

## 등기하해석에 의한 기능경사복합재 판의 역학적 거동 예측

## Isogeometric Analysis of FGM Plates in Combination with Higher-order Shear Deformation Theory

전준태\*

Juntai Jeon\*

Professor, Department of Civil&amp;Environmental Engineering, Inha Technical College, Incheon, Republic of Korea

\*Corresponding author: Juntai Jeon, jtjeon@inhac.ac.kr

## ABSTRACT

**Purpose:** This study attempts at analyzing mechanical response of functionally graded material (FGM) plates in bending. An accurate and effective numerical approach based on isogeometric analysis (IGA) combined with higher-order shear deformation plate theory to predict the nonlinear flexural behavior is developed. **Method:** A higher-order shear deformation theory (HSDT) which accounts for the geometric nonlinearity in the von Karman sense is presented and used to derive the equilibrium and governing equations for FGM plate in bending. The nonlinear equations are solved by the modified Newton-Raphson iterative technique. **Result:** The volume fraction, plate length-to-thickness ratio and boundary condition have significant effects on the nonlinear flexural behavior of FGM plates. **Conclusion:** The proposed IGA method can be used as an accurate and effective numerical tool for analyzing the mechanical responses of FGM plates in flexure.

**Keywords:** Functionally Graded Material Plate, Bending, Isogeometric Analysis, Non-uniform Rational B-splines (NURBS), Higher-order Shear Deformation Theory

## 요약

**연구목적:** 본 연구에서는 고차전단변형이론을 적용한 등기하해석 방법을 이용하여 기능경사복합재 판의 휨에 의한 역학적 거동을 해석하고자 하였다. **연구방법:** 기능경사복합재 판의 역학적 거동을 보다 더 정확하게 해석하기 위해서 전단보정계수를 도입할 필요가 없는 기하학적 비선형을 고려한 고차전단변형이론을 이용하여 휨을 받는 기능경사복합재 판의 평형방정식과 지배방정식을 도출하였으며, 등기하해석방법에 의한 수정된 Newton-Raphson 반복법을 이용하여 방정식들을 풀었다. **연구결과:** 판의 용적비, 길이-두께 비 및 경계조건은 기능경사복합재 판의 휨 거동에 상당한 영향을 미치는 것을 알 수 있었다. **결론:** 제안된 등기하해석 방법은 휨을 받는 기능경사복합재 판의 역학적 거동을 해석하는데 있어 정확하고 효과적인 수치해석 방법임을 확인하였다.

**핵심용어:** 기능경사복합재 판, 휨, 등기하해석, NURBS 기저함수, 고차전단변형이론

## 서론

샌드위치 구조는 우수한 전기적, 열적 및 기계적 성질에 힘입어 항공, 우주, 조선 및 건설 산업 분야에서 널리 쓰이고 있다. 최근에는 재료적 성질이 일정한 법칙에 의하여 공간적으

Received | 25 November, 2020

Revised | 10 December, 2020

Accepted | 17 December, 2020

OPEN ACCESS



This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0>) which permits unrestricted noncommercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

© Society of Disaster Information All rights reserved.

로 변하는 기능경사복합재(functionally graded material)가 개발되어(Koizumu, 1993) 기존의 샌드위치 구조가 겪는 층간의 기계적 혹은 온도변화에 의해 발생하는 응력집중 등의 문제를 해결할 수 있게 되었다. 이러한 기능경사복합재는 대부분 철과 세라믹의 두가지 재료로 구성되며, 그 기계적 성질의 우수성으로 인하여 기존의 샌드위치 구조를 대체하고 있다. 하지만 기능경사복합재를 실제 산업분야에 적용하기 위해서는 여러 가지 하중하에서의 역학적 거동에 관한 명확한 이해가 반드시 필요하다.

