韓國數學敎育學會誌 시리즈 E <數學敎育 論文集>
https://doi.org/10.7468/jksmee.2020.34.3.355
제 34집 제 3호, 2020. 9. 355-372

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 34, No. 3, Sep. 2020. 355-372

무한급수의 이해에 대한 연구

오혜영 (인천대학교 교수)

무한급수 개념은 학부의 전공 수학 교육과정의 중요한 주제이다. 여러 세기 동안 그것은 학습자에게 직관에 반대되는 장애를 제공했을 뿐만 아니라 해석학 연구의 중심적 역할ㅌ을 해 왔다. 수학의 역사에서 무한급수 개념에 대한 이해가 미적분학 발달의 기초가 되었듯이 현재의 학생들에게 무한급수 개념에 대한 이해는 전공 수학을 학습하는 데 꼭 필요하다. 무한합의 개념을 가진 학생 대부분은 무한급수의 수렴 판정 같은 수학적 내용은 어려워하지 않으나 무한급수 개념을 부분합의 열을 이용해서 구성하는 것은 어려워한다. 이에 본 연구에서는 무한급수 개념을 구성하는 방법을 APOS 이론과 발생적 분해의 관점에서 부분합 스키마를 이용하여 분석하고자 한다. 질적 연구를 통해 급수 개념의 구성 방법을 점검해서 무한급수 지도 개선에 대한 유용한 교육적 시사점을 얻고자 한다.

Ⅰ. 서론

수학의 역사는 수학의 교수 학습에 교사들이 사용할 수 있는 여러 가지 유용한 예를 제공한다. 특히, 무한급수의 역사는 오늘날 학생들이 처한 어려움을 잘 이해하는 데 도움을 줄 수 있다(Bagni, 2000). 무한급수 개념은 학부의 전공 수학 교육과정의 중요한 주제이다. 여러 세기 동안 그것은 학습자에게 직관에 반대되는 장애를 제공했을 뿐만 아니라 해석학 연구의 중심적 역할을 해 왔다. 예를 들면, 무한급수를 다룰 때 무한히 많은 항의 합이 “무한히 큰” 것으로 자주 고려돼서 “무한히 많은 항, 무한히 큰 합”으로의 오개념을 극복해야만 했다(Bagni, 2000). 이처럼 수학의 역사는 교사들이 학생들의 어려움을 이해하고 올바르게 나아갈 수 있도록 도와주는 역할을 했다.

수학의 역사적인 발달 과정에는 무한급수 개념이 수학적으로 정립되기까지 개념 이해의 어려움이 있었다. 수학의 역사에서 무한급수 개념에 대한 이해가 미적분학 발달의 기초가 되었듯이 현재 학생들에게 무한급수 개념에 대한 이해는 전공 수학을 학습하는 데 꼭 필요하다.

무한합의 개념을 가진 학생 대부분은 무한급수의 수렴 판정 같은 수학적 내용은 어려워하지 않으나 무한급수 개념을 부분합의 열을 이용해서 구성하는 것은 어려워한다. 그리하여 이러한 걸림돌을 극복하지 않은 학생들은 그것을 필요로 하는 문제 상황에서 부분합의 열을 사용하는 것을 실패한다. 명확한 정의가 동반되지 않을 때 모호함은 학생들에게 어려움의 원천이 될 수 있다. 이에 학생들이 급수의 개념을 어떻게 구성하는지를 분석해서 무한급수에 대한 이해를 향상시키고자 한다. 무한급수의 정의는 다음과 같다(Stewart, 2008).

“주어진 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$에 대해 n째 부분합 $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$일 때 수열 $\{s_n\}$이 수렴하고 $\lim s_n = s$가 실수로 존재하면, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$는 수렴한다고 하고 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$로 나타낸다. 수 s를 이 급수의 합이라 한다.”

* 접수일(2020년 4월 29일), 심사(수정)일(2020년 5월 27일), 게재확정일(2020년 6월 27일)
* ZDM 분류 : I35
* MSC2000 분류 : 97D70
* 주제어 : 무한급수, 부분합, 열, 극한, APOS 이론
* 이 논문은 인천대학교 2019년도 자체연구비 지원에 의하여 연구되었음.

무한급수에 관하여 지영조(2006)와 고지현(2012)은 수열의 극한과 무한급수 단원에서 발생하는 학생들의 오류 유형을 분석하고, 김채지(2010)는 무한급수 학습에서 발생하는 오개념을 분석했다. 조영혜(2008)는 무한급수 학습에서 학생들이 겪는 인지적 장애를 분석하고, 최정윤(2012)은 무한등비급수의 지도 방안을 제시했다. 이외에 무한급수의 수렴 판정에 관한 일련의 연구(김성덕(2010), 김현정(2002), 곽부진(2006), 김가영(2007)과 이승연(2007))가 있다.

무한급수에 관한 국외 연구에서 Mamona(1990)는 학생들이 수열을 함수로 여기는 것을 어려워하는 걸 알아냈다. Bagni(2000, 2005)는 무한급수에 대한 역사적 사례를 학생들에게 제공하여 무한급수의 교수(teaching)를 향상시키는 것을 보여주었고, McDonald 외(2000)는 학생들이 수열에 관하여 두 가지 다른 인지적 대상을 구성한다는 것을 보여주었다. Martinez-Planell 외(2012)는 McDonald 외(2000)를 바탕으로 학생들의 무한급수 개념 이해를 분석하였다. 이처럼 이전 연구들은 학생들을 대상으로 무한급수의 수렴 판정과 오개념, 오류의 분석이 대부분이고 무한급수 개념 구성의 이해에 대한 분석은 많지 않았다.

이에 본 연구에서는 무한급수 개념을 구성하는 방법을 APOS 이론과 발생적 분해의 관점에서 살펴보고자 한다. 그리하여 다음과 같은 연구문제를 설정하여 소수의 학생을 대상으로 질적 내용 분석 방법을 통해 분석하고자 한다. “무한급수 개념을 구성하는데 APOS 이론 관점에서 부분합 스키마를 어떻게 구성하는가?”

Ⅱ. 이론적 배경

1. 무한급수의 역사적 발달

무한급수의 개념은 매우 오래된 기원을 갖는다. 암묵적으로 무한급수 개념을 사용한 고대 그리스에서의 제논의 역설과 아르키메데스의 “포물선 구적” 에서의 기하급수가 무한급수의 기원이라 할 수 있다(Bagni, 2000). 이것은 학생들에게 수렴, 발산 사이의 차이에 대한 어려움을 겪게 한다. 아리스토텔레스는 무한히 많은 항의 급수의 합은 유한 양일 수 있다는 것을 함축적으로 강조했다. “포물선 구적” 에서 아르키메데스는 기하급수를 고려했다. 무한급수는 미적분학에서 중요한 주제가 되었으며, 여러 해 동안 해석학의 연구에서 중심적인 역할을 해왔다.

1703년에 그랜디는 무한급수 $1-1+1-1+\cdots$로부터 0 또는 1을 얻는 것이 가능하다고 알아차렸다(Bagni, 2000).

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots=0+0+0+0+\cdots=0$$
$$1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\cdots=1+0+0+0+\cdots=1$$

교대급수의 합 $1-1+1-1+\cdots$는 그랜디와 18세기의 여러 수학자에 의해 $\frac{1}{2}$로 여겨졌다. 그에 따르면, 증명은 다음과 같은 확장에 기초를 두었다.

$$\frac{1}{x+1}=\sum_{i=0}^{\infty}(-x)^i=1-x+x^2-x^3+\cdots$$

$x=1$을 대입하여 $1-1+1-1+\cdots=\frac{1}{2}$이어야 한다고 주장했다.

라이프니츠는 만약 무한급수 $1-1+1-1+\cdots$ 을 멈춘다면 같은 확률로 0 또는 1을 얻을 수 있다는 것을

주목했다(Leibniz, 1715). 그래서 대부분의 가능한 수치는 0과 1 사이의 평균 $\frac{1}{2}$이라고 주장했다. 라그랑주와 푸아송은 역시 그런 주장을 받아들였다.

