East Asian Math. J.
Vol. 36 (2020), No. 2, pp. 173-201
http://dx.doi.org/10.7858/eamj.2020.014

수학적 모델링의 구현을 위한 교사 교육: 사례 연구

Teacher Education for Mathematical Modeling: a Case Study

김 연

ABSTRACT. Mathematical modeling has been emphasized because it offers important opportunities for students to both apply their learning of mathematics to a situation and to explore the mathematics involved in the context of the situation. However, unlike its importance, mathematical modeling has not been grounded in typical mathematics classes because teachers do not have enough understanding of mathematical modeling and they are skeptical to implement it in their lessons. The current study analyzed the data, such as video recordings, slides, and surveys for teachers, collected in four lessons of teacher education in terms of mathematical modeling. The study reported different kinds of tasks that are authentic with regards to mathematical modeling. Furthermore, in teacher education, teachers' identities have separated a mode as learners and a mode as teachers and conflicts and intentional transition were observed. Analysis of the surveys shows what teachers think about mathematical modeling with their understanding of it. In teacher education, teachers achieved different kinds of modeling tasks and experience them which are helpful to enact mathematical modeling in their lessons. However, teacher education also needs to specifically offer what to do and how to do it for their lessons.

Ⅰ. 서론

Common Core State Standards for Mathematics(이하, CCSSM)는 수학적으로 능숙한 사람은 일상, 직장 또는 사회에서 발생하는 문제에 수학을 적용하여 해결하려는 태도를 보이고 있다고 설명하는데(National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers, 2010), 수학적 모델링은 학생들

Received October 28, 2019; Accepted February 22, 2020.
2010 Mathematics Subject Classification: 97M99
Keywords: mathematical modeling, task, teacher education

이 그러한 면모를 기를 기회를 제공한다. 우리나라 2015 개정 수학 교육과정은 문제 해결 역량 중 한 가지로 수학적 모델링을 포함하고 있으며, “실생활 문제 상황을 수학적으로 나타내고 분석하여 결론을 도출하고 이를 상황에 맞게 해석하는 능력”으로 정의하고 있다(박경미 외, 2015, p. 40). 또한 National Council of Teachers of Mathematics(2000)는 수학적 모델링과 관련하여 학생들이 “물리적, 사회적, 수학적 현상을 해석하고 모델링하는데 표상을 사용” 할 수 있는 기회를 학교가 제공해야만 한다고 좀 더 강력한 주장을 한다(p. 67). 이러한 이유로 수학적 모델링의 필요와 중요성은 지속해서 강조되어 왔으며 (e.g., Blum & Ferri, 2009; Gainsburg, 2008; Lesh & Doerr, 2003a; Pollak, 2007), 학생들이 수학적 모델링을 본질적으로 경험할 수 있는 좋은 과제를 제공함으로써 학생들의 수학 학습을 지원을 보고하는 연구도 있다(Chan, 2008; English, 2003).

그러나 수학적 모델링은 그 중요성과 달리 대부분의 교실에서 여전히 과소평가되고 강조되지 못하고 있다 (Blum & Ferri, 2009; Boaler, 2001; Zawojewski, 2013). 국내에서는 많은 교사가 수학적 모델링에 대해 잘 모른다는 조사 연구가 있으며(김민경, 민선희, 강선미, 2009), 교사들이 수학적 모델링의 내용과 방식을 학교 수학에 적용하는 것에 긍정적이지만, 그 실현 가능성에 대해서는 회의적이라는 보고도 있다(조윈주, 권오남, 2002). 더욱이 국내에서 이루어지고 있는 수학적 모델링의 연구는 대부분 사례에 집중하고 있는데(예, 신은주, 이종희, 2004; 최희선, 한혜숙, 2018), 이는 교과서 중심으로 학교 교육과정을 구성하고 운영하는 현실적 상황으로 인한 필연적인 결과라고 볼 수도 있다. 그뿐만 아니라 수학적 모델링의 관점으로 개발된 과제들이 수학적 모델링의 본질적 성격을 담고 있지 못하다는 비평도 있다(황혜정, 2007). 즉, 현재 수학적 모델링을 학교 수학에 정착시키기가 쉽지 않은 이유는 교사들이 수학적 모델링에 해당하는 과제가 무엇인지 잘 모르고 개발뿐만 아니라 운영을 두려워하기 때문이다(최지선, 2017). 따라서, 본연의 의미를 충실히 참고 있는 수학적 모델링의 과제를 교사들에게 소개하고, 그 운영을 안내하는 교사 교육이 중요한데, 국내에는 수학적 모델링의 관점으로 시행된 교사 교육의 제공과 이와 관련된 연구가 매우 부족한 상황이다.

본 연구는 수학적 모델링의 실현을 위해 시행된 네 번의 교사 교육에 대한 것으로, 다음의 세 가지 연구 문제를 탐구하고자 한다: 수학적 모델링의 실현을 위한 교사 교육에서 이용되는 과제의 특징은 무엇이고, 수학적 모델링의 본질적 성격을 담고 있는가? 수학적 모델링의 실현을 위한 교사 교육에 참여하는 교사들의 정체성(identity)으로서 나타나는 학습자로서의 양식과 교수자로서의 양식의 특징은 무엇인가? 교사들은 수학적 모델링의 실현을 위한 교사 교육 참여에 대해 어떻게 생각하는가? 첫 번째 연구 문제는 교사 교육에서 제공된 수학적 모델링에 대한 과제를 분류하여 그 특징을 파악하고, 수학적 모델링의 의미를 잘 품고 있는 과제를 제공하였는지를 살펴보고자 한다. 두 번째 연구 문제의 목적은 수학적 모델링을 통해 수학을 학습했던 경험이 부족하고 수학적 모델링의 과제를 적극적으로 자신의 교실에서 이용하지 않았던

대부분의 교사들이 교사 교육에서 겪는 난제를 밝히는 것이다. 수학적 모델링이라는 새로운 접근 방식의 경험과 교수학적 수용에서 교사들이 겪는 어려움의 파악은 좀 더 발전된 교사 교육의 준비와 제공에 도움이 된다. 세 번째 연구 문제는 교사 교육에 참여한 교사들을 대상으로 실시한 설문지를 분석하여, 수학적 모델링의 관점으로 제공된 교사 교육에 관한 교사들의 생각을 분석하고자 한다. 이 세 가지 연구 문제는 교사 교육자가 제공하는 과제, 교사 교육 상황에서의 상호작용, 교사 교육에 참여한 교사의 관점으로 구분하여 접근하지만, 교수학적 상황은 상호작용을 전제로 하므로(Cohen, Raudenbush, & Ball, 2003), 이 세 연구 문제는 상호의존적이라 할 수 있다. 궁극적으로 본 연구는 학교 수학 수업에서 수학적 모델링을 구현하기 위해서 교사 교육이 지원해야 할 바가 무엇인가에 대한 탐색을 목적으로 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

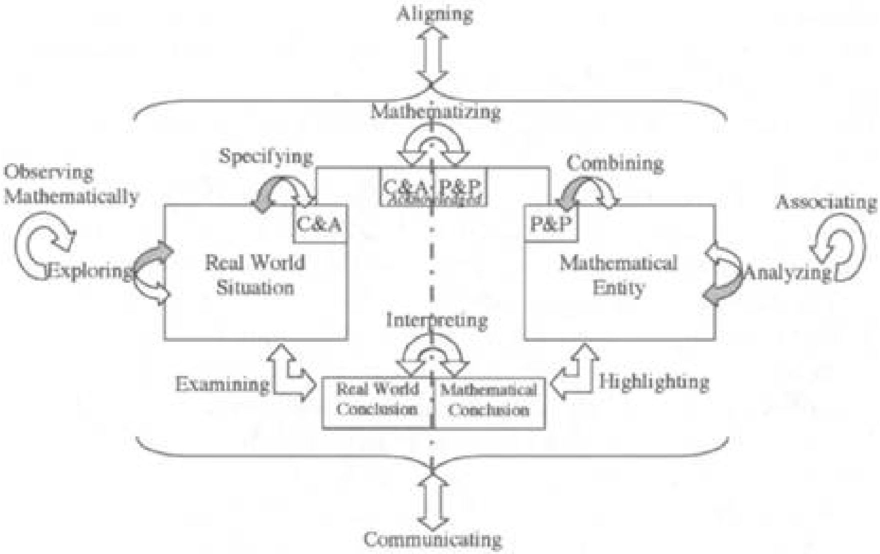
1. 수학적 모델링

수학적 모델링은 CCSSM의 여덟 가지 관행 중 한 가지이다(National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers, 2010). 그 설명은 다음과 같다:

> 자신이 알고 있는 것을 쉽게 적용할 수 있는 수학적으로 능숙한 학생들은 복잡한 상황을 단순화하기 위해 가정과 근사치를 만들어 나중에 수정이 필요할 수 있음을 깨닫습니다. 이 학생들은 실제 상황에서 중요한 수량을 식별하고 다이어그램, 표, 그래프, 플로차트 및 공식과 같은 도구를 사용하여 관계를 매핑할 수 있습니다. 학생들은 이러한 관계를 수학적으로 분석하여 결론을 도출 할 수 있습니다. 상황에 따라 수학적 결과를 일상적으로 해석하고 결과가 의미 있는지 여부를 반영하여 모델이 목적에 부합하지 않으면 모델을 개선 할 수 있습니다 (p. 7).

CCSSM은 수학적 모델링의 과정을 가정 만들기, 변수의 선정 및 수량화와 표상하기, 변수 간의 관계 파악하기, 마지막으로 수학적 결과 해석하고 반성하기 등 네 단계로 구분한다. 또한, 수학적 모델링은 ‘복잡한 상황’을 다루는 것을 전제함으로써, 기존의 전형적인 수학 문제의 이용을 배제한다는 것을 의미한다.

