韓國數學敎育學會誌 시리즈 C <初等數學敎育>
https://doi.org/10.7468/jksmec.2020.23.2.73
2020. 4. 제 23권, 제 2호, 73-85

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
April. 2020, Vol. 23, No. 2, 73-85

문장제의 보조문항이 초등학생의 문제해결과 수학적 사고에 미치는 영향

임 영 빈 (인천신촌초등학교 교사)

본 연구는 학생들에게 제시되는 문장제의 보조문항이 학생들의 문제해결 전략과 수학적 사고에 미치는 영향을 분석하고 교육적 시사점을 논하기 위하여 수행되었다. 분석결과, 보조문항을 통하여 문제해결 전략을 안내하는 문제는 그렇지 않은 경우에 비해 여러 수준의 학생들에게 효율적인 문제해결 전략을 채택하도록 유도함으로써 상대적으로 균일한 수학적 사고를 발현 시킬 수 있었다. 그리고 중하위권 학생들이 포기하지 않고 문제를 해결하기 위한 실마리를 떠올리는데 도움을 주었다. 다만 보조문항을 통하여 전략을 제공하는 문제는 학생들에게 유추적 사고를 유발시켰는지에 대한 여부가 불분명하였다. 아울러 제공된 문제의 영향으로 스스로 떠올릴 수 있었던 전략을 채택하지 못하는 경우가 발생하였다. 이에 반해 보조문항을 최소화하여 기본적인 권고만을 제공하는 문장제 해결 상황에서 상위권 학생들의 경우, 다양한 전략을 구상해낼 수 있었지만 중하위권 학생들은 쉽게 포기하거나 답을 구하지 못하는 경우가 상대적으로 많았다.

I. 서론

교사는 학생들이 수학 수업을 통해 익힌 문제해결 능력이 일상생활에서 많은 도움이 되길 바란다. 2015 개정 수학과 교육과정에서는 문제해결 역량을 수학 교과 역량 중 하나로 제안하면서, 해결 방법을 모르는 문제 상황에서 수학의 지식과 기능을 활용하여 해결 전략을 탐색하고 최적의 해결 방안을 선택하여 주어진 문제를 해결하기 위한 능력의 신장을 강조하였다(임영빈, 홍진곤, 2015; 안병곤, 2018).

학생들이 문제를 처음 접했을 때, 이를 해결하기 위한 가장 기본적인 절차는 문제에 대한 이해 과정이다. 문장제는 일반적인 문제와 달리 문제가 요구하는 바를 직관적으로 파악하기 어려우며, 문제 해결에 필수적이지 않은 맥락을 포함할 수 있기 때문에(Gerofsky, 1999), 문장제의 이해 단계에서는 더욱 노력이 필요하다. 따라서 학생들이 문장제를 해결하기 위해서는 필요한 정보와 필요하지 않은 정보를 구분하여 문제를 이해하고 문제해결 전략을 수립해야 한다. 이용률(2015)에 따르면, Polya(1971)가 주장한 'How to solve It'에서의 'It'은 문제를 이해하기 전까지는 단순히 '과제'를 가리키는 것이다. 과제는 남으로부터 주어지는 알아볼 거리이며, 이러한 과제를 학생이 이해하고, 스스로 알아보기 위한 마음의 준비를 하게 된다면 '문제'가 될 수 있다. 따라서 과제 상태에서 학생 스스로에게 의미 있는 문제 상태로의 전환은 매우 중요한 과정이다. 교사는 이러한 문제 상태로의 전환을 원활하게 도와주기 위해 다양한 발문이나 권고를 할 수 있으며, 문제 상황을 제시할 때 도움이 되는 보조문항을 함께 제공할 수 있다. 보조문항은 문제의 해결에 도움을 주기 위해 단계적으로 구조화된 발문형태의 문항이다. 학생들은 이러한 보조문항을 문제와 함께 제공받음으로써 문제해결을 위한 기본적인 실마리를 얻을 수 있다.

이처럼 보조문항은 학생들이 문제를 해결하는데 있어서 가장 먼저 비계를 제공할 수 있는 중요한 역할임에도 불구하고 이와 관련된 연구를 찾아보기 어렵다. 교육과정에서 문제해결을 강조한 이래로 문제의 의미와 다양한 유형에 대한 연구(김진락, 1990; 신성균, 강문봉, 황혜정, 1993 등) 및 문제해결을 위한 다양한 발문과 권고에 대한 연구(片桐重男, 1992; 한정민, 박만구, 2010; 조누리, 백석윤, 2013 등)는 꾸준히 진행되어 온 것처럼 보조문항의 역할에 대한 연구도 필요할 것이다.

이에 본 연구는 학생들에게 제공되는 수학 문장제

* 접수일(2020년 3월 9일), 심사(수정)일(2020년 3월 31일), 게재확정일(2020년 4월 15일)
* ZDM분류 : D33
* MSC2000분류 : 97D50
* 주제어 : 문장제, 보조문항, 문제해결전략, 수학적 사고

의 보조문항 제시 방법이 학생들의 문제해결 전략과 수학적 사고에 미치는 영향을 분석하고 교육적 시사점을 논해보고자 한다.

Ⅱ. 초등 수학 수업에서의 문제해결 및 문장제 제공 실태

1. 초등 수학 수업에서의 문제해결

가. 수학 수업에서의 문제해결 교육

문제해결은 수학교육의 주된 목적의 하나이며 수학적인 방법으로 문제 상황을 해결함으로써 지식을 일반화, 형식화하여 유사한 문제를 해결하기 위한 강력한 도구를 생성할 수 있다(임영빈, 2018). 학교수학에서 문제해결 교육이 강조된 1980년대 이후로 세계 각국에서는 오늘날까지 문제해결을 수학교육의 목표 또는 주요 역량으로 다루고 있다. 우리나라에서도 7차 교육과정 이후 수학과 교육과정에서 문제해결에 대해 강조하였고, 이러한 경향은 문제해결을 2015 개정 교육과정에서 수학과의 교과 역량의 첫 번째로 선정한 것에서 드러난다(장혜원, 강윤지, 김은혜, 최혜령, 2019).

Polya는 훌륭한 교육은 학생들에게 독자적인 발견의 기회를 체계적으로 제공하는 것이라고 보고, '수학적 발견은 어떻게 이루어지며 문제는 어떻게 해결 되는가'라는 주제를 연구하여, 발견·발명에 대한 방법과 그 교육에 대한 체계적인 설명을 시도하였다. 그 결과가 집약된 'How to solve It'이 출판된 1945년은 수학적 사고와 문제해결에 대한 연구에 대하여 Polya 이전과 이후란 두 시대의 구분을 하는 경계선으로 간주된다(우정호, 2009). Polya의 연구 이후에도 NCTM은 '문제해결은 학교 수학의 초점이 되어야한다'는 권고(NCTM, 1980)를 하였고, 학생들의 각 수준에서 첫 번째 규준은 '문제해결로서의 수학'이라고 방향을 제시(NCTM, 1989)하였으며, '문제해결은 학교수학에서의 중요한 사고과정의 규준'임을 강조(NCTM, 2000)하였다.

