제공할 수도 있다. 박스 안에 넣을 음료 용기의 크기에서도 마찬가지로 학생들이 합리적인 값의 크기를 스스로 선택할 수 있도록 한다면 더 크게 개방된 문제가 된다. 문제를 어느 정도로 열린 문제로 할 것이지는 학생들의 모델링 수준에 달려있다. 이처럼 기존의 문제를 수정하여 모델링 문제로 바꿀 수 있는 방법이 있다.

또 다른 방법은 실세계 상황을 선택하여 문제의 시나리오를 구성한다. 이 문제는 운송을 해야 하는 음료 용기를 박스에 가능한 많이 담을 수 있는 방법인데, 시나리오를 구성하는 시작부터 어떤 조건은 넣고, 어떤 조건은 제외하면서 모델링 문제를 설계 할 수 있다. 교사는 앞에서 진술한 ‘문제 설계 기준’과 ‘좋은 모델링 문제’ 조건을 참고하여 학생들이 모델링 활동에서 어떠한 수학적 능력을 개발할 것인지에 따라 반복하여 개선된 문제를 개발 할 수 있다. 따라서 위 응용문제는 “운송을 위해 주어진 박스에 음료용기를 가장 많이 담

는다는 것"이 실세계 상황모델이다. 따라서 다음과 같이 모델링 문제로 설계하였다.

[문제 1] : "음료 공장에서는 운송경비를 절약하기 위해 음료 내용물이 손상이 없고 안전하며, 가능한 박스에 많이 담아 운송을 하려고 한다. 그렇다면 가로, 세로, 높이가 각각 a cm와 b cm와 c cm 박스 안에 가장 많은 음료용기들을 넣을 수 있는 방법을 구하시오."

이 모델링 문제는 모델링 문제 설계기준에 따라 실세계 상황과 관련되며, 개방 문제로, 중학생 수준에 적절하며, 학생들이 가게에서 만나는 익숙한 문제로, 음료용기를 다양한 모양으로, 박스에 채우는 방법을 다양하게 생각할 수 있어 학생들의 생각과 창의적인 생각을 기대할 수 있다. 개발한 모델링 문제는 <부록 1>에 첨부한다.

다른 문제는 고등학교 학생들을 대상으로 한 문제로 실세계 상황 모델을 시나리오를 사용하여 모델링 문제를 제시한다. 일반적으로 추운 겨울은 따뜻한 음료를, 더운 여름에는 시원한 음료를 선호하는데 수학적으로 이를 어떻게 설명할 수 있는가 하는 호기심은 가질 수 있는 문제다.

[문제 2] : "친구들과 함께 따뜻해지는 봄날 공원에서 얼음이 들어 있는 시원한 음료수를 구입하여 대화를 나누었다. 친구들과 30분을 이야기를 하다 음료수를 마시려고 보니 음료수에 있던 얼음이 모두 녹아 음료수가 시원하지 않아 시원한 음료를 다시 사야했다. 미지근해진 이 음료의 온도는 얼마나 될까?"

[문제 2]의 경우는 매일 접할 수 있는 실세계 내용으로 개방적인 문제다. 또한 따뜻한 물이 식거나 얼음이 녹는 현상은 잘 알고 있는 익숙한 사실이다. 하지만 계산을 어떻게 할 것인지 학생들의 생각을 기대할 수 있다. 물리적인 사실을 사용해 수학적 모델을 만드는 일이 수학화 과정으로 현상에 관한 내용을 잘 이해하기 위해 물리분야의 도움이 필요할 수 있다.

4) 문제 풀이를 위한 모델링 수행절차

모델링 문제에 대한 풀이를 위해 모델링에 익숙하지 않은 학생들에게 모델링 문제와 활동지 [표2]를 제공한다. Blum, & Leiß, (2006)의 모델링 순환을 기본으로 적용한다. 하지만 순환단계에서 단순화/구조화/수학화 단계에서 제한과 가정을 그리고 변수를 정하는 일은 실세계 상황에 근거하여 정해야 한다. 이를 위해 [표2]와 [표3]에 제시하였다. 각 순환은 제시된 문제의 풀이는 풀이를 하는 과정에서 필요한 단계에서 풀이를 할 수 있기 때문에 단계 번호를 사용하지 않는 것이 적절하나 설명을 위해 편의상 붙인다.

- 문항이해 단계: 선택된 문제 문맥의 내용을 읽고 복잡한 실세계 상황을 이해한다. 그림이나 사진, 맥락을 통해 상황 모델을 구성하고 교사와 학생 모둠구성원 모두의 공통의 이해가 필수적이므로 모두가 충분한 이해가 될 때까지 원활한 의사소통을 위한 토의가 필요하다.