CCSSM이 수학적 모델링을 관행으로 간주하는 것은 기존의 수학적 모델링에 대한 연구물과 그 맥락을 같이 한다(e.g., Blum & Ferri, 2009; Blum & Niss, 1991; Lesh & Harel, 2003; Zbiek & Conner, 2006). 예를 들어, Zbiek and Conner(2006)는 수학적 모델링을 “실세계와 수학 세계 모두의 요소들을 포함하는 비선형적 과정” (p.91)로 정의한다. [그림 1]은 모델링 과정의 도식이다. 수학적 모델링은 실세계(a real-world situation), 실세계를 위한 해결책(a real-world solution), 수학적 실재(a mathematical

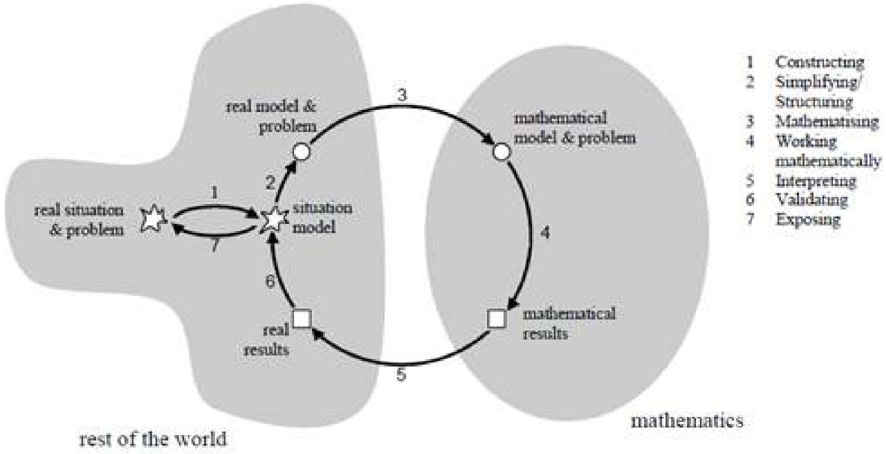


[그림 1] 모델링 과정 (Zbiek & Conner, 2006, p. 98)

entity), 수학적 해결책(a mathematical solution) 간의 흐름을 포함한다. 학습자는 실세계에서 정보를 탐색하고(exploring), 탐색한 상황을 수학적으로 관찰하며(observing mathematically), 조건과 가정을 기술한다(specifying conditions and assumptions(C&A)). 이 그림에서 조건과 가정에 대응하는 성질과 매개 변수(properties and parameters(P&P)를 찾는 것을 수학화(mathematizing)라고 하는데, 수학화는 실세계와 수학적 세계를 연결하는 역할을 한다. 한편, 수학적 세계에서 학습자는 성질과 매개 변수를 하나의 수학적 실재로 결합한다. 예를 들어, 꼭짓점과 절편을 이용하여 하나의 이차함수를 찾는 것이다. 이를 위해 학습자는 수학적 실재를 조작 및 해석을 하는 분석하기(analyzing)와 실세계와 관련하여 관련짓기(associating)를 한다. 수학적 실재의 알려지지 않은 성질과 매개 변수를 분명히 밝혀서, 수학적 결론에 도달하고, 이 결론이 실세계의 결론으로 해석하는 것이 강조하기(highlighting)이다. 다시 수학적 결론과 실세계의 결론을 연결하여, 실세계로 수학적 결론을 맺는 것이 해석하기(interpreting)이다. 마지막으로 실세계의 결론을 실세계의 상황과 비교하는 것으로, 모델링의 목적에 따라 실세계에서 그 결론을 평가하는 것이다.

Blum and Ferri(2009)도 [그림 2]의 도식을 이용하여 실세계와 수학이라는 두 세계를 우선 규정하고, 일곱 단계로 구분하여 수학적 모델링 과정을 기술하는데, Zbiek and Conner(2006)와 유사하다. 이처럼 수학적 모델링의 과정에 대한 자세한 틀은 수학적 모델링 과제를 통해 학생들이 경험하게 될 기능 또는 학습의 활동(tasks of learning)의 일반적인 경향성을 보여준다.

이처럼 다양한 과정을 학생들이 수행할 수 있게 하기 위하여, 수학적 모델링 과제는 주로 비구조화된 상황인 현실 세계와의 연결성 및 문제 해결을 위한 다양한 표현

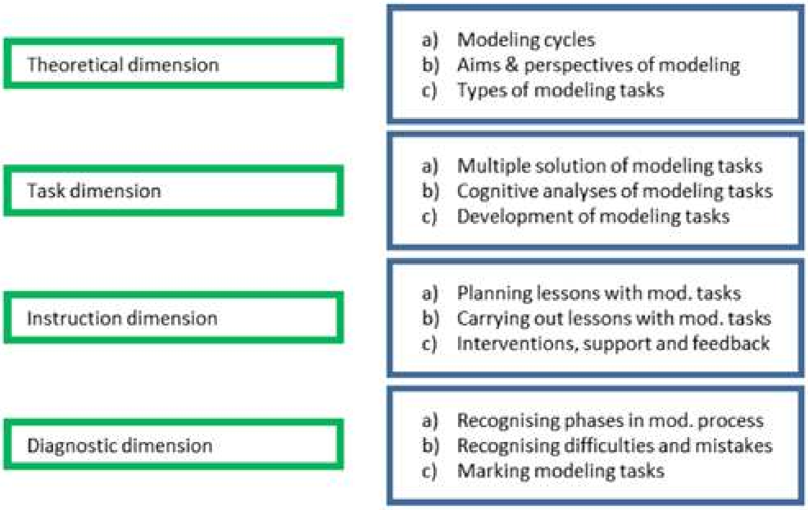


[그림 2] 모델링 싸이클 (Blum & Ferri, 2009, p. 46)

과 해결 방법을 포함한다(Blum & Ferri, 2009; English, 2006). 이로써, 학생들은 수학적 아이디어를 실세계에 적용 가능함을 경험하여, 수학에 대한 학습 동기를 가질 수 있으며, 교육과정이 제공하는 다양한 수학 영역을 통합할 기회를 갖는다(Swetz & Hartzler, 1991).

수학적 모델링과 관련한 중요한 프로젝트 중 하나인 the Model-Eliciting-Activity (MEA) Approach가 보고하는 중요한 결과 중 하나는 교사의 역할로서, 교사의 실세계 맥락에 대한 이해가 학생들에게 영향을 준다는 것이다(Schorr & Lesh, 2003). 따라서, 교사들이 학생들의 모델링 과정에 집중할 수 있도록 돕기 위하여, 교사 교육은 모델링의 과정에 대한 이해를 강조하기도 한다(Lesh & Doerr, 2003b). 더 나아가 학교에서 실제로 모델링을 가르치는 실질적인 경험의 수준으로 교사들의 학습 기회를 확대해야 한다는 주장도 있다(Ferri & Blum, 2009). 수학 학습에 있어서 풍부한 맥락과 수학적 깊이를 동시에 강조하면서도 복잡한 과정을 포함하는 수학적 모델링을 교사들이 교실에서 구현하기 위해서는 다양한 역량이 필요하고, Ferri(2013)은 [그림 3]에서 보이는 바와 같이 그러한 교사 역량에 대한 네 가지 관점을 제시하였다. 이론적 관점은 수학적 모델링의 이해에 관한 것으로, 실세계와 수학 간의 교환 과정을 파악하여 수학적 모델링 과정에 대해 전반적으로 이해하는 것이다. 과제에 관한 관점은 수학적 모델링에 좋은 과제에 대한 이해에 관한 것으로, 과제를 인지적 수준으로 분석하고 모델링의 각 과정에서 파생되는 해결책을 분류하는 것이다. 이 관점에서 모델링을 위한 과제 개발이 매우 중요하다. 수업적 관점은 수학적 모델링을 위한 수업을 설계하고 실행하며, 그에 대한 피드백을 받는 것이다. 진단적 관점은 모델링 과정의 어려운 점을 파악하고, 평가 능력을 발전시키는 것이다.

MEA를 기반으로 하여, Jung과 Brady (2016)는 교사 교육의 활동 원리 다섯 가지를 제안한다: 다양한 맥락 원리(교실에서 다양성을 다루는 교사 활동), 다양한 수준



[그림 3] 수학적 모델링 지도를 위한 역량 (Ferri, 2013, p. 29)

원리(교사 개발의 다양한 측면을 다루는 교사 활동), 공유 원리(다른 교사와 함께 가르치고 배우기 위해 아이디어를 공유하는 교사 활동), 자기 평가 원리(교육 목표 및 평가 전략을 평가하기 위한 교사 활동), 현실 원리(학생들의 아이디어를 해석하고 평가를 개발하는 교사 활동). 이러한 다섯 원리의 목적은 교사들이 수학적 모델링을 수업에 적용하는 한편 교사들이 사고의 방식을 명확하게 표현하고, 평가하며 수정하는 일련의 교수학적 관행들을 학습하도록 지원하는 것이다(Doerr & Lesh, 2003).

이와 같은 연구물을 종합하여 보면, 수학적 모델링과 관련된 교사 교육이 부족한 국내에서는 수학적 모델링에 자체 대한 이해, 수학적 모델링을 위한 과제의 이해 및 다양한 사례 습득, 수학적 모델링을 교실에서 운영함에 있어서 필요한 수학적, 교수학적 판단 등을 교사 교육에서 제공할 필요가 있다(Anhalt & Cortez, 2016; 최지선, 2017).

2. 정체성(identity)

교사의 정체성에 관한 연구는 2000년대에 들어 다양하게 진행되고 있다. 교사가 다른 사람들 또는 세계와 자신의 관계를 어떻게 설명하고 정당화하는가의 관점으로 교사의 정체성이 연구하거나(Connelly & Clandinin, 1999; MacLure, 1993; Sfard & Prusak, 2005), 교사와 자신들의 관행에 영향을 주는 다양한 상황적 요소에 대한 관점으로 교사의 정체성이 탐구되기도 하였다(Flores & Day, 2006). 예비 교사에서 초임 교사가 되면서 교사들의 정체성 변화를 조사하는 연구(Thomas & Beauchamp, 2007)와 경력이 쌓이면서 학교와 사회와의 관계에 따라 교사들의 정체성 변화에 대한

연구도 있다(Olsen, 2008).