신성균 외(1993)에 따르면, 응용이 가능한 진정한 지식은 문제를 해결하는 경험을 통해 비롯된다. 문제를 해결하는 과정을 거치면서 기초적인 수학적 지식이나 기능을 더욱 확실히 이해할 수 있으며, 의사 결정, 비판적 사고, 창의적 사고 등과 같은 고등 정신 기능을 신장할 수 있다. 아울러 지식의 단순한 암기와 적용, 알고리즘의 반복 연습에서 탈피하여 활동적인 수학을 경험할 수 있는 것이다. 또한 참으로 응용 가능한 수학 학습을 할 수 있게 하여 수학의 필요성과 유용성을 알게 하여 수학에 대한 흥미, 관심, 적극적 태도를 길러줄 수 있다.

문제해결을 위한 교수-학습 과정에서 학생들은 분명하게 인식된, 즉각적으로 얻을 수 없는 목표를 얻는데 필요한 어떤 행동을 의식적으로 조사할 때 '문제'를 가지게 된다(강문봉, 강흥규, 김수미, 박교식, 박문환, 서동엽, 송상헌, 유현주, 이종영, 임재훈, 정동권, 정은실, 정영옥, 2005). 문제의 개념에 대해서는 여러 학자들의 다양한 논의와 해석이 있으나, 공통적인 견해는 문제 해결자가 주어진 상태로부터 목표 상태에 '즉시, 쉽게, 직접적으로' 도달될 수가 없는 상황이라는 점이다. 다시 말해 '문제'는 목표 상태로의 도달을 위하여 깊은 사고가 요구된다(신성균 외, 1993). 따라서 문제를 해결하기 위한 전략의 채택과 수학적 사고의 발현은 문제해결 교육의 핵심이 될 수 있다.

나. 문제해결을 위한 다양한 전략

안병곤(2018)은 지금까지 우리나라 교육과정의 초등 수학에서 다룬 주요 문제해결전략과 Polya가 계획 수립 단계에서 제시한 전략을 바탕으로 주요 전략을 예로 들었다. 강문봉 외(2005)는 초등학교 수준에서 수학 문제를 해결할 때 사용할 수 있는 전략 몇 가지를 소개하였다.

안병곤(2018)과 강문봉 외(2005)가 예로 들은 초등학교 수준의 문제해결 전략을 종합하면 예상과 확인, 그림 그리기, 규칙성 찾기, 표 만들기, 거꾸로 풀기, 단순화하기, 식 만들기, 논리적 추론, 극단적인 경우 찾아보기, 자료의 조직화, 실제로 해보기의 11가지를 생각해볼 수 있다.

다. 문제해결 과정에서의 수학적 사고

수학적으로 사고하는 것을 가르치는 것은 수학교육의 중요한 목표 중 하나이며, 수학적으로 사고한다는 것은 그것이 아무리 하찮은 것이더라도 수학적인 발견을 하는 것이고, 그것은 문제를 해결하는 것이므로 수학교육에서 문제해결 방법에 대한 교육을 강조하지 않

을 수 없다(우정호, 2009). 즉, 수학적 사고에 대한 교육은 문제해결 방법에 대한 교육으로써 수학 수업에 관한 연구에서 다루어져야 하는 중요한 요소이다.

片桐重男(2004)는 Polya의 문제해결을 위한 4단계 과정을 바탕으로 각 단계에서 어떤 '수학적 태도'가 쓰이는 일이 많은지 정리하였다. 그리고 이들 각 태도가 어떤 '방법에 관련된 수학적 사고'와 '내용에 관련된 수학적 사고'를 발동시켰는지 설명하고 있다.

문제의 형성·파악의 단계에서는 문제를 이해하기 위해서 '스스로 자신의 문제나 목적, 내용을 명확히 파악하려는 태도'와 '내용을 간결·명확히 나타내려는 태도'를 바탕으로 추상화의 사고, 단순화의 사고, 수량화의 사고, 기호화의 사고, 도형화의 사고 및 함수적 사고를 발현하게 된다.

해결 방안을 구상하는 단계에서는 '이치에 닿으며 조리 있는 행위를 하려는 태도'를 바탕으로 유추적 사고, 특수화의 사고, 수량화의 사고, 도형화의 사고, 단위의 사고, 개괄적 파악의 사고를 보인다.

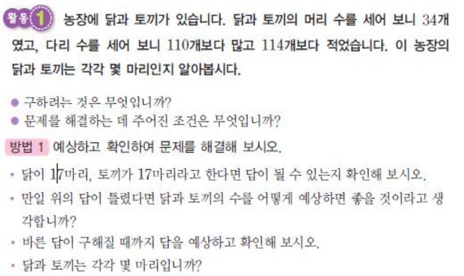
해결의 실행 단계에서는 '이치에 닿으며 조리 있는 행위를 하려는 태도' 및 '내용을 간결 명확히 나타내려는 태도'를 바탕으로 귀납적 사고, 연역적 사고, 유추적 사고, 단순화의 사고, 특수화의 사고, 기호화의 사고, 구체화의 사고, 단위의 사고, 표현의 사고, 조작의 사고, 개괄적 파악의 사고, 함수적 사고, 식에 관한 사고를 발동할 수 있다.

논리적 검증 및 발전의 단계에서는 '이치에 닿으며 조리 있는 행위를 하려는 태도', '내용을 간결 명확히 나타내려는 태도' 및 '보다 나은 것을 구하려는 태도'를 바탕으로 일반화의 사고, 연역적 사고, 귀납적 사고, 통합적 사고, 발전적 사고, 단위의 사고, 표현의 사고, 조작의 사고, 알고리즘의 사고, 기본 성질의 사고, 함수적 사고, 식에 관한 사고를 보일 수 있다.

2. 초등 수학 수업에서의 문장제 제시 실태

가. 초등 수학 교과서의 보조문항 제시 방법

우리나라의 초등 수학 교과서는 문제해결과 관련된 문장제를 제시할 때, 2007 개정 교육과정에 따른 교과서와 2009 개정 교육과정 이후의 교과서는 서로 다른 방식을 택하고 있다. 2007 개정교육과정 시기의 초등학교 수학 교과서는 매학기 '문제해결'이라는 단원을 마지막에 배치하여 학생들이 문제해결의 다양한 전략을 익히게 하려는 의도를 가지고 있었으며 학생들의 연령 수준에 맞는 문제를 종합적으로 제시하였다. 반면, 2009 개정 교육과정 및 2015 개정 교육과정의 교과서는 각 단원마다 '문제해결' 또는 '도전수학' 등의 특수차시를 통하여 해당 단원에서 배운 내용을 적용하여 해결할 수 있는 문제를 제시하고 있다.


활동 1 농장에 닭과 토끼가 있습니다. 닭과 토끼의 머리 수를 세어 보니 34개였고, 다리 수를 세어 보니 110개보다 많고 114개보다 적었습니다. 이 농장의 닭과 토끼는 각각 몇 마리인지 알아봅시다.

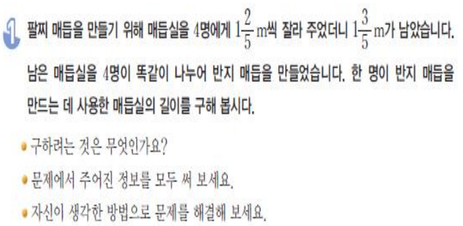
- 구하려는 것은 무엇입니까?
- 문제를 해결하는 데 주어진 조건은 무엇입니까?

방법 1 예상하고 확인하여 문제를 해결해 보시오.