현재까지 기능경사복합재 판의 휨, 진동 및 축방향 압축 등과 같은 다양한 하중하에서의 거동에 관한 연구가 많이 진행되어 오고 있다. 하지만 이러한 연구의 상당수가 간단한 형상과 경계조건을 가지는 문제에 적용가능한 편미분방정식을 이용한 해석학적 방법(analytical method)에 국한되어 있어(Kashtalyan, 2004; Zenkour et al., 2008) 실제 공학적인 문제를 해결하기에는 부적합하므로 수치해석(numerical analysis)을 이용한 기능경사복합재 판의 역학적 거동 예측이 필요하다. 또한, 판을 해석하는데 쓰인 이론으로는 고전적인 판이론(classical plate theory)과 일차전단변형이론(first-order shear deformation theory)이 대부분이다. 고전적인 판이론은 등방성 판 해석을 위한 Kirchhoff-Love 가정에 기반한 것으로 횡전단변형을 고려하지 못한다.

따라서, 두꺼운 판을 해석하는 경우 부정확한 응답을 가져올 수 있다. 횡전단 효과를 고려하는 Reissner-Mindlin 이론에 근거한 일차전단변형이론은 수치해석에 응용하기에 용이하고 얇은 박판부터 두꺼운 후판의 기능경사복합재 판의 해석에 이용될 수 있다. 하지만 두께방향으로 동일한 전단변형률을 가정하므로, 계산된 전단응력과 변형률의 분포가 부정확하며 표면에서의 견인력 프리 경계조건을 만족하지 못하게 된다. 따라서 일차전단변형이론을 적용한 수치해석에서는 비현실적인 전단변형률 성분을 조정하기 위한 전단보정계수가 필요하다. 전단보정계수는 해석모델의 형상 및 재료적 성분과 경계조건 등에 의해 달라지며, 전단보정계수에 의하여 계산결과가 달라지는 한계가 있다.

이러한 단점을 극복하기 위하여 다양한 형태의 고차전단변형이론(higher-order shear deformation theory)이 제안되어 왔다. 변위장(displacement field)을 가정하는데 있어 고차항을 포함하는 고차전단변형이론은 표면에서의 제로 전단응력 조건을 만족하면서 비선형분포의 전단응력 및 전단변형률의 분포를 가지게 된다. 결과적으로 고차전단변형이론은 전단보정계수를 사용하지 않고도 일차전단변형이론보다 더 정확하고 안정적인 해석결과를 가져다준다.

한편, 고차전단변형이론에 의한 변위장의 형성에서는 변위에 대한 1차 미분을 포함하게 되는데, 이로 인해 수치해석 시 강성 매트릭스 구성에서 변위에 대한 2차 미분항을 가지게 된다. 결과적으로 고차전단변형이론을 이용한 수치해석에서는 변위장에 대한  $C^1$ -연속성이 요구된다. 이를 만족시키는 것은  $C^0$ -연속성에 근거한 유한요소해석법(finite element method)에서는 상당히 어려운 일이다. 최근에는 CAD를 이용한 모델생성과 이를 활용한 해석 시에 동일한 형상함수(B-spline or non-uniform rational B-spline, NURBS)를 사용함으로써 복잡한 기하학적 형상을 정확하게 모델링해서 해석할 수 있는 등기하해석(Isogeometric analysis, IGA, Hughes et al., 2005)이 개발되었다. NURBS는 임의의 연속성을 쉽게 얻을 수 있으므로 등기하해석은 고차전단변형이론에서 요구되는  $C^1$ -연속성을 쉽게 만족할 수 있다. 따라서 본 연구에서는 전단보정계수를 도입할 필요가 없는 고차전단변형이론을 적용한 등기하해석 방법을 이용하여 기능경사복합재 판의 정적 휨 거동을 보다 더 정확하게 해석하고자 한다.

## 기능경사복합재 판의 해석을 위한 고차전단변형이론

### 기능경사복합재 판

기능경사복합재 판은 두 가지 다른 재료 즉, 철과 세라믹으로 구성된 복합재료이다. 직교좌표계( $x, y, z$ )가 중앙면 (mid-plane,  $z = 0$ )에 설정된 길이  $a$ , 너비  $b$ , 두께가  $h$ 인 직사각형 기능경사복합재 판을 고려하였다. 기능경사복합재 판의 윗면은 세라믹이고 아랫면은 금속이며 두 표면사이는 금속과 세라믹이 혼합된 재료로 구성된다. 일반적으로 재료의 구성 체적비(volume fraction)는 아래 식에 나타난 것과 같은 멱함수(power-law) 형태로 두께방향으로 변하며, 단위분할법(partition of unity)을 만족하는 것으로 가정한다.