Gee(2000)는 어느 상황에서 내가 어떠한 사람으로 인지되는 것을 정체성(identity)이라고 정의한다. 이러한 의미에서 모든 사람은 사회에서 각자의 행동, 수행 또는 실적과 관련하여 다양한 정체성을 가지고 있다. 마찬가지로 교사는 자기 자신에 대한 지식, 교사로서 자신이 누구이고 어떤 교사인가에 대한 해석, 그리고 학습자로서의 교사들의 경험은 교사의 의사 결정과 행동에 영향을 준다(Lytle & Cochran-Smith, 1994). Gee(2000)에 따르면, 우리가 우리 자신을 해석하는 방식과 다른 사람들에 의해 우리가 인식되는 방식이 해석적 시스템에 영향을 미치는데, 그러한 해석적 시스템을 통해 정체성이 형성된다. 이러한 과정에 지식과 정체성 간의 상호작용도 중요하다. 정체성은 어느 상황에 이루어지는 담화 또는 공동체의 일부로 간주되는 담화를 통해 개발되는데, 신념과 가치의 시스템으로서 담화는 사회적 관행에 존재하고 언어를 통해 발현된다. Gee(2000)는 교육 분야 연구에서 분석적 관점으로 정체성을 연구할 때, 정체성을 분류하는 네 가지 방법으로 nature-identity(어느 개인의 천성적 본질에서 발생), institution-identity(권위로서 인정되는 지위나 직위에 기인), discourse-identity(담화의 결과로부터 발생), affinity-identity(외부 그룹과의 관계에서 자신의 관행에 의해 결정됨)를 제안한다. 이는 정체성이 다면적 성격을 가지고 있을 뿐만 아니라, 역동적이며 끊임없이 진화하는 현상이라고도 할 수 있다(Beijaard, Meijer, & Verloop, 2004). 또한, 정체성은 “어떻게 집단적 담화과 개인적인 세계를 구성하고 어떻게 개별의 목소리가 공동체의 목소리와 결합하는가”(Sfard & Prusak, 2005, p. 15)와 관련이 있다. 그러므로, 교사의 정체성은 개별 교사에게 결과적인 산물이기도 하면서 발전이라는 관점에서 상호작용의 양식으로서 과정이기도 하다(Olsen, 2008). 정체성은 사람과 문맥을 모두 포함하는데, 상황에 따라 교사는 고유한 방식으로 전문적인 특성을 학습하는 이유이기도 하다(Beijaard et al., 2004).

본 연구는 개별교사들이 개체로서 가지고 있는 정체성에 대한 연구보다, 교사 교육 현장에서 강사와 교사들이 나누는 대화를 분석대상으로 하여, 교사 교육 현장에서 교사들의 discourse-identity에 집중한다. 앞서 살펴본 바와 같이 discourse-identity는 담화를 통해 구성되고 존재하고 인식되는데, discourse-identity는 어느 개인의 발현이나 성취뿐만 아니라 그 개인으로 간주된다(Gee, 2000). 더욱이, Gee(2000)에 따르면, 이는 어느 상황에서 개인은 discourse-identity의 연속체를 가지고 있기 때문에, 한 개인은 여러 discourse-identity를 갖게 된다. 따라서, 본 연구는 교사 교육 현장은 사람과 문맥을 모두 포함하는 상황으로서, 교사들이 고유한 방식으로 택하는 정체성의 특성을 파악하고자 한다.

Ⅲ. 자료 및 연구 방법

본 연구의 자료는 2016년부터 2018년에 시행된 수학적 모델링을 주제로 한 4회의 교사 교육에서 수집된 강사의 슬라이드, 교사 교육 촬영 영상 및 그 전사, 사진, 교사

들의 설문지 답변 등이다. 각 교육은 독립적으로 계획되고 운영되었다. 즉, 본 연구 자료의 4회의 교사 교육이 시리즈로 기획된 것이 아니라, 모든 교사 교육은 서로 다른 공간과 시간에서 서로 다른 과제들을 가지고 교육이 진행되었다. 2016년 4월에 서울에서 6시간, 2017년 9월에 창원에서 4시간, 서울에서 2시간, 2018년 창원에서 2시간 동안 교육이 제공되었고, 각 교육은 약 40명에서 60명의 초중등교사가 자발적으로 참여하였다. 모든 교육은 미국의 대학에서 교수로 재직 중인 동일한 강사가 계획하고 운영을 하였는데, 십 년 이상 수학적 모델링에 대한 연구 및 교사 교육을 시행하고 있는 연구자이자 강사로서 수학적 모델링의 교사 교육자의 충분한 이력을 가지고 있었다. 강사가 한국어로 설명을 덧붙이기도 하였으나, 영어로 설명한 경우에는 한국어 통역이 있었다. 각 교육은 수학적 모델링을 교사들이 처음 또는 미약하게 경험하거나 알고 있을 것이라는 가정으로 운영되었다. 구체적으로는 교육의 시간 차이가 있으나, 강사가 수학적 모델링의 과제를 제공하고, 참가 교사들이 과제를 수행하고, 그 경험을 공유하는 과정으로 진행되었다. 본 연구의 연구자들은 이러한 교사 교육의 기획자나 강사로 참여하지 않았고, 따라서 관찰자로서 자료에 접근한다. 이러한 접근 방식은 구현된 교사 교육에 대해 외부의 관점으로 접근하는 것이므로, 교사 교육에 대한 좀 더 객관적인 접근을 가능하게 하고, 궁극적으로 교사 교육에 필요한 접근 방법이라 할 수 있다(Borko, Liston, & Whitcomb, 2007).

수학적 모델링의 실현을 위한 교사 교육에서 이용되는 과제의 특징 파악을 위해, 강사가 사용한 슬라이드와 교사 교육 촬영 영상을 이용하여, 실제 교육에 사용된 과제들을 추출하였다. 추출된 과제들은 전형적인 과제와 비전형적인 과제로 우선 분류하고, 비전형적인 과제들은 그 수행의 특징들을 기준으로 재분류하였다. 강사가 교육에서 이용한 슬라이드를 이용하여, 분류 결과 및 과제에 대해 보고한다. 본 연구가 이러한 귀납적 방법으로 과제를 분류하는 방식을 사용한데에는 두 가지 이유가 있다. 첫째, 수학적 모델링의 성격을 담고 있는 과제의 분류에 대한 연구가 상당히 빈약하다. 국내의 유일한 연구가 오영열과 박주경(2009)인데, 이 연구는 수학적 모델링의 과제를 문제 중심, 표 중심, 복합 유형 등 세 가지 유형으로 분류한다. 그러나 이 논문은 이러한 분류 방식에 대한 명확한 설명을 제공하고 있지 않을 뿐만 아니라, 복합 유형의 범위가 너무나 넓어서 분류의 유용성이 떨어진다. 국외 연구에서도 다양한 과제의 성격을 분류하는 연구보다, 몇 가지 과제를 통해 수학적 모델링의 학습 과정이나 효과에 집중한 사례 연구가 주류를 이루고 있다. 즉, 수학적 모델링의 과제를 분류하는 기준이나 관점에 대한 학계의 동의가 아직 미흡한 상황이다. 둘째, 사용된 과제들을 귀납적으로 분류하는 기준은 Hewson과 Hewson(1988)의 '학습의 활동(tasks of learning)'이다. 이는 학습자에 의해 수행되는 것으로서, 어떤 목적을 성취하기 위한 목적과 의도로 설명되는 활동이다. 예를 들어 2015 개정 수학과 교육과정에서 어림하기, 측정하기 등과 같은 기능과도 그 의미가 유사하다. 이러한 관점에 의한 귀납적 과제 분류는 과제의 학습자가 경험할 수 있는 '학습의 할동(tasks of learning)을 명확하게 제시하는 역할을 한다. 또한 분석된 과제는 앞서 살펴본 Zbiek and Conner

(2006)이 제안하는 수학적 모델링의 각 과정을 이용하여, 각 과제가 수학적 모델링의 성격을 충분히 반영하고 있는가도 분석하였다.

수학적 모델링의 실현을 위한 교사 교육에서 강사 발문과 참여하는 교사들의 정체성의 특징 파악을 위해, 촬영된 교육 영상의 전사를 강사가 제시한 과제별로 교사의 활동과 강사와 교사의 대화를 하나의 에피소드로 구분하였다. 각 에피소드는 강사의 발문과 설명을 분석하여 수학적 모델링의 과제를 통해 수학을 학습하는 양식(a mode as learners)을 의도하는지 또는 수학적 모델링을 과제로써 계획하고 실행하는 교수자로서의 양식(a mode as teachers)을 고려하는지로 구분하였다. Doeer과 Lesh(2003)과 Ferri(2013)이 밝힌 바와 같이, 수학적 모델링을 가르칠 때 필요한 역량은 수학적 모델링을 학습할 때의 역량과 상이하므로, 이러한 두 양식의 구분하여 교사들의 정체성을 파악하는 것이 그 특징을 좀 더 명확하게 파악하는 데 도움이 될 수 있다. 구체적으로, 강사가 의도하는 교수자로서의 양식은 학생들의 접근 방법에 대한 예측, specialized content knowledge 분석, 과제 변형, 수업 목표 설정, 교사 발문 설정으로 세분될 수 있었다. 교사들의 발문 및 활동은 강사의 의도에 따른 양식을 수용하는 접근을 하는지 아니면 다른 양식으로 전환하는지로 구분하였다. 세 번째 연구 문제를 위하여 수학적 모델링 연수에 참여한 교사들을 대상으로 설문을 실시하였고, 교사들의 답변을 문항별로 분석하였다. 우선, 답변의 여부로 구분하고, 각 답변은 질문의 의도를 명확히 파악한 답변인가로 재구분되었다. 그리고, 답변을 특징별로 분류하였다. 즉, 각 연구 문제별로, Guest, MacQueen, and Namey (2012)와 Saldaña (2013)가 설명하는 귀납적 주제 분석(inductive thematic analysis)을 시행하였다. 자료에 대한 탐색과 재탐색뿐만 아니라 범주화 및 각 범주의 비교 과정을 반복함으로써 자료에 대한 서술적 요약(descriptive summary)을 분석적 설명으로 정교화할 수 있었다. 범주별로 대표적인 과제와 중요한 에피소드는 선별하여, 그 특징을 보고하는 데 사용하였다.