또한 문제에 포함되어 있는 특별한 용어의 의미를 공통으로 이해를 하지 않은 경우 풀이과정이나 해가 모둠구성원들 사이에서 다를 수 있다. 특히, 문제

에서 “가장 좋은 방법” 혹은 “최소의 값”과 같이 문장에서 사용되는 용어에 대해서도 모둠구성원들 모두는 그 용어에 대해 같은 의미로 정의를 하고 문제 수행 활동에 착수한다. 또 문제에 어떤 정보가 있는지, 필요한 정보는 무엇인지, 무엇을 추측하고 무엇을 구해야 하는지를 조사 한다.

모델링 단계		학생들의 가능한 활동	교사의 역할(관찰)
1.문항이해(실제 상황 ⇒상황모델)		- 복잡한 실제 상황이해 - 문제 정의를 위한 협상과 토의 - 문제 분석과 이해와 분석	- 문제의 동기 혹은 실제 상황에 관한 설명 - 문제의 맥락에 대한 발문이나 대답
2.단순화/구조화	실제 상황 ⇒ 수학적 모델	- 문제에 영향을 미치는 요소와 변수 정하기 - 실세계에 근거한 제한과 가정 - 수학외적인 내용에 대한 사실과 경험적 사실 사용	- 가정, 제한 전략 관찰과 질문 가능 - 수학외적인 내용준비 - 맥락에 적절한 요소 - 필요한 정보 인지
3. 수학화		- 알고 있는 수학적 내용 적용 - 수학외적인 내용 적용 - 실세계에 근거한 가정과 제한 - 수학적 모델 수립 - 수학적 모델 해석	- 실제 상황에서 수학 상황으로 전이 과정 관찰 - 수학과 과정에서 학생들의 막힘 관찰 -수학외적인 내용이나 과정 활용 관찰
4.수학적으로 해구하기(수학적 모델 ⇒수학적 결과)		- 수학적 지식과 기술 - 데이타 혹은 ICT활용 - 수학적 도구 활용 - 수학적 해 검토(근사해 가능)	- 데이타 혹은 ICT 활용법 - 수학적 도구 활용
5.실세계에서 해석(수학적 결과 ⇒실제 상황)		- 수학적으로 구한 해를 실세계에서 해석과 분석	- 실세계에서 해의 해석
6.타당성(실제 상황 ⇒상황모델)		- 실세계에서 해의 타당성검증 - 가정에 따른 해의 변화 검토 - 해가 충분히 좋은지 검증	- 가정에 따른 해의 변화 검토 - 해가 충분히 좋은가 - 또 다른 순환이 필요하지 않은가
		모둠별로 모델링 과정을 발표	학생과 함께 확인과 수정

[표 3] 수학적 모델링수행을 위한 학생과 교사의 활동 내용

- 단순화/구조화 단계: 문제에 영향을 미치는 요소들과 수학외적 내용에서 무엇을 제한하고 가정해야 되는지 결정해야 하는데 이는 실세계 상황에 근거하여 정해야 하는데 이는 실세계 문제에 적절해야하기 때문이다. 이 단계에서 사용한 가정과 제한이 수학적 결과가 유효한지 타당성 검증 단계에 영향을 미친다.

- 수학화(추상화) 단계: 각 단계를 수행하는데 있어 추상화(정밀화) 단계가 가

장 어려워하는 단계로 잘 알려져 있다. 이는 실세계의 수학외적 내용에 대한 현상이나 과정을 수학세계로 전이시키는 과정으로 수학모델로 표현하는 단계이기 때문이다. 그리고 단순화/구조화 단계에서 정한 제한과 가정이 실제상황에 근거했듯이, 추상화에서도 실제상황에 근거한 제한과 가정이 있을 수 있고 변수를 정한다. 또한 각 기호에는 단위가 있음도 고려해야 한다. 이 단순화/구조화단계를 적용한 수학화 단계에서는 수학외적 내용을 사용해야 할 때 수학외적 분야의 전문가 도움이 필요할 수도 있다.

- 수학적으로 해 구하기: 이 단계는 위 수학화 단계에서 세워진 수학적 모델을 수학적 능력과 지식을 바탕으로 문제를 해결하는 순전히 수학적인 단계다. 따라서 교실에서는 교실에서의 모델링 문항은 이 단계에 필요한 수학수준을 고려하여 문제개발을 할 수 있다. 이 과정에는 데이터나 소프트웨어를 사용할 수도 있고 다양한 수학적 도구를 사용하여 문제를 해결한다.
- 실세계에서 해석하는 단계: 수학적으로 구한 해가 수학적으로 적절한지를 검토하고, 구한 해를 실세계 상황으로 돌아가서 해석한다. 이 단계는 수학세계에서 현실세계로 변화가 있는 단계다.
- 타당성 검증 단계: 수학적으로 구한 결과가 실세계에 유효한 해가 되는지 타당성을 검증한다. 연구에 의하면, 학생들이 소홀히 하는 부분이기 때문에 교사는 이 단계를 유의해야 한다. 단순화/구조화 단계에서 수행한 가정과 제한에 따라 해가 다를 수 있다. 따라서 가정과 제한에 따라 해에 어떤 영향을 미치게 되는지 꼭 확인한다. 해가 충분히 좋지 않으면 순환과정의 어떤 단계로 이동하여 다시 순환과정을 계속한다. 타당성 검증 단계에 이르기 전에도 필요하면 순환의 필요한 단계로 이동하여 순환과정을 계속한다.