- 닭이 17마리, 토끼가 17마리라고 한다면 답이 될 수 있는지 확인해 보시오.
- 만일 위의 답이 틀렸다면 닭과 토끼의 수를 어떻게 예상하면 좋을 것이라고 생각합니까?
- 바른 답이 구해질 때까지 답을 예상하고 확인해 보시오.
- 닭과 토끼는 각각 몇 마리입니까?

[그림 1] 구체적인 전략을 보조문항으로 제공한 문장제(교육부, 2011, p.122)
[Fig. 1] a problem accompanied by detailed explanations(Ministry of Education, 2011, p.122)

시기별 교과서의 문제 제시 방법을 구체적으로 살펴보면 2007 개정 교육과정 시기의 교과서에서는 [그림 1]과 같이 보조문항을 통해 문장제를 해결하기 위한 구체적인 전략을 제시 해주었으나 2009 개정 교육과정시기 이후로는 보조문항을 통해 전략을 제시하지 않고 있다.


1 팔찌 매듭을 만들기 위해 매듭실을 4명에게 $1\frac{2}{5}$ m씩 잘라 주었더니 $1\frac{3}{5}$ m가 남았습니다. 남은 매듭실을 4명이 똑같이 나누어 반지 매듭을 만들었습니다. 한 명이 반지 매듭을 만드는 데 사용한 매듭실의 길이를 구해 봅시다.

- 구하려는 것은 무엇인가요?
- 문제에서 주어진 정보를 모두 써 보세요.
- 자신이 생각한 방법으로 문제를 해결해 보세요.

[그림 2] 기본적인 권고만을 보조문항으로 제공한 문장제(교육부, 2019, p.20)
[Fig. 2] a problem that minimizes the auxiliary question(Ministry of Education, 2019, p.20)

이와 같은 흐름 속에서 2015 개정 교육과정 시기의

교과서는 [그림 2]와 같이 특정 문제해결 전략을 제시하지 않고, 문제의 이해 및 계획 수립에 대한 기본적인 권고만을 제시하고 있다.

나. 교사의 문장제 제공 방법에 대한 실태

문제해결 관련 차시를 지도하는 교사들의 문장제 제공 실태를 조사하기 위하여 ○○광역시 교육청의 초등학교 교사 50명과 면담조사를 진행 하였다. 이때, 보다 자세한 조사를 위하여 직접 또는 전화로 면담하였다. 참여 교사에 대한 정보는 [표 1]과 같다. 면담 참여 교사의 응답 여부에 따라 추가 질문을 하였으며, 보다 정확한 응답을 위하여 본 연구에서 논하고 있는 보조문항의 정의에 대하여 해당 교사에게 설명을 해준 이후에 면담을 진행하였다.

[표 1] 면담 참여 교사
[Table 1] Teachers who participated in the survey

경력(년)	~5	5~10	10~20	20~30	30~	계
교사 수(명)	4	11	18	14	3	50

1. 선생님께서 문제해결 관련 차시를 지도할 때, 문장제를 제시하면서 주로 하는 활동은 무엇입니까?
2. 수업중 학생이 문장제를 이해하고, 계획을 수립할 때 교사에게 가장 어려운 점은 무엇인가요?
3. 선생님께서는 문제해결관련 차시에서 문장제를 지도할 때, 보조문항을 제공하십니까?
 3-1. (제공) 보조문항을 제공하는 이유는 무엇입니까?
 3-2. (미제공) 보조문항을 제공하지 않는 이유는 무엇입니까? 그리고, 학생의 수학적 능력에 따라서 보조문항이 필요한 경우도 있다고 생각하십니까?
4. 선생님께서는 문제해결 관련 차시에서 문장제를 지도할 때, 학생의 수준에 따라 개별적으로 발문이나 권고를 제공합니까?
 4-1. (제공) 개별적으로 제공하는 방법은 무엇이며 얼마나 자주 제공합니까?
 4-2. (미제공) 개별적 발문이나 권고를 제공하지 않는 이유는 무엇입니까?

[그림 3] 문장제 제공 실태조사 질문
[Fig. 3] Questions for a survey of the situation

문제해결 관련 차시를 지도하는 교사들의 문장제 제공 실태 조사를 위한 면담 문항은 [그림 3]과 같다. 교사의 인식 및 실태를 자세히 분석하기 위하여 문항에 대한 응답 선택지를 주지 않고 비슷한 응답끼리 범주화 하여 분류하였다.

문제해결 관련 차시를 지도하는 교사들의 문장제 제공에 대한 인식 및 실태조사를 위한 면담 조사 결과는 [표 2]와 같았다.

[표 2] 교사 실태조사 결과
[Table 2] Results of interviews with teachers

$N=50$

문항	응답	응답자 수(%)
1	스스로 해결 방법 구상하기	28명(56%)
	의사소통을 통한 해결방법 구상	16명(32%)
	문제 의도와 조건의 명확한 이해	3명(6%)
	기타	3명(6%)
2	학생들의 학업성취 수준차	28명(56%)
	의사소통이나 문제해결의 적극성	15명(30%)
	문제의 지도에 대한 교사의 준비	5명(10%)
	기타	2명(4%)
3	보조문항을 제공	2명(4%)
	보조문항을 미제공	48명(96%)
3-1	문제해결 전략의 구상보다 수학적 사고 함양에 노력	1명
	어려운 문제의 경우에만 제공	1명
3-2	교사 일방적, 획일적이지 않게 학생 스스로 해결방법을 구상	29명
	의사소통을 통한 문제해결	17명
	기타	2명
4	개별적 발문 및 권고를 제공	43명(86%)
	개별적 발문 및 권고를 미제공	7명(14%)
4-1	개관순시를 통해 의사소통에 어려움을 겪는 학생을 지도	31명
	학업성취도가 낮은 학생에게 교사가 의도적으로 제시	10명
	기타	2명
4-2	학급 인원수에 따른 개별적 지도의 어려움	4명
	개별적 발문이 다른 학생의 사고에 영향을 줄 것을 우려	2명
	기타	1명

문항1과 문항2의 응답결과, 문제해결 관련 차시를 지도하는 많은 교사들은 문장제를 제시할 때, 학생들이 스스로 해결 방법을 구상(56%)하게 하거나 의사소통을 통해 해결방법을 찾게(32%)하는 것에 중점을 두고 있었다. 이러한 과정에서 겪는 교사의 어려움은 학

생들의 학업성취 수준차(56%) 및 의사소통이나 문제해결에 대한 적극성(30%)이 큰 비중을 차지하고 있다.

문항3의 응답결과, 2명(4%)을 제외한 대부분의 교사들(96%)은 학생들에게 보조문항을 제공하지 않고 있었다. 보조문항을 제공하지 않는 이유는 대체로 일방적이고 획일적인 해결 방법의 교육에 대한 부정적인 견해(29명)나 의사소통의 활성화를 위함(17명)이었다.

대체로 보조문항을 제공한다고 응답한 교사 1명은 학교 수업 시간에 '문제해결 전략을 떠올리는 시간을 제공하는 것' 보다는 '문제해결 과정에서 발현해야 하는 수학적 사고를 경험시키는 것'이 더욱 중요하다고 생각하고 있었다. 이 교사는 문항1에서도 문제 의도와 조건의 명확한 이해를 중시하고 있었다.

보조문항을 제공하지 않는 교사들은 학생들이 스스로 문제해결 방법을 구상하길 원하고 있으나 학생의 성취 수준이나 이해력에 따라 수준별로 지도하는 것에 어려움을 느끼고 있었다.