Ⅳ. 결과

1. 과제

4개의 교사 교육에서 사용된 과제는 22개였고, 과제들은 <표 1>과 같이 분류할 수 있다. 이는 연구 방법에서 보고한 바와 같이 사용된 과제들의 귀납적 분류이다. 특히, 각 과제가 요구하는 주요 활동의 관행과 목적을 중심으로 분류하였다. 시뮬레이션은 공학 도구를 이용하여 주어진 과제를 개별적으로 접근하는 방식의 과제이다. 이 과제들은 참여자들의 협업이나 의사소통을 요구하지 않았다. 이와 달리 소그룹 활동이나 전체 그룹 활동의 운영방식을 전제로 하는 협업, 의사소통 및 협력적 추론의 성격을 기본적으로 가지고 있는 수학적 모델링 과제가 많았다(14개). 그 하위 범주로서 ‘설

시뮬레이션	협업, 의사소통 & 추론					전형적인 문제	합
	설계, 제작, 실험	예측	설계	정보검색	추론		
2	3	2	2	5	2	6	22

[표 1] 수학적 모델링을 위한 교사 교육에서 시행된 과제 분류

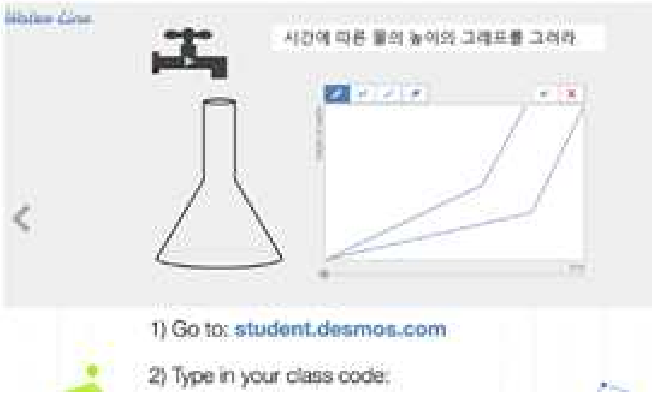
계, 제작, 실험'은 주어진 문제 상황을 해결하기 위해 학습자가 동료와 함께 무언가를 설계하고, 만들고, 실험해보는 활동을 포함한다. '예측'은 과제의 목적이 좀 더 타당한 예측 결과를 도출하는 것에 있다. '설계'는 제작이나 실험 없이 설계하기에만 집중한 과제 유형이다. '정보검색'은 정보검색을 기초로 하여 토론을 통해 가장 타당한 해결책을 도출하는 것에 집중하며, 추론은 인지적 과제 수준에 기초한 과제 변형의 성격을 가진 과제를 지칭한다. 일반적인 문장제와 같은 성격의 전형적인 문제도 사용되었다. 구체적인 내용은 다음과 같다.

가. 시뮬레이션 (simulation)

시뮬레이션 유형의 과제는 웹을 기반으로 실제 상황을 수학적으로 예측하고, 그 예측을 시뮬레이션으로 확인하는 과정을 포함하는 과제이다. 예를 들어, [그림 4]는 휴대전화를 충전하는 상황에 대한 과제를 제시한다. 학습자는 시간에 대한 충전율을 예측하여 웹 공간에 그래프로 그린다. 실제 충전율을 보여주는 영상을 틀면, 좌표평면에 실제 충전율을 나타내는 그래프가 동시에 그려진다. 즉, 학습자는 자신이 예측하여 그린 그래프와 실제 충전율의 그래프를 비교할 수 있는 환경을 웹이 제공한다. 기본적으로 일차함수 그래프와 같은 직선으로 시간과 충전율의 관계를 살펴볼 수 있다. 충전율이 매우 높아지면 충전의 속도가 늦추어지면서 좌표평면에서는 직선이 곡선형으로 바뀌는 것을 볼 수 있다.

[그림 5]는 다양한 모양의 물병에 같은 속도로 물을 넣는 경우, 시간에 따라 병 안에 담긴 물의 높이를 예측하고 확인하는 과제이다. 마찬가지로 학습자는 예측한 바를 그래프로 그린다. 물을 틀고 그릇에 물이 채워지는 영상을 틀면, 좌표평면에 시간에 따른 물의 높이를 나타내는 그래프가 동시에 그려진다. 그릇의 모양을 다양하게 바꾸어 가면서, 시뮬레이션을 시도할 수 있다. 일차함수 그래프의 형태이지만, 어느 시점에서 꺾이는 모습을 확인할 수 있다. 다양한 그릇의 상황으로부터 꺾이는 점의 특징

[그림 4] 완충하는데 얼마나 시간이 걸리는가?



[그림 5] 시간에 따른 물의 높이의 그래프를 그리기

을 파악할 수 있다. 일차함수의 그래프의 기울기와 관련한 수학적 성질의 이해도 필요하다.

이 두 가지 과제는 desmos에 탑재된 과제로서, 실제로 준비물이 많고 실험이 복잡하고 자료 수집이 용이하지 않은 상황을 용이하게 수학 교실에서 이용할 수 있도록 영상 및 수학적 표상을 제공한다. 이러한 시뮬레이션을 통해 학습자는 수학적 예측 및 비교를 쉽게 실험할 수 있는 맥락을 제공한다. 교수자입장 에서는 학습자가 웹에 접근할 수 있는 수업 환경을 제공해 주어야 한다.

나. 협업, 의사소통 그리고 추론

본 유형의 수학적 모델링 과제는 2명에서 6명을 한 그룹으로 구성하거나, 전체 그룹에서 주어진 과제를 수행하기 위하여 학습자들이 협업을 통해 수학적 의사소통 및 추론을 학습할 수 있는 과제를 말한다. 이러한 과제들은 다음과 같이 다섯 가지 유형으로 분류할 수 있다.

1) 설계 및 제작과 실험

본 과제는 학습자가 동료와 함께 주어진 목적에 설계, 제작 및 실험을 포함하는 유형이다. 예를 들어 [그림 6]은 바람으로 움직이는 자동차의 프로토타입(prototype)을 제작하는 과제이다. 학습자들은 준비된 재료(종이 접시, 종이컵, 빨대, 여러 길이의 막대, 모형 자동차 바퀴, 종이포일, 풀, 접착제, 테이프 등)를 이용하여 바람에 움직이는 자동차를 설계하고 제작한다. 제작한 자동차는 선풍기로 실험을 하는데, 이때 위치, 속도와 가속도를 측정할 수 있는 카메라를 이용하여 제작한 자동차에 대한 정보를 동시에 수집한다. 수집된 정보를 가지고, 제작한 자동차를 다시 수정하는 과정을 갖는다. 이후 전체 논의 시간에서 다양한 기준을 가지고 가장 효과적인 프로토타입에 대해 논의를 하고, 자동차 프로토타입을 선정한다.

이 과제는 시간, 위치, 속도, 가속도, 제작 비용 및 그 관계 등 수학적으로 다양한

[그림 6] 풍력자동차 만들기

[그림 7] 알루미늄 포일 배

요소를 포함하고 있다. 모둠은 각자의 기준에 따라 더 효과적인 자동차를 제작하기 위해 실험에서 생산된 그래프를 수학적으로 해석하고, 어느 부분을 어떻게 수정할 것인가에 대한 수학적 추론과 의사결정을 반복한다. 설계, 제작 및 실험의 과정이 서로 유기적으로 연계가 되어 있고, 주어진 과제가 실생활 맥락과 유의미하게 연결되어 있기도 하다.

[그림 7]은 알루미늄 포일을 이용하여 배를 설계 및 제작을 하고, 수조에서 실험을 하는 과제이다. 학습자들은 10X10cm의 포일을 세 장을 받았다. 포일로 배를 만들어서, 준비된 수조에 배를 띄우고, 플라스틱 분동으로 배가 가라앉기 직전까지의 몇 그램의 분동을 실을 수 있는가를 각자 측정한다. 측정된 무게는 히스토그램에 스티커로 붙여서 전체 교사들의 실험 결과를 수집한다. 세 번의 실험으로, 학습자들은 더 많은 무게를 버틸 수 있는 배를 만들기 위해 궁리한다.

[그림 8] 바비에게 가장 짜릿한 스릴을 줄 수 있는 고물줄의 갯수는?

[그림 9] 몇 개의 완두콩으로 이 교실을 채울 수 있을까?

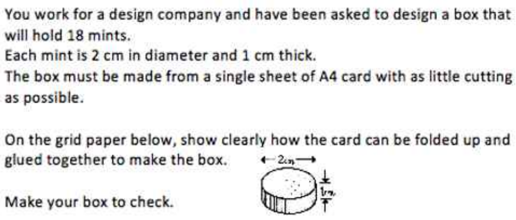
제공되는 포일의 크기가 정해져 있으므로, 만들 배에 대한 부피와 견고함까지 고려해야 하는 설계 상황을 제공한다. 구체적으로 학습자들은 배의 설계 및 제작에서 표면적, 부피, 질량, 부력 등의 수학적, 과학적 개념들을 고려하게 된다. 참여자가 배를 세 개씩 제작하므로, 세 개의 그래프를 모든 참여자가 함께 제작하게 된다. 그래프를 통해 참여자 전체가 배 설계 및 제작이 발전해 가는 것 또는 버티는 무게 등에 대한 경향성을 함께 발견하고 논의를 할 수 있다.

2) 예측

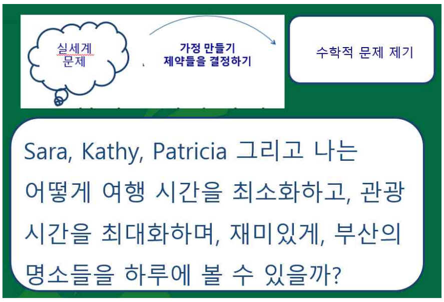
본 과제는 자료 수집을 목적으로 실험 또는 측정을 하고, 수집된 결과를 기초로 하여 예측을 하는 과제이다. 예를 들어, [그림 8]은 바비인형, 고무밴드 여러 개와 줄자를 학습자들에게 제공하고, 연결된 고무줄의 개수에 따라 인형의 자유낙하 최대거리를 줄자로 측정하고 이를 표에 기록한다. 표의 작성이 끝나면 그래프에 산점도(a scatter plot)를 그리고, 최적선(the line of best fit)과 직선의 방정식을 찾는다. 수집된 자료와 최적선을 이용하여, 교실 출입문의 높은 곳 또는 학교 2층 상부 난간에서 1층 계단으로 인형을 자유 낙하시켰을 때, 인형이 가장 스릴을 느낄 수 있게 하려면 몇 개의 고무밴드가 필요할지 팀별로 예측해 본다.

본 과제는 고무밴드의 개수와 낙하 거리가 가지고 있는 선형적 관계를 이용하여, 학습자는 선점도, 기울기, 평균, 두 점을 이용하여 기울기 찾기, 한 점과 기울기를 이용하여 직선의 방정식 세우기, 최적선 등의 수학 지식을 이용하게 된다. 실험 자체가 물리적인 성격을 가지고 있어서 속도와 가속도, 위치에너지와 운동에너지, 탄성위치에너지로 연결이 가능하다. 자료의 수집, 정리뿐만 아니라 예측을 포함하고 있는 과제이다.