<표 3>은 학생들과 모델링 순환활동 각 단계에서 고려해 봐야할 필요한 내용을 요약한 것이다. 또한 모델링 활동을 하는 동안 각 단계의 순서가 고정된 것은 아니다. 수학적 모델링은 수학 모델을 수학적으로 계산을 하는 활동을 제외하고는 모두 실세계 상황에서 수행되는 특징을 가진다.

- 발표단계: 검증단계에서 해가 실세계 상황과 단순화 단계와 수학화 단계의 가정에 따라 유효성이 입증되면 모델링 순환 전체과정을 보고한다.

다. 학생들의 모델링 활동을 위한 교사의 역할

교사는 [표 3]의 교사 역할 이외도 모델링을 시작하기 전 모델링 문제를 선택하거나 개발하는 것부터 교실에서 학생들의 모델링 활동 후 발표까지 교실에서 발생할 수 있는 상황을 상상하고 예상할 수 있어야 학생들의 모델링 활동이 성공할 수 있다. 따라서 교사는 모델링 활동 전체 과정을 위해 다음과 같은 점들을 고려하고 준비할 필요가 있다;

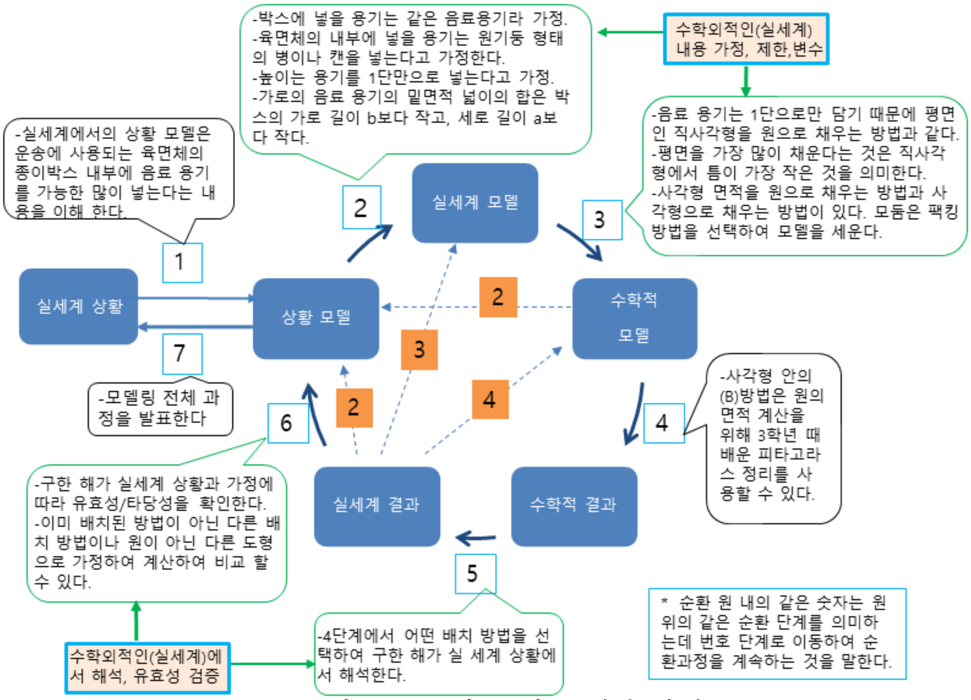
- 학생들은 문제의 문맥에 대해 어떤 종류의 질문을 할 것인가. - 학생들이 필요로 하거나 원하는 추가적인 정보는 무엇인가. - 부가적인 필요한 정보를 어디서 어떻게 얻을 수 있을 것인가.
- 모델을 구성하기 시작하면서 어떤 가정을 어떻게 하게 될 것인가. - 모델링 과정은 학생들의 메타인지(meta-cognition)활동이 요구되는 활동이므로 어느

시점에서 학생들이 막힐 가능성이 있는가. – 수학적으로 어떤 접근법이 필요할 것인가. – 모둠 전체와 소규모 모둠이 토론의 균형을 어떻게 맞추는 것이 좋은가.

