

# 일량제어정책과 단수휴가를 갖는 이산시간 대기행렬의 고객수 분석<sup>+</sup>

(Queue Length Analysis of Discrete-time Queueing System under  
Workload Control and Single Vacation)

이 세 원<sup>1)\*</sup>

(Se Won Lee)

**요약** 본 논문에서는 유희기간을 갖는 서버의 재가동이 단수휴가와 그동안 도착한 고객들의 총 일량에 의해 결정되는 이중제어정책을 다룬다. 고객들은 베르누이 도착과정으로 시스템에 한 명씩 도착하며, 자기 차례가 될 때까지 기다렸다가 선착순으로 서비스를 받는다. 서버는 시스템 내에 더 이상 서비스할 고객이 없으면 유희기간을 가지며, 이와 동시에 이산확률변수  $V$ 의 휴가를 떠난다. 휴가 종료 시점에서 대기 중인 고객들의 서비스 시간 총합이 일량 임계값  $D$ 를 초과하면 바로 서비스를 시작하고, 휴가 종료시점의 시스템 내 총 일량이  $D$  이하인 경우에는 일량 임계값을 넘길 때까지 기다렸다가 재가동한다. 이러한 혼합제어정책 하에서 운영되는 이산시간 Geo/G/1 대기행렬시스템을 대상으로 하여 유희기간을 분석하고 안정상태 고객수 분포를 유도하였다.

**핵심주제어:** 이산시간 시스템, 일량제어정책, 단수휴가, 고객수 분석

**Abstract** In this paper, we consider a dyadic server control policy that combines workload control and single vacation. Customer arrives at the system with Bernoulli process, waits until his or her turn, and then receives service on FCFS(First come first served) discipline. If there is no customer to serve in the system, the idle single server spends a vacation of discrete random variable  $V$ . If the total service times of the waiting customers at the end of vacation exceeds predetermined workload threshold  $D$ , the server starts service immediately, and if the total workload of the system at the end of the vacation is less than or equal to  $D$ , the server stands by until the workload exceeds threshold and becomes busy. For the discrete-time Geo/G/1 queueing system operated under this dyadic server control policy, an idle period is analyzed and the steady-state queue length distribution is derived in a form of generating function.

**Keywords:** Discrete-time system, Workload control, Single vacation, Queue length

\* Corresponding Author: swlee@pknu.ac.kr

+ 이 논문은 부경대학교 자율창의학술연구비(2018년)에 의하여 연구되었음(C-D-2018-0659)

Manuscript received February 02, 2020 / revised February 12, 2020 / accepted February 13, 2020

1) 부경대학교 경영학부

## 1. 서론

본 논문에서는 유희기간을 갖는 서버의 재가동(On-off)이 단수휴가(Single vacation)와 그동안 도착한 고객들의 총 일량(Workload)에 의해 결

정되는 이중 서버제어정책(Dyadic server control policy)을 다룬다. ‘단수휴가’는 대기행렬이론 분야의 대표적인 서버제어정책 중 하나인  $T$ -정책(Heyman, 1977)의 변형으로서,  $T$ -정책 하에서는 유희한 서버가 확률변수  $T$ 의 휴가를 다녀와서 시스템에 대기 중인 고객이 없으면 반복해서 다시 휴가를 떠날 수 있지만, 단수휴가에서는 휴가를 한번만 다녀올 수 있다는 차이가 있다. 그래서  $T$ -정책을 단수휴가와 비교하여 복수휴가(Multiple vacation)정책이라고도 부른다.

‘일량제어정책’은  $D$ -정책에 해당하는 서버제어 정책으로서 유희한 서버가 고객도착과 동시에 바로 서비스하지 않고 유희기간(Idle period) 동안 도착한 고객들의 서비스 시간 총합이 임계값  $D$ 를 초과할 때까지 재가동을 지연시키는 운영방식이다. 서버(또는 기계, 설비)의 재가동 비용이 큰 생산 및 제조시스템에서 재가동 횟수를 줄여 비용 효율적으로 시스템을 운영하기 위해 이러한 제어정책들이 적용되어 통신, 서비스 분야에 까지 널리 사용되어 왔다. 서버제어정책에 관련된 자세한 내용은 여러 문헌에서 찾아볼 수 있다(Crabill et al., 1977; Doshi, 1986; Tadj and Choudhury, 2005).  $D$ -정책에 관련된 초기 연구는 Balachandran (1973), Balachandran and Tijms (1975)를, 단수휴가를 갖는 시스템의 분석은 Takagi (1991, 1993), Lee et al. (1992), Lee (2006)의 기존문헌들을 참고하기 바란다.

본 논문에서 다루는 이중제어정책과 같이 둘 이상의 서버제어정책이 혼합된 시스템에 대한 연구도 활발히 이루어졌다. 혼합제어정책에 관한 연구는 운영여건에 따라 단일 제어정책만을 사용해야 할 경우 어떤 제어정책이 보다 효율적인지 빠르게 평가할 수 있을 뿐만 아니라 여러 제어정책을 동시에 적용할 때 최적의 운영조건을 찾을 수 있는 이론적 배경을 제공한다는 장점이 있다. 먼저  $D$ -정책을 포함하는 혼합제어정책을 다룬 연구들로서 Lee and Seo (2008)는  $D$ -정책이나  $N$ -정책 중에 하나를 먼저 만족하면 바쁜기간(Busy period)을 시작하는  $\min(N, D)$ -정책 하에서 운영되는 M/G/1 대기행렬의 일량, 대기시간, 고객수를 분석하였다. Lee et al. (2010)은 고객의 도착간격들 사이에 상관성(Correlation)을 갖는

MAP/G/1 시스템을 분석하여 Poisson arrival과 Markovian arrival을 비교하였다. Lee et al. (2011)은  $N$ -,  $D$ -,  $T$ -정책을 동시에 고려하여 M/G/1 시스템의 일량, 고객수, 대기시간을 분석하였는데 이는 저자가 알기로 3개의 서버정책을 동시에 다룬 유일한 연구이다. Lee et al. (2006)은  $D$ -정책과  $T$ -정책을 갖는 M/G/1 시스템의 고객수와 대기시간을 분석하였다. 단수휴가를 포함하는 혼합제어정책을 다룬 연구로는 Lee et al. (1995), Lee and Ahn (2002), Lee et al. (2001), Lee et al. (2009)을 참고하기 바란다. Lee et al. (2009)은 사후공정과  $D$ -정책을 갖는 MAP/G/1 대기행렬의 고객수를 분석하였는데 여기서는 단수휴가를 사후공정을 위한 시간으로 바라보았다.