$$V_c(z) = \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^n \quad (0 \leq n \leq \infty), \quad V_c + V_m = 1 \tag{1}$$

여기서,  $V_c$ 와  $V_m$ 은 각각 세라믹과 금속의 체적비이며,  $n$ 은 멱지수이다. 금속과 세라믹 사이의 혼합재료에 대한 기계적 성질 또한 두께방향으로만 변화하며 혼합법칙(rule of mixture)에 의해 다음의 식으로 결정된다(Reddy, 2000).

$$P_e(z) = P_c V_c(z) + P_m (1 - V_c(z)) \tag{2}$$

여기서,  $P_e, P_c, P_m$ 은 각각 기능경사복합재, 세라믹 및 금속의 기계적 성질을 의미한다.

### 고차전단변형 판 이론

판의 전체영역은 기능경사복합재 판의 중앙면을 나타내는 영역( $\Omega$ )과 두께 방향의 영역( $h$ )으로 이루어져 있다고 상정하면 고차전단변형이론에 근거한 변위장은 아래의 식과 같이 나타낼 수 있다(Reddy, 2000).

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} + f(z) \beta_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} + f(z) \beta_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned}, \quad \left( -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \right) \tag{3}$$

여기서,  $u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)$ 은 전체영역 내에서  $x, y, z$  방향으로의 변위를 나타내며,  $u_0(x, y), v_0(x, y), w(x, y)$ 는 중앙면( $z = 0$ )에서의 각각의 변위를 일컫는다. 그리고  $\beta_x(x, y)$ 와  $\beta_y(x, y)$ 는 각각  $y$ 축과  $x$ 축에 대한 회전을 의미하고,  $f(z)$ 는 두께 방향으로의 전단변형률과 전단응력의 분포를 결정하는 횡전단 형상함수로 일차전단변형이론의 단점을 해결하기 위하여 고차전단변형이론에 도입된다. 본 연구에서는 Reddy (2000)의 횡전단함수,  $f(z) = z - \frac{4}{3}z^3/h^2$ 를 적용하였다. 영역 내

의 임의의 점에서의 비선형 면내 변형률과 횡전단 변형률은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_p &= \left\{ \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \gamma_{xy} \right\}^T = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + z\boldsymbol{\varepsilon}_1 + f(z)\boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \boldsymbol{\gamma} &= \left\{ \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz} \right\}^T = f'(z)\boldsymbol{\varepsilon}_s \end{aligned} \tag{4}$$

여기서,  $f(z) = 1 - 4z^2/h^2$  이 된다. 식 (3)을 식 (4)에 대입하고 von Karman 타입의 대변형을 가정하면 아래식과 같은 면내 변형률을 얻을 수 있다.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \boldsymbol{\varepsilon}_{0L} + \boldsymbol{\varepsilon}_{0N} + \boldsymbol{\varepsilon}_{0I} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right\} \tag{5}$$

여기서,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{0L}$ 과  $\boldsymbol{\varepsilon}_{0N}$ 은 각각 면내 변형에 의한 선형 및 비선형 변형률 벡터이고,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{0I}$ 는 초기변형  $w_0$ 에 의해 발생하는 비선형 변형률 벡터이다. 비선형 성분들은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{0N} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \mathbf{H}_\theta \boldsymbol{\Theta} \quad , \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{0I} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial w_0}{\partial x} & 0 \\ 0 & 2 \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ 2 \frac{\partial w_0}{\partial y} & 2 \frac{\partial w_0}{\partial x} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \mathbf{H}_1 \boldsymbol{\Theta} \tag{6}$$

여기서,  $\boldsymbol{\theta}$ 는 경사 벡터이고, 기능경사복합재 판의 구성방정식은 다음의 식과 같이 주어진다.