위의 내용과 함께 [표 3]은 각 단계에서 고려해 볼 수 있는 내용을 정리한 것이다.

라. 학생들의 제시된 수학적 모델링 문제의 가능한 풀이

모델링을 처음 시작하는 경우는 [표 3]에 제시된 내용을 참고하여 모둠 원들과 토의하여 시작한다. 수행과정에서 현실적이지 않거나 사용되지 않는 아이디어는 나중에 수정하거나 제거하면 되기 때문에, 모델링 활동에 필요한 내용은 [표 2]에 기록하면서 수행하는 것이 도움이 될 수 있다.



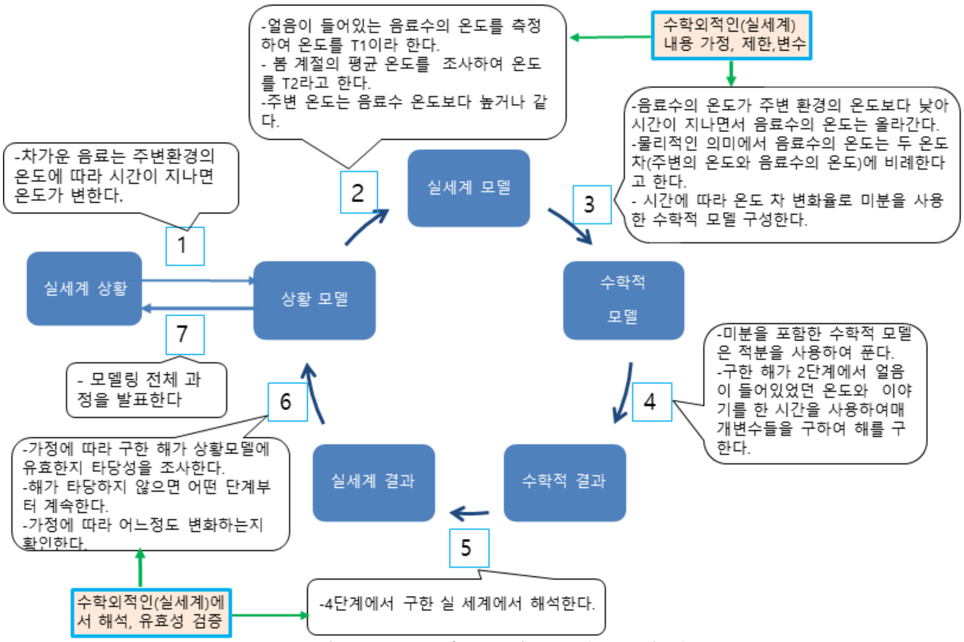
[그림 4] [문제 1]의 모델링 과정

[그림 4]에서 숫자는 순환단계를 의미하는데 같은 숫자는 같은 단계다. 제시된 모델링 [문제 1] 해결을 위해 [그림 4]와 같이 모델링 순환을 적용하여 문제를 해결한다. [문제 1]을 해결하는 과정의 [상황 모델]에서 [실세계 모델]로의 단순화/구조화 단계와 [실세계 모델]에서 [수학적 모델]로의 추상화 단계는 [그림 4]의 우측위에 제시한 것처럼 가정과 제한을 하고, 변수를 정하는데 이는 실세계 상황을 바탕으로 정해야 한다.

또한 [수학적 결과]에서 [상황 모델]까지의 과정 역시 [그림 4]의 좌측아래에 제시한 것처럼 수학적 결과를 실세계로 이동하여 실세계에서 해석하고 해의 타당함을 검증해야 한다. 따라서 수학적으로 해를 구하는 활동 이외는 수

학외적인 활동이라 할 수 있다.

[문제 1]에서는 용기를 원기둥 모양으로 선택했을 때 [그림 3]의 (A)와 (B)의 두 가지 방법과 혹은 육면체의 용기를 선택한다면 밑면이 직사각형과 모양으로 채우는 방법을 계산할 수 있다. 모델링 과정에서 [수학적 모델]에서 실선 4단계로 [수학적 결과]로 진행 방법을 선택할 수 있고, 가정이나 조건을 수정한다면 원 내부에 있는 점선 2단계는 [상황 모델]단계에서 가정이나 어떤 조건을 수정하여 다시 순환의 [상황 모델]에서 [실세계 모델]로 단순화 단계부터 순환활동을 다시 한다. 또한 [수학적 결과]의 해가 [실세계 결과] 혹은 [상황 모델]에서 타당하지 않으면, [그림 4]에서 보여준 것처럼 [상황 모델]이나 [실세계 모델] 혹은 [수학적 모델] 중 어떤 단계로 돌아가서 순환을 다시 계속해야한다.