문항4의 응답결과, 많은 교사(31명)들이 개관순시를 통하여 문제해결에 어려움을 겪는 학생들에게 개별적인 발문과 권고를 제공하고 있었다. 다만, 이와 같이 응답한 대부분의 교사들이 학급의 모든 학생들을 제한된 시간동안 두루 살피는 것에는 어려움을 겪는다고 추가 응답하였다. 학업성취도가 낮은 학생들에게 중점적으로 개별 발문 및 권고를 하는 교사(10명)들도 시간의 제약으로 인하여 선택적 교육을 할 수 밖에 없음을 이야기하였다.

Ⅲ. 연구 방법

본 연구는 보조문항의 제시 방법에 따른 학생들의 문제해결 전략과 수학적 사고를 분석하기 위하여 두 가지 검사를 실시하였다. 1차 검사는 검사 문항의 해결 가능성을 분석하기 위한 것이며, 2차 검사는 문제를 해결하는 전략과 학생들이 보이는 수학적 사고를 보다 자세하게 관찰하기 위하여 실시하였다.

1. 연구 참여자

1차 검사의 참여자는 ○○광역시의 A초등학교 6학년 두 학급 학생들이다. A초등학교는 반편성시 학업성취도에 의해 균등하게 편성을 실시하였다. 두 학급이 학년 초에 실시한 진단평가 수학 점수에 대한 독립표본 t검증 결과는 [표 3]과 같이 유의미한 차이를 보이지 않았다.

[표 3] 1차검사 참여 학급의 진단평가 수학점수에 대한 독립표본 t검정
[Table 3] Independent sample t-test of the math scores of diagnostic evaluation of classes participating in the primary examination

구분	N	평균	표준편차	t	유의확률
1반	20	79.0	18.023	-.098	.923
2반	20	79.6	20.638		

*$p<.05$

문제의 인식이 어려운 특수학급 대상자는 검사대상에서 제외하였으며 두 학급의 학년 초 수학과 진단평가 결과를 바탕으로 상·중·하 세 그룹으로 성취수준을 나누어 문제해결 전략을 비교하였다. 두 학급에 대한 자세한 정보는 [표 4]와 같다.

[표 4] 1차 검사의 참여자
[Table 4] Participants in the primary inspection

학급	학생수	보조문항 제공여부	성취수준	
1반	20	미제공	상	5
			중	10
			하	5
2반	20	제공	상	6
			중	9
			하	5

2차 검사는 ○○광역시의 B초등학교 6학년 학생 12명을 대상으로 실시하였다. 2차 검사는 1차 검사에서 미처 발견하지 못한 문제해결 전략과 수학적 사고를 보다 자세히 관찰하기 위한 목적으로 실시하였으며, 다양한 학생들의 수학적 사고를 분석하기 위하여 1차 검사 학생들이 실시했던 동일한 수학과 진단평가 검사를 바탕으로 성취수준별 4명씩 같은 성비로 구성하여 참여시켰다.

2차 검사에서는 학생들을 두 그룹으로 나누어 실시하였다. 이때, 학생 개개인의 문제해결 전략과 수학적 사고를 정확하게 분석하기 위하여 학생간의 의사소통

을 허용하지 않았으며 검사 종료 후, 개별 면담을 통하여 지면에 기재하지 못한 문제해결 전략과 수학적 사고를 분석하였다. 2차 검사에 참여한 학생들의 자세한 정보는 [표 5]와 같다.

[표 5] 2차 검사의 참여자
[Table 5] Participants in secondary inspection

보조문항 제공여부	코드	성취 수준	성별	비고
보조문항 미제공	A11	상	남	단위학교영재
	A12		여	단위학교영재
	A21	중	남	
	A22		여	
	A31	하	남	
	A32		여	
보조문항 제공	B11	상	남	단위학교영재
	B12		여	발명영재
	B21	중	남	
	B22		여	
	B31	하	남	
	B32		여	

학생 A11, A12, B11은 초등학교 4학년부터 꾸준히 단위학교 영재교육을 이수한 학생들로서 수학과 학업 성취도가 매우 높다. A11과 B11은 평소 수업 태도가 바르고, 자신의 문제 해결 과정을 체계적으로 잘 정리하는 것에 능숙하며 A12는 자신의 풀이과정을 말로 설명하는 것을 좋아한다.

B12는 지역교육청에서 운영하는 벨트형 발명영재교육을 5학년 때부터 이수하고 있는 학생이다. 해당 발명영재학급의 교육과정 및 입학을 위한 학문적성 검사에 수학 과목이 포함되어있으며, B12도 평소에 자신의 풀이과정을 수학적으로 잘 정리하고 설명할 수 있다.

A21, A22, B21, B22는 진단평가 점수가 전체 평균에 근접하는 중위권 학생들로서 네 학생 모두 기본 연산 능력에 비해 문장제의 정답률이 낮은 학생들이다. 특히 B21은 복잡하고 어려운 연산을 정확하게 수행할 수 있지만 비슷한 상황을 문장제로 제시하면 문제를 해결하지 못하는 경우가 많은 학생이다.

A31, A32, B31, B32는 진단평가의 성취수준이 하위권이었지만 본 연구의 과제를 수행하기 위한 기초적인 연산이나 도형에 대한 지식은 갖추고 있는 학생들이다.

2. 검사 문제의 설계

본 검사에서는 연구의 참여자인 6학년 학생들에게 적절한 수준의 문장제를 제공하기 위하여 2007 개정 교육과정에 따른 5학년 2학기 수학교과서의 마지막 단원의 문장제를 수정하여 사용하였다. Ⅱ장에서 살펴본 바와 같이 2007 개정 교육과정 시기의 초등학교 수학 교과서는 보조문항을 통하여 문장제에 적합한 문제해결 전략을 지도하고 있었다. 첫 번째 그룹에는 2007 개정 교육과정에 따른 교과서의 보조문항을 그대로 제공(▶, ▷)하였으며, 두 번째 그룹에는 2015 개정 교육과정에 따른 교과서에서 제공하는 정도의 기본적인 권고만을 보조문항으로 제공(▶)하였다. 이때 제공한 문제는 총 3문제로 [그림 4], [그림 5], [그림 6]과 같다. 학생들에게 제공한 학습지는 풀이과정을 적기 위한 여백을 넓게 제공하였다. 문제를 풀 수 있는 시간은 총 30분을 제공하였다.

한 변이 40㎝인 정사각형 모양의
판자가 있습니다. 이 판자를 잘라
가로와 세로의 비가 8:5인 가장 큰
직사각형을 만들려고 합니다. 가로와
세로의 길이를 어떻게 해야 하는지
알아봅시다.

\---------------------------------

\-------------------------

▶구하려는 것은 무엇입니까?
▶문제를 해결하는 데 주어진 조건은
무엇입니까?
<그림을 그려서 문제를 해결해보세요.>
▷문제의 뜻에 알맞은 정사각형을
그려보시오.
▷가로와 세로의 비가 8:5인 가장 큰
직사각형을 만들려면 가로와 세로를
똑같이 몇으로 나누면 되겠습니까?
▷가로와 세로의 비가 8:5인 가장 큰
직사각형을 만들려면 가로가 40㎝일 때
세로는 몇 ㎝로 해야 합니까?