이 무한급수의 합을 서로 다른 세 가지 방법으로 보였고, 서로 다른 세 가지 답 $s=0$, 1, 1/2에 도달했다.

1.$1-1+1-1\cdots=(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots=0+0+0+0+\cdots=0$

2.$1-1+1-1\cdots=1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\cdots=1+0+0+0+\cdots=1$

3.구하는 합을 s라 하자. 그러면 $s=1-1+1-1+\cdots$로부터 $s=1-(1-1+1-\cdots)=1-s$ 이다. 따라서 $s=\frac{1}{2}$이다.

이 문제에 나타나는 양식을 수학적인 방법으로 다룰 수 없다. 이 특별한 무한급수는 '값'을 가질 수 없다(Keith Devlin, 1996). 따라서 위의 어느 것도 답이 될 수 없으며, 그 당시 수학자들의 주장은 틀린 것이다.

오일러는 무한급수를 긴 다항함수와 같이 취급해서 유한 과정을 확장해서 사용했다(Burton, 2013). 그래서 무한급수를 다항식에 관한 대수학의 확장으로 간주하여 원래의 함수를 표현할 수 있는 다항식으로 고려했다. 그러나 수렴 문제는 충분히 고려하지 않았기 때문에 때로는 불합리한 결과에 이르기도 했다. 또한, 수학적 기호의 힘에 대단히 의존했는데 형식적으로 일관된 논법으로부터 정확한 결과를 얻을 수 있다고 서슴없이 가정하여 불완전한 결과를 얻기도 했다.

이처럼 무한급수 개념 이해의 어려움이 수학의 역사적인 발달 과정에서 나타났다. 또한, 조작 가능한 급수와 조작 불가능한 급수 사이의 차이점 분류 및 무한급수를 다루는 방법에 대한 견실한 이론의 전개는 수백 년 동안의 노력을 필요로 했고, 19세기 말에 이르러서야 완성되었다(Keith Devlin, 1996).

2. APOS 이론

APOS 이론은 피아제의 연구와 구성적 생각에서 만들어졌다. Dubinsky(1991,1994), Asiala, Brown, Devries, Dubinsky, Mathews와 Thomas(1996)는 고등 수학적 사고에서 적용되는 반영적 추상화의 개념을 개발하기 위한 노력의 일환으로 반영적 추상화의 특징은 무엇이며, 고등 수학에서 그 특징들이 어떤 역할을 하는지를 생각해 보고, 그것들을 조직 또는 재구성하여 수학 지식과 그것의 구성에 관한 일관성 있는 APOS 이론을 소개했다. 그리하여 이 이론은 현재 전 세계의 연구자에 의해 확장, 활용되고 있다.

APOS 이론의 구성은 활동(Action), 과정(Process), 대상(Object), 스키마(Schema)의 정신구조와 이들을 이어주는 내면화(interiorization), 대상화(encapsulation), 조절(coordination), 가역적 사고(reversal), 역대상화(de-encapsulation)의 정신구조로 되어있다(Arnon et al. 2004).

활동은 외부적으로 행해진 명백한 알고리즘에 따라서 하는 개인에 의한 수학적 대상의 변환이다. 그것은 대상이나 기억된 사실에 작용하는 조작일 수 있다. 개인들이 이러한 활동을 반추함에 따라서 그것들을 과정으로 내면화시킬 수 있다. 과정은 이런 내적인 대상의 변환이다. 각 단계는 묘사될 수 있거나 실제로 행하지 않고 반영될 수 있다. 과정들은 다른 과정과 역으로 또는 조직화를 통해서 변환될 수 있다. 대상은 개인이 특별한 과정에 적용된 활동을 반영하고 전체 또는 그것을 대상화함으로써 과정을 알게 될 때 구성된다. 수학적인 구조는 활동, 과정, 대상 그리고 문제 상황에서 수학적 구조를 형성하기 위해서 앞서 조직되고 통합된 스키마의 모음이다. (Baker, Cooley & Triguros, 2000)

(1) 내면화(interiorization): 이 특성은 각 단계를 직접 수행할 필요 없이 단계를 수행하는 것을 상상하여 단계

를 건너뛸 수 있는 능력일 뿐만 아니라 반대로도 할 수 있다(Arnon et al. 2014). 내면화는 이러한 정신적 변화를 가능하게 하는 메커니즘이다.

(2) 대상화(encapsulation): 대상화는 개인이 과정에 행동을 적용할 때 발생한다. 즉, 동적 구조(과정)를 행동이 적용될 수 있는 정적 구조로 본다(Arnon et al. 2014). 대상화란 역동적인 과정을 정적인 대상으로 바꾸는 것을 말한다.

(3) 조절(coordination): 조절의 메커니즘은 일부 물체의 구성에 필수적이다. 두 대상은 역-대상화, 과정 조절 및 조절된 과정을 대상화하여 새 개체를 구성할 수 있다(Arnon et al. 2014). 여러 과정의 조절 때문에 새로운 것이 구성된다.

(4) 가역적 사고(reversal): 통상적인 순차적 사고와 달리 내적으로 존재하는 과정으로부터 처음의 과정으로 역으로 생각하여 새로운 과정을 구성하는 것이 가역적 사고이다.

(5) 역-대상화(de-encapsulation): 역-대상화의 메커니즘을 적용함으로써, 개인은 대상을 생성한 과정으로 돌아갈 수 있다(Arnon et al. 2014).

3. 발생적 분해

학생들의 개념 구성을 묘사하는 APOS 이론의 응용은 연구자들이 발생적 분해를 개발하는 것을 필요로 한다. 학생들의 개념 습득과정과 개념형성에 필요한 요소들을 추출하는 일이 필요하다(박혜숙, 2005). 이것은 학생들이 일으키는 인지적 장애와 개념 구성을 분석하는 데 더욱 필요한 일일 것이다. Dubinsky(1991)는 이처럼 복잡한 구조를 가진 어떤 개념(스키마)에서 한 작은 부분을 떼어내서 스키마 사이의 관계를 조사하는 것을 그 개념의 발생적 분해라고 했다.

발생적 분해는 수학공동체에 의해 받아들여진 연구자의 경험, 개념에 대한 수학적 지식과 모든 유용한 자료에 기초를 두고 있으며 수학적 개념의 구성과정을 분석하는 틀이다. 개념에 대한 발생적 분해는 유일하지 않고 그것은 개념이 어떻게 구성되어서 다른 연구자들이 다양한 발생적 분해를 발전시킬 수 있는지에 대한 일반적 모델이다. 학생들이 특별한 개념을 구성하는 발생적 분해는 이후 연구를 위한 가교 구실을 할 수 있으리라 기대되며, 이때 모은 자료는 간과한 구성 또는 연구자가 상상한 것과 다른 과정의 구성을 나타낸다. 그것은 관찰된 현상의 더 나은 묘사를 제공하고 그 개념을 이해하기 위해서 학생들이 수행한 더 나은 구성을 할 수 있도록 도움을 주는 개정된 발생적 분해를 일으킨다.

Ⅲ. 연구 방법

본 연구는 반구조화된 인터뷰를 통한 질적 연구의 방식을 택했다. 질적 연구는 양적 연구로 탐구하기 어려운 개별 연구 대상의 독특성, 맥락성 등 질에 대한 관심에 치중하여 접근하는 시도이다(신재한, 2017).

1. 연구 대상

수도권 소재 4년제 대학교 수학교육과에 재학 중인 2, 3학년 학생들 각각 19명씩 38명을 대상으로 무한급수 이해에 대해 설문조사를 하였다. 문제 풀이 후에 인터뷰를 실행하여 결과를 분석하였다. 검사 당시에 학생들은 모두 미분적분학을 배운 상태였고, 2학년 학생들은 해석학을 수강하는 중이었으며, 3학년 학생들은 해석학을 이미 수강했고 복소해석학을 수강하는 중이었다.