또 다른 예는 [그림 9]이다. 교실을 완두콩으로 채우는 상황을 제시하고, 몇 개의 콩이 필요한가를 추측해 보는 과제이다. 교실 및 콩의 부피 측정과 어림 및 공학 도



[그림 10] 포장 상자 설계하기



[그림 11] 부산에서 하루 보내기

구의 이용(계산기, 자)의 수학적 요소를 포함한다. 모둠별 풀이 과정 및 방법을 공유하고, 각 모둠의 예측에 대한 오차의 원인에 대한 수학적 추론 및 토론이 가능한 과제이다. 직접 교실의 부피를 측정하는 활동은 문제의 상황이 학습자의 물리적 공간을 전제로 하고 있어서, 문제 상황에 대한 접근이 매우 용이하다.

이 두 가지 과제는 앞의 “설계, 제작과 실험”과제와 달리 활동의 결과를 이용하여 예측한다는 것에 초점이 맞추어져 있다. 그뿐만 아니라, 각 과제가 품고 있는 수학적 개념을 학습한 이후에 이용 가능하기도 하지만, 그 개념들을 학습하는 과정에서도 이용 가능한 맥락을 제공한다.

3) 설계

과제가 설계에 집중한 유형이다. [그림 10]은 사탕의 포장 상자를 설계하는 과제인데, 사탕의 크기, 포장해야 할 사탕의 개수와 포장지의 크기는 이미 정해져 있으므로 사탕의 배열 방법과 그에 따른 상자 설계를 고려해야 한다. 사탕의 배열 방법은 모두 18개이므로 상자 모양은 18개가 가능한데, 이때 상자의 가로, 세로, 높이의 길이 및 그 설계도가 A4 사이즈의 종이 안에 가능한가를 체계적으로 검토해야 하는 과제이다.

이 과제는 조합 또는 체계적 세기, 직육면체의 구조 및 설계도, 원기둥의 구조, 약수, 배수 등의 수학적 요소를 포함하고 있다. 사탕의 크기 및 상자 만들기의 상황이 억지스럽지 않다는 것도 이 과제의 장점이다. 한편, 개별 학습자가 접근 가능한 과제이지만, 여러 요소를 고려하여 체계적으로 접근해야 한다는 특징을 가지고 있다.

4) 정보검색

과제가 정보검색을 기초로 하여, 논의 후 최선의 경로를 선정하는 과제이다. 예를 들어 [그림 11]은 어느 도시에서 관광하는 상황을 제시한다. 주어진 과제는 사람 수, 최소 이동 시간, 방문지의 개수 등을 고려해야 할 대상으로 제시하고 있지만, 비수학적인 요소(예를 들어, ‘재미있게’)도 포함하고 있다. 또한, 비용의 요소는 제외되었으므로, 이는 정보로서 파악하고 문제 해결에 적용해야할 부분이다. 그러나, 수학적 요소의 고려 없이, 지역의 명소들을 중심으로 접근할 가능성도 있다.

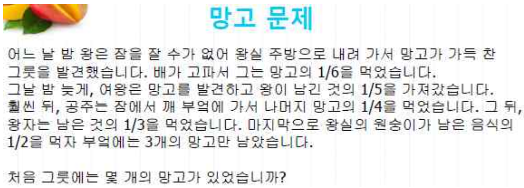
마사의 카페트 과제

마사는 5미터 길이, 3미터 너비의 침실에 카페트를 다시 깔려 한다.

마사의 카페트 과제

마사는 5미터 길이의 침실에 카페트를 다시 깔려 한다.
마사는 몇 제곱미터의 카페트를 사야할까?

[그림 12] 마사의 카페트



[그림 13] 망고 문제

5) 추론

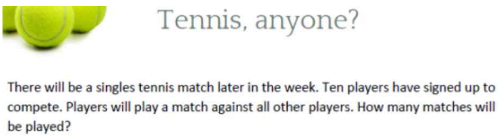
Stein, Grover, and Henningsen (1996)의 과제에 대한 인지적 요구 수준에 기초하여 서로 추론 수준을 포함한 비슷한 맥락의 과제를 말한다. 예를 들어, [그림 12]의 두 과제는 완성형 과제가 아니므로, 학습자들이 과제에 조건을 첨가하여 과제를 만들거나, 부족한 정보를 찾고 이를 결정해야 한다. 두 과제 모두 넓이와 관련되어 있는데, 현실 세계를 반영하여 주어진 상황을 추론하는 것이 주요한 학습 대상이 된다. 본 연구의 교사 교육에서 사용된 맥락은 카펫이지만, 한국의 상황에 적합하게 과제 수정이 필요할 수도 있다.

다. 전형적인 문제

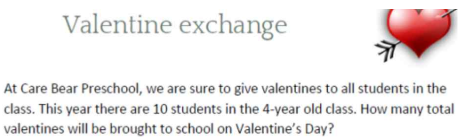
앞의 과제들이 학습자들이 접해보지 못한 비전형적인 성격을 가지고 있는 것에 반해, 전형적인 성격의 과제들도 사용되었다. [그림 13]은 소위 말하는 분수의 문장제인데, 다양한 방법으로 풀이가 가능하다. 교사 교육에서 강의자는 교사들과 논의 후 학생들의 일곱 가지 다른 풀이 방법을 소개하였다. [그림 14]는 경기 수를 찾는 조합의 문제이다. 이와 유사한 문제로 [그림 15]와 같이 발렌타인 선물교환 문제도 제시하였다.

라. 수학적 모델링의 관점으로 제공된 과제 분석

본 논문에서 소개된 과제들을 앞서 이론적 배경에서 소개된 세 가지 수학적 모델링에 대한 모형 중에서, Zbiek and Conner (2006)을 이용하여 수학적 모델링의 각 과정을 온전히 품고 있는가를 분석하였고, 그 결과가 <표 2>와 같다. 망고 문제는 실세계 맥락이 상대적으로 빈약할 뿐만 아니라, 다른 대상으로도 대체할 수 있다. 일상생활에서 망고의 개수 표현을 분수만으로 하는 경우는 상당히 이질적이다. 따라서 수학화하기가 일어나기 어렵다. 이 과제를 제외하고 상당히 많은 과제들이 수학적 모델링의 각 과정을 품고 있다는 것을 보여준다. 즉 본 연구의 대상인 수학적 모델링 교



[그림 14] 테니스



[그림 15] 발렌타인 선물교환

	실세계	수학화	수학적 실재	해석하기
휴대전화 충전	○	○	○	○
물병 물의 높이	○	○	○	○
바람으로 움직이는 자동차	○	○	○	○
배 만들기	○	○	○	○
번지	○	○	○	○
완두콩으로 교실 채우기	○	○	○	○
사탕 포장 상자 설계	○	○	○	○
하루 여행	○	○	○	○
마사의 카펫	○	○	○	○
망고 문제	×	×	○	○
테니스 매치	○	○	○	○
발렌타인 선물교환	○	○	○	○

[표 2] 각 과제의 모델링 프로세스 분석결과

사 교육에서 수학적 모델링의 의미를 충실히 담은 과제들을 교사들에게 상당히 제공하였다는 것을 보고한다. 이러한 새로운 과제의 소개 및 이용은 다음 장에서 보고하는 교사들의 학습자로서의 양식과 새로운 과제에 대한 경험에 만족감의 표시하는 교사 설문과도 관련이 있다.

2. 강사 발문과 교사들의 두 가지 정체성(identity)

본 장에서는 앞서 이론적 배경에서 소개한 Gee(2000)의 네 가지 정체성의 분류 중에서 discourse-identity에 집중하여, 교사 교육 현장에서 교사 자신에 대한 지식과 경험에 대한 특징을 파악하고자 한다. 수학적 모델링의 교사 교육에서 강사의 의도가 명확한 교수학적 상황에서, 두 가지 패턴의 discourse-identity이 발견되었다. 하나는 수학적 모델링의 과제를 통해 수학을 학습하는 양식(a mode as learners)을 제공하였고, 또 다른 것은 수학적 모델링을 과제로써 계획하고 실행하는 교수자로서의 양식(a mode as teachers)이었다. 예를 들어, [그림 4]의 휴대전화를 충전하는 상황에 대한 과제와 [그림 7]은 알루미늄 포일을 이용하여 배를 설계 및 제작을 하고, 수조에서 실험을 하는 과제에서 교사들은 수학적 모델링의 과제를 경험하는 학습자로서의 양식(a mode as learners)을 경험하였다. 워크숍에서 시간 할애도 상당하였는데, 휴대전화 배터리 충전 과제는 약 17분, 포일로 배 만들기 과제는 약 37분이였다. 강의자는 주어진 과제에 대해 학습자로서 교사들이 탐색하고 해석하는 것에 대해 다음과 같이 발

문하였다:

> Full로 충전하려면 얼마나 걸릴까요? … 빈칸에 무슨 숫자가 들어가야 할까요? 선형으로 드러날 것 같은가요? 추측해 보시고 한번 그래프로 표현해보세요. … 비디오를 실행해보면 좌표점이 가다가 언제쯤 인가부터는 곡선으로 기울어져서 1차 함수 스타일로 나타나지 않는다는 걸 볼 수 있는데요, 왜 이러는 걸까요? … 어떤 tendency가 보이시나요? 완벽하게 그래프로 보이는 것은 아니지만 경향성이 보이죠. 당연히 n이 많아지면 더 잘 보일 수 있다는 것을 알 수 있죠. 시간상 3번밖에 못했지만 5번 정도 하면 그 경향성이 더 잘 보일 것 같아요.
> 제가 표를 작성하시면서 꼭 선생님들이 만드신 배의 부피를 써보라고 했는데요. 배의 부피와 추의 무게와 어떤 관련이 있을까요?

교사들은 desmos를 이용하여 주어진 과제를 해결하는데 집중하거나, 배를 만들고 수조에 실험하는데 열중하였다. “극한에 수렴하는 것과 유사한 상황이니까, 넘어갈 수 없어요.”라고 답변하기도 하였다.

또한, [그림 11]의 어느 도시에서 관광하는 상황에 대한 과제에서는 다음과 같이 발문하였다:

> 일정표를 만들어주시면 되는 거예요. 시간별로, 비용도 어느 정도 들것이며, 맛있는 것들. 일요일과 월요일이라는 것 생각해 주시고요. 일요일은 문 닫는 곳도 더러 있으니까 고려해서요. 일요일과 월요일을 나누겠습니다.