앞에서 소개한 연속시간 대기행렬시스템의 연구와 더불어 이산시간 시스템의 분석 또한 많이 찾아볼 수 있다. 하지만  $D$ -정책을 포함하는 이산시간 대기행렬의 분석에 관한 연구들은 다른 서버제어정책에 비하여 그 수가 적으며 비교적 최근에 이루어졌다. Lee et al. (2011)은  $D$ -정책을 갖는 이산시간 Geo/G/1 시스템의 일량, 고객수, 대기시간, 체제시간을 통합적인 접근방법으로 분석하였다. Lee et al. (2012)은 이산시간 MAP/G/1 시스템의 분석에 맞도록 확장하여 상관성을 갖는 도착과  $D$ -정책을 고려하여 해당 시스템을 포괄적으로 분석하였다. Lee (2016)는 집단도착과  $D$ -정책을 갖는 이산시간 MAP/G/1 시스템의 일량을 분석하였고, Lee (2018)는  $D$ -정책을 갖는 이산시간 BMAP/G/1 시스템의 대기시간을 분석하였다. 이산시간 시스템에 대한 보다 자세한 내용은 Takagi (1993)를 참고하기 바란다.

혼합제어정책을 다룬 이산시간 시스템을 분석한 연구들은 다음과 같다. Kim et al. (2013)은  $N$ -정책과 단수휴가,  $N$ -정책과 복수휴가를 갖는 이산시간 Geo<sup>X</sup>/G/1 대기행렬시스템 각각의 고객수 분포를 확률적 분해성질(Stochastic decomposition property)을 이용하여 분석하였다. Liu and Deng (2014)은 수정된(modified)  $D$ -정책과 베르누이피드백을 가지는 이산시간 시스템의 고객수를 분석하였다.  $N$ -정책이나  $T$ -정책과 같은 휴가형 시스템에서와는 다르게  $D$ -정책을 갖는 대기행렬시스템에서는 유희기간 동안 도착하는 고객들(바쁜기간 시작점에서의 고

객들)의 서비스 시간이 같은 분포를 따르지만 서로 독립이 아니다. 즉, i.i.d.(Independent and identically distributed)하지 않다. 이로 인해 시스템 분석이 복잡하다는 특징이 있다. Liu and Deng (2014)은 바쁜 기간 시작점에서의 고객들의 서비스 시간을 독립이라고 가정하여 수정된  $D$ -정책 시스템을 분석하였다. Lan and Tang (2017)은  $\min(N,D)$ -정책 하에서 시스템 상태에 따라 두 가지 도착률을 갖는 이산시간 대기행렬시스템의 고객수를 분석하였다.

본 연구에서는 단수휴가와  $D$ -정책을 갖는 이산시간 Geo/G/1 시스템의 안정상태 고객수 분석을 목표로 한다. 본 연구의 서버제어정책은 연속시간 시스템을 다룬 Lee et al. (2009)과 운영방식이 동일하며, 분석에 있어 Cheon (2005)의 논의를 참고하였다. 이 두 연구는 연속시간 시스템을 다루고 있으나 본 연구에서는 이산시간 시스템을 대상으로 하기에 연구영역(Research domain)에서 근본적인 차이가 있음을 밝힌다. 이후 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 본 논문에서 다루는 시스템에 대한 설명과 전체적인 분석에 앞서 필요한 기호와 함수들을 정의한다. 3장에서는 대상 시스템의 유희기간을 분석하여 바쁜기간 시작점에 관한 정보를 얻는다. 4장에서는 시스템의 고객수 분포를 유도하고, 5장에서 추후연구과제와 함께 결론을 맺는다.

## 2. 시스템

시스템은 다음과 같이 운영된다.

- (1) 지연도착시스템(Late arrival system with delayed access, LAS-DA)을 가정한다 (Bruneel, 1993). 따라서 본 연구에서 다루는 이산확률변수들은 적어도 1 이상의 값을 갖는다. Fig. 1의 시간축선 상의 간격은 이산시간 시스템에서 한 슬롯을 의미한다.
- (2) 고객들은 단위슬롯 당 도착확률이  $\lambda$ 인 베르누이 도착과정(Bernoulli process)으로 한 명씩 시스템에 도착하여 자기 순서가 될 때까지 기다리다가 선착순으로 서비스를 받고 시스템을 이탈한다.
- (3) 서버는 완전 서비스(Exhaustive service)를

제공한다(Lee, 2006). 즉, 한 번 바쁜기간을 시작하면 시스템에 고객이 없을 때까지 서비스한다. 서비스 시간은 이산확률분포를 따르고, 서비스 과정은 도착과정과 독립이며 일량 보존 시스템이다.

- (4) 시스템에 서비스할 고객이 없으면 서버는 이산 확률변수  $V$ 의 휴가(Vacation)를 떠난다. 휴가 종료시점에서 대기고객들의 서비스 총합(총 일량)이 미리 정해 놓은 임계값  $D$  이하이면 서버는 휴지기간(Standby period)을 보내다가 도착고객의 서비스 시간으로  $D$ 를 초과할 때 바쁜기간(Busy period)을 시작한다. 즉, 유희한 서버가 재가동된다(Fig. 1의 왼쪽 사이클 참고). 만약 휴가종료시점에서의 시스템 내 일량이  $D$ 를 초과하면 서버는 즉시 바쁜기간을 시작한다. 이 경우에는 일반적인  $D$ -정책 시스템과 달리 잔여휴가만큼 기다렸다가 재가동된다(Fig. 1의 오른쪽 사이클 참고).

분석에 사용할 기호와 변수, 함수들을 다음과 같이 정의한다.