[그림 4] 학생들에게 제공된 첫 번째 문제
[Fig. 4] The first problem given to students

농장에 닭과 토끼가 있습니다. 닭과 토끼의 머리 수를 세어 보니 34개였고, 다리 수를 세어보니 110개보다 많고 114개보다 적었습니다. 이 농장의 닭과 토끼는 각각 몇 마리인지 알아봅시다.

▶구하려는 것은 무엇입니까?
▶문제를 해결하는 데 주어진 조건은 무엇입니까?
<예상하고 확인하여 문제를 해결해보세요.>
▷닭이 17마리, 토끼가 17마리라고 한다면 답이 될 수 있는지 확인해 보시오.
▷만일 위의 답이 틀렸다면 닭과 토끼의 수를 어떻게 예상하면 좋을 것이라고 생각합니까?
▷바른 답이 구해질 때까지 답을 예상하고 확인해 보시오.
▷닭과 토끼는 각각 몇 마리입니까?

[그림 5] 학생들에게 제공된 두 번째 문제
[Fig. 5] The second problem given to students

그림과 같이 바둑돌이 놓여 있습니다. 규칙에 따라 바둑돌을 놓는다면 6번째에는 흰 바둑돌과 검은 바둑돌이 각각 몇 개가 놓여야 하는지 알아봅시다.

▶구하려는 것은 무엇입니까?
▶문제를 해결하는 데 주어진 조건은 무엇입니까?
<규칙을 찾아서 문제를 해결해보세요.>

순서(번째)	1	2	3	4
흰 바둑돌(개)	1	1		
검은바둑돌(개)	0	1+2		

▷어떤 규칙을 찾을 수 있습니까?
▷규칙에 따라 빈칸에 알맞은 수를 써넣으시오.

순서(번째)	1	2	3	4	5	6
흰 바둑돌(개)	1	1				
검은바둑돌(개)	0	3				

[그림 6] 학생들에게 제공된 세 번째 문제
[Fig. 6] The third problem given to students

보조문항의 제공여부와 상관없이 모든 문제의 하단에는 '문제를 해결할 수 있는 다른 방법이 있다면, 해결 방법을 설명해보세요.'라는 지시문을 추가하여 다양한 전략을 구상할 것을 권고하였다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 보조문항에 따른 문제해결(1차 검사)

보조문항을 통해 기본적인 권고만을 제공한 1반의 정답률은 [표 6]과 같으며 보조문항을 통해 문제해결 전략을 제공받은 2반의 정답률은 [표 7]과 같다.

[표 6] 기본적인 권고만 제공한 학급의 정답률
[Table 6] The correct answer rate for the class not provided with the auxiliary questions

보조문항 미제공	1번 문제	2번 문제	3번 문제
학급 전체 (20명)	25%(5명)	15%(3명)	40%(8명)
성취수준 상 (5명)	60%(3명)	40%(2명)	100%(5명)
성취수준 중 (10명)	20%(2명)	10%(1명)	20%(2명)
성취수준 하 (5명)	0%(0명)	0%(0명)	20%(1명)

[표 7] 문제해결 전략을 제공한 학급의 정답률
[Table 7] The correct answer rate for the class provided with the auxiliary questions

보조문항 제공	1번 문제	2번 문제	3번 문제
학급 전체 (20명)	80%(16명)	40%(8명)	60%(12명)
성취수준 상 (6명)	100%(6명)	67%(4명)	100%(6명)
성취수준 중 (9명)	67%(6명)	33%(3명)	44%(4명)
성취수준 하 (5명)	80%(4명)	20%(1명)	40%(2명)

성취수준에 상관없이 문제해결 전략을 제공받은 학급의 정답률이 보조문항을 제공받지 못한 학습에 비하

여 놓았다. 각 문제별 정답자가 문제를 해결하는데 사용한 문제해결 전략은 [표 8]과 같다. 이때, 마지막 권고문을 활용하여 두 가지 이상의 전략을 사용한 학생은 중복하여 빈도를 계산하였다.

[표 8] 정답자들의 문제해결 전략
[Table 8] Problem solving strategies for the corrector

보조문항	1번 문제	2번 문제	3번 문제
기본적 권고	식 만들기(4명) 그림 그리기(1명)	식 만들기(3명)	규칙 찾기(6명) 실제로해보기(6명)
해결 전략	그림 그리기(16명) 식 만들기(4명)	예상과 확인(8명) 식 만들기(1명)	규칙 찾기(12명) 실제로해보기(3명)

2반 학생들에게 제시된 보조문항의 해결전략은 ‘그림 그리기(1번)’, ‘예상과 확인(2번)’, ‘규칙 찾기(3번)’의 3가지 전략이었다. [표8]에서 알 수 있듯이, 이러한 해결전략을 권고하는 보조문항을 제공받지 못한 학생들이 문제해결 전략을 떠올리는 것은 쉽지 않았다. 1번 문제의 경우에는 기본적인 권고만으로 그림 그리기 전략을 떠올린 학생은 1명에 불과하였으며, 2번 문제의 경우 기본적인 권고만으로는 예상과 확인 전략은 아무도 떠올리지 못하였다. 그림 그리기 전략과 예상과 확인 전략은 2007 개정 교육과정에 따른 교과서에서는 해당 문제의 기본적인 전략으로 학생들에게 지도하고 있었으나 보조문항의 안내나 교사의 지도 없이는 학생들이 쉽게 떠올리기 어려운 전략이라고 볼 수 있다.

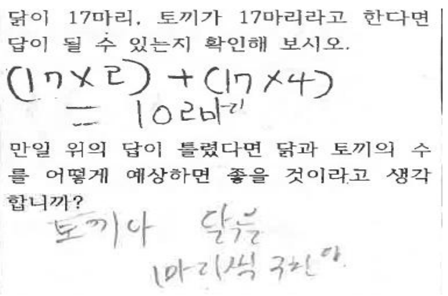
2. 보조문항에 따른 문제해결 전략과 수학적 사고 (2차 검사)

2차 검사에 참여한 12명 학생들의 정답 여부와 사용 전략은 [표 9]와 같다. 1차 검사와 마찬가지로 보조문항으로 해결 전략을 제공받은 B11~B32 학생들의 정답률이 A11~A32 학생들의 정답률보다 높았다. 아울러, 보조문항을 제공받지 않은 학생들은 그림그리기 전략과 예상과 확인 전략을 거의 떠올리지 못하였으며 3번 문제에서 규칙 찾기 전략을 사용한 학생은 상위권 학생 1명뿐이었다.