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} Q_{11}(z) & Q_{12}(z) & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12}(z) & Q_{22}(z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}(z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55}(z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44}(z) \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{array} \right\} \tag{7}$$

여기서,  $Q_{ij}(z)$ 는 탄성 계수(elastic coefficients)이다. 영률  $E(z)$ 과 포아송비  $\nu(z)$ 는 식 (2)로부터 구할 수 있다. 식 (4)를 식 (7)에 대입하면 응력과 변형률의 관계를 아래와 같은 매트릭스 형태로 구할 수 있다.

$$\hat{\sigma} = \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{P} \\ \mathbf{Q}_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{E} & 0 \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{F} & 0 \\ \mathbf{E} & \mathbf{F} & \mathbf{H} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{D}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_0 \\ \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_s \end{Bmatrix} = \hat{\mathbf{D}}\epsilon \tag{8}$$

여기서,

$$A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)) Q_{ij} dz;$$

$$D_{ij}^s = \int_{-h/2}^{h/2} (f'(z))^2 Q_{ij} dz \tag{9}$$

기능경사복합재 판의 정적거동에 대한 평형방정식은 아래와 같이 총위치에너지함수  $\Pi = U - V$ 에 대한 가상일의 방법을 이용하여 유도할 수 있다.

$$\delta(U - V) = 0 \tag{10}$$

여기서,  $\delta$ 는 변분 기호이고,  $U$ 와  $V$ 는 기능경사복합재 판의 외력에 의한 변형률 에너지와 위치에너지를 말한다.

## 고차전단변형이론을 적용한 등기하해석

### NURBS 기저함수

본 연구에서는 기능경사복합재 판의 정적거동을 해석하기 위하여 고차전단변형이론을 적용한 NURBS 기반의 등기하해석을 수행하였다. 본 절에서는 NURBS 기저함수에 대한 개괄적인 사항을 기술하며, 자세한 설명은 참고문헌(Hughes et al., 2005)에 나타나 있다. B-스플라인 기저함수는 아래와 같은 노트벡터(knot vector)에 의해 표현된다.

$$\Xi = \{ \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1} \} \tag{11}$$

여기서,  $n$ 은 기저함수의 수이며,  $p$ 는 기저함수의 차수이다. 1차원 B-스플라인 기저함수는 차수가  $p=0$ 에서 시작하여 재귀적 방법에 의해서  $p=1, 2, 3, \dots$ 을 가지는 기저함수로 전개되며 아래와 같이 정의된다.

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{else} \end{cases}, \text{ for } p=0 \tag{12}$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi), \text{ for } p \geq 1 \tag{13}$$

1차원 B-스플라인을 2차원으로 확장하면 NURBS 기저함수는 아래와 같이 정의된다.

$$R_A(\xi, \eta) = \frac{N_A(\xi, \eta) w_A}{\sum_{A=1}^{m \times n} N_A(\xi, \eta) w_A} = \frac{N_A(\xi, \eta) w_A}{W(\xi, \eta)} \tag{14}$$

여기서,  $w_A$ 는 개별 가중치이고,  $W(\xi, \eta)$ 는 가중치 함수이다. NURBS로 생성되는 곡면은 다음과 같다.

$$C(\xi, \eta) = \sum_{A=1}^{m \times n} R_A(\xi, \eta) P_A \tag{15}$$

### 정식화

조절점 당 다섯 개의 자유도를 가지는 등기하요소의 변위장은 식 (14)에서 정의한 NURBS 기저함수를 이용하여 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{u}^h(\xi, \eta) = \sum_{A=1}^{n \times m} R_A(\xi, \eta) \mathbf{q}_A \tag{16}$$

여기서,  $n \times m$ 은 총 조절점의 수이며  $\mathbf{q}_A = [u_{0A} \quad v_{0A} \quad w_A \quad \beta_{xA} \quad \beta_{yA}]^T$ 는 조절점  $A$ 의 자유도를 포함한다. 식 (16)를 식 (4-6)에 대입하면 변형률은 기능경사복합재 판의 변위-변형률 행렬  $B$ 를 이용하여 다음과 같이 나타낸다.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_L + \boldsymbol{\varepsilon}_{NL} = \sum_{A=1}^n (\mathbf{B}_A^L + 0.5\mathbf{B}_A^{NL}) \mathbf{q}_A \tag{17}$$

힘을 받는 기능경사복합재 판의 비선형 시스템 방정식은 총위치에너지함수에 변분을 취함으로써 total Lagrangian 형태로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{K}\Delta\mathbf{q} = \mathbf{f}^{\text{ext}} - \mathbf{f}^{\text{int}} \tag{18}$$

여기서,  $\mathbf{f}^{\text{int}}$ 은 내부하중벡터이고,  $\Delta\mathbf{q}$ 는 변위증분벡터이다. 강성행렬은 다음의 세 부분으로 분리할 수 있다.