$\lambda$ : 한 슬롯 동안에 고객이 도착할 확률

$S$ : 서비스 시간

$s_k = \Pr(S=k)$ :  $S$ 의 확률질량함수(pmf),  
( $s_0 = 0$ )

$S^*(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega^k s_k$ :  $S$ 의 확률생성함수(PGF)

$\sum_{i=1}^n S_i$ :  $S$ 의  $n$ 차 중합 ( $n$ -th convolution)

$S^{(n)}(k) = \Pr(S_1 + S_2 + \dots + S_n \leq k)$ :

$S$ 의  $n$ 차 중합의 분포함수(DF), ( $S^{(0)}(k) = 1$ )

$s^{(n)}(k) = S^{(n)}(k) - S^{(n)}(k-1)$ :

$S$ 의  $n$ 차 중합의 확률질량함수

$M_k = \sum_{n=1}^{\infty} S^{(n)}(k)$ : i.i.d 서비스 시간으로 이루어지는 재생과정의 재생함수

$m_k = \sum_{n=1}^{\infty} s^{(n)}(k) = M_k - M_{k-1}$ : i.i.d 서비스 시간으로 이루어진 재생과정의 재생질량함수

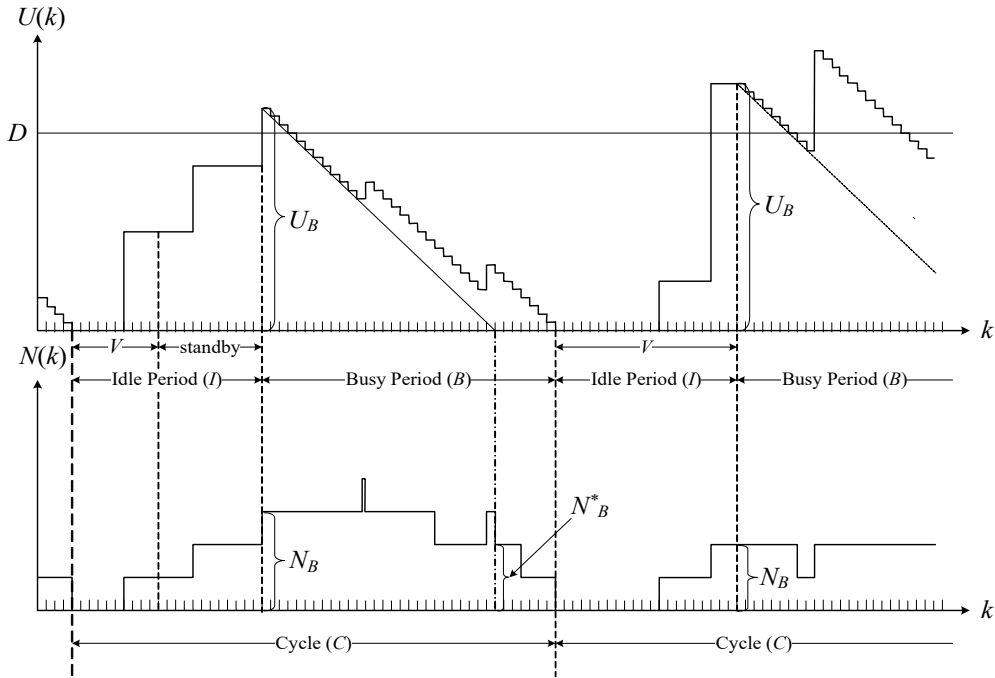


Fig. 1 A Sample Path of Workload and System Length of the System

$V$  : 휴가(Vacation)의 길이

$v_x = \Pr(V=x)$ :  $V$ 의 확률질량함수, ( $v_0 = 0$ )

$V^*(\omega) = \sum_{x=1}^{\infty} \omega^x v_x$ :  $V$ 의 PGF

$I$  : 유휴기간의 길이

$sb$ : 휴지기간의 길이

$B$  : 바쁜기간의 길이

$C$  : 사이클의 길이

$N_B$  : 바쁜기간 시작점의 고객수

$U_B$  : 바쁜기간 시작점의 일량

$E(\cdot)$ : 확률변수의 평균(Expectation)

$\rho = \lambda E(S)$ : 서버가 바쁠 확률

이 이탈하면서 시스템에 남기는 고객수에 영향을 미치므로 유휴기간의 분석은 고객수 분석에 반드시 필요하다. 또한 유휴기간 동안의 일량과정을 추적하여 얻은 바쁜기간 시작점에서의 일량과 고객수에 대한 정보들은 휴가형 대기행렬시스템 분석에 유용하게 사용된다. 먼저 유휴기간의 길이를 분석하자.

### 3.1 유휴기간의 평균길이

확률변수  $V$  동안 도착한 고객의 수  $A_V$ 가  $n$  명일 확률을  $a_n^V$  라고 하면

$$a_n^V = \Pr(A_V = n) \tag{1}$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} v_x \binom{x}{n} (1-\lambda)^{x-n} \lambda^n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

따라서 식 (1)의 정의로부터  $E(A_V) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n^V = \lambda E(V)$ 임을 확인할 수 있다.

이제 휴가 동안 도착한 고객수에 조건을 취하여 유휴기간의 평균길이  $E(I)$ 를 구해보자. 아무도

### 3. 유휴기간 분석

본 장에서는 유휴기간을 분석한다. 유휴기간에 도착하는 고객이 보는 일량과 그 고객의 서비스 시간에 따라 잔여유휴기간이 결정되고, 이는 고객

도착하지 않은 휴가의 길이를  $V_0$ , 한 명 이상 도착한 휴가의 길이를  $V_{1+}$ 라고 하고, 이들의 생성 함수(이하 GF)를 각각  $V_0^*(\omega)$ ,  $V_{1+}^*(\omega)$ 라고 하면, Takagi (1993)로부터 식 (2), (3)을 얻는다.

$$V_0^*(\omega) = V^*((1-\lambda)\omega) \quad (2)$$

$$V_{1+}^*(\omega) = V^*(\omega) - V^*((1-\lambda)\omega) \quad (3)$$

휴가 동안 아무도 도착하지 않았다면, 이 상황에서 휴가종료시점부터의 잔여유휴기간은 순수  $D$ -정책을 갖는 이산시간 Geo/G/1 대기행렬의 유휴기간과 확률적으로 동일하다.  $D$ -정책 하에서의 유휴기간의 길이를  $I_D$ ,  $I_D$ 의 GF를  $I_D^*(\omega)$ 라고 하면

$$I_D^*(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\lambda\omega}{1-\omega+\lambda\omega} \right)^k [S^{(k-1)}(D) - S^{(k)}(D)] \quad (4)$$

따라서 휴가 동안 아무도 도착하지 않은 경우의 유휴기간의 GF는 식 (5)와 같다.

$$V_0^*(\omega) \cdot I_D^*(\omega) = V^*((1-\lambda)\omega) \times \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\lambda\omega}{1-\omega+\lambda\omega} \right)^k [S^{(k-1)}(D) - S^{(k)}(D)] \quad (5)$$