2. 검사 문항

검사 문항은 무한급수의 이해와 관련되었으며, Martinez-Planell 외(2012)의 문제에서 발췌했다. 문제는 별도의 종이에 풀도록 했으며, 학생들은 여분의 종이와 계산기를 이용할 수 있었다. 학생들이 작성한 답안으로 이해할 수 없는 부분은 인터뷰로 추가 질문했다. 검사를 위한 문제 풀기는 1학기 중간에 1시간 동안 실시했으며 검사지는 제출하도록 했다. 2, 3학년 학생들 38명의 답이 수집되었다. 검사 문항은 부록에 수록했다.

검사 문항 1번은 무한급수의 합을 구하는 문제인데, (1)은 틀린 이유와 (2)는 옳은 풀이를 제시하라고 하여 무한급수 개념 구성을 알아본다. 문제 2(1)번에서 일반항에 숫자를 대입하여 각각의 항들을 구하는 활동을 하게 하고, 부분합 수열의 극한과 급수의 대상화를 이용해서 무한급수 수렴을 판정할 수 있는지 알아본다. 문제 2(2)번에서 학생들이 무한급수에 대하여 과정에 머무르는지 또는 부분합의 수열의 극한으로 대상화하여 대상 스키마를 구성하는지를 알아본다. 문제 3번은 기하급수와 수렴 반경에 관한 문제이면서 수학의 역사적 발달 과정에 나타난 Grandi 급수에 대한 문제이다.

Ⅳ. 연구 결과

이 절에서는 학생들의 설문조사와 인터뷰 결과를 바탕으로 학생들이 어떻게 무한급수 개념을 구성하는지 무한급수의 발생적 분해와 부분합 스키마 구성을 이용하여 분석한다.

1. 무한급수의 발생적 분해

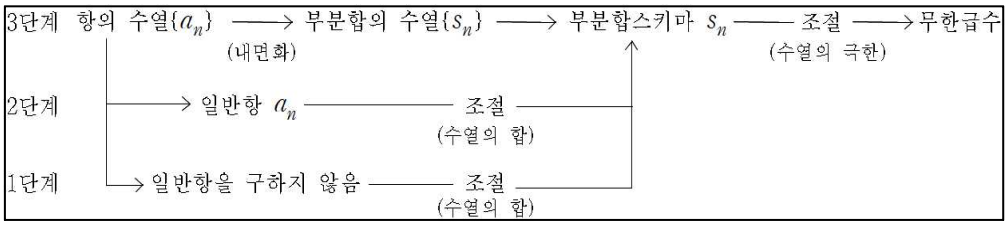
학생들의 설문조사와 인터뷰 결과를 바탕으로 무한급수 개념 이해에 필요한 요소인 수열, 일반항, 부분합, 부분합의 수열, 극한의 개념 등을 추출할 수 있었다. 학생들은 부분합의 수열은 구하려 하지 않지만, 부분합의 극한이라는 것을 인지하여 부분합 스키마를 구성하여 부분합 스키마나 일반항 스키마, 극한의 개념이 무한급수 개념 구성에 중요한 역할을 함을 알 수 있다. 그리하여 학생들의 무한급수 개념 구성을 다음과 같이 삼 단계로 분류할 수 있다.

1단계는 급수가 주어져 있을 때 학생들은 급수의 각 항을 연속적으로 더하는 활동을 적용함으로써 급수의 개념을 구성한다. 부분합을 구할 필요를 느끼지 않고 그들은 부분 결과를 빨리 얻기 위해서 여러 방법으로 항들을 묶기를 선택한다. 결과적으로 급수를 무한히 더해가는 합의 과정이라고 생각한다. 공식으로 무한급수를 부분합의 극한으로 생각하여 계산하는 단계이며, 부분합을 구할 필요가 있을 때 항들의 일반항을 구하지 않고 임의로 정한 n번째 항까지의 합을 구한 후에 극한을 취하는 단계이다. 부분합의 수열을 의식하지 않으나 처음 몇 개 항의 부분합을 구하는 활동을 수행하는 부분합 스키마 활동 구성단계이다.

2단계에서 학생들은 무한급수에서의 각 항을 수열의 항으로 여기고 일반화 과정을 거쳐 수열의 일반항 스키마를 구성한다. 일반항과 수열의 합에 대한 조절 단계를 거쳐 부분합 스키마를 구성하게 된다. 이 단계에서는 부분합의 수열을 생각하게 되는 부분합 스키마 과정 구성단계이다.

3단계는 부분합의 극한으로 대상화할 수 있는 부분합 스키마 대상 구성단계이다. 각 자연수에 부분합을 대응시키는 활동이 내면화될 때 학생들은 새로운 수열인 부분합의 새로운 수열 $s_1, s_2, s_3, \cdots$을 구성할 수 있고, 급수의 계속된 항을 더하는 과정을 설명할 수 있다. 계속해서 더하는 내면화 과정을 $s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \cdots$ 처럼 실행하여 부분합 $s_1, s_2, s_3, \cdots$을 대상으로 인식함으로써 새로운 수열을 구성하게 되고, 일반항을 찾아내는 일반화 과정에 의해서 부분합 s_n의 스키마를 구성하게 된다.

이러한 삼 단계의 과정을 통해 부분합 스키마를 구성하면, 부분합 스키마와 극한 개념의 조절 과정을 통해 무한급수의 개념을 구성할 수 있다. 이러한 무한급수 개념 구성의 발생적 분해를 [그림 Ⅳ-1]에 나타내었다.



[그림 Ⅳ-1] 무한급수의 발생적 분해

일반항 스키마 대상 구성은 갖지만, 부분합 스키마 과정이나 대상 구성을 갖지 않는 학생은 각각의 자연수에 급수의 부분합이 대응한다는 것을 알아차리지 못하고, 일반항 스키마 대상 구성에만 제한된다. 반면에 부분합 스키마 과정이나 대상 구성을 하는 학생은 문제 상황에 따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 항 a_n의 조작을 필요로 하는 성질을 적용함으로써 문제 푸는 것을 선택할 수 있다. 실제로 이 문제 상황에서 그들의 행동은 일반항 스키마 대상 구성에 한정되어있는 학생의 것과는 다르지 않다. 그러므로 부분합 스키마 과정이나 대상 구성하는 학생은 일반항 스키마 대상 구성과 일관된 행동을 보일 것이다. 그러나 일반항 스키마 대상 구성에 제한된 학생은 부분합 열이 필요한 상황에서조차도 부분합 열을 사용하지 않는 것이 다르다고 할 수 있다.

2. 부분합 스키마 구성

학생들의 무한급수 문제 풀이 과정과 인터뷰 과정을 통해 부분합 스키마, 일반항 스키마, 극한 스키마가 무한급수 개념 구성에 영향을 주고 있음을 알 수 있다. 극한 스키마 구성과 관련한 자세한 언급은 잘 설계된 더 많은 조사를 필요로 하므로 이에 대한 언급은 후속 연구로 미루고, 본 연구에서는 부분합 스키마와 일반항 스키마로 제한해서 다루고자 한다.

학생들이 구성하는 무한급수 개념을 알아보기 위해 설문조사를 했는데 조사 대상 학생 38명 중에서 6명 학생의 답안이 의미가 있어서 이 답안을 대상으로 분류하였다. 그리고 이 답안을 쓴 학생들을 대상으로 설문조사 후에 심층 인터뷰를 했다. 이들의 검사 당시 해석학 과목의 성적은 4명이 A 학점, 2명이 B 학점이었다. 이들의 무한급수 개념 구성은 일반항 스키마와 부분합 스키마의 구성에 따라서 다음의 세 단계로 분류할 수 있다.

가. 일반항 스키마 사용 없이 부분합 스키마 활동 구성 단계([그림 Ⅳ-1]의 1단계)

1단계의 학생들은 급수가 주어져 있을 때 급수의 각 항을 대상으로 인식하여 연속적으로 더하는 활동을 적용해서 급수의 개념을 구성한다. 부분합을 구할 필요를 느끼지 않고 그들은 부분 결과를 빨리 얻기 위해서 항들을 묶어서 계산한다. 결과적으로 급수를 무한히 더해가는 합의 과정이라고 생각한다. 무한급수를 부분합의 극한으로 생각하여 공식처럼 합을 계산할 수 있는 단계이다. 부분합을 구할 필요가 있을 때 항들의 일반항을 구하지 않고 임의로 정한 n번째 항까지의 합을 구한 후에 극한을 취한다. 1단계의 학생들은 부분합의 수열을 의식하지 않으나 처음 몇 개 항의 부분합을 구하는 활동을 수행한다.