[그림 5] [문제 2]의 모델링 과정

모델링 문제 [문제 2]를 해결을 위해서는 [문제 1]과 달리 수학외적인 물리내용이 포함된 문제다. 이는 물리적인 현상을 수학적인 모델로 구성해야 한다. 물리내용을 사용해 수학적 모델을 만드는 일이 수학화 과정으로, 현상에 관한 내용을 잘 이해하기 위해 물리분야의 도움이 필요할 수도 있다. 제시된 방법 [그림 5]는 물리적인 의미에서 “시간에 따른 온도 변화는 두 물질의 온도차에 비례한다.”는 내용을 사용한 것이다. 이 문제의 경우는 학생들이 실험을 해볼 수 있는 문제로 학생들이 데이터를 만들어 문제 해결을 시도할 수도 있고, 이미 물리적인 의미를 알고 있다면, 물리적 의미를 활용하여 수학적 모델을 세워 문제를 해결할 수도 있다.

Ⅵ. 결론 및 제언

1. 결론

수학적 모델링 교수학습을 위해서는 먼저 수학적 모델링문제와 수학적 모델링 대한 올바른 이해가 전제 되어야 올바른 해를 구할 수 있다. 따라서 본 논문의 연구 결과는 다음과 같다.

첫째는 모델링 문제와 일반적인 응용문제를 올바로 구별 할 수 있도록 전통적인 응용문제와 모델링 문제와의 차이점을 설명하였다. 응용문제와 모델링 문제의 차이를 구별이 가능하므로, 어떠한 문제가 수학적 모델링을 위한 문제가 될 수 있는지 명확하게 하도록 하였다.

둘째, 모델링 문항 학습자료 개발 방법을 제시하였다. 일반적인 실세계 응용문제를 덜 개방적인 문제에서 시작하여 점차 더 개방적인 문제로 나아가는 수학적 모델링 문제 개발과정을 제시하는 방법과, 현실세계를 기반으로 하는 시나리오를 구성하여 모델링 문항을 개발하는 방법을 제시하였다. 또한 모델링 순환의 각각의 단계에서 학생과 교사가 고려해야 될 내용을 상세하게 제안하였다.

셋째, 수학적 모델링 활동을 논의하는 가장 좋은 방법은 예제를 사용하는 것이다. 이를 위해 이전연구에서는 모델링 문제를 제시하여 모델링 순환을 적용한 풀이만을 제시하였으나, 본고에서는 개발된 문제를 모델링 순환의 각 단계의 특징과 각각의 단계에서 학생과 교사가 어떤 내용을 고려해야 될 것인지를 제안하였다. 제시된 두 모델링 문제의 가능한 풀이를 위해 모델링 전 과정을 [그림 4]와 [그림 5]의 개략적인 풀이 방안을 제시하였다.

넷째, 학생들이 모델링 문제해결 과정 중 단순화 단계에서 가정을 할 때 문제의 본질을 고려하지 않는 가정을 하여, 수학적으로 구한 해가 실세계로 돌아와 실세계 상황에 의미가 없는 해가 되거나 혹은 유효성 검사를 하지 않아 타당한 해를 구하지 못할 수 있는 점을 피할 수 있도록 강조를 하였다. 또한 단순화/추상화단계의 가정과 변수를 정하는 일은 실세계 상황의 본질에 근거하여 정한다. 수학적 결과에 대해서도 실세계 상황에서 해석하고 유효성을 검증하는데 단순화와 추상화 단계에서 사용되는 제한과 가정에 따라 해가 다르거나 해의 의미가 달라질 수 있음 강조하였다.

다섯째, 교사는 학생들의 모델링 활동을 위해 전반적인 모델링 활동을 위해 어떠한 역할을 해야 하는지를 제안하였다.

2. 제언

연구 결과를 토대로, 다음을 제안한다.

첫째는 모델링 문제의 실세계 상황은 항상 같은 방식으로 구성되는 것은 아니기 때문에 제시된 모델링 문제를 표본처럼 사용해서는 안 된다는 점을 주의해야 한다.

둘째, 모델링 문제는 수학내용을 먼저 고려하지 않고 실세계 상황을 기반으로 해결하고자하는 실세계 문제를 먼저 선정하기 때문에 선정된 문제를 해결

하는데 교과과정의 수준을 벗어날 수 있기 때문에 문항 선정에 유의한다.

셋째, 수학외적인 내용과 관련된 문제를 선택할 경우 전문가의 도움이 필요할 수 있다. 수학교사에게 수학외적의 어려운 영역의 현상과 과정을 해결할 수 있는 방안에 대한 연구가 필요하다. 그런데 모델링 과정의 수학화 과정이 가장 어려운 부분으로 관심을 많이 가지지만, 수학적으로 구한 해가 실세계에서 유효한 해가 될 것인지 아닌지 검증을 소홀히 하는 측면이 있다. 따라서 특별히 이 단계에 관심을 가진다.