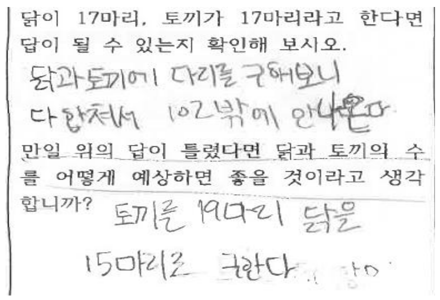
[표 9] 학생별 문제해결 정답여부 및 사용 전략
[Table 9] Solving situation and strategy for each problem

코드	1번 문제	2번 문제	3번 문제
A11	○ (식 만들기)	○ (식 만들기)	○ (규칙 찾기, 실제로 해보기)
A12	× (식 만들기)	○ (식 만들기)	○ (실제로 해보기)
A21	×	×	× (실제로 해보기)
A22	○ (그림 그리기)	× (예상과 확인)	× (실제로 해보기)
A31	×	×	×
A32	×	×	× (실제로 해보기)
B11	○ (그림 그리기, 식 만들기)	○ (예상과 확인 식 만들기)	○ (규칙 찾기)
B12	○ (그림 그리기)	× (예상과 확인)	○ (규칙 찾기)
B21	○ (그림 그리기)	○ (예상과 확인)	○ (규칙 찾기)
B22	× (그림 그리기)	○ (예상과 확인)	○ (규칙 찾기)
B31	○ (그림 그리기)	× (예상과 확인)	○ (규칙 찾기)
B32	× (그림 그리기)	× (예상과 확인)	×

2차 검사를 통해 학생들의 문제해결 과정을 상세히 관찰한 결과, 성취수준이 낮은 A31, A32, B31, B32의 경우에 문제해결 태도의 적극성에서 큰 차이를 보였다. 보조문항을 제공받지 못한 A31, A32는 문제를 몇 분간 살펴본 뒤 바로 문제해결을 포기하고 낙서를 하거나 엎드린 것에 반하여 보조문항을 제공 받은 B31, B32의 경우에는 15분 이상 문제해결에 몰두하였다. 특히, 3개의 문제 중에서 정답률이 가장 낮은 2번 문제의 경우에 A31, A32는 해결을 위한 아무런 시도를 하지 않은 반면, B31, B32는 [그림 7], [그림 8]와 같이 해결의 실마리를 찾아내기도 하였다.



[그림 7] B31의 문제해결 과정
[Fig. 7] B31's problem-solving process



[그림 8] B32의 문제해결 과정
[Fig. 8] B32's problem-solving process

B31과 B32는 비록 2번 문제의 정답을 구하지는 못했지만 보조문항의 권고를 통하여 닭과 토끼가 17마리씩 있다면 총 다리 수가 102개가 되어 구하고자 하는 총 다리 수에 미치지 못함을 인지하였다. 이때, 토끼는 다리가 4개이고, 닭은 다리가 2개이기 때문에 원하는 답을 구하기 위해서는 토끼의 수를 늘려야 함을 파악할 수 있었다. 이러한 생각을 통해 학생들은 미숙하지만 '이치에 닿으며 조리 있는 생각을 하려는 태도'에 의한 연역적 사고를 발동시켰음을 알 수 있다.

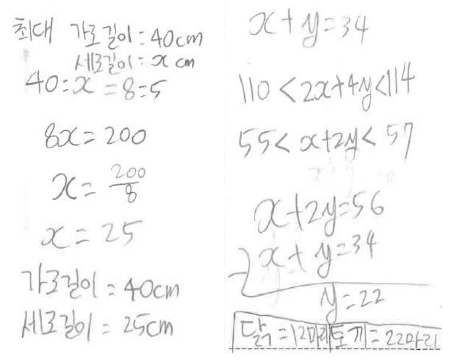
그러나 이러한 수학적 사고의 발현과는 별개로 B32에게서 우려스러운 점을 관찰할 수 있었다. B32는 문제해결을 포기하지 않고 오랜 시간동안 노력하였지만 모든 문제의 답을 도출하는데 실패하였기 때문에 검사 종료 후의 개별 면담에서는 자신감이 낮아진 모습을 보였다.

성취수준이 중위권인 학생들의 경우에도 보조문항을 제공받은 그룹의 정답률이 매우 높았다. B21의 경우에는 평소 단순한 연산 문제는 잘 해결하였지만 문장제를 해결하는데 큰 어려움을 겪어왔다. 실제로 진단평가에서 제시되었던 문장제는 대부분 풀기 위한 시도조차 하지 않았었다. 그러나 2차 검사에서는 보조문항을 통해 실마리를 제공받으면서 3개의 문항을 모두 해결할 수 있었다. 보조문항의 제공은 B21과 같이 연산 기능은 뛰어나지만 문장제의 해결을 어려워했던 학생들에게 해결 계획을 세우기 위한 직접적인 도움과 성공의 경험을 느낄 수 있는 중요한 역할을 해줄 수 있다.

성취수준이 중위권인 학생들과 하위권인 학생들은 보조문항으로 문제해결 전략을 제공받은 경우에 각 보조문항이 요구하는 문제해결 방법을 실행하면서 균일한 수학적 사고를 발현하였다. 예를 들어, 1번 문제는 그림을 그림으로써 발현된 도형화의 사고를 통해 문제를 시각화하여 더욱 쉽게 문제를 해결할 수 있었고, 2번 문제의 경우에는 보조문항의 지시대로 예상한 결과와 목표 결과를 비교하여 연역적 사고를 통해 어떤 동물의 마릿수를 늘리거나 줄여야 할지 판단할 수 있었다.

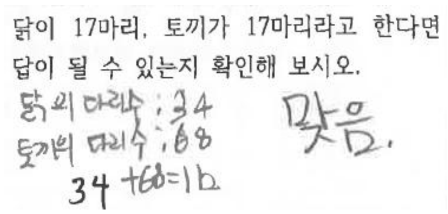
성취수준이 상위권인 학생들의 경우에는 1차 검사에서는 정답률의 차이가 크게 나타났지만 2차 검사에서는 표본이 적음으로 인하여 눈에 띄는 차이가 나지는 않았다. 다만 문제해결 전략의 선택과 관련하여 눈여겨 볼만한 점이 있다. 보조문항으로 문제해결 전략을 제공받은 상위권 학생들은 대부분 보조문항이 지니고 있는 의도대로 문제해결 전략을 세워서 문제를 해결하였다. 그러나 보조문항을 제공받지 못한 상위권 학생들은 1번과 2번의 경우에는 '식 만들기'전략, 3번의 경우에는 '실제로 해보기'전략을 많이 사용하였다. [그림 9]는 식 만들기 전략을 사용한 A11의 문제해결 과정이다.

면담결과, A11의 경우 1번 문제를 해결할 때, 한 변의 길이가 40㎝인 정사각형을 머릿속에 떠올렸지만, 이러한 정사각형의 모양과는 별개로 이미 직사각형의 가로와 세로 길이에 따른 비례식을 세우는 것이 어렵지 않았기 때문에 굳이 그림 그리기 전략을 사용할 필요가 없었다. 이러한 A11의 사고과정은 '이치에 닿으며 조리 있는 행위를 하려는 태도'와 '내용을 간결 명확히 나타내려는 태도'를 바탕으로 발현된 유추적 사고와 기호화의 사고, 식에 관한 사고 및 함수적 사고를 연관 지을 수 있을 것이다.



[그림 9]. A11의 문제해결 과정
[Fig. 9] A11's problem-solving process

한편, 매우 우수한 학생인 B12의 경우에는 보조문항으로 인하여 오히려 정답을 구하지 못하였다. B12는 1번과 3번 문제를 보조문항이 제시한 그림 그리기 전략과 규칙 찾기 전략을 사용하여 쉽게 해결하였다. 그러나 2번 문제의 경우에 [그림 10]과 같은 연산 실수를 하여 정답을 구하지 못하였다. 면담결과, B12 학생은 식 만들기 전략을 통하여 문제를 해결할 수 있었음에도 보조문항의 권고에 따라 문제를 해결하면서 오답을 구하게 되었다. 이처럼 학생이 충분히 떠올릴 수 있었던 문제해결 전략을 사용하지 못하게 되어, 발현할 수 있었던 수학적 사고를 사용하지 못하게 되는 경우가 발생할 수 있다.