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_{NL} + \mathbf{K}_g \tag{19}$$

여기서,  $K_L$ 과  $K_{NL}$ 은 각각 선형 및 비선형 강성행렬이고,  $K_g$ 는 기하학적 강성행렬이며 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_L &= \int_{\Omega} (\mathbf{B}^L)^T \hat{\mathbf{D}}\mathbf{B}^L d\Omega \\ \mathbf{K}_{NL} &= \int_{\Omega} (\mathbf{B}^L)^T \hat{\mathbf{D}}\mathbf{B}^{NL} d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{B}^{NL})^T \hat{\mathbf{D}}\mathbf{B}^{NL} d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{B}^{NL})^T \hat{\mathbf{D}}\mathbf{B}^L d\Omega \\ \mathbf{K}_g &= \int_{\Omega} (\mathbf{B}^g)^T \hat{\mathbf{N}}\mathbf{B}^g d\Omega \end{aligned} \tag{20}$$

수치적분을 위해서 가우스 구적법 규칙(Gaussian quadrature rule)을 이용하였다. 즉, 각각의 NURBS 요소에  $(p+1) \times (q+1)$ 개의 가우스 적분점을 사용하여 강성행렬과 하중벡터를 계산하였다. 그리고 수정 Newton-Raphson 반복법을 이용하여 비선형 대수방정식을 풀었다.

### 힘을 받는 기능경사복합재의 비선형 거동 해석

본 절에서는 먼저 힘을 받는 등방성 판 및 기능경사복합재 판의 비선형 휨 해석을 수행하여 제안한 해석방법의 타당성을 검증하였다. 이후, 매개변수해석을 통하여 체적비, 길이-두께 비 및 경계조건이 기능경사복합재 판의 휨 거동에 미치는 영향을 조사하였다. 본 해석에서는 아래와 같이 단순지지와 고정지지의 두가지 경계조건을 상정하였다.

$$\text{단순지지(Simply supported): } \begin{cases} v_0 = w = \beta_y = 0 & \text{at } x = 0, a \\ u_0 = w = \beta_x = 0 & \text{at } y = 0, b \end{cases}$$

$$\text{고정지지(Clamped): } u_0 = v_0 = w = \beta_x = \beta_y = w_n = 0$$

첫 번째로 등분포 횡방향 압력( $q$ )을 받는 길이가 300in.이고 너비가 300in., 높이가 3in. 인 고정지지 상태의 등방성 정사각형 판을 해석하였다. 구성재료의 영율은  $E = 3 \times 10^7$ psi 이고, 포아송 비는 0.316 이다. Fig. 1에 하중 파라메타 ( $\bar{p} = qa^4 / Eh^4$ )에 따른 무차원 중앙 처짐( $\bar{w} = w/h$ )을 나타내었으며, 해석학적 방법(Levy, 1942)과 유한요소해석법(Pica et al., 1980; Urthaler et al., 2008)에 의한 결과를 함께 도시하였다. 타당성 검증을 위하여 기능경사복합재 판에 대한 휨 해석도 함께 수행

하였다. 해석모델은 횡방향으로 동일한 압력을 받는 길이와 너비가 모두 0.2m 이고 판 길이-두께 비( $a/h$ )가 20인 Ti-6Al-4V/aluminum oxide 기능경사복합재 판이다. 구성재료의 기계적 물성치는 각각 다음과 같다.

Ti-6Al-4V :  $E_m = 105.7\text{GPa}$  이고  $\nu_m = 0.298$ , aluminum oxide :  $E_c = 320.2\text{GPa}$  이고  $\nu_c = 0.26$ .