휴가 동안 한 명 이상 도착했다면 이 상황은 휴가 동안 도착한 고객들의 서비스 시간의 총합(즉, 휴가 종료시점의 일량)  $A^U$ 가  $D$ 를 초과하는 경우와 그렇지 않은 경우로 나뉜다. 휴가 동안  $n$ 명( $n \geq 1$ )이 도착하였는데 이들의 서비스 시간의 총합이  $D$ 를 초과한다면 유휴기간은 이 휴가의 길이가 되고 식 (6)과 같다.

$$V_{1+}^*(\omega, A^U > D) = V_{1+}^*(\omega) - V_{1+}^*(\omega, A^U \leq D) = V^*(\omega) - V^*((1-\lambda)\omega) - \sum_{x=1}^{\infty} \omega^x \sum_{n=1}^x a_n^V S^{(n)}(D) = V^*(\omega) - V^*((1-\lambda)\omega) - \sum_{x=1}^{\infty} \omega^x \sum_{n=1}^x v_x \binom{x}{n} (1-\lambda)^{x-n} \lambda^n S^{(n)}(D) \quad (6)$$

휴가 동안  $n$ 명( $n \geq 1$ )이 도착하였는데 이들의 서비스 시간의 총합이  $D$  이하인 경우의 유휴기간은 이 휴가의 길이와  $(D - A^U)$ -정책 하에서의 유휴기간의 길이의 합이 된다.

$$V_{1+}^*(\omega, A^U \leq D) \cdot I_{D-A^U}^*(\omega) = \sum_{y=1}^D \sum_{x=1}^{\infty} \omega^x \sum_{n=1}^x v_x \binom{x}{n} (1-\lambda)^{x-n} \lambda^n S^{(n)}(y) \times \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\lambda\omega}{1-\omega+\lambda\omega} \right)^k S^{(k-1)}(D-y) - \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\lambda\omega}{1-\omega+\lambda\omega} \right)^k S^{(k)}(D-y) \right] \quad (7)$$

따라서 식 (5), (6), (7)을 모두 더하여  $I^*(\omega)$ 를 얻을 수 있다.  $E(I) = \left. \frac{d}{d\omega} I^*(\omega) \right|_{\omega=1}$ 로부터 정리하면 식 (8)을 얻는다.

$$E(I) = E(V) + a_0^V (1 + M_D) \frac{1}{\lambda} + \sum_{y=1}^D \sum_{k=1}^y a_k^V S^{(k)}(y) (1 + M_{D-y}) \frac{1}{\lambda} \quad (8)$$

서버가 유희할 확률은  $1 - \rho$ 이므로 사이클의 평균길이는  $E(C) = \frac{1-\rho}{E(I)}$ 로부터 얻을 수 있다.

### 3.2 바쁜기간 시작점에서의 고객수와 일량

바쁜기간 시작점에서의 고객수  $N_B$ 가  $n$ 명일 확률을  $N_n^B$ ,  $N_B$ 의 PGF를  $N_B^*(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n N_n^B$ 로 정의하자. 한 명으로 바쁜기간을 시작하려면 휴가 중 또는 휴가가 끝난 직후 시스템에 첫 번째로 도착한 고객의 서비스 시간이  $D$ 보다 크면 된다.  $n$ 명( $n = 2, 3, \dots$ )으로 바쁜기간을 시작하는 경우는 다음의 3가지가 있다.

- (i) 휴가 중에 한 명도 도착하지 않고, 휴가 종료 후 도착한  $n$ 명의 서비스 시간 총합이  $D$ 를 초과하는 경우
- (ii) 휴가 중에  $n$ 명이 도착하고,  $k$ 번째 고객까지

의 서비스 시간 총합으로  $D$ 를 초과하는 경우 ( $k = 1, 2, \dots, n$ )

(iii) 휴가 중에  $k$ 명( $k = 1, 2, \dots, n-1$ )이 도착하였는데 휴가 종료시점에서의 일량이  $D$  이하라서 이후  $n-k$ 번째 고객의 서비스 시간으로 바쁜기간을 시작하는 경우

따라서 각 경우를 고려하면 바쁜기간 시작점에서의 고객수  $N_B$ 가  $n$ 명일 확률은 식 (9), (10)과 같이 구할 수 있다.

$$\Pr(N_B = 1) = (a_0^V + a_1^V)[1 - S(D)] \quad (9)$$

$$\Pr(N_B = n) \quad (10)$$

$$\begin{aligned} &= a_0^V [S^{(n-1)}(D) - S^{(n)}(D)] \\ &\quad + a_n^V \sum_{k=1}^n [S^{(k-1)}(D) - S^{(k)}(D)] \\ &\quad + \sum_{y=1}^D \sum_{k=1}^{n-1} a_k^V s^{(k)}(y) \\ &\quad \times [S^{(n-k-1)}(D-y) - S^{(n-k)}(D-y)], \end{aligned}$$

$$(n = 2, 3, \dots)$$

이제 식 (9), (10)의 양변에  $z^n$ 을 곱하고 양변을 각각 더하여 정리하면  $N_B^*(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n N_n^B$ 는 식 (11)과 같다.

$$\begin{aligned} N_B^*(z) &\quad (11) \\ &= A_V^*(z) - \left[ a_0^V + \sum_{n=1}^{\infty} z^n a_n^V S^{(n)}(D) \right] \\ &\quad + a_0^V \sum_{n=1}^{\infty} z^n [S^{(n-1)}(D) - S^{(n)}(D)] \\ &\quad + \sum_{y=1}^D \sum_{k=1}^y z^k a_k^V s^{(k)}(y) \\ &\quad \times \sum_{n=1}^{\infty} z^n [S^{(n-1)}(D-y) - S^{(n)}(D-y)] \end{aligned}$$

식 (11)로부터  $\left. \frac{d}{dz} N_B^*(z) \right|_{z=1}$ 을 구하여 정리하면 식 (12)와 같이 바쁜기간 시작점에서의 평균 고객수  $E(N_B)$ 를 얻는다.

$$\begin{aligned} E(N_B) &= E(A_V) + a_0^V(1 + M_D) \quad (12) \\ &\quad + \sum_{y=1}^D \sum_{k=1}^{n-1} a_k^V s^{(k)}(y)(1 + M_{D-y}) \\ &= E(A_V) + a_0^V E(N_D) \\ &\quad + \sum_{y=1}^D \sum_{k=1}^{n-1} a_k^V s^{(k)}(y) E(N_{D-y}) \end{aligned}$$

식 (12)에서  $E(N_D)$ 와  $E(N_{D-y})$ 는 각각  $D$ -정책과  $(D-y)$ -정책을 갖는 이산시간 Geo/G/1 대기행렬의 바쁜기간 시작점에서의 평균고객수이다.