10여 분이 지나고 교사들은 자신의 풀이를 발표하였는데, 다음은 발표의 예이다:

> 서울역에서 9시에 ktx를 타십니다. 부산역에 도착하면 12시가 되는데 12시에 부산역에서 시티 투어버스가 출발해요. 부산이 관광도시이다 보니까 시티투어버스가 잘 되어있거든요. 그걸 타시고 부산항 대교를 건너서 광안대교로 건너가는데 버스에 앉아서 구경하실 수 있어요. 타고 가시고 날씨가 좋은 월요일이라면 교통체증도 없이 잘 갈 수 있어요. (생략)

대부분의 교사가 이러한 과제에 매우 깊이 있게 참여하는 모습이었다. 과제에 대한 신선함과 관심, 흥미로움을 표현하는 교사들도 많이 있었다. 교사들의 이러한 참여는 전적으로 수학 학습자의 양식이다. 즉, 교사들은 학습자로서의 양식에서 주어진 과제에 대해 학습자들이 하는 사고의 경험을 하면서, 주어진 과제와 관련된 발문을 접하게 된다. 이와 더불어, 학습자 양식으로 제안된 교수학적 상황에서 교사들이 가르치는 자로서의 교사의 양식으로 전환되는 경우는 찾기 어려웠다. 자료에는 드러나지 않

았지만, 교사들은 강의자가 사용하는 발문을 이 두 과제를 이용하여 수학 수업을 기획하고 실행할 때 고려할 수도 있을 것이다. 그러나, 그러한 발언이나 제스쳐는 전혀 관찰되지 않았다. 예를 들어, 강사가 제시한 과제들을 실제로 자신의 수업에서 이용했을 때 학생들의 일반적인 답변이나 전형적인 오류를 궁금해하거나, 이러한 과제를 가지고 수업을 했을 때의 난제 등을 고민하지는 않았다. 즉, 교사들은 수학을 학습하는 양식(a mode as learners)에서 학습자라는 정체성을 가지고 있는 것을 볼 수 있다.

한편, [그림 14]의 테니스 경기 수를 찾는 조합의 개념을 포함하는 과제와 [그림 13]의 망고의 개수를 찾는 문제에서 교사들은 수학적 모델링의 과제를 이용하여 수학을 가르치는 교수자로서의 양식(a mode as teachers)을 경험하였다. 예를 들어, [그림 14]의 과제와 함께 다음과 같이 발문하였다:

> 문제들의 풀이를 함께 해보시는데, … 다양한 표상, 즉 표로 그릴 것인가 그림으로 그릴 것인가 숫자로 표현할 것인가 등등을 고려하면서 한번 접근해봤으면 좋겠습니다. 15분정도 시간을 드리도록 하겠습니다.

즉, Ball, Thames, and Phelps (2008)이 정의하는 전형적인 specialized content knowledge에 대한 탐색으로 다양한 풀이와 표상에 대한 접근을 제안한다. 교사들의 답변의 한 예가 다음과 같다:

> 저희는 10명의 학생이 테니스 경기를 각자 다 한 번씩 한다면 총 몇 번의 경기를 할 것인지 그것을 어떻게 아이들에게 설명할 것인지 토의해 봤는데요. 일단 첫 번째로 수학적 표상 중에 그림을 이용해서 1번부터 10번까지 학생을 번호로 생각한 다음에, … (생략) 좀 이해력이 빠른 학생은 이 안에 규칙이 있다는 걸 깨달아서 끝까지 그리지 않아도 문제를 풀 수 있고, 그게 좀 느린 학생은 차근차근히 해서 풀 수 있지 않을까 했고요. 다른 방법으로는 표를 이용해봤는데, 표는 두 가지 방법이 나왔는데…(생략). 마지막으로 이거는 도형으로 생각했는데요. 총 10명의 학생이 테니스 경기를 한다는 것이 각자 악수한다는 것과 이론적으로 논리는 같으니까 쭉 도형으로 표시해서 …(생략) 학생들이 만약에 대각선의 수를 구하는 방법을 안다면 이것을 이용해서 쉽게 구할 수 있다. 이런 방법이 나왔습니다.

[그림 13]의 망고 문제에서 강의자는 다음과 같이 발문하였다:

> 이 문제를 학생들이 어떻게 풀까요? … 선생님들이 이 문제를 어떻게 푸느냐가 아니라, 학생들이 이 문제를 어떻게 풀 것 같은가를 생각하셔서 써 보시기 바랍니다. 이게 정답일 수도 있고 정답이 아닐 수도 있잖아요? 학생들이 어떻

> 게 풀 것 같은가. 한 번 풀이 방법을 생각해 보셨다면 학생들이 접근할 때 오개념을 갖고 접근할 수도 있잖아요? 그러면 어떻게 접근할 것인가도 생각해보세요. … 옆에 계신 선생님들과 인사 나누시고, 풀이 과정에 있어서 공통점이나 차이점이 있는지 한번 얘기해 보시기 바랍니다. (학생들이) 제일 잘 실수하는 곳이 어디였을까요? 생각해봤으면 같이 얘기를 해봅시다. 어느 부분에서 가장 많은, 전형적인 오류를 범할까요?

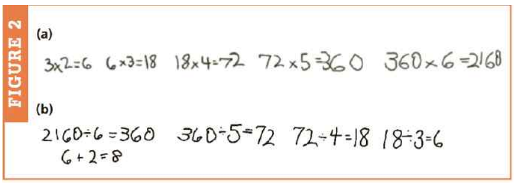
앞의 테니스 경기 문제와 같이 학생들의 다양한 풀이에 예상뿐만 아니라 전형적인 오류도 탐구해 보도록 요구한다. 교사들은 거꾸로 풀기 전략과 망고의 개수를 미지수로 두고 방정식을 세우는 전략 두 가지를 대부분 사용하였다. 이후 강의자가 이 문제에 접근하는 일곱 가지 방법을 소개하였다. 그러나, 교사들은 이 문제에 접근하는 학생들의 오개념 또는 수학적으로 비논리적인 접근 방법을 찾지 못하였다. 다만 강의자가 [그림 16]과 같이 전형적인 오류를 소개하자, 그 풀이에 대한 해석을 한 교사가 “먹은 게 1/6, 1/5 ... 인데 남은 게 1/6, 1/5... 라고 생각한 거 같아요.”라고 짧게 하였다.

강사는 과제의 변형을 요구하기도 하였다. 예를 들어 강사는 Smith and Stein(2011)의 수학적 논의를 위한 다섯 가지 관행을 교사들에게 안내한 후, [그림 10]의 상자 디자인 과제에 대하여 다음과 같이 발문하였다:

> 지금 이 수학 과제가 어느 정도 구조화된 문제에요. 그래서 여러분이 이 문제를 비구조화 문제로 만들어보고, 이 문제를 (수학적 논의를 위한) 다섯 가지 관행, 예상하기, 점검하기, 선정하기, 계열짓기, 연결하기에 따라 생각해 보세요.

구조화된 과제를 비구조화된 과제로 변형하는 것과 더불어, 학교 수업에서 수학적 논의의 방식으로 구현할 것을 염두에 두어 각 관행을 실행하도록 한다. 30여 분이 지나고 교사들은 활동 결과를 공유했는데, 예는 다음과 같다:

> 저희도 문제를 만드는데 시간이 오래 걸렸고 답은 못 찾았어요. … 아이들이 지진이 났을 때 백신을 보내야 하는데 백신을 보낼 수 있는 모양은 이런 모양으로 되어있고, 그리고 백신의 크기는 이런 모양으로 정해주고, 가지고 있는



[그림 16] 유익한 오답!

것은 A4용지 네 장. 그리고 가장 최소의 A4용지를 사용해서 가장 많은 양을 보낼 수 있는 포장 용기를 제작하는 게 저희의 문제였어요. 포 장용기를 제작할 수 있는 그 모양이라던 지 정육면체나 원기둥을 만들 수 있고 또 백신을 넣는 방법에 따라서 또 모양이 달라질 수 있고, 또 최소의 A4용지를 사용하기 때문에 아이들이 이 부분에서 변수를 만들 수 있다고 생각했습니다. 아직 답은 못 구했습니다.

대부분의 교사가 변형한 과제에는 맥락에 대한 설명만 있을 뿐, 수학적인 요소(예를 들어, 백신의 크기, A4용지의 크기)와 같은 정보는 없었다. 즉, 그러한 정보를 제공하지 않는 방식으로 비구조화된 문제를 변형하는 유형이 대부분이었다. 또한, 강사가 수학적 논의의 수업 유형을 고려하도록 안내하였으나, 이 부분에 대해서는 언급이 없었다.

한편, [그림 5]의 다양한 모양의 물병에 담긴 물의 높이에 관한 과제에서 교사들이 desmos를 이용하여 직접 과제를 해결한 후, 다음과 같은 발문을 하였다:

이 활동의 학습목표를 무엇이라 만들고 싶으십니까? … 지금 몇 학년을 가르치고 계시고 이 활동에서 학습 목표로 해보고 싶은 거 한번 공유해 볼까요? 학급, 학교의 상황에 따라 다를 것 같은데. … 이것으로 수업을 한다면 학습 목표를 어떻게 하실 건가요? 학습 목표가 하나만 나오는 게 아니라 굉장히 다양하게 나올 수 있어요. 하나씩 만들어볼까요?

학습 목표 설정에 대한 반복적인 질문이 등장하는 것은 교사들이 강사의 발문에 난감한 기색이 매우 역력히 드러났기 때문이었다. 신중을 넘어 얼음 같은 침묵의 순간이 발생했고, 워크숍에 참여한 교사들은 이 발문에 쉽게 아이디어를 내지 못하는 모습이었다. 교사들은 "물병의 모양에 따른 부피의 변화를 그래프로 그릴 수 있다."와 "시간에 따라 물병의 물의 높이를 그래프로 그릴 수 있다." "식의 모양을 가지고 실제로 식을 세워서 실제로 시간에 따른 좌표를…"이라고 반응하였다. 첫 번째 답변과 세 번째 답변은 이 과제에서는 탐구하기 어려운 목표이고, 두 번째 답변은 학습자 특징이 반영되어 있지 않으며, 그래프를 그리는 이유가 분명하지 않다.

수학 수업에서 과제를 구현할 때 교사의 발문에 대해서도 고려하기도 하였다. 예를 들어, 교사들이 [그림 7]의 배 만들기 실험이 마치고, 제작한 히스토그램에 대해

강사: 그래프 보시면서 하실 수 있는 질문은 뭐가 있을까요?
어느 교사: 어디에 많이 모여 있는지? 처음보다 더 향상된 포인트는 어디일까?
강사: 또 다른 발문 생각하신 분 있나요? … 제가 표 작성하시면서 꼭 선생님들이 만드신 배의 부피를 써보도록 하였는데, 배의 부피와 추의 무게와 어떤 관련이 있을까요?