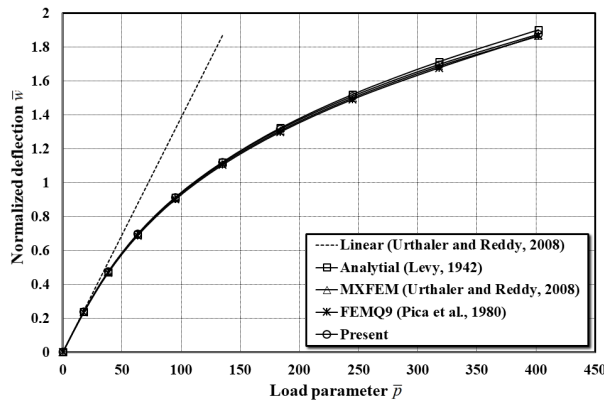


Fig. 1. Normalized central deflection  $\bar{w}$  of the isotropic plate under the transverse load

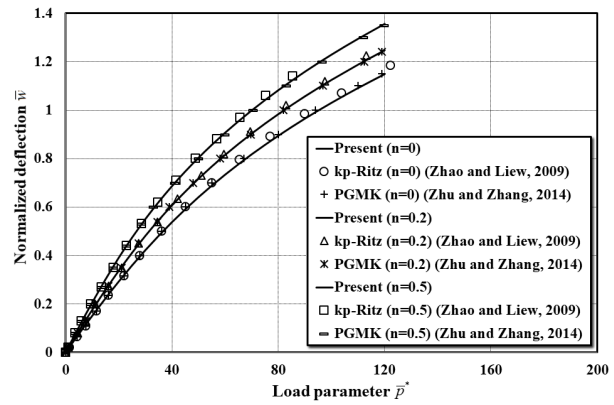


Fig. 2. Comparison of the normalized central deflection versus load parameter  $c$

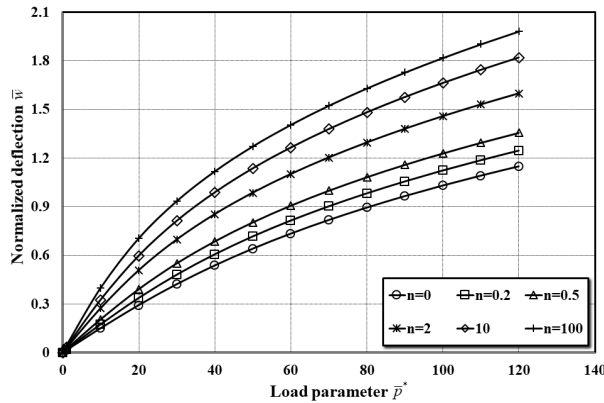


Fig. 3. Normalized central deflections  $\bar{w}$  of the simply supported FGM plate

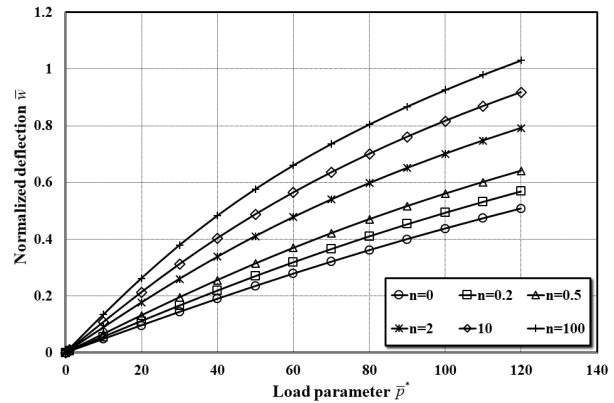


Fig. 4. Normalized central deflections  $\bar{w}$  of the clamped FGM plate

Fig. 2에 하중 파라메타( $\bar{p} = qa^4/E_m h^4$ )에 따른 다양한 멱지수  $n$ 에 대한 무차원 중앙 처짐( $\bar{w} = w/h$ )을 도시하였다. 해석의 정확성을 판단하기 위하여 본 수치해석결과를 1차전단변형이론에 근간한  $kp$ -Ritz 무요소법(Zhao et al., 2009)과 local PGMK(Petrov-Galerkin method with moving Kriging interpolation)에 의한 무요소법(Zhu et al., 2014)에 의해 계산된 결과와 비교하였다. 이상의 결과로부터 본 연구에서 제안한 고차전단변형이론에 근거한 등기하해석 방법은 정확하게 정적 휨 거동을 예측함을 확인할 수 있다.