바쁜기간 시작점에서의 일량  $U_B$ 의 확률질량함수를  $u_B(x)$ ,  $U_B$ 의 GF를  $U_B^*(\omega)$ 라고 하자.  $D$ -정책을 따르는 시스템이므로  $u_B(x)$ 는  $x$ 가  $D+1$  이상일 때에만 확률을 갖는다. 휴가 동안 아무도 도착하지 않고 바쁜기간 시작점에서의 일량이  $x$ 일 확률은 식 (13)과 같다.

$$a_0^V \left( s_x + \sum_{y=1}^D m_{x-y} s_y \right) \quad (13)$$

휴가 동안 도착한 고객들의 서비스 시간의 합으로 바쁜기간을 시작하면, 바쁜기간 시작점에서의 일량이  $x$ 일 확률은  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^V s^{(n)}(x)$ 이다. 휴가 동안  $k$ 명이 도착했는데 휴가 종료와 함께 바쁜기간을 시작하지 못한 경우의 바쁜기간 시작점에서의 일량이  $x$ 일 확률은 식 (14)와 같이 표현할 수 있다:

$$\sum_{y=1}^D \sum_{k=1}^y a_k^V s^{(k)}(y) \left[ s_{x-y} + \sum_{l=1}^{D-y} s_{x-y-l} m_l \right] \quad (14)$$

이제 모든 상황을 고려하면 바쁜기간 시작점에서의 일량이  $x$ 일 확률  $u_B(x)$ 는 식 (15)와 같다.

$$\begin{aligned} u_B(x) &= a_0^V \left( s_x + \sum_{y=1}^D m_{x-y} s_y \right) \quad (15) \\ &\quad + \sum_{n=1}^x a_n^V s^{(n)}(x) \\ &\quad + \sum_{y=1}^D \sum_{k=1}^y a_k^V s^{(k)}(y) \\ &\quad \times \left[ s_{x-y} + \sum_{l=1}^{D-y} s_{x-y-l} m_l \right] \end{aligned}$$

식 (15)로부터  $U_B^*(\omega)$ 를 구하여 정리하면 식 (16)과 같다.

$$\begin{aligned}
 U_B^*(\omega) &= \sum_{x=D+1}^{\infty} \omega^x u_B(x) \quad (16) \\
 &= a_0^V U_D^*(\omega) + \sum_{x=D+1}^{\infty} \omega^x \sum_{n=1}^x a_n^V s^{(n)}(x) \\
 &\quad + \sum_{y=1}^D \omega^y \sum_{k=1}^y a_k^V s^{(k)}(y) U_{D-y}^*(\omega)
 \end{aligned}$$

식 (16)에서  $U_D^*(\omega)$ ,  $U_{D-y}^*(\omega)$ 는 각각  $D$ -정책과  $(D-y)$ -정책을 갖는 이산시간 Geo/G/1 시스템의 바쁜기간 시작점에서의 일량의 GF이다. 바쁜기간 시작점에서의 일량의 평균  $E(U_B)$ 는  $\left. \frac{d}{d\omega} U_B^*(\omega) \right|_{\omega=1}$ 로부터 구하면 식 (17)과 같다.

$$\begin{aligned}
 E(U_B) &= a_0^V [1 + M_D] E(S) + E(A_V) E(S) \quad (17) \\
 &\quad + \sum_{y=1}^D \sum_{k=1}^y a_k^V s^{(k)}(y) [1 + M_{D-y}] E(S) \\
 &= a_0^V E(U_D) + E(A_V) E(S) \\
 &\quad + \sum_{y=1}^D \sum_{k=1}^y a_k^V s^{(k)}(y) E(U_{D-y})
 \end{aligned}$$

식 (12)와 식 (17)은 Wald's equation으로부터 성립하는 바쁜기간 시작점에서의 고객수와 일량의 평균 값 사이의 관계  $E(U_B) = E(N_B)E(S)$ 를 확인시켜 준다(Lee, 2006). 또한 식 (8)과 식 (12)로부터  $E(N_B) = \lambda E(I)$ 임을 알 수 있다.

#### 4. 고객수 분석

본 장에서는 시스템의 임의슬롯 시작점에서의 고객수 분포를 유도한다. 시스템에 도착하는 고객들은 유휴기간 동안 도착하는 특별고객(Special customer, SC)이거나 바쁜기간 동안 도착하는 일반 고객(Ordinary customer, OC)이므로 고객 유형에 조건을 취하여 먼저 이탈시점 고객수  $\Pi(z)$ 를 구한 후, Burke의 정리와 BASTA(Bernoulli arrivals see time averages)를 사용하여 임의슬롯 시작점의 고객수 분포를 얻는다. 즉,  $\Pi(z) = \bar{\Pi}(z) = P(z)$ 이

다. 고객 유형에 조건을 취하면 이탈시점 고객수의 PGF  $\Pi(z)$ 를 식 (18)과 같이 표현할 수 있다.

$$\Pi(z) = p_{sc} \Pi_{sc}(z) + p_{oc} \Pi_{oc}(z) \quad (18)$$

#### 4.1 특별고객의 이탈시점 고객수

특별고객의 유형은 다음과 같이 5개의 경우로 나뉜다.

