

탄소 나노튜브 보강 기능경사복합재 판의 등기하 거동 해석

Isogeometric Analysis of FG-CNTRC Plate in Bending based on Higher-order Shear Deformation Theory

전준태*

Juntai Jeon*

Professor, Department of Civil & Environmental Engineering, Inha Technical College, Incheon, Republic of Korea

*Corresponding author: Juntai Jeon, jtjeon@inhac.ac.kr

ABSTRACT

Purpose: This study investigates mechanical behavior of functionally graded (FG) carbon nanotube-reinforced composite (CNTRC) plate in flexure. Isogeometric analysis (IGA) method coupled with shear deformable theory of higher-order (HSDT) to analyze the nonlinear bending response is presented. **Method:** Shear deformable plate theory into which a polynomial shear shape function and the von Karman type geometric nonlinearity are incorporated is used to derive the nonlinear equations of equilibrium for FG-CNTRC plate in bending. The modified Newton-Raphson iteration is adopted to solve the system equations. **Result:** The dispersion pattern of carbon nanotubes, plate geometric parameter and boundary condition have significant effects on the nonlinear flexural behavior of FG-CNTRC plate. **Conclusion:** The proposed IGA method coupled with the HSDT can successfully predict the flexural behavior of FG-CNTRC plate.

Keywords: Isogeometric Analysis, Higher-order Shear Deformation Theory, Functionally Graded Carbon Nanotube-reinforced Composite Plate, Bending

요약

연구목적: 본 연구에서는 힘을 받는 탄소 나노튜브 보강 기능경사복합재 판의 구조적 거동을 해석하였다. 이를 위해, 등기하해석과 고차전단변형이론을 결합한 수치해석 방법을 이용하였다. **연구방법:** 전단 보정계수를 사용하지 않고 기하학적 비선형성을 고려할 수 있는 고차전단변형이론을 통하여 힘이 작용하는 탄소 나노튜브 보강 기능경사복합재 판의 비선형 거동방정식을 유도하였으며, 수정된 Newton-Raphson 반복 기법을 사용하여 등기하해석방법에 기반한 시스템 방정식의 해를 구하였다. **연구결과:** 탄소 나노튜브의 배치 양상, 폭-두께 비 및 경계조건은 힘을 받는 탄소 나노튜브 보강 기능경사복합재 판의 구조적 거동에 많은 영향을 끼침을 확인하였다. **결론:** 제안된 고차전단변형이론에 근거한 등기하 해석 방법은 힘을 받는 탄소 나노튜브 보강 기능경사복합재 판의 구조적 거동을 정확하고 효과적으로 해석하는 것을 알 수 있었다.

핵심용어: 등기하해석, 고차전단변형이론, 탄소 나노튜브 보강 기능경사복합재 판, 힘

Received | 2 November, 2021

Revised | 6 December, 2021

Accepted | 8 December, 2021

OPEN ACCESS



This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0>) which permits unrestricted noncommercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

서론

탄소 나노튜브(carbon nanotubes)는 우수한 전기적, 열적 및 기계적 성질(Iijima, 1991)에 힘입어 많은 연구자들의 관심을 끌고 있다. 탄소 나노튜브의 탁월한 강도 및 탄성계수는 새로운 형태의 신소재 즉, 다기능성을 가지는 탄소 나노튜브 보강 복합재(carbon nanotube-reinforced composites) 생산을 위한 중요한 요소이다. 복합재의 기계적 성질은 복합재 내 보강재의 강도에 크게 의존한다는 사실은 잘 알려져 있다. 따라서, 탄소 나노튜브의 폴리머 기지로의 적용은 복합재의 인장강도와 강성을 크게 향상시킬 수 있다(Thostenson et al., 2001; Esawi et al., 2007). 최근에는 특정한 법칙에 의하여 재료적 성질이 공간적으로 변화하는 기능경사복합재(functionally graded material) 개념을 탄소 나노튜브의 분포에 적용(Shen, 2009)하여 탄소 나노튜브 보강 기능경사복합재 판이 개발되어 다양한 산업분야에 적용되고 있다. 이러한 탄소 나노튜브 보강 기능경사복합재 판은 사용 중 여러 가지 형태의 하중을 받게 되므로 이에 대한 역학적 거동을 명확히 하여야 한다.