넷째, 전통적인 수학 공부를 하는 방법에서도 다른 사람이 풀어놓은 것을 읽는 것만으로 충분하지 않다. 유사하게 모델링은 책을 읽는 것만으로도, 다른 사람이 완성한 모델을 읽는 것만으로도 충분하지 않기 때문에 스스로의 경험이 필요하다. 따라서 실제 모델링 문제를 개발하는 기회를 가져야 되며, 모델링 문제를 직접 해결해 보는 경험이 중요하다.

다른 제언은 교수·학습에 대해 수학적 모델링은 모델링 문제에 영향을 미치는 수학내·외적인 분야의 내용과 요인들의 융합이므로 2015개정 교육과정이 추구하는 창의 융합형 교육이 가능하다. 학교의 정규과정에 도입은 어려움은 있겠지만, 중학교의 자유학기에는 협동 학습, 토의· 토론 학습, 프로젝트 학습 등 학생 참여형 수업을 강화하게 할 수 있는 교수방법이 될 수 있기 때문에, 자유학기의 취지에 충분히 부합되는 수업을 설계하는 것이 가능하다고 판단한다.

모델링에 관한 정리된 국내논문의 경우 모델링 문제 상황을 대부분 실생활 문제라는 표현을 많이 사용했다(황혜정, 민아람 2017). 하지만 모델링 문제는 실생활을 포함한 실세계 상황을 바탕으로 설계한 문제이므로 실생활보다 범위가 넓다. 따라서 실생활이라는 표현보다는 (현)실세계(real−world)라는 표현으로 사용되는 것이 더 적절하다고 판단한다.

참고문헌

[1] 교육부(2015). 2회 수학교육 종합계획(2015 ~ 2019), 교육부

[2] 김인경 (2012), 수학적 모델링과 수학화 및 문제해결 비교 분석, *한국 수학사학회지*, 25(2), 71-95.

[3] 김민경, 민선희 & 강선미 (2009), 초등 교사들의 수학적 모델링에 대한 인식 조사 연구, *한국수학교육학회지*, 12(4), 411−431.

[4] 김민경 홍지연 & 김혜원(2010). 수학적 모델링 적용을 위한 문제 상황 개발 및 적용. *한국수학교육학회지 시리즈 E: 수학교육 논문집,* 49(3), 313−328.

[5] 권기석, 박배훈 (1997), 고등학교에서 수학적 모델링의 활용에 관한 연구, *한국 수학교육학회지 시리즈 A, <수학교육>* 36(2), 149−159.

[6] 김휴진(2009), 중학생들의 수학적 모델링 과정 분석과 SOLO 분류법을 활용한 평가, 석사학위 논문, 이화여자대학교.

[7] 박선영·한선영.(2018), 수학적 모델링 과정을 반영한 교과서 문제 재구성 예

시 및 적용, *한국 수학교육학회지 시리즈 A, <수학교육>*, 57(3), 289−309.
[8] 박슬희.(2013), 중학생의 수학적 모델링 정교화 과정에 관한 사례 연구, 석사학위논문, 교원대학교 교육대학원.
[9] 서지희 윤종국 이광호(2013), 중학교 3학년 수학 영재 학생들을 위한 수학적 모델링 교수.학습 자료의 개발 및 적용: 쓰나미를 소재로, *대한수학교육학회, 학교수학,* 15(4), 785 -799.
[10] 손홍찬, 류희찬(2007). 수학적 모델링에서 스프레드시트 환경이 수학적 모델의 정교화 과정에 미치는 역할, *대한수학교육학회, 학교수학*, 9(4), 467−486.
[11] 이기열, 이병수(1999), 수학적 모델링을 통한 학습지도, *한국수학교육학회지 시리즈 E: 수학교육 논문집*, 9, 187−201.
[12] 인은경(2010), 실생활 문제를 수학적 모델링을 통한 미분 지도에 관한 연구, 석사학위논문, 인하대학교 교육대학원.
[13] 정미라(2015), 고등학교 학생들의 수학적 모델링 과정에서 나타난 메타인지 사례 연구, 석사학위 논문, 이화여자대학교.
[14] 정해윤, 이경화, 백도현, 정진호, 임경석(2018), 수학적 모델링 관점에 의한 <수학과제 탐구> 과목용 과제의 설계, *대한수학교육학회, 학교수학*, 20(1), 149−169,
[15] 한선영, 김선희 (2017). 수학과제 탐구 수업방안 연구 보고서, 한국 창의재단.
[16] 황혜정·민아람, (2008).2007년 이후 국내 논문 결과에 근거한 수학적 모델링 탐색, *한국수학교육학회지 시리즈 E: 수학교육 논문집,* 32(2) 225−244..
[17] 황혜정(2007), 수학적 모델링의 이해−국내 연구 결과 분석을 중심으로− 대한수학교육학회, 9(1), 65−97. Mar. 2007
[18] 홍정희, 송순희(1994), 수학적 모델링을 활용한 수학 탐구수업 효과의 고찰, *수학교육*, 34(1), 93−96.
[19] Blomhøj M., (2008), Different perspectives in research on the teaching and learning mathematical modelling−categorizing the TSG21 papers. Proceedings from Topic Study Group 21,at the 11th International Congress on Mathematical Education in Monterrey, Mexico, July 6−13, 2008.
[20] Blum, W.(2011), Can modelling be Taught and Learnt? Some Answers from Empirical Research. In Gabriele Kaiser, Werner Blum, Rita Borromeo Ferri, Gloria Stillman (Eds.). Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling ICTMA 14, pp. 15−30. New York: Springer.
[21] Blum W. & Ferri R. B.,(2009), Mathematical modelling: Can It be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application.*, 1(1), 45−58
[22] Blum & Ferri (2016), Advancing the teaching of mathematical modeling: research−based concepts and examples, *Annual Perspectives in Mathematics Education:* Mathematical Modeling and Modeling