- (경우 a) 휴지기간(Standby period)에 도착한 경우
  - 1) 휴가 중 한 명도 도착하지 않은 경우
  - 2) 휴가 종료시점에서의 시스템 내 총 일량이  $D$  이하
- (경우 b) 휴가(Vacation) 동안 도착한 경우
  - 1) 시험고객(Tagged customer)의 도착 직후 총 일량이  $D$  이하이지만 휴가 종료시점에서의 총 일량은  $D$  초과
  - 2) 시험고객 도착 이전에 총 일량이 이미  $D$ 를 초과, 또는 시험고객 도착 직후 자신의 서비스를 포함한 시스템 내 총 일량이  $D$  초과
  - 3) 휴가 종료시점에서의 시스템 내 총 일량이  $D$  이하

먼저 휴가 중 한 명도 도착하지 않은 경우를 살펴보자(Fig. 2 참조). 이 경우에 도착하는 특별고객이 이탈하면서 시스템에 남기는 고객수는 단일  $D$ -정책을 갖는 이산시간 Geo/G/1 시스템의 특별고객의 이탈시점 고객수와 확률적으로 동일하다. 따라서 Lee et al.(2011)의 식 (4.6)으로부터 식 (19)와 같다.

$$\begin{aligned}
 \Pi_{sc}^{*(a_1)}(z) & \quad (19) \\
 &= \frac{a_0^V}{E(N_B)} \left\{ U_D^*(1 - \lambda + \lambda z) \right. \\
 &\quad + \sum_{x=1}^D (1 - \lambda + \lambda z)^x m_x \sum_{n=1}^{D-x+1} z^n \\
 &\quad \left. \times [S^{(n)}(D-x) - S^{(n+1)}(D-x)] \right\}
 \end{aligned}$$

휴가 동안 도착한 고객들의 총 일량이  $D$ 를 넘지 않아 시작된 휴지기간 임의의 슬롯시작점에

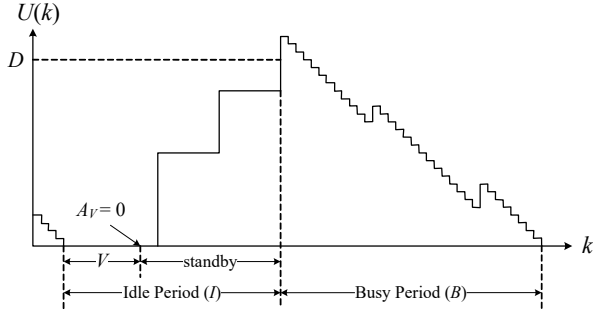


Fig. 2 A Sample Path of Workload for Case  $a_1$

도착하는 특별고객들이 이탈하면서 남기는 고객들은 다음 두 가지의 합이다: (i) 도착 시점부터 바쁜기간 시작점까지 도착한 특별고객들, (ii) 휴가 종료시점에서의 일량이  $y$  ( $y \leq D$ )이면  $(D-y)$ -정책을 갖는 Geo/G/1 대기행렬에서 시험고객 도착 직후의 일량과 휴가 종료시점에서의 일량( $x+y$ )을 모두 서비스하는 동안 도착하는 보통고객들(Fig. 3 참조). 모든 상황을 고려하여 정리하면 식 (20)과 같다.

$$\begin{aligned} & \Pi_{sc}^{*(a_2)}(z) \tag{20} \\ &= \frac{1}{E(N_B)} \sum_{y=1}^D \sum_{j=1}^y a_j^V s^{(j)}(y) \\ & \times \left\{ \sum_{x=D-y}^{\infty} (1-\lambda+\lambda z)^{(x+y)} s_x \right. \\ & + \sum_{n=2k=1}^{\infty} \sum_{x=1}^{D-y} z^k \sum_{x=1}^{D-y} (1-\lambda+\lambda z)^{(x+y)} \\ & \quad \times [S^{(k-1)}(D-y-x) - S^{(k)}(D-y-x)] s^{(n-k)}(x) \\ & \left. + \sum_{n=2x=D-y}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (1-\lambda+\lambda z)^{(x+y)} \sum_{l=1}^{D-y} s_{x-l} s^{(n-1)}(l) \right\} \end{aligned}$$

이제 시험고객이 휴가 동안 도착하는 경우의 이탈시점 고객수를 구한다(경우 b). 휴가 중에 도착하는 시험고객이 이탈하면서 시스템에 남기는 고객들은 다음과 같다: (i) 시험고객 뒤에 도착한 특별고객들과 (ii) 바쁜기간이 시작하고 나서 특별고객이 시스템을 이탈할 때까지 도착한 보통고객들의 합이다. 그런데 이 둘은 서로 독립이 아니므로 함께 고려해 주어야 한다.  $A_V^{1+}$ 를 한 명 이상 도착한 휴가 동안 도착한 고객수라고 하면, 시험고객이  $k$ 번째 도착한 특별고객이고,

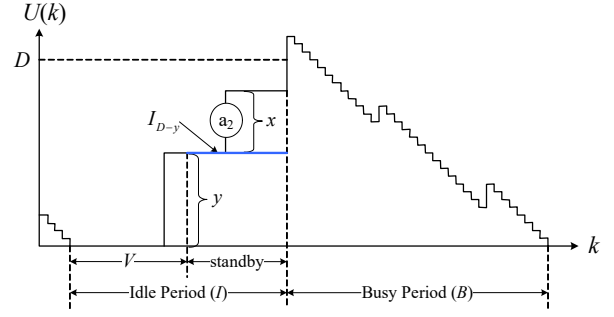


Fig. 3 A Sample Path of Workload for Case  $a_2$

바쁜기간 시작점에서 자기 뒤에 도착한 사람이  $n$ 명일 확률은 식 (21)과 같다.

$$\frac{\Pr(A_V^{1+} = k+n)}{E(A_V^{1+})} \tag{21}$$

여기서

$$\begin{aligned} & \Pr(A_V^{1+} = n) \\ &= \frac{1}{1-V^*(1-\lambda)} \sum_{x=1}^{\infty} v_x \binom{x}{n} (1-\lambda)^{x-n} \lambda^n, \\ & E(A_V^{1+}) = \frac{\lambda E(V)}{1-V^*(1-\lambda)} \text{이다.} \end{aligned}$$

서버가 휴가 중일 때 시험고객이 도착할 확률은  $\frac{E(A_V)}{E(N_B)}$ 이다. 따라서 식 (21)을 사용하여 다음과 같이 각 경우의 이탈시점 고객수 GF를 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \Pi_{sc}^{*(b_1)}(z) \tag{22} \\ &= \frac{E(A_V)}{E(N_B)} \sum_{y=1}^D (1-\lambda+\lambda z)^y \sum_{x=D-y+1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} z^n \\ & \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Pr(A_V^{1+} = k+n)}{E(A_V^{1+})} s^{(k)}(y) s^{(n)}(x) \\ &= \frac{1}{E(N_B)} \sum_{l=1}^{\infty} v_l \sum_{y=1}^D (1-\lambda+\lambda z)^y \sum_{n=1}^{\infty} z^n \\ & \times \sum_{x=D-y+1}^{\infty} \sum_{k=1}^y \binom{l}{k+n} (1-\lambda)^{l-k-n} \lambda^{k+n} \\ & \quad \times s^{(k)}(y) s^{(n)}(x) \end{aligned}$$