이 단계의 학생 A는 문제 1(1)번은 틀렸다고 했다. 틀린 이유는 완전한 무한급수를 고려하지 않았기 때문이

라고 했다. A는 무한급수를 무한히 더하는 것으로 이해하는 것 같았다. 틀린 이유를 제대로 답하지 못했으나 문제 1(2)에서 각 항에 부분분수의 분해를 적용하여 합의 기호로 나타내고, 무한급수를 무한히 더해가는 합의 과정으로 다음과 같이 계산했다.

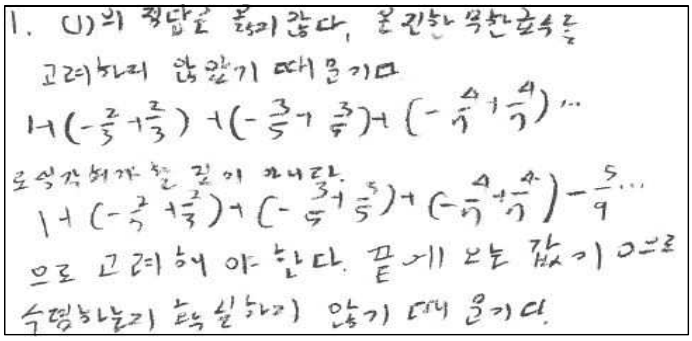
$$s = 1 + (-\frac{2}{3} + \frac{2}{3}) + (-\frac{3}{5} + \frac{3}{5}) + (-\frac{4}{7} + \frac{4}{7}) + -\frac{5}{9} + \cdots$$

[그림 Ⅳ-2]는 A 학생의 문제 1번 풀이이다. 다음은 C 학생과의 대화이다.

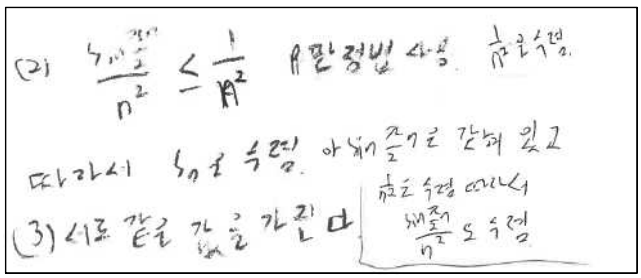
P: 1(1)의 방법은 어떻게 생각하니?
C: 합이 0이 되는 것들을 묶어서 무한으로 보내서 1이 된다고 해서 안 돼요.
P: 합이 0이 되는 것들을 묶으면 왜 안 되지?
C: 항을 임의로 배열할 수 있기 때문에 정확한 값이 안 나올 수 있어요.
P: 항을 임의로 배열한다는 것은 무슨 뜻이지?
C: 그럼 어떻게 된 거죠?

C 학생은 문제 1(1)이 틀리는 이유가 항을 임의로 배열한다고 했는데 그 뜻이 두 개씩 짝지은 것을 말하는 것 같았다. 결합법칙이 유한에서는 성립하지만, 무한에서는 성립하지 않는다는 사실을 모르고 있었다.

1단계의 두 학생은 부분합을 구하려 하지 않았고 부분합 열의 극한과 급수의 합과 관련시키지 못한 것 같다.



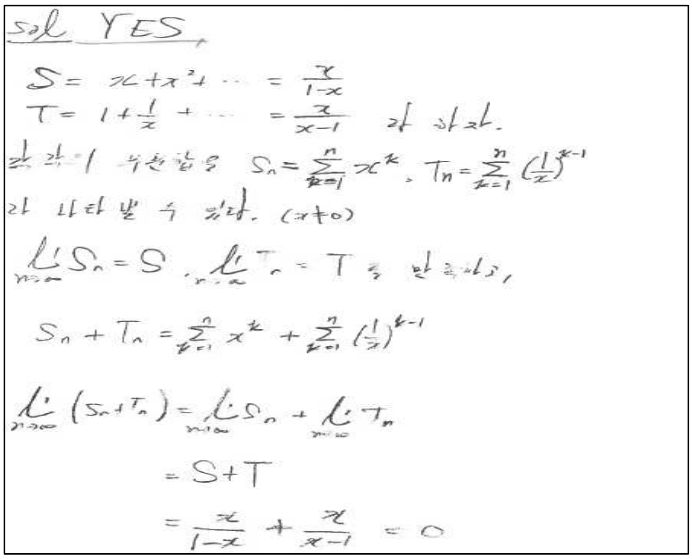
[그림 Ⅳ-2] A 학생의 문제 1번 풀이



[그림 Ⅳ-3] A 학생의 문제 2번 풀이

문제 2(1)에서 부분합 열의 연속된 값을 구하는 활동은 제대로 했으나 연속적인 항들의 덧셈을 부분합 열의 결과로 내부화시키지 않는 것 같다. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{n^2}$ 와 관련해서 질문받았을 때 $\lim_{n\to\infty}s_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$사이의 관계는 같은 것이라고 하고, 급수의 합이 부분합 열의 극한이라는 것을 사용한다. 그리하여 1단계의 학생은 부분합 스키마 활동 구성단계에 해당한다. 문제 2(2)에서 주어진 급수를 p급수와 비교하였지만 p급수를 부분합보다는 오히려 a_n의 항으로 표현했으며 절대 비교를 하지 않아서 정확한 비교 판정법을 한 것은 아니었다. 문제 2(3)에서 A, C 학생은 급수의 합이 부분합 열의 극한이란 것을 안다. [그림Ⅳ-3]은 A 학생의 문제 2번 풀이이다.

문제 3에서 $x+x^2+x^3+\cdots=\frac{x}{1-x}$와 $1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots=\frac{x}{x-1}$를 더하면 $\frac{x}{1-x}+\frac{x}{x-1}=0$ 이어서 바르다고 말했다. 수렴구간은 구하지 않고 부분합의 극한이라는 사실만 이용해서 우변끼리 더해서 대답했다. [그림Ⅳ-4]는 C 학생의 문제 3번 풀이이다.



[그림 Ⅳ-4] C 학생의 문제 3번 풀이

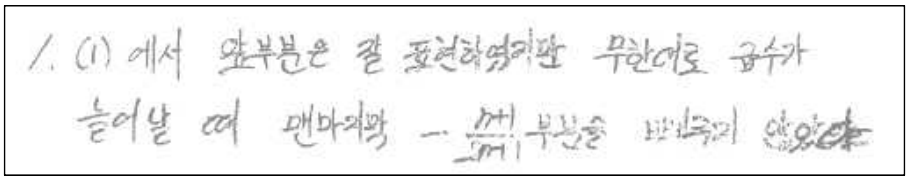
1단계의 학생들은 1번 문제에서는 부분합을 이용하지 않았고, 3번 문제에서는 급수의 합을 부분합의 극한을 이용해서 문제를 풀었지만, 이것은 기억된 사실로만 사용할 뿐이어서 일관되게 부분합 스키마 대상 구성을 했다고 할 수 없다. 그들은 부분합 스키마 구성과 일관되지 않은 활동을 보임을 알 수 있다. A와 C 학생은 문제 2(1)에서처럼 부분합 열의 연속된 값을 계산할 수 있으므로 부분합 스키마 활동 구성이 있는 것 같다. 이들은 일반항 스키마 대상 구성에 제한적이어서 부분합 열을 사용하는 것을 필요로 하는 급수 개념의 문제를 정확하게 할 수 없다.