본 과제에 대해 교사들이 활발하게 배의 제작과 실험을 했던 상황과 다르게, 교실은 매우 조용했고 강사의 질문에 매우 수동적인 분위기를 보였다. 교사의 발문은 제공한 과제에서 무엇을 탐구해야 하는가를 안내하는 중요한 지침이다(Boaler & Brodie, 2004). 이러한 교수학적 양식에 대해 교사들이 "가르치는 자"로서의 정체성을 교사 교육의 상황에서 명확히 드러나지 못하는 경우도 있었다.

극단적인 경우로는 "가르치는 자로서 교사"의 양식이 제공되었으나, 교사들이 "수학 학습자로서 교사"로 상황을 바꾸기도 하였다. 예를 들어, [그림 9]의 교실을 완두콩으로 채우는 상황에서 강사는 "학생들이 어떻게 이 문제를 풀 것 같은지, 아까 발표 안 했던 팀부터 발표해볼까요?"라고 하였지만, 몇몇 교사들은 다음과 같이 답하였다:

> 저희는 바닥 타일을 가지고 측정을 했어요. 먼저 바닥 타일이 정사각형이라 길이를 재고, 개수를 셌더니 여기는 28개 하고 한 20cm가 남아요. 여기는 18개 정도가 나와 가지고 그래서 여기 가로는 828cm 그다음에 세로는 1308cm, 높이는 2m 98cm 가 나왔습니다. 그래서 총 곱해보니까 322741152cm3 가 나왔습니다. 그리고 저희는 일단 기본 유닛을 구하는 데 좀 걸렸는데 …

즉, 자신들이 주어진 문제를 어떻게 해결하였는가로 상황을 전환했다. 또한, [그림 8]의 번지 과제에서 강사는 "어디에 수학이 있는지, 그니까 번지점프 하신 분들은 왜 그 숫자가 적절하게 나온 건지 생각해보시면 좋을 것 같습니다."라고 하였지만, 몇몇 교사들은 다음과 같이 답하였다:

> 낙하 거리를 쟀어요. 첫 번째는 좀 의미 없는 값 같아서 두 번째부터 재서 그 차이를 확인해 봤더니 약간, 14, 18, 16 이런 식으로 변하는 위치만. 이게 정확히 제곱식에 가까운 건지는 확인이 안 돼서 그림도 한번 찍어 그려봤거든요. 그래서 결론은 일차식에 가깝다는 결론이 내려져서…

강사의 과제에 대한 수학적 분석에 대한 탐구 대신 자신들의 과제 풀이 방식, 즉 학습자 양식으로 대신하는 경우이다.

3. 수학적 모델링에 관한 교사 교육 참여에 대한 교사들의 생각

[그림 17]의 설문지에 대한 교사들의 답변 결과는 다음과 같다. 첫째, 워크숍에 대한 유용성과 그 이유에 대해 대부분의 교사가 유용했다고 답변하였다. [그림 18]에서 보이는 바와 같이, 그 이유로 수학적 모델링과 관련된 다양하고 구체적인 과제를 소개받았다는 이유가 41.4%, desmos 등 수업에 직접 이용할 만한 구체적인 수업 기술

1. 이 워크숍이 유용하셨습니까? 그 이유는 무엇인가요?
2. 이 워크숍에서 다룬 과제를 선생님이 학교수업에 적용하시겠습니까? 그 이유는? 더불어 재구성 또는 변형을 하신다면 어떻게 하실지요?
3. 이 활동에 어떤 수학적 의미가 있다고 생각하시나요?
4. 이 활동을 학교에서 시행한다면 학생들이 어떤 수학적 사고를 할 수 있을까요?

[그림 17] 설문지 질문

방법을 알 수 있었다는 이유가 25.7%, 그리고 교사 교육의 방식이 강사의 설명보다 교사들이 직접 활동하고 참여할 수 있었다는 이유가 22.9%였다. 특히, 처음 경험한 성격의 수학적 모델링 과제에 대한 만족감과 그러한 과제를 직접 경험할 수 있었다는 것 자체를 새로운 학습으로 인식하는 것을 볼 수 있었다.

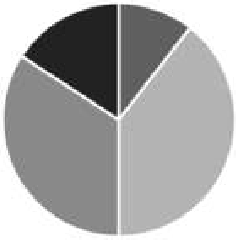
두 번째, 수학적 모델링에 관한 교사 교육 이수 이후에 이를 학교 수업에 적용 여부와 그 이유에 대한 질문이었다. [그림 19]와 같이, 응답자 중에 과제 중 일부를 언급하면서 수학적인 이유가 54%이다. 예를 들어, “빈 병에 물 채우기 문제는 고등학교 수업에서도 다양한 난이도로 적용이 가능해 보입니다. 빈 병을 세로로 슬라이스한 파우치 형태의 병을 만들어서 물 채우기를 해보고 원래 빈 병의 물 채우기와 비교해 볼 수도 있을 것 같아요.”라고 답했다. 비수학적인 이유는 32.4%로 “기초학력 부진 학생의 지도에 도움이 될 듯합니다.”라고 답하는 경우이다. 응답하지 않은 비율은 13.5%였다.

세 번째, 수학적 모델링에 관한 교사 교육이 제공한 과제 또는 활동에 대한 수학적 의미를 묻는 질문에 부피, 함수의 그래프 등 수학 주제를 명시한 답변이 [그림 20]에 보이는 바와 같이 10.5%, 의사소통, 논리적 사고 및 실험 등 수학적 관행을 언급한 답변이 39.5%, 창의력 향상 또는 교실 밖과 연계 등 비수학적 답변이 34.2%였다. 응답하지 않은 경우도 15.8%이다.

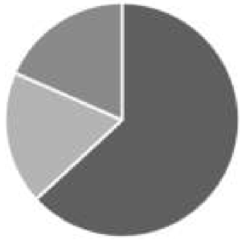
네 번째, 수학적 모델링에 관한 교사 교육에서 제공한 과제와 활동을 학교 수학에서 구현했을 때 기대되는 학습자 경험 및 사고에 대해 [그림 21]과 같이 추론, 문제해결력, 수학적 문제 발견 등 수학적 사고를 구체적으로 설명한 답변이 63.1%, 도전 또는 안전과 같은 비수학적 답변이 18.4%, 응답 없음도 18.4%였다.

[그림 18] 수학적 모델링의 교사 교육이 유용했던 이유

[그림 19] 모델링 과제를 학교 수업에 적용하고 싶은 이유



[그림 20] 과제에 어떤 수학적 의미가 있는가?



[그림 21] 학생들에게 기대하는 수학적 사고는 무엇인가?

Ⅴ. 결론 및 토론

수학적 모델링의 관점으로 교사 교육에 대한 연구 결과를 바탕으로 다음과 같은 결론을 맺고자 한다. 첫째, 수학적 모델링의 구현에 필요한 다양한 과제를 교사들에게 소개할 필요가 있다. 본 연구에서 보고하는 수학적 모델링의 과제는 <표 2>에서 보고하는 바와 같이 Zbiek and Conner (2006)이 제안하는 수학적 모델링의 과정을 충실히 이행할 수 있는 힘을 가지고 있다. 실세계와 수학적 세계의 함께 존재하면서도, 주어진 상황에 대한 탐색 및 관찰이 전제되어 조건과 가정을 만들고 실험을 통해 수학화하는 과정을 포함한다. 단계마다 분석과 해석이 필요할 뿐만 아니라, <표 1>이 보고하는 바와 같이 협업, 의사소통 및 설계와 정보검색 등 서로 다른 수학적 관행의 경험을 할 수 있는 다양한 과제를 제공하였다. 그뿐만 아니라 [그림 18]에서 보고하는 바와 같이 수학적 모델링의 교사 교육에 참여한 교사들도 다양한 과제를 경험할 수 있었다는 데에 가장 큰 만족감을 나타내었다. 수학적 모델링을 경험할 수 있는 새로운 과제에 대해 강사가 학습자 양식으로 접근할 것을 교사들에게 안내했을 때, 그 양식이 그대로 유지되는 것은 이러한 학습에 대해 교사들이 흥미와 관심이 크다는 것을 보여준다.

적절한 과제를 개발하거나 찾는 것의 어려움은 수학적 모델링 구현의 가장 큰 난제이다(Ferri & Blum, 2013; 최지선, 2017). 또한, 수학적 모델링을 가르치는데 필요한 역량 중 하나는 과제에 관한 것으로(Ferri, 2013), 수학적 모델링에서 과제는 매우 중요한 역할을 한다. 수학적 모델링에 대한 국내 연구에서 제시하는 과제들이 실생활 소재를 도입하고 활용 문제를 해결하는 수준에 머물고 있다는 비평(박선영, 한선영, 2018)과 국내에서 수학적 모델링의 관점으로 개발된 과제들이 수학적 모델링의 본질적 성격과 다르다는 한계(황혜정, 2007)는 여전히 수학적 모델링과 관련된 과제에 대한 이해가 교사 교육뿐만 아니라 연구적인 측면에서 부족하다는 상황을 방증한다. 수

학적 모델링의 경험이 학생들의 수학적 사고를 향상하는데 도움이 되지만 과제의 특성이 매우 중요하므로(서지희, 윤종국, 이광호, 2013), 수학적 모델링의 과정과 성격을 온전히 담은 다양한 과제를 교사들에게 제공하는 것이 수학적 모델링을 수학 교실에 정착시킬 수 있는 가장 중요한 첫걸음이 된다. 이는 조원주와 권오남(2002)이 보고하는 교사들이 수학적 모델링의 구현에 회의적이라는 반응을 해소하고, 김민경 외(2009)가 밝힌 교사들의 수학적 모델링에 대한 부족한 이해를 돕는 가장 적극적인 방법이 될 수 있다. 이는 Ferri (2013)이 제안한 수학적 모델링 자체에 대한 이해에도 도움이 될 수 있다.

둘째, 교사들이 수학적 모델링을 교실에서 구현할 때 직면하는 어려움을 해소할 방안에 대해 교사 교육에 구체적으로 제시할 필요가 있다. 앞서 설명한 바와 같이 강사가 학습자로서 양식을 제공할 때 교사들은 아무런 정체성 변화가 없었다. 즉, 수학적 모델링의 과제를 직접 해석하고, 해결책을 세우고, 실험하고, 결과를 도출하는 과정에서 교사들은 학습자의 양식을 유지한다. 그러나, 강사가 교사들에게 교수자로서의 양식으로 과제에 접근하도록 유도할 때, 교사들이 그 양식을 유지하면서 활동하기도 하였으나, 난제로 받아들여 학습자 양식에서와 달리 답변이 없거나 소극적이었다. 예를 들어, 수업 목표는 수업의 전체 방향성을 결정하므로(Smith & Stein, 2011), 수업의 준비와 실행에서 중요한 결정의 순간이다. 그런데, 앞서 보고한 바와 같이 교사 교육에서 수업 목표 설정과 관련한 논의를 할 때, 대부분의 교사가 소극적으로 돌변하는 것은 교사들이 수학적 모델링의 관점으로 수업을 설계하는 것에 대한 두려움을 방증한다. 더 나아가 강사의 의도와 달리 학습자 양식으로 전환하여 답변하는 것은, 그 갈등을 해결하는 방식의 일환으로 보인다.