같은 방법으로 나머지 두 경우에 대하여 시험



고객의 이탈시점 고객수를 구하면 식 (23), (24)와 같다.

$$\begin{aligned} \Pi_{sc}^{*(b_2)}(z) &= \frac{E(A_V)}{E(N_B)} \sum_{y=D+1}^{\infty} (1-\lambda+\lambda z)^y \sum_{n=1}^{\infty} z^n \\ &\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Pr(A_V^{1+} = k+n)}{E(A_V^{1+})} s^{(k)}(y) \\ &= \frac{1}{E(N_B)} \sum_{l=1}^{\infty} v_l \sum_{y=D+1}^{\infty} (1-\lambda+\lambda z)^y \sum_{n=1}^{\infty} z^n \\ &\times \sum_{k=1}^y \binom{l}{k+n} (1-\lambda)^{l-k-n} \lambda^{k+n} s^{(k)}(y) \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{sc}^{*(b_3)}(z) &= \frac{E(A_V)}{E(N_B)} \sum_{y=1}^D (1-\lambda+\lambda z)^y \sum_{x=1}^{D-y} \\ &\times \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} z^n \frac{\Pr(A_V^{1+} = k+n)}{E(A_V^{1+})} \\ &\times s^{(k)}(y) s^{(n)}(x) N_{D-(y+x)}^*(z) \\ &= \frac{1}{E(N_B)} \sum_{l=1}^{\infty} v_l \sum_{y=1}^D (1-\lambda+\lambda z)^y \sum_{x=1}^{D-y} \\ &\times \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^x z^n \binom{l}{k+n} (1-\lambda)^{l-k-n} \lambda^{k+n} \\ &\times s^{(k)}(y) s^{(n)}(x) N_{D-(y+x)}^*(z) \end{aligned} \quad (24)$$

이제 식 (19), (20), (22), (23), (24)로부터 특별고객의 이탈시점 고객수 GF  $\Pi_{sc}(z)$ 를 식 (25)와 같이 구할 수 있다.

$$\Pi_{sc}(z) = \sum_{i=1}^2 \Pi_{sc}^{*(a_i)}(z) + \sum_{j=1}^3 \Pi_{sc}^{*(b_j)}(z) \quad (25)$$

#### 4.2 보통고객의 이탈시점 고객수

보통고객의 이탈시점 고객수를 얻기 위해 다음의 관찰이 필요하다. 보통고객의 이탈과정은 바쁜기간 시작점에서의 일량  $U_B$ 를 서비스하는 동안 도착한 고객  $N_B^*$ 명으로 시작하는 일반적인 Geo/G/1 대기행렬의 이탈과정과 확률적으로 동일하다(Fig. 1 참조). 따라서 Takagi (1993)의 일반휴가를 갖는 Geo/G/1 대기행렬의 분해성질로부터 식 (26)을 얻는다.

$$\begin{aligned} \Pi_{oc}(z) &= \Pi_{Geo/G/1}(z) N_B^{*-}(z) \\ &= \frac{(1-\rho)(1-z)S^*(1-\lambda+\lambda z)}{S^*(1-\lambda+\lambda z)-z} \\ &\times \frac{1-U_B^*(1-\lambda+\lambda z)}{\lambda E(U_B)(1-z)} \end{aligned} \quad (26)$$

식 (26)에서  $N_B^{*-}(z)$ 는  $N_B^*$ 를 재생간격으로 갖는 이산시간 재생과정의 경과시간의 GF이다. 이제 식 (16)과 식 (17)를 이용하여 식 (26)을 다시 쓰면 식 (27)과 같다.

$$\begin{aligned} \Pi_{oc}(z) &= \frac{(1-\rho)(1-z)S^*(1-\lambda+\lambda z)}{S^*(1-\lambda+\lambda z)-z} \\ &\times \left[ 1 - \left\{ a_0^V U_D^*(1-\lambda+\lambda z) \right. \right. \\ &\quad + \sum_{x=D+1}^{\infty} (1-\lambda+\lambda z)^x \sum_{n=1}^{\infty} a_n^V s^{(n)}(x) \\ &\quad \left. \left. + \sum_{y=1}^D (1-\lambda+\lambda z)^y \sum_{k=1}^y a_k^V s^{(k)}(y) U_{D-y}^*(\omega) \right\} \right] \\ &\times \left[ \lambda(1-z) \left\{ a_0^V E(U_D) + E(A_V) E(S) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{y=1}^D \sum_{k=1}^y a_k^V s^{(k)}(y) E(U_{D-y}) \right\} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (27)$$

식 (27)에서  $U_D^*(\omega) = S(\omega) - [1 - S(\omega)] \sum_{x=1}^D \omega^x m_x$ 이다.

이제 식 (18)에  $p_{sc} = 1 - \rho$ ,  $p_{oc} = \rho$ 를 대입하고 식 (25)와 (27)을 이용하여 정리하면 임의 고객의 이탈시점 고객수를 얻는다. 이 장의 도입부에서 언급하였듯이 이는 임의 슬롯시작점에서의 고객수와 같다. 고객수 분포를 PGF 형태로 구하였으므로 시스템 내 평균 고객수는  $L = \frac{d}{dz} P(z) \Big|_{z=1}$ 로부터 구할 수 있다.

#### 5. 결론 및 추후연구과제

유휴 중인 서버가 단수휴가와 일량 임계값을 동시에 고려하며 재가동을 결정하는 ‘D-정책’을 갖는 이산시간 Geo/G/1/SV 대기행렬시스템의

안정상태 고객수를 분석하였다. 단수휴가와  $D$ -정책을 포함하는 시스템의 분석은 그 운영특성이 복잡하여 분석에 신중을 기해야 한다. 본 연구에서는 유휴기간 동안의 일량, 고객수 과정을 추적하여 바쁜기간 시작점에서의 정보를 구하고, 이로부터 고객수를 유도하였다. 유휴기간의 분석은 고객수 분석 외에도 대기시간, 체재시간과 같은 시스템의 성능척도를 구함에 있어 기초가 된다.

본 연구의 결과는 서버의 재가동 비용이나 준비비용이 큰 다품종소량생산 시스템의 모델링에 적합하다. 이러한 산업으로는 제철산업을 생각해 볼 수 있는데 용광로에 비해서 서버의 재가동이 자주 발생하는 전기로(Electric furnace)의 비용 최적화 문제에 응용할 수 있다. 또한 통신시스템의 에너지 최적화 문제의 기본모형으로 활용이 가능하다. 단위시간당 비용과 에너지를 최소화하는 최적의 휴가 길이와 일량 임계값을 정하여 시스템 설계·운영에 사용할 수 있다.