나. 일반항 스키마 사용과 부분합 스키마 과정 구성 단계([그림 Ⅳ-1]의 2단계)

2단계의 학생들은 무한급수에서 각 항을 수열의 항으로 여기고 일반화 과정을 거쳐 수열의 일반항 스키마를

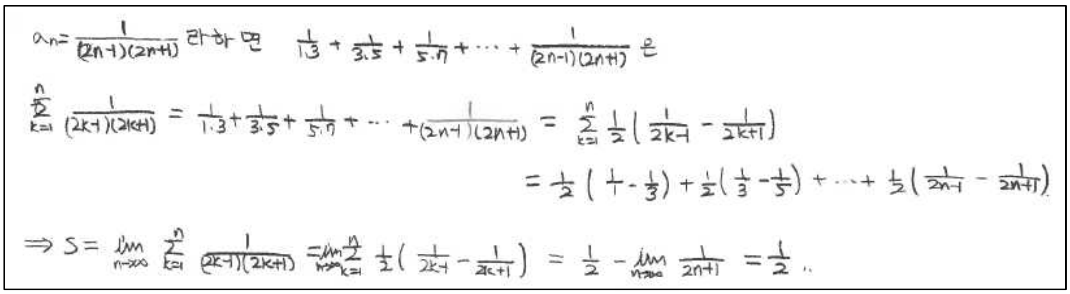
구성한다. 수열의 일반항을 구하는 활동을 통해 일반항을 구한 후 일반항과 수열의 합에 대한 조절 단계를 거쳐 부분합 스키마를 구성하게 된다. 이 단계는 부분합을 구하기 위해서 부분합의 수열을 생각하지만 완벽하지 않기 때문에 부분합 스키마 과정 구성단계에 해당한다.

B 학생은 문제 1(1)에서 앞부분은 잘 표현되었지만 $s_n = 1 - \frac{n+1}{2n+1}$에서 $\frac{n+1}{2n+1}$은 앞의 항과 소거되지 않는다고 했다. 그러나 1(1)의 식은 $1+(-\frac{2}{3}+\frac{2}{3})+(-\frac{3}{5}+\frac{3}{5})+\cdots$ 이렇게 되어 급수의 마지막 항을 빼지 않았기 때문에 1(1)번은 틀렸다고 답했다. 이것으로부터 극한을 취하기 전에 부분합에 대한 식을 구할 필요가 있다고 말했다. 그것은 n번째 항까지 s_n을 구한다면 마지막 항이 있어야 하는데 그것이 없어지지 않아 수렴에서 차이가 있기 때문이라고 했다. 1단계의 학생들은 부분합을 언급하지 않고 무한히 더하는 데만 관심을 두는 데 반해 이 학생은 1단계의 학생과 달리 부분합에 대한 필요성을 말했다. [그림 Ⅳ-5]는 B 학생의 문제 1(1)번 풀이이다.



[그림 Ⅳ-5] B 학생의 문제 1(1) 풀이

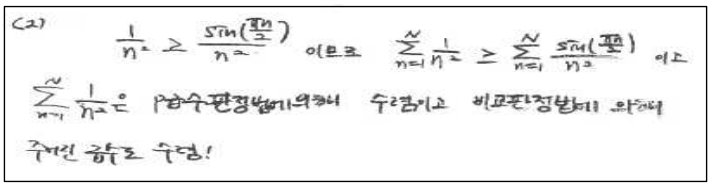
이 단계에 속한 학생 D는 문제 1(2)에서 수열의 일반항을 구하는 활동을 통해 일반항 $a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$을 구한 후에 일반항과 합의 기호를 이용하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k$의 형태로 표현하고, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k$로 나타냄으로써 무한급수의 합을 구한다. [그림 Ⅳ-6]은 D 학생의 문제 1(2)번 풀이이다.



[그림 Ⅳ-6] D 학생의 문제 1(2)의 풀이

D 학생은 일반항 $a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$을 부분 분수 분해를 사용해서 $\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}$로 쓰고 더하기 시작했으나 s_n을 명시적으로 구하지 않았다. 이 사실은 부분합 스키마 과정 구성을 보였지만

완전히 대상으로 대상화되지 않았다는 것을 나타낸다.



[그림 Ⅳ-7] D 학생의 문제 2(2)의 풀이

문제 2(1)번에서 B와 D 학생은 $s=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{n^2}$ 의 부분합 열의 처음 몇 개를 잘 계산한다. 문제 2(2)에서 부분합 s_n 열의 수렴에 대해서 질문할 때 급수의 수렴을 p급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$와 비교함으로써 열의 수렴을 결정할 수 있다. 급수의 수렴을 결정하는 작용을 수행하는 능력은 비교 판정과 p급수에서 결과를 조직하는 것만을 필요로 하므로 대상을 구성하고 있다는 것을 제시한다. 주어진 급수를 p급수와 비교하고 1단계와 달리 p급수를 부분합으로 표현했으나 절대 비교를 하지 않아서 정확한 비교 판정법을 한 것은 아니었다. 그래서 비교 판정법에 관해 물었더니 각항이 양수일 때 적용하는 것에 대해서 몰랐던 것 같다. 문제 2(3)에서 B, D 학생은 급수의 합이 부분합의 열의 극한이란 것은 알고 있다.

대상으로 구성된 과정을 대상화하는 것은 학생들이 구성한 과정에 활동을 적용하는 것을 필요로 한다. 이런 활동에 대한 반영은 학생들이 전체적인 과정을 알아차릴 수 있게 한다. 예를 들면, 다른 수렴 판단법을 이용하여 급수의 합의 수렴을 결정하거나 계산할 때 급수 과정에 활동을 적용하는 것이 필요하다.

문제 3에서 기하급수 $x+x^2+x^3+\cdots=\frac{x}{1-x}$는 $|x|<1$ 에 대해 수렴한다는 것을 기억한다. 그러나 $1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots=\frac{x}{x-1}$에서 $|\frac{1}{x}|<1$에 대해 수렴하므로 즉 $|x|>1$에 대해 수렴하므로 B와 D 학생은 수렴 반경이 겹치지 않는 두 개의 무한등비급수로부터 두 식을 변끼리 더하는 대상화를 통해 수학적으로 성립하지 않는 등식을 판단할 수 있었다. 무한등비급수의 경우는 합 공식을 이용하므로 일반항에서 수열의 합과의 조절 없이도 바로 무한등비급수의 합을 구할 수 있었다. 그들은 그랜디 급수의 발산을 말하는 데 있어서 부분합의 열을 명백하게 얘기하지 않고 수렴구간에만 의지했으므로 무한급수에 대한 과정 스키마에 머무른다고 할 수 있다.

2단계의 학생들은 급수가 부분합의 열이라는 것을 알고 있지만, 무한등비급수의 수렴을 분석하기 위해서 이 사실을 일관되지 않게 이용한다. 그들은 부분합의 열을 형성하는 과정을 반영할 수 있다. 그러나 이 과정에 활동을 적용하는데 어려움을 나타내므로 B와 D 학생은 부분합 스키마 과정 구성을 했다고 할 수 있다.

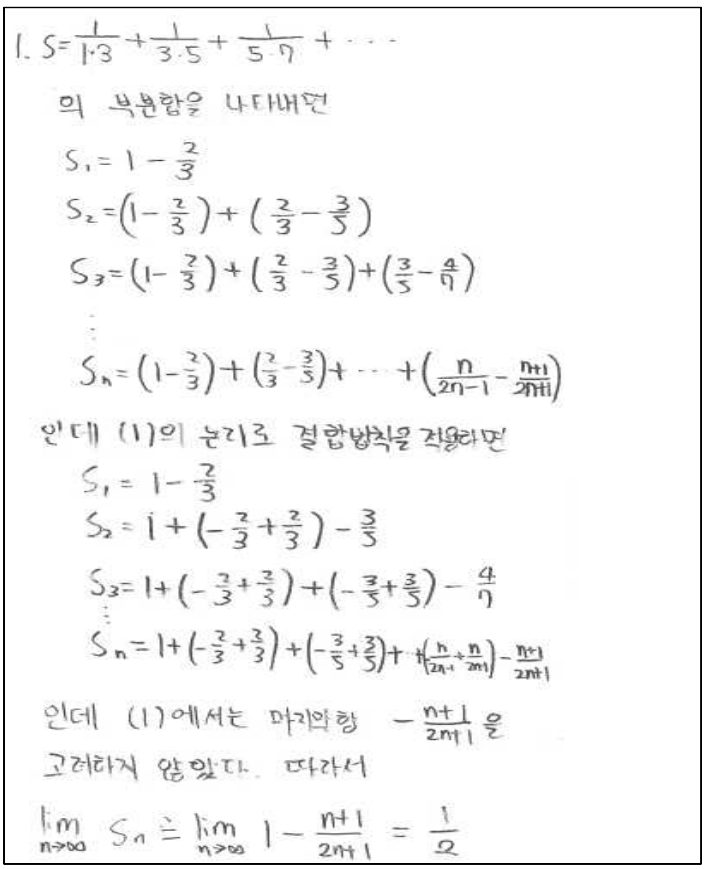
다. 일반항 스키마 사용과 부분합 스키마 대상 구성 단계([그림 Ⅳ-1]의 3단계)