[그림 10] B12의 문제해결 과정
[Fig. 10] B12's problem-solving process

아울러, 성취수준과 상관없이 보조문항을 제공받은 학생들은 문제를 해결하기 위한 유추적 사고의 발현 여부가 불분명하였다. B12와 같이 면담을 통해 충분히 유추적으로 사고할 수 있었음을 입증한 경우는 더 이상 관찰되지 않았다.

V. 결론 및 제언

본 연구는 수학 문장제의 보조문항이 학생들에게 미치는 영향을 파악하고 이에 따른 시사점을 논하기 위해 수행되었다. 이를 위해 문제해결 관련 차시에서 문장제를 제시하는 교사들의 실태를 조사하여 분석하였다. 다양한 수준의 학생들을 분석하기 위해 1차 검사에서는 초등학교 6학년 2개 학급 학생들을 대상으로 보조문항의 전략 안내 유무에 따른 정답률을 성취 수준에 따라 분석하였으며, 2차 검사에서는 성취수준별로 총 12명의 학생을 선정하여 학생들의 문제해결 전략 및 수학적 사고의 발현을 자세히 관찰하였다. 이와 같은 분석 결과 다음과 같은 결론과 시사점을 도출하였다.

첫째, 보조문항을 통하여 문제해결 전략을 제공하는 문제는 그렇지 않은 경우에 비해 몇 가지 장점을 가지고 있다. 우선 여러 수준의 학생들에게 효율적인 문제해결 전략을 채택하도록 유도함으로써 상대적으로 균일한 수학적 사고를 유도할 수 있었다. 특히, 연산능력에 비해 문장제의 풀이에 어려움을 겪는 중위권 학생들은 평소에 경험하지 못하였던 문제해결에 필요한 수학적 사고의 발현과 성공의 경험을 가질 수 있었다. 게다가 하위수준 학생들의 경우에는 보조문항을 실마리 삼아 문제를 해결하고자 하는 적극적인 태도를 관찰할 수 있었다.

보조문항을 제공받은 학급의 정답률이 높은 것은 당연한 결과라고 생각할 수도 있지만 [표8]에서 볼 수 있듯이 기본적인 권고만으로는 학생들이 스스로 떠올릴 수 있는 전략이 제한적이라는 것은 교육적 시사점을 제기할만하다. 수학 문제를 해결하는 능력을 개발하기 위한 방법의 하나는 훌륭한 사고가의 사고하는 방법을 모방하고 문제를 푸는 실제적인 경험을 통해 터득하는 것이다(우정호, 1998). 보조문항은 학생들이 문제를 해결하기 위한 방법을 체득할 수 있는 기회를 제공한다는 점에서 긍정적인 효과를 가지고 있다. 즉, 문제해결 전략을 보조문항을 통해 제공함으로써 교사가 의도한 대로 학생들의 반응을 이끌어 내는 것이 수월해져서 다인수 학급에서 문제해결 전략을 지도하기 용이해진다.

둘째, 이러한 몇 가지 장점에도 불구하고 보조문항

을 통하여 문제해결 전략을 제공하는 문제는 상대적인 단점을 가지게 된다. 우선 학생들에게 유추적 사고를 유발시켰는지에 대한 여부가 불투명하였다. 특히, 중위 수준 학생들의 경우에 단순히 빈칸 채우기 형식으로 문제를 해결하려는 경향이 관찰되었다. 아울러 상위권 학생이 스스로 문제를 해결할 수 있는 충분한 능력을 가지고 있음에도 보조문항의 풀이에만 만족하여 기계적으로 문제를 해결하는 경우가 있었다.

아울러, 제공된 전략의 영향으로 학생이 스스로 떠올릴 수 있었던 전략을 채택하지 못하는 경우가 생기게 된다. 앞서 살펴본 바와 같이 문제와 함께 제공되는 보조문항은 문제의 이해와 계획 수립에 도움을 주기 때문에 학생들의 문제해결 성공 여부는 물론, 문제해결 전략과 수학적 사고의 발현에도 큰 영향을 미칠 수 있다. 그런데 문제해결 전략을 제공하는 보조문항이 항상 모든 학생들에게 긍정적인 것은 아니다. 연구결과에 나타난 것처럼 보조문항을 통해 문제해결 전략을 제공받은 학생들은 정답을 구할 가능성이 높아지지만 학생 B12의 사례와 같이 본인이 스스로 떠올릴 수 있었던 문제해결 전략과 상관없이 기계적인 계산만으로 문제를 해결하게 되는 경우가 생겨날 수 있다.

한편 하위수준 학생들은 보조문항을 통해 문제를 포기하지 않고, 적극적으로 해결하려는 자세를 보여주기도 하였지만, B32와 같이 오랫동안 노력한 문제의 해결에 실패했을 때, 자신감이 낮아지는 경우를 볼 수 있었다. 따라서 실제 수업에서는 이러한 학생들이 성공적인 문제해결을 경험할 수 있도록 교사가 적절한 발문을 추가 제공해야 할 것이다.

셋째, 보조문항을 최소화하여 기본적인 권고만을 제공하는 문장제는 학생들이 보조문항을 통해 전략을 구상하는 것에 영향을 받지 않기 때문에 다양한 해결 방법을 구상해낼 수 있다.

현재 사용되고 있는 2015 개정 교육과정에 따른 교과서는 문제해결과 관련된 차시에서 보조문항을 상세하게 제공하지 않고 있다. 아울러 문장제 제공 실태조사에 나타난 것과 같이 많은 교사들 또한 일방적이고 획일적인 문제해결 전략의 교육은 원치 않는다. 이러한 추세에서는 문제를 제시하는 방식에 있어 교사의 역할이 더욱 중요해진 것이다.

비록 문제해결 전략을 제공하지 않는 문제가 제공하는 문제에 비하여 수업의 효율이 낮을 수는 있지만 보조문항을 제시하지 않는 방식이 학생들의 다양성과 스스로 생각하는 힘을 길러주기 위한 방향이라고 볼 수 있을 것이다. 다만 성취 수준이 낮거나 문장제의 해결에 성공한 경험이 없는 학생들을 위하여 보조문항을 통해 문제해결 전략을 수준별로 제공하는 것이 필요하다.

교사는 학생들이 수학 문제의 해결을 통해 수학적 사고를 발현하고 기본적인 개념을 스스로 형성하길 바랄 것이다. 그러나 모든 학생들이 동일한 문제를 통해 유사한 전략을 구상하고 동일한 수학적 사고를 발현할 수 있는 것은 아니다. 이미 제시된 보조문항을 보이지 않게 가리면서 수업을 진행하는 것은 매우 어려운 일이다. 교사의 재량에 따라 학생들에게 수준별 안내 자료를 개별적으로 제시하는 방식을 고려해야 할 것이다.

마지막으로 본 연구의 제한점 및 후속 연구를 위한 제언은 다음과 같다.

첫째, 본 연구는 특정 광역시의 6학년 학생들을 대상으로 시행하였기 때문에 모든 학생에게 일반화하는 것은 무리가 있다. 특히, 저·중·고학년의 발달 수준에 따른 차이가 있을 수 있으며, 수업을 진행하는 교사의 전공, 지역 및 교육적 신념에 따른 수업 방식의 차이가 있을 수 있으므로 보다 다양한 연구 참여자를 대상으로 연구를 수행하는 것이 필요하다.