교사들의 설문지 답변을 보면, 교사들이 학습자 양식을 유지하려는 성향이 강함이 드러난다. [그림 20]에서 보이는 바와 같이, 수학적 모델링의 과제에 대한 기본적인 수학적인 분석에 절반 정도의 교사들만 가능했고, [그림 19]에서 보이는 바와 같이 수학 수업의 과제 선정에서도 수학적 기저를 파악하지 못하는 교사들이 절반 정도였다. 이 두 가지 모두 specialized content knowledge와 관련이 있는데(Ball et al., 2008), 교사 교육의 순간에 교사들이 이러한 지식의 관점으로 과제를 학습하지 못하고 있다는 방증이기도 하다. 그뿐만 아니라 수학적 모델링은 수학화를 학생들이 경험할 수 있는 상황을 제공하기 때문에 가치가 있는 것인데(Lesh & Doerr, 2000), [그림 21]은 교사들은 수학적 모델링의 구현에 있어서 실제 학생의 사고에 대한 고려가 부족하다는 것을 보여준다. 학습자와 달리 교사는 과제가 담고 있는 수학적 의미와 관행을 명확히 파악하는 것이 중요한데, 교사들은 그런 역량을 가지고 있는 것 같지 않다. 교수자로서의 양식은 학습자로서의 양식보다 훨씬 다양한 요소들을 고려하는 인지적으로도 상위의 사고를 교사에게 요구한다. 즉, 수업을 위한 능력은 과제를 해결할 수 있는 능력만으로는 매우 부족하다. 그러나, 교수자로서의 양식에서 강의자가 부여하는 발문들은 교사들이 수학적 모델링을 통해 진정한 "좋은 수학 수업"으로 구현되는데 필요한 교수학적 추론을 안내한다. 그러한 추론은 수학 수업의 전문가가 되기 위

해 필요한 교사의 추론 능력이라고 볼 수 있다.

따라서, 수학적 모델링의 구현을 위한 교사 교육은 다양하고 좋은 수학과제의 사례들을 제공하는 것뿐만 아니라, 그러한 과제를 실행하기 위한 교수자료서의 양식을 교사들이 경험할 기회를 좀 더 제공할 필요가 있다.

References

김민경, 민선희, 강선미(2009). 초등교사들의 수학적 모델링에 대한 인식 조사 연구. 한국**학교수학회논문집, 12**(4), 411-431.

박경미, 박선화, 권점례, 윤상혁, 강현영, 이경진, . . . 전인태(2015). **2015 개정 수학과 교육과정 시안 개발 연구 (연구보고 BD15110002).** 서울, 한국: 한국과학창의재단.

박선영, 한선영(2018). 수학적 모델링 과정을 반영한 교과서 문제 재구성 예시 및 적용. **수학교육, 57**(3), 289-309.

서지희, 윤종국, 이광호(2013). 중학교 3학년 수학 영재 학생들을 위한 수학적 모델링 교수 학습 자료의 개발 및 적용: 쓰나미를 소재로. **학교수학, 15**(4), 785-799.

신은주, & 이종희(2004). 모델링 과정에서 지각적, 인지적, 메타인지적 활동의 상호작용에 관한 사례연구. **학교수학, 6**(2), 153-179.

오영열, 박주경(2019). 초등수학에 적용된 수학적 모델링 과제 유형 탐색, **한국초등교육, 30**(10), 87-99.

조원주, 권오남(2002). 중학교 함수영역에서 수학적 모델링을 활용한 수행과제와 구체적 평가기준안 개발. **수학교육 논문집, 14**, 349-370.

최지선(2017). 수학적 모델링 수업에 대한 초등 교사의 인식. **수학교육학연구, 27**(2), 313-328.

최희선, 한혜숙(2018). 수학적 모델링 기반 수업이 중학교 1학년 학생들의 수학적 문제제기 능력에 미치는 영향. **학습자중심교과교육연구, 18**(14), 755-782.

황혜정(2007). 수학적 모델링의 이해: 국내 연구 결과 분석을 중심으로. **학교수학, 9**(1), 65-97.

Anhalt, C. O., & Cortez, R. (2016). Developing understanding of mathematical modeling in secondary teacher preparation. *Journal of Mathematics Teacher Education, 19*(6), 523-545.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59(*5), 389-407.

Beijaard, D., Meijer, P. C., & Verloop, N. (2004). Reconsidering research on teachers' professional identity. T*eaching and Teacher Education, 20*(2), 107-128.

Blum, W., & Ferri, R. B. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(1), 45-58.

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects: State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 37-68.

Boaler, J. (2001). Mathematical modelling and new theories of learning. *International Journal of the IMA, 20*(3), 121-128.

Boaler, J., & Brodie, K. (2004). The importance, nature, and impact of teacher questions. Paper presented at the Proceedings of the twenty-sixth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Borko, H., Liston, D., & Whitcomb, J. A. (2007). Genres of empirical research in teacher education. *Journal of Teacher Education, 58*(1), 3-11.

Chan, E. C. M. (2008). Using model-eliciting activities for primary mathematics classrooms. *The Mathematics Educator, 11*(1), 47-66.

Cohen, D. K., Raudenbush, S. W., & Ball, D. L. (2003). Resources, instruction, and research. *Educational Evaluation and Policy Analysis, 25*(2), 119-142.

Connelly, F. M., & Clandinin, D. J. (1999). *Shaping a professional identity: Stories of educational practice.* London, ON: The Althouse Press.

Doerr, H. M., & Lesh, R. (2003). A modeling perspective on teacher development. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: A models and modeling perspectives on mathematics problem solving*, *learning, and teaching* (pp. 125-140). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

English, L. (2003). Mathematical modelling with young learners. In S. J. Lamon, W. A. Parker, & K. Houston (Eds.), *Mathematical modelling* (pp. 3-17). West Sussex, England: Woodhead Publishing.

Ferri, R. B. (2013). Mathematical modeling—The teacher's responsibility. In B. Dickman & A. Sanfratello (Eds.), *Proceedings of Converence on Mathematical Modeling* (pp. 26-31). New York, NY: Teachers College Columbia University.

Ferri, R. B., & Blum, W. (2009). Mathematical modelling in teacher education–Experiences from a modelling seminar. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of CERME 6* (pp. 2046-2055). Lyon, France: European Society for Research in Mathematics Education.

Ferri, R. B., & Blum, W. (2013). Barriers and motivations of primary teachers for implementing modelling in mathematics lessons. Paper presented at the Congress of European Research in Mathematics Education.

Flores, M. A., & Day, C. (2006). Contexts which shape and reshape new teachers' identities: A multi-perspective study. *Teaching and Teacher Education, 22*(2), 219-232.

Gainsburg, J. (2008). Real-world connections in secondary mathematics teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*(3), 199-219.

Gee, J. P. (2000). Identity as an analytic lens for research in education. *Review of Research in Education, 25*(1), 99-125.

Guest, G., MacQueen, K., & Namey, E. (2012). *Applied thematic analysis*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Hewson, P. W., & A'B. Hewson, M. G. (1988). An appropriate conception of teaching science: A view from studies of science learning. *Science Education, 72*(5), 597-614.

Jung, H., & Brady, C. (2016). Roles of a teacher and researcher during in situ professional development around the implementation of mathematical modeling tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education, 19*(2-3), 277-295.

Lesh, R., & Doerr, H. M. (2000). Symbolizing, communicating, and mathematizing: Key components of models and modeling. In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 361-383). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003a). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 3-33). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., & Doerr, H. M. (Eds.). (2003b). *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., & Harel, G. (2003). Problem solving, modeling, and local conceptual development. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(2&3), 157-189.

Lytle, S. L., & Cochran-Smith, M. (1994). Inquiry, knowledge, and practice. *Teacher research and educational reform, 93*, 22-51.

MacLure, M. (1993). Arguing for your self: Identity as an organising principle in teachers' jobs and lives. *British Educational Research Journal, 19*(4), 311-322.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Governors Association Center for Best Practices, & Council of Chief State School Officers. (2010). *Common core state standards for mathematics.* Washington D.C.: National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers.

Olsen, B. (2008). *Teaching what they learn, learning what they live.* Boulder, CO: Paradigm Publishers.

Pollak, H. (2007). Mathematical modelling ― a conversation with Henry Pollak. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics Education: The 14th ICMI Study* (pp. 109-120). Boston, MA: Springer.

Saldaña, J. (2013). *The coding manual for qualitative researchers* (2 ed.). Los Angeles: SAGE

Schorr, R. Y., & Lesh, R. (2003). A modelling approach for providing teacher development. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivismen* − *Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching* (pp. 141-157). Mahwah, NJ: Lowrence Erlbaum Associates.

Sfard, A., & Prusak, A. (2005). Telling identities: In search of an analytic tool for investigating learning as a culturally shaped activity. *Educational Researcher, 34*(4), 14-22.

Smith, M. S., & Stein, M. K. (2011). *5 practices for orchestrating productive mathematics discussions*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Stein, M. K., Grover, B. W., & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal, 33*(2), 455-488.

Swetz, F., & Hartzler, J. S. (1991). *Mathematical modeling in the secondary school curriculum.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Thomas, L., & Beauchamp, C. (2007). Learning to live well as teachers in a changing world: Insights into developing a professional identity in teacher education. *The Journal of Educational Thought, 41*(3), 229-243.

Zawojewski, J. (2013). Problem solving versus modeling. In R. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines, & A. Hurford (Eds.), *Modeling students'mathematical modeling* *competencies: ICTMA 13* (pp. 237-243). Dordrecht: Springer Netherlands.

Zbiek, R. M., & Conner, A. (2006). Beyond motivation: exploring mathematical modeling as a context for deepening students' understandings of curricular mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 63*(1), 89-112.

Yeon Kim
140 Baegyang-daero, 700beon-gil, Sasang-gu, Busan 46958, South Korea
E-mail address: yeonkim10@silla.ac.kr