3단계의 학생들은 무한급수의 각 항을 대상으로 여기며 무한히 더하는 내면화된 활동을 통해서 부분합의 수열을 구성한다. 부분합 수열의 각 항을 대상으로 인식하여 일반화 과정을 거쳐 일반항을 구함으로써 부분합에 대한 스키마를 구성한다. 이 단계의 학생들은 무한급수를 부분합의 극한으로 대상화할 수 있는 부분합 스키마 대상 구성단계라 할 수 있다.

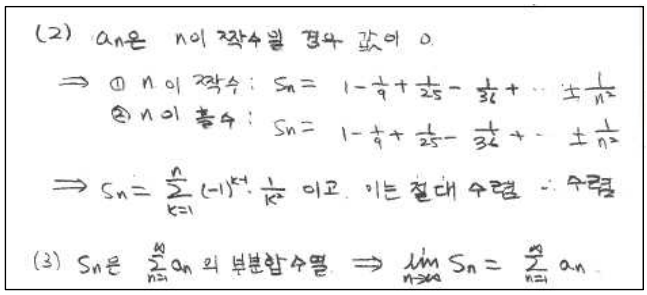
각 자연수에 부분합을 대응시키는 활동이 내면화되어 학생들은 $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, $s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \cdots$ 등과 같이 $s_1, s_2, s_3, \cdots$을 대상으로 인식함으로써 새로운 수열 $s_1, s_2, s_3, \cdots$을 구성할 수 있게 되고, 일반화 과정을 거쳐 일반항을 구해서 부분합 s_n에 대한 스키마를 구성하게 된다.

E와 G 학생은 부분합 수열의 각 항 $s_1, s_2, s_3, \cdots$을 대상으로 인식하여 부분합의 새로운 수열을 구성했다. 1번 문제에서 부분분수 분해를 이용하여 극한이 $\frac{1}{2}$이라고 정확하게 증명했다. n번째 항 s_n는 $1 - \frac{n+1}{2n+1} = \frac{2n+1-n-1}{2n+1} = \frac{n}{2n+1}$ 이고 극한을 취해서 $\frac{2n}{2n+1}$의 $\frac{1}{2}$이 된다고 했다.

1, 2단계의 다른 학생들은 s_n을 구했다 할지라도 부분합의 수열을 생각하지 않고 구했는데 이 단계의 학생들은 부분합 수열과 함께 s_n을 구했다는 점에서 부분합 s_n에 대한 스키마 대상 구성을 했다고 할 수 있다. [그림 Ⅳ-8]은 G 학생의 문제 1번 풀이이다.



[그림 Ⅳ-8] G 학생의 문제 1번 풀이


(2) a_n은 n이 짝수일 경우 값이 0.

⇒ ① n이 짝수 : $S_n = 1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{25} - \frac{1}{36} + \cdots \pm \frac{1}{n^2}$

② n이 홀수 : $S_n = 1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{25} - \frac{1}{36} + \cdots \pm \frac{1}{n^2}$

⇒ $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k^2}$ 이고, 이는 절대 수렴 ∴ 수렴

(3) S_n은 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 부분합수열 ⇒ $\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

[그림 Ⅳ-9] E 학생의 문제 2번 풀이

문제 2(2)에서 E 학생은 다음과 같이 말한다. n이 짝수이면 $\sin\frac{n}{2}\pi = 0$ 이어서 각 항은 0이다. n이 홀수일 때 $\sin\frac{n}{2}\pi$ 는 1 또는 -1의 값을 가진다. 그러므로 E 학생은 절댓값 급수를 계산해서 그 급수가 수렴하면 이 급수는 역시 수렴한다고 했다. 이 문제에서 급수의 수렴에 대해 대답할 때도 이 단계의 학생들은 역시 부분합 s_n을 생각하고 부분합 열을 고려했다. 무한급수를 대상화하여 p급수, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$과 비교함으로써 절대 수렴을 주장하였다. [그림 Ⅳ-9]는 E 학생의 문제 2번 풀이이다. E와 G 학생은 무한급수를 대상화하여 p급수를 적용하고 부분합의 열을 고려해서 무한등비급수 합을 구하므로 부분합 스키마 대상 구성을 한다고 할 수 있다. 1, 2단계의 학생들은 문제 3번에서 부분합 열을 명백하게 얘기하지 않고 수렴구간에만 의지해서 답을 했는데, 3단계의 E 학생은 부분합을 구해서 무한등비급수의 수렴을 분석했다. 다음은 E 학생의 문제 3번 풀이인데, E 학생의 풀이가 잘 보이지 않아서 다시 수식 작성한 것이다. E 학생의 수식 작성 전의 풀이는 [그림 Ⅳ-10]에 수록했다.

$$x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{x}{1-x} \Rightarrow x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{x(1-x^n)}{1-x}$$

$$1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \cdots = \frac{x}{x-1} \Rightarrow 1 + \frac{1}{x} + \cdots \left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1(1-\left(\frac{1}{x}\right)^n)}{1-\frac{1}{x}}$$

인데, x의 범위가 어딘지 모르므로 $n\to\infty$일 때, $x^n\to 0$이면 $|x| < 1$, $(\frac{1}{x})^n \to \infty$이다.

$$\therefore\ 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \cdots \neq \frac{x}{x-1}$$

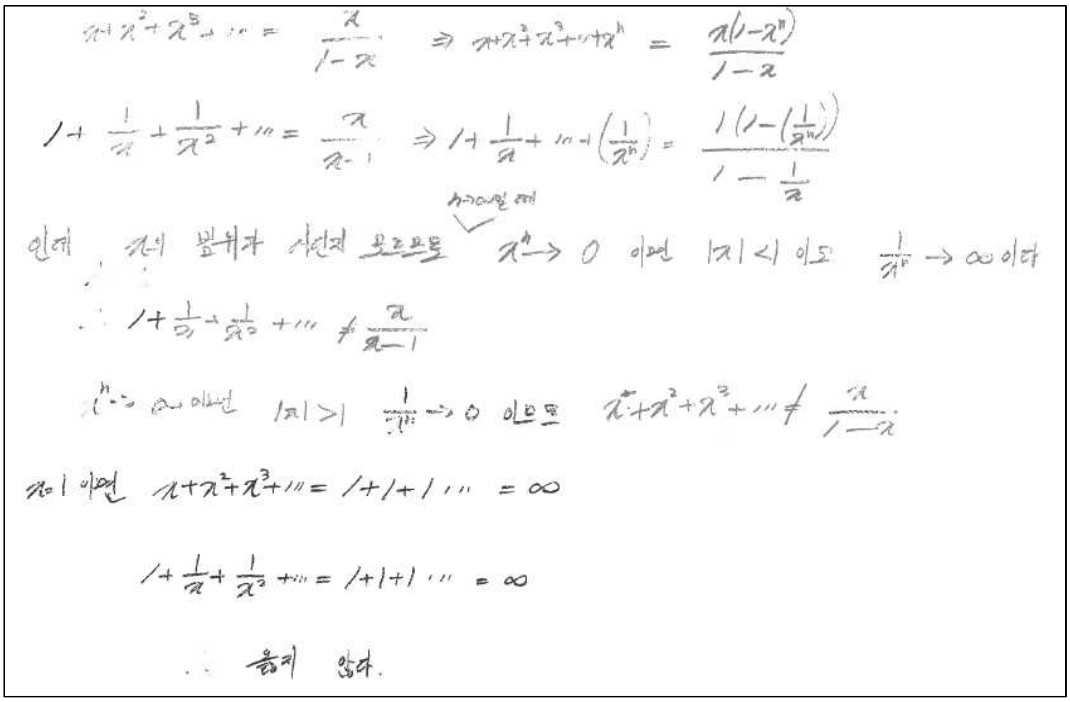
$$x^n \to \infty \text{이면 } |x| > 1,\ \frac{1}{x^n} \to 0 \text{이므로, } x + x^2 + x^3 + \cdots \neq \frac{x}{1-x}$$

$$x = 1 \text{이면}$$

$$x + x^2 + x^3 + \cdots = 1 + 1 + 1 + \cdots = \infty$$

$$1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots=1+1+1+\cdots=\infty$$

∴ 옳지 않다.