후속연구로서 대기시간과 체재시간의 분석을 고려하고 있다. 동일한 시스템이지만 대기시간의 분석은 고객수 분석과는 난이도의 차원이 다르기에 돌파구가 필요할 것으로 예상된다. 또한 Cho and Kang (2018)과 같이 실증분석을 통한 시스템 비용 최적화 문제를 다루는 연구도 추후과제로서 의의가 있을 것이다.

## References

- Balachandran, K. R. (1973). Control Policies for a Single Server System, *Management Science*, 19(9), 1013-1018.
- Bachandran, K. R., and Tijms, H. (1975). On the  $D$ -policy for the M/G/1 Queue, *Management Science*, 21(9), 1073-1076.
- Bruneel, H., and Kim, B. G. (1993). *Discrete-time Models for Communication Systems including ATM*, Kluwer Academic Publishers.
- Cheon, S. H. (2005). Analyses of the Queueing Systems under  $D$ -policy and Vacations, *The Graduate School of Sungkyunkwan University*.
- Cho, J. H., and Kang, T.-Y. (2018). A Study on Optimal Operation Development of Self-Service Technology using Queueing Theory, *The Journal of Internet Electronic Commerce Research*, 18(3), 265-282.
- Crabill, T. B., Gross, D., and Magazine, M. J. (1977). A Classified Bibliography of Research on Optimal Design and Control of Queue, *Operations Research*, 25, 219-232.
- Doshi, B. T. (1986). Queueing Systems with Vacations - a Survey, *Queueing Systems*, 1, 29-66.
- Heyman, D. P. (1977). The  $T$ -policy for the M/G/1 Queue, *Management Science*, 23(7), 775-778.
- Kim, S. J., Kim, N. K., Park, H.-M., Chae, K. C., and Lim, D.-E. (2013). On the Discrete-time  $Geo^X/G/1$  Queues under  $N$ -policy with Single and Multiple Vacations, *Journal of Applied Mathematics*, 2013, Article ID 587163.
- Lan, S., and Tang, Y. (2017). Analysis of a Discrete-time  $Geo^{\lambda_1, \lambda_2}/G/1$  Queue with  $N$ -policy and  $D$ -policy, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 53(1-2), 657-681.
- Lee, H. W. (2006), *Queueing Theory*, Sigma Press.
- Lee, H. W., and Ahn, B.Y. (2002). Operational Behavior of the MAP/G/1 Queue under  $N$ -policy with Single Vacation and Set-up, *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, 15(2), 167-196.
- Lee, H. W., Ahn, B. Y., and Park, N. I. (2001). Decompositions of the Queue Length Distributions in the MAP/G/1 Queue under Multiple and Single Vacations with  $N$ -policy, *Stochastic Models*, 17(2), 157-190.
- Lee, H. W., Cheon, S. H., Lee, S. W., and Baek, J. W. (2009). MAP/G/1 Queue under Workload Control and Postprocessing, *Stochastic Analysis and Applications*, 27(2), 331-352.

- Lee, H. W., Cheon, S. H., and Seo, W. J. (2006). Queue Length and Waiting Time of the M/G/1 Queue under the  $D$ -policy and Multiple Vacations, *Queueing Systems*, 54, 261-280.
- Lee, H. W., Lee, S. S., Chae, K. C., and Nadarajan, R. (1992). On a Batch Service Queue with Single Vacation, *Applied Mathematical Modelling*, 16(1), 36-42.
- Lee, H. W., and Seo, W. J. (2008). The Performance of the M/G/1 Queue under the Dyadic  $\text{Min}(N,D)$ -policy and Its Cost Optimization, *Performance Evaluation*, 65, 742-758.
- Lee, H. W., Seo, W. J., and Lee, S. W. (2011). Analysis of the M/G/1 Queueing System under the Triadic  $(N,D,T)$ -Policies, *Quality Technology and Quantitative Management*, 8(3), 333-357.
- Lee, H. W., Seo, W. J., Lee, S. W., and Jeon, J. (2010). Analysis of MAP/G/1 Queue under  $\text{Min}(N,D)$ -policy, *Stochastic Models*, 26(1), 98-123.
- Lee, S. S., Lee, H. W., Yoon, S. H., and Chae, K. C. (1995). Batch Arrival Queue with  $N$ -policy and Single Vacation, *Computers and Operations Research*, 22(2), 173-189.
- Lee, S. W. (2016). Workload Analysis of Discrete-time BMAP/G/1 Queue under  $D$ -policy, *Journal of the Korea Industrial Information Systems Research*, 21(6), 1-12.
- Lee, S. W. (2018). Waiting Time Analysis of Discrete-time BMAP/G/1 Queue Under  $D$ -policy, *Journal of the Korea Industrial Information Systems Research*, 23(1), 53-63.
- Lee, S. W., Lee, H. W., and Baek, J. W. (2011). Analysis of Discrete-time Geo/G/1 Queue under the  $D$ -policy, *Proceedings of the 6th International Conference on Queueing Theory and Network Analysis*, August 23-26, 2011, Seoul, Korea.
- Lee, S. W., Lee, H. W., and Baek, J. W. (2012). Analysis of Discrete-time MAP/G/1 Queue under Workload Control, *Performance Evaluation*, 69(2), 71-85.
- Liu, R., and Z. Deng (2014). The Steady-state System Size Distribution for a Modified  $D$ -policy Geo/G/1 Queueing System, 2014, Article ID 345129.
- Tadj, L., and Choudhury, G. (2005). Optimal Design and Control of Queues, *TOP*, 13(2), 359-412.
- Takagi, H. (1991), *Queueing Analysis: Vol I, Vacation and Priority Systems, Part 1*, North-Holland.
- Takagi, H. (1993) *Queueing Analysis: Vol III, Discrete-time Systems*, North-Holland.



**이 세 원 (Se Won Lee)**

- 종신회원
- 성균관대학교 산업공학과 학사
- 성균관대학교 산업공학과 석사
- 성균관대학교 산업공학과 박사
- 부경대학교 경영대학 경영학부  
부교수

• 관심분야: 대기행렬이론, 확률모형, 시스템 최적화