Mathematics(NCTM),65−76.
[23] Blum, W. & Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems. In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), Mathematical modeling: Education, engineering, and economics (pp. 222-231). Chichester: Horwood.
[24] Carlson, M. A., Wickstrom, M. H. Elizabeth A. B. & Elizabeth W. F.,.(2016), "A case for Mathematical modeling in the elementary school classroom." Annual Perspectives in Mathematics Education (APME) : Mathematical Modeling and Modeling Mathematics, edited(℃ & by Christian R. Hirsch, pp. 121−29. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics(NCTM).
[25] Dunya B. A., Diefes−Dux H. A., Kartal O. & Zawojewski, J. S. (2016), "The relationship between students' performance on conventional standardized mathematics assessments and complex mathematical modeling problems." *International Journal of Research in Education and Science (IJRES)* 2(1) : 239−52.
[26] Freudenthal, H. (1968). How to teach mathematics so as to be useful, ICME−1 Lecture.
[27] GAIMME(2016), Guidelines for Assessment and Instruction in Mathematical Modeling Education,(GAIMME). Boston/Philadelphia, SIAM and COMAP.
[28] Gould, H., (2013), Teachers' conceptions of mathematical modeling, Columbia University, Degree of Doctor of Philosophy.
[29] Gould, H., Diane R. M. &, Sanfratello A., (2012), Teachers College Mathematical Modeling Handbook, COMAP.
[30] Haines. C. R. & McDuffie A. R., (2016), Annual perspectives to mathematics education, Mathematical Modeling and Modeling Mathematics, NCTM.
[31] Jacob P. & Zwaneveld B. (2012), The many faces of the mathematical modeling cycle, *Journal of mathematical Modelling and Application*, 1(6), 3−21.
[32] Kaiser G., (2005), Mathematical Modelling in School-Examples and Experiences, Mathematikunterricht im Spannungsfeld von Evolution und Evaluation: Hans−Wolfgang Henn, Division−Verlag Franzbecker, pp.99−108.
[33] Kaiser G. & Stender. P, (2013), Complex modelling problems in co−operative, self−directed learning Environments. In Teaching Mathematical Modelling: Connecting to Research and Practice, edited by Gloria Stillman, Gabriele Kaiser, Werner Blum, and Jill Brown, pp. 277 93. Dordrecht, The Netherlands: Springer.
[34] Lesh R. A. (2003), How mathematizing reality is different from realizing