[그림 Ⅳ-10] E 학생의 문제 3번 풀이

3단계의 학생들은 부분합 개념을 괄호 유무와 관계없이 이해하고 부분합의 수열 구성이 가능했고 의식적으로 급수를 부분합 열의 극한으로 대상화해서 수렴을 결정하는 활동에 적용할 수 있었다. 이것은 스키마 대상 구성을 한다고 할 수 있다.

Ⅴ. 결론

본 연구는 학생들이 무한급수 개념을 구성하는데 APOS 이론 관점에서 부분합 스키마의 구성을 어떻게 하고 있는지 분석하고 있다. 학생들은 무한급수 개념을 구성하는데 부분합 스키마의 활동, 과정, 대상으로 구성하는 것으로 조사되었다. 부분합 스키마 과정, 부분합 스키마 대상 구성단계의 학생들은 $s_1, s_2, s_3, \cdots$을 대상으로 인식함으로써 새로운 열 $s_1, s_2, s_3, \cdots$을 구성하게 되고, 이 수열의 일반화 과정을 거쳐 일반항을 구해서 부분합 s_n에 대한 스키마를 구성하게 된다. 그러나 실제로 부분합 열로서 무한급수의 개념을 구성하는 것은 어려운 일이어서 학생 대부분은 부분합의 수열에서 처음 몇 개의 항을 구하는 활동, 일반항을 구하거나 수열의 극한에 대해 생각할 수 있지만, 부분합의 새로운 열의 구성을 생각하지 못했다. 이것은 부분합 스키마의 대상이 제대로 구

성되지 않음을 말해준다. 실제로 조사 결과 38명 중 2명만이 부분합 스키마 대상 구성을 하는 것으로 나타났다.

급수의 부분합 스키마 대상 개념을 구성하는데 학생들이 어려움을 느끼는 데는 여러 가지 이유가 있다. 무한급수의 발생적 분해는 부분합 열 구성이 급수 구성에 필요하다는 것을 제시하지만, 부분합 열 구성은 함수로서 열을 이해해야 하는 것을 필요로 한다. 그러나 이것을 이해하지 못하는 학생들은 부분합 스키마 과정이나 대상을 이해하지 못해서 급수의 부분합 스키마 과정이나 대상을 구성할 수 없게 된다.

무한등비급수의 합 공식을 이용하여 합을 구하지만, 그 값이 급수가 한없이 다가가는 근삿값이라고 생각하는 학생이 발견됐다. 이러한 대상화는 무한급수의 올바른 대상화를 방해하고 무한급수를 대상으로 다루는데 곤란함을 초래한다. 그리하여 무한급수 과정으로서의 측면을 지나치게 강조하여 무한급수를 대상으로 보기 어렵게 한다. 그러므로 무한등비급수의 합이 근삿값이 아니라 어떤 수가 된다는 것을 인지적으로 이해할 수 있도록 지도해야 한다. 무한급수를 대상으로 인지함으로써 무한등비급수의 수렴 판정을 적용할 수 있고, 급수에 대한 성질들도 급수를 대상으로 조작하면서 적용할 수 있게 될 것이다. 또한, 조사 결과 무한급수의 합이 부분합의 극한이라는 것을 알더라도 무한등비급수의 문제에서는 부분합의 열을 사용하지 않고 수렴조건만을 이용하여 문제를 해결하는 학생이 대부분이었다.

APOS 이론에서 학생의 급수 과정 구성을 대상으로 대상화하는 것은 활동을 과정 구성에 적용할 때 일어난다. 부분합의 열은 기하급수에 대한 공식을 사용하는 것 이외에, 급수를 더할 때도 접하게 된다. 그러나 미적분학 정리 대부분은 부분합의 열로서가 아니라 급수의 항으로 표현된다. 부분합의 열은 정리의 증명에서 사용되나, 미적분학 과정에서 정리의 증명을 하거나 분석하도록 요구받지는 않는다. 그리하여 부분합 열의 역할, 또는 부분합 열을 이용한 급수의 개념은 학생들에게 잊히는 것 같다.

앞 절에 나타낸 발생적 분해는 부분합 스키마 과정이나 대상의 구성에 필요한 활동이다. 주어진 급수의 부분합 수열의 몇 개 항을 직접 구하는 활동을 통해 무한급수에 대한 활동 스키마를 자극할 수 있다. 학생들은 무한급수의 부분합 수열을 직접 구하는 활동을 함으로써 과정으로 내면화시킬 수 있게 된다.

본 연구의 설문조사의 문항들은 수학의 역사상 수학자들 간에 많은 어려움을 이야기시킨 문제였다. 학생들은 수학 개념의 역사적 발전을 관찰하면서 수학이 고정되고 완성된 것이 아님을 알게 될 것이다. 설문조사의 문제풀이와 인터뷰한 학생들의 인식론적 분석을 함으로써 교사들은 어떤 개념을 학생들이 구성하고 있는지 교수학적 접근과 개발을 하는 데 도움을 받을 수 있게 된다(이지수, 2016). 본 연구를 토대로 앞으로 극한 구조 구성과 관련된 더 많은 문제를 개발하여 무한급수 연구를 좀 더 광범위하게 하는 후속 연구가 필요하다. 또한, 학생들의 수업과 반응을 꾸준히 추적하고 관찰한 연구자들의 지속적인 관심과 연구는 무한급수와 관련된 수학 지식을 확장하는 데 많은 도움이 될 것이다.

참 고 문 헌

고지현 (2012). 수열의 극한과 무한급수 단원에서 발생하는 오류 유형 분석, 석사학위 논문, 아주대학교 교육대학원.

Ko, J. H. (2012). *Analysis of error type occurred in limit of sequence and infinite series*, Master's thesis, The graduate school of education at Aju University.

곽부진 (2006). 무한급수의 특별한 수렴판정에 관한 연구, 석사학위 논문, 인제대학교 교육대학원.

Kwak, B. J. (2006). *A study on special convergence test of infinite series,* Master's thesis, The graduate school of education at Inje University.

김가영 (2007). 실수의 무한급수, 석사학위 논문, 동국대학교 교육대학원.

Kim, G. Y. (2007). *Infinite series of real number*, Master's thesis, The graduate school of education at Dongkuk University.

김성덕 (2010). 무한급수, 석사학위 논문, 동국대학교 교육대학원.

Kim, S. D. (2010). *Infinite series,* Master's thesis, The graduate school of education at Dongkuk University.

김채지 (2010). 무한급수 학습에서 발생하는 오개념 분석, 석사학위 논문, 한국외대 교육대학원.

Kim, C. J. (2010). *Analysis of misconception occurred in infinite series learning*, Master's thesis, The graduate school of education at Hankuk University of Foreign studies.

김현정 (2002). 무한급수의 수렴판정에 관한 연구, 석사학위 논문, 한양대학교 교육대학원.

Kim, H. J. (2002). *A study on convergence test of infinite series*, Master's thesis, The graduate school of education at Hanyang University.

박혜숙・김서령・김완순 (2005). 수학적 개념의 발생적 분해의 적용에 대하여(추상대수학에서의 Z_n의 경우), 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 44(4), 547-563.