타당성 검증에 사용한 기능경사복합재 판의 해석모델 및 하중조건을 이용하여 매개변수해석을 수행하였다. Fig. 3과 4에 각각 단순지지 및 고정지지 상태의 기능경사복합재 정사각형 판의 다양한 체적비에 대한 하중-중앙처짐 곡선을 나타내었다.



결과를 보면 고정지지된 기능경사복합재 판의 경우 구속의 증가로 인하여 단순지지된 경우에 비하여 중앙처짐의 값이 상당히 줄어들었음을 알 수 있다. 그리고 체적비 지수가 증가함에 따라 중앙처짐 값은 증가하며 기능경사복합재 판의 비선형 거동이 더욱 현저해짐을 알 수 있다. 이것은 금속의 영율이 세라믹의 탄성계수보다 작기 때문으로 판단된다.

## 결론

본 연구에서는 기존의 샌드위치 적층구조가 겪는 층간의 기계적 혹은 온도변화에 의해 발생하는 응력집중 등의 문제를 해결할 수 있는 재료적 성질이 일정한 법칙에 의하여 공간적으로 변하는 기능경사복합재 판의 휨 거동을 해석하고자 하였다.

이를 위하여 전단보정계수를 도입할 필요가 없고 기하학적 비선형성을 고려할 수 있는 고차전단변형이론을 적용한 등기하해석 방법을 이용하였다. NURBS 기저함수에 기반한 등기하해석은 고차전단변형이론에서 요구되는  $C^1$ -연속성을 쉽게 만족할 수 있다. 가상일의 방법을 이용하여 기능경사복합재 판의 정적거동에 대한 평형방정식을 도출하였으며, 수정 Newton-Raphson 반복법을 이용하여 전체 시스템방정식을 풀었다.

먼저 힘을 받는 등방성 판 및 기능경사복합재 판의 비선형 휨 해석을 수행하여 본 연구에서 제안한 해석방법의 타당성을 검증하였다. 이후, 매개변수 해석을 통하여 체적비, 길이-두께 비 및 경계조건이 기능경사복합재 판의 휨 거동에 미치는 영향을 조사하였으며, 결과로부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

- 1) 제안된 등기하해석 방법은 힘을 받는 기능경사복합재 판의 역학적 거동을 해석하는데 있어 정확하고 효과적인 수치해석 방법이다.
- 2) 판의 체적비, 길이-두께 비 및 경계조건은 기능경사복합재 판의 휨 거동에 상당한 영향을 미침을 알 수 있었다.

## References

- [1] Hughes, T.J.R., Cottrell, J.A., Bazilevs, Y. (2005) "Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 194, pp. 4135-4195.
- [2] Kashtalyan, M. (2004) "Three-dimensional elasticity solution for bending of functionally graded plates." *European Journal of Mechanics A/Solid*, Vol. 23, pp. 853-864.
- [3] Koizumu, K. (1993). "The concept of FGM, ceramic transactions." *Functionally Graded Materials*, Vol. 34, pp. 3-10.
- [4] Levy, S. (1942). *Square Plate with Clamped Edges Under Normal Pressure Producing Large Deflections*. Technical Report, National Advisory Committee for Aeronautics.
- [5] Pica, A., Wood, R.D., Hinton, E. (1980). "Finite element analysis of geometrically nonlinear plate behaviour using a mindlin formulation." *Computers and Structures*, Vol. 11, pp. 203-215.
- [6] Reddy, J.N. (2000). "Analysis of functionally graded plates." *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 47, pp. 663-684.
- [7] Urthaler, Y., Reddy, J.N. (2008) "A mixed finite element for the nonlinear bending analysis of laminated composite plates based on FSDT." *Mechanics of Advanced Material Structures*, Vol. 15, pp. 335-354.
- [8] Zenkour, A.M., Alghamdi, N.A. (2008) "Thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates." *Journal of Materials Sciences*, Vol. 43, pp. 2574-2589.

- [9] Zhao, X., Liew, K.M. (2009) “Geometrically nonlinear analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 198, pp. 2796-2811.
- [10] Zhu, P., Zhang, L.W., Liew, K.M. (2014) “Geometrically nonlinear thermomechanical analysis of moderately thick functionally graded plates using a local Petrov-Galerkin approach with moving Kriging interpolation.” *Composite Structures*, Vol. 107, pp. 298-314.