mathematics, Susan J. Lamon Willard A. Parker (Eds.), Mathematical Modeling: A way of life, ICTMA 11, Horwood Publishing Limited.
[35] Maaß K.,(2010), Classification scheme for modelling tasks, *J Math Didakt* 31: 285-311.
[36] Maria L.H., Levy R. Felton-Koestler M. D. & Zbie R. M(2016), Mathematical modeling in the high school curriculum, Mathematics Teacher, 110(5).
[37] Malkevitch J. (2012), http://www.ams.org/publicoutreach/feature-column/ fc-2012-09
[38] Markham, T., John L. & Jason R. (2003), Project-based Learning Handbook: A Guide to Standards Focused Project-Based Learning for Middle and High School Teachers. Novato, CA: Buck Institute for Education.
[39] NCTM (2016), Mathematical modeling and mathematical mathematics, NCTM.
[40] Niss, M. Blum W. & Galbraith P. (2007), Modelling and applications in mathematics education, The 14th ICMI Study, springer.
[41] Niss, M. (2015) Mathematical competencies and PISA, K. stacey, R. Turner (eds.), Assessing Mathematical Literacy, pp.35-55, DOI 10.1007/978-3-319-10121-7_2, Springer International Publishing Switzerland.
[42] Oliveira A. M. & Barbosa J. C., (2008). The teachers' tensions in mathematical modelling practice, Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics, Proceedings from Topic Study Group 21 at the 11th International Congress on Mathematical ducation in Monterrey, Mexico, July 6-13,
[43] Pollak, H., (2007). Mathematical modeling: A conversation with Henry Pollak. In Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study, edited by Nemer Blum, Peter, L. Galbraith, Hans-Wolfgang Henn, and Mogens Niss, pp. 109-20. New York: Springer.
[44] Schoenfeld A. H. (2013), Mathematical modeling, sense making, and the common core state standards, Proceedings from the Teachers College Mathematical Modeling Oktoberfest.
[45] Smith & Morgan (2016), Curricular orientations to real-world contexts in mathematics. *The Curriculum Journal*, 27(1), 24-45.
[46] Pardalos, P. M. & Hearn. D. W. (2004), Modeling languagesin mathematical optimization, Applied Optimization, 88, models and history of modeling, Schichl, H., Kluwer Academic Publishers.
[47] Voskoglou M. G, & Phil M.(2011), Mathematical modelling in classroom: The importance of validation of the constructed model, School of

Technological Applications, 263-34 Patras, Greece.
http://eclass.teipat.gr/RESE-STE101/document

[48] Zawojewski, J., Lesh S., Richard A., & English, L. D. (2003), A Models and modeling perspective on the role of small group learning activities. In Lesh, Ricjard A. & Doerr, Helen M. (Eds.) Beyond Constructivism: models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching. Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, N.J., pp. 337-358.

<부록 1>

[문제 1] 수학적 모델링 과제

제목: 상자에 음료용기를 넣는 방법

1. 목적 : 슈퍼에 가면 다양한 상품들이 포장되어있는 것을 포장된 박스에서 물건을 꺼내어 진열하는 모습을 많이 볼 수 있다. 사람이나 기계가 박스 운송을 위해 물건을 쌓아 포장을 하는 방법은 매우 다양하다. 슈퍼의 진열장에 진열된 다양한 많은 물건은 대부분 다각형이나 원기둥 등 다양한 도형의 면적과 체적이 어떤 관계인지를 이해하고 현실에서 어떻게 사용이 되고 있는지 활용능력을 알며 현실과 수학이 연결되어 있음을 알게 한다.

2. 문제 진술: 음료 공장에서는 음료 내용물이 손상이 없고 안전하며, 가능한 박스에 많이 담아 운송을 하려고 한다. 그렇다면 가로, 세로, 높이가 각각 a cm와 b cm와 c cm박스 안에 가장 많은 음료용기들을 넣을 수 있는 방법을 구하시오

3. 사전 수학지식: 평면의 면적과 입체도형의 체적을 구하는 방법을 안다. 구, 삼각뿔, 사면체, 육면체, 원기둥 등 등 입체도형을 알고 면적을 계산할 수 있어야 한다. 피타고라스 정리를 알아야 한다.

4. 학교교과 과정 연계

(1) 대수 - 연산의 방법
(2) 기하 - 다각형, 다면체, 피타고라스 정리
(3) 수학외적인 분야 - 기타

5. **활동지**

(1) 수학이외의 배경 내용을 위한 활동지

(2) 수학적 모델링을 위한 활동지

6. 기타 사항

(1) 필수적인 것 : 기타

(2) 선택적인 것 : 인터넷

일반적인 문제 진술

학생(팀) 이름________________________ **날짜 :**______________

학생들은 물건을 사러 슈퍼에 들른 적이 있을 것이다. 다양한 물건들이 슈퍼 진열대에 있는 것을 보게 되지만 이따금 직원들이 물건을 진열하기 위해 포장된 상자에서 물건을 꺼내는 것을 볼 수 있다. 그러한 상자에는 다양한 모양으로 음료를 담은 용기들도 있다. 또한 다양한 모양의 과일의 경우나 음료수 공장에서는 내용물이 손상이 없고 안전하며 가능한 많이 담아 운송을 하려한다. 그렇다면 과일이나 음료수용기들을 어떻게 쌓으면 빈틈이 없이 잘 쌓아 담을 수 있을까요?


[Fig. 6] 진열된 과일과 음료수

질문:: 음료 공장에서는 음료 내용물이 손상이 없고 안전하며, 가능한 박스에 많이 담아 운송을 하려고 한다. 그렇다면 가로, 세로, 높이가 각각 a cm와 b cm와 c cm박스 안에 가장 많은 음료용기들을 넣을 수 있는 방법을 구하시오

Oh, Chun Young
Department of Mathematics of Education
Chonnam National University
Gwangju 61186, Korea
E-mail address: cyoh@jnu.ac.kr