Park, H., Kim, S. & Kim, W. (2007). On the applications of the genetic decomposition of mathematical concepts-In the case of Z_n in abstract algebra-, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education*, 44(4), 547-563.

신재한 (2017). 질적 연구방법의 이해와 실제, 이모션북스.

Shin, J. H. (2017). *Understanding and practice of qualitative research method*, Emotinbooks

이승연 (2007). 함수의 무한급수, 석사학위 논문, 동국대학교 교육대학원.

Lee, S. Y. (2007). *Infinite series of function, Master's thesis*, The graduate school of education at at Dongkuk University.

이지수 (2016). 수학사 활용에 대한 예비교사 인식과 중학교 수학 교과서의 묵시적 수학사 활용유형, 이화여자대학교 교육대학원.

Lee, J. S. (2016). *Pre-teacher's cognition on application of mathematics history and implicit mathematics history application types of middle school mathematics textbooks*, Master's thesis, The graduate school of education at Ewha Womans University.

조영혜 (2008). 무한급수 개념의 이해에 관한 연구 : 고등학교 3학년 학생을 중심으로, 석사학위 논문, 건국대학교 교육대학원.

Cho, Y. H. (2008). *A study on understanding of concept of infinite series: For high school seniors*, Master's thesis, The graduate school of education at Konkuk University.

지영조 (2006). 무한수열의 극한과 무한급수에 대한 개념이미지 및 오류, 석사학위 논문, 고려대학교 교육대학원

Ji, Y. C. (2006). *Concept image and error on limit of infinite sequence and series*, Master's thesis, The graduate school of education at Korea University.

최정윤 (2012). 「2007 개정 교육과정」에 따른 『수학 Ⅰ』교과서 무한급수 단원 분석 및 제안 : 무한등비급수를 중심으로, 석사학위 논문, 경희대학교 교육대학원.

Choi, J. Y. (2012). *Analysis and suggestion of infinite series chapter from middle school 1st grade mathematics textbooks from the 2007 revised curriculum: Centered on infinite geometric series*, Master's thesis, The graduate school of education at Kyunghee University.

허민 역, David M. Burton (2013). 수학의 역사·입문, 경문사.

David M. Burton (2013). *The History of Mathematics : An Introduction*, Kyungmoon Co.

허민・오혜영역, Howard Eves (1995). 수학의 위대한 순간들, 경문사.

Howard Eves/ Her, M., Oh, H. Y. (1995). *Great Moments in Mathematics*, Kyungmoon Co.

허민・오혜영, Keith Devlin (1996). 수학: 양식의 과학, 경문사.

Keith Devlin. (1996). *Mathematics: the science of patterns*, Kyungmoon Co.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktac, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *APOS Theory*, Springer.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). *A framework for research and development in undergraduate mathematics education*, In J. Kaput, E. Dubinsky. & A. H. Schocnfeld(Eds.), Research in collegiate mathematics education II (pp.1-32), Providence, RI: American Mathematical Society.

Bagni, G. T. (1996-7). *Storia della Mathematica*, Ⅰ-Ⅱ-Ⅲ, Bologna: Pitagora.

Bagni, G. T. (2000). Difficulties with series in history and in the classroom, In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study* (pp. 82-86). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer.

Bagni, G. T. (2005). Infinite series from history to mathematics education, *International Journal for Mathematics Teaching and Learning* [on-line journal], posted June 30, 2005, University of Plymouth, U.K. http://cimt.plymouth.ac.uk/journal/default.htm.

Bagni, G.T. (2007). *Didactics and history of numerical series,* 100 years after Ernesto Cesaro's death (1906): Guido Grandi, Gottfried Wilhelm Leibnitz and Jacobo Riccati. Retrieved from http://www.syllogismos.it/history/GrandiJointMeeting.pdf.

Baker, B., Cooley, L. & Trigueros, M. (2000). The schema triad-a calculus example, *Journal for Research in Mathematics Education*, 31, 557-578.

Dubinsky, E. (1991). *Reflective Abstraction in Advanced Mathematics Thinking, In Tall, D. (Eds.), Advanced Mathematics Thinking,* Kluwer Academic Publishers, 류희찬·조완영·김인수 역(2003), 고등수학적사고, 경문사, 127-165.

Dubinsky, E. & MacDonald, M. (2001). *APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research*, In D. Holton et.(Eds.), The teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study, Kluwer Academic Publishers, 273-280.

Fishbein, E., Tirosh, D., & Melamed, U. (1981). Is it possible to measure the intuitive acception of a mathmetical statement? *Education Studies in Mathematics*, 12, 491-512.

Leibniz, G. W. (1715). *Acta Eruditorum Supplementum 5,* 'Epist. G.G.L. ad V. claris. Ch. Wolfium'.

Mamona, J. C. (1990). Sequences and series-sequences and functions: students' confusions, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 21, 333-337.

Martinez-Planell, R., Gonzalez, A. C., DiCristina, G. & Acevedo, V. (2012). Students' conception of infinite series, *Educational Studies in Mathematics*, 81(2), 235-249.

McDonald, M. A., Mathews, D. & Strobel, K. (2000). Understanding sequences: A tale of two objects, In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education IV* (pp. 77-102). Providence, RI: American Mathematical Society.

Stewart, J. (2008). *Calculus* (6th ed.), Belmont: Brooks Cole.

A study on understanding of infinite series

Oh, Hye-Young

Department of Mathematics Education, Incheon National University,
Yeonsu-ku Gaetval-ro 12 Meetyou Hall Campus Byeol Guan A-dong 102-ho
College of Education, Incheon, Korea
E-mail : hyoh@inu.ac.kr

The concept of infinite series is an important subject of major mathematics curriculum in college. For several centuries it has provided learners not only counter-intuitive obstacles but also central role of analysis study. As the understanding in concept on infinite series became foundation of development of calculus in history of mathematics, it is essential to present students to study higher mathematics. Most students having concept of infinite sum have no difficulty in mathematical contents such as convergence test of infinite series. But they have difficulty in organizing concept of infinite series of partial sum.

Thus, in this study we try to analyze construct the concept of infinite series in terms of APOS theory and genetic decomposition. By checking to construct concept of infinite series, we try to get an useful educational implication on teaching of infinite series.

* ZDM Classification : I35
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D70
* Key Words : infinite series, partial sum, sequence, APOS theory, limit
* This work was supported by the Incheon University Research Grant in 2019.

<부록> 검사 문항

1. 무한급수 $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots$ 의 합을 s라 할 때, 다음에 답하라.

(1) 합 s를 다음과 같이 나타내면 $s=1$을 얻는다. 이것은 맞는 답인지 정당화하라.

$$\begin{aligned} s &= (\frac{1}{1}-\frac{2}{3})+(\frac{2}{3}-\frac{3}{5})+(\frac{3}{5}-\frac{4}{7})+\cdots \\ &= 1+(-\frac{2}{3}+\frac{2}{3})+(-\frac{3}{5}+\frac{3}{5})+(-\frac{4}{7}+\frac{4}{7})\cdots \\ &= 1 \end{aligned}$$

(2) (1)의 풀이가 틀리다면 옳은 풀이를 제시하여 합 s를 구하라.

2. 열 $a_n=\frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{n^2}$에 대하여 다음에 답하라.

(1) $s_N=\sum_{n=1}^{N}a_n$에 대하여 처음 4개의 부분합 s_1, s_2, s_3, s_4를 써라.

(2) s_n이 수렴하는지를 결정하라.

(3) 극한 $\lim_{n\to\infty}s_n$ 과 무한급수의 합 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$사이에 어떤 관계가 있는지 말해라.

3. 다음 급수와 각각의 무한 합이 주어졌을 때

$$x+x^2+x^3+\cdots=\frac{x}{1-x}$$

$$1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots=\frac{x}{x-1}$$

두 방정식의 양변을 더하면 다음 식을 얻는다.

$x+x^2+x^3+\cdots+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots=0$이 답이 맞는지, 틀린지를 정당화하라.