둘째, 본 연구에 사용된 검사 문항은 모든 문제해결 전략을 다루기에는 무리가 있다. 다양한 문제해결 전략을 다룬 검사 문항을 사용한 후속 연구가 실시될 필요가 있다.

참 고 문 헌

강문봉, 강흥규, 김수미, 박교식, 박문환, 서동엽, 송상헌, 유현주, 이종영, 임재훈, 정동권, 정은실, 정영옥 (2005). 초등수학교육의 이해. 서울: 경문사.

Kang, M. B., Kang, H. K., Kim, S. M., Park, K. S., Park, M. H., Seo, D. Y., Song, S. H., Yoo, H. J., Lee, J. Y., Yim, J. H., Jung, D. K, Jung, E. S., & Jung, Y. O. (2005). *Understanding of Elementary Mathematics Education.* Seoul: Kyungmoon

교육부(2011). 초등학교 수학 5-2. 서울: 교육부.

Ministry of Education (2011). *Elementary school mathematics textbook 5-2.* Seoul: Ministry of

Education.

교육부(2019). 초등학교 수학 6-1. 서울: 교육부.

Ministry of Education (2019). *Elementary school mathematics textbook 6-1*. Seoul: Ministry of Education.

김진락(1990). 수학 문제 유형의 분류와 그 실제. 한국수학교육학회지 시리즈A <수학교육>, 29(1), 1-6.

Kim, J. R. (1990). Classification and Example of the Types of Mathematical Problems. *Mathematics Education, 29*(1), 1-6.

신성균, 강문봉, 황혜정(1993). 수학과 문제해결력 신장을 위한 교수-학습 자료 개발 연구 -중학교를 중심으로-. 한국교육개발원.

Shin, S. K., Kang, M. B., & Hwang, H. J. (1993). *A Study on the Development of Teaching-Learning Materials for the Improvement of Mathematics Problem Solving Ability*. Korean Educational Development Institute.

안병곤(2018). 초등 수학 교과서에서 문제해결 지도의 개선점과 개선 방향 -Polya의 문제해결을 중심으로-. 한국초등수학교육학회지, 22(4), 405-425.

Ahn, B. G. (2018). A Study on the Improvement of Problem-solving in Elementary Mathematics Textbooks - Focusing on Polya's Problem Solving -. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea, 22*(4), 405-425.

우정호(1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울: 서울대학교출판문화원.

Woo, J. H. (1998). *Educational Basis of School Mathematics*. Seoul: Seoul National University Press.

우정호(2009). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울: 서울대학교출판문화원.

Woo, J. H. (2009). *Principles and methods of teaching and learning mathematics*. Seoul: Seoul National University Press.

이용률(2015). 과제와 문제. 경인초등수학교육연구회 합동발표대회 자료집, 16권, 29-30

Lee, Y. R. (2015). Assignments and Problems. *Gyeongin elementary school mathematics education study society document book, 16th*, 29-30

조누리, 백석윤(2013). 수학적 발문에 대한 초등학교 예비교사와 현직교사의 PCK 비교. 한국초등수학교육학회지, 17(1), 39-65.

Cho, N. R., & Paik, S. Y. (2013). Comparison of Pre- and In-service Elementary School Teachers' PCK about Questioning in Mathematics Class. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea, 17*(1), 39-65.

임영빈, 홍진곤(2015). 삼각배열 문제해결과 관련된 초등영재의 수학적 사고와 태도. 대한수학교육학회지 <학교수학>, 17(3), 377-390.

Yim, Y. B., & Hong, J. K. (2015). Primary Gifted Students' Mathematical Thinking and Attitude Related to Problem Solving of Triangular Array. *School mathematics, 17*(3), 377-390.

임영빈(2018). 삼각부등식 개념형성을 위한 문제해결 과정에 나타나는 초등학생의 수학적 사고와 교사의 역할. 대한수학교육학회지 <수학교육학연구>, 28(2), 203-220.

Yim, Y. B. (2018). Mathematical Thinking of Elementary School Students and Teacher Roles during Problem-Solving Process to Form the Concept of Triangle Inequality. *Journal of Educational Research in Mathematics, 28*(2), 203-220.

장혜원, 강윤지, 김은혜, 최혜령(2019). 정보과다 문제와 정보부족 문제에 대한 초등학교 6학년의 문제해결 분석. 대한수학교육학회지 <학교수학>, 21(4), 669-685.

Chang, H, W., Kang, Y, J., Choi, H, R., & Kim, E, H. (2019). An Analysis of the Sixth Graders' Solutions for the Extra Information and Missing Information Word Problems. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea, 21*(4), 669-685.

한정민, 박만구(2010). 수학적 창의성 관점에서 본 교사의 발문 분석. 한국초등수학교육학회지, 14(3), 865-884.

Han, J. M., & Park, M. K. (2010). An Analysis of Teacher Questioning Focused on Mathematical Creativity. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea, 14*(3), 865-884.

片桐重男(1992). *問題解決過程と發問分析*. 明治図書出版. 이용률 역(1999). 문제해결과정과 발문분석. 서울: 경문사

片桐重男(2004). *數學的な考え方の具体化と指導*. 明治図書出版. 이용률, 정동권 공역(2013). 수학적인 생각의 구체화와 지도-수학의 진정한 학력 향상을 지

향하여-. 서울: 경문사

片桐重男(2016). 人間愛に基づく指導法と數學的な考え方. *第16回-韓·日數學算數教育合同研究大會特講.*

Gerofsky, S. G. (1999). *The word problem as genre in mathematics education.* Doctoral dissertation. Simon Fraser University.

NCTM. (1980). *An agenda for action: Recommendations for school mathematics of the 1980s.* Reston, VA: NCTM.

NCTM. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA. NCTM. 류희찬·조완영·이경화, 나귀수, 김남균, 방정숙 공역(2007). 학교수학을 위한 원리와 규준. 서울: 경문사.

Polya, G.(1971). *How to solve it.* Princeton University Press. 우정호 역(2002). 어떻게 문제를 풀 것인가?. 서울: 교우사.

Influence of the Auxiliary Questions of Word Problems on the Problem Solving and Mathematical Thinking of Elementary School Students

Yim, Youngbin

Incheon Sinchon Elementary School

Bupyeong-gu, Incheon, 21375, Republic of Korea

E-mail: loveace-bin@hanmail.net

The purpose of this study was to examine the influence of the auxiliary questions of word problems presented to students on their problem solving-strategies and mathematical thinking and to discuss the educational implications of the results. As a result of making an analysis, problems that included auxiliary questions to give information on workable problem-solving strategies made it more possible for students of different levels to do relatively equal mathematical thinking than problems that didn't by inducing them to adopt efficient problem-solving strategies. And they were helpful for the students in the middle and lower tiers to find a clue for problem solving without giving up. But it's unclear whether the problems that provided possible strategies through the auxiliary questions stirred up the analogical thinking of the students. In addition, due to the impact of the problems provided, some students failed to adopt a strategy that they could have come up with on their own. On the contrary, when the students solved word problems that just offered basic recommendation by minimizing auxiliary questions, the upper-tiered students could devise various strategies, but in the case of the students in the middle and lower tiers, those who gave up easily or who couldn't find an answer were relatively larger in number.

* ZDM Classification : D33

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D50

* Key Words : word problem, auxiliary question, problem-solving strategy, mathematical thinking