현재까지 탄소 나노튜브 보강 기능경사복합재 판의 정적 휨 거동(Zhang et al., 2015), 자유진동 및 동적 과도 거동(Ke et al., 2010; Zhong et al., 2018), 열역학적 거동(Fazzolari, 2018) 및 좌굴 거동(Mehrabadi et al., 2012) 등에 관한 연구가 상당히 진행되어 오고 있다. 하지만 이러한 연구의 대부분은 탄소 나노튜브 보강 기능경사복합재 판의 평형방정식과 지배방정식을 풀기 위하여 해석학적 방법에 의존하고 있으며, 일부 수치해석이 수행된 바 있다. 해석학적 방법은 단순한 형상과 경계조건을 가지는 문제에 적용이 가능하지만, 복잡한 형상 및 경계조건을 가지는 실제 공학적인 문제를 해결하기에는 부적합하다. 또한, 해석에 이용된 판 이론은 대부분 고전적인 판 이론(classical plate theory)과 일차전단변형이론(first-order shear deformation theory)이다. 고전적인 판 이론은 Kirchhoff-Love 가정에 기반한 등방성 판의 해석을 위한 것으로 두께가 얇은 판의 해석에서는 어느 정도 만족할 만한 결과를 가져오지만 횡전단변형을 고려하지 못하므로 두꺼운 판의 해석에는 적합하지 않다. 이에 반해, Reissner-Mindlin 이론(Reissner, 1945; Mindlin, 1951)에 근거한 일차전단변형이론은 횡전단효과를 고려함으로써 이런 단점을 해결할 수 있다. 하지만 일차전단변형이론은 두께방향으로 전단응력과 변형률의 분포를 부정확하게 나타내며, 위 아래 표면에서의 견인력 제로(traction-free) 경계조건을 어기게 된다. 따라서 현실적이지 못한 전단변형률을 조정하기 위한 전단보정계수가 일차전단변형이론을 적용한 해석에서는 필요하게 된다. 뿐만 아니라 일차전단변형이론을 이용한 두께가 얇은 판에 대한 수치해석에서는 전단잠김(shear-locking) 현상이 발생하게 되어 이를 해결하기 위한 추가적인 계산적 비용이 발생하게 된다. 이러한 문제점을 극복하기 위하여 변위장에 고차항을 포함하는 고차전단변형이론(higher-order shear deformation theory)이 제안되어 왔다. 고차전단변형이론은 표면에서의 전단응력 프리 조건을 만족하면서 두께 방향으로 전단응력 및 전단변형률의 비선형분포를 가지게 함으로써 전단보정계수의 사용을 제한할 수 있다. 결과적으로 고차전단변형이론은 일차전단변형이론보다 더 안정적이고 정확한 해석결과를 가져다준다. 한편, 고차전단변형이론에 근거한 변위장의 구성에서는 두께방향 변위에 대한 1차 미분항을 수반하게 되며, 이로 인하여 수치해석 시 변위에 대한 2차 미분항이 강성 매트릭스에 포함되게 된다. 결과적으로 고차전단변형이론을 적용한 수치해석에서는 변위장에 대한 C^1 -연속성이 요구된다. 하지만 C^0 -연속성 기반의 유한요소법(finite element method)에서는 이를 만족시키는 것은 상당히 어려운 일이다. 최근에는 같은 형상함수(B-spline or non-uniform rational B-spline, NURBS)를 사용하여 모델생성과 해석을 정확하게 수행할 수 있는 등기하해석(isogeometric analysis, IGA, Hughes et al., 2005)이 제안되었다. NURBS는 임의의 연속성을 용이하게 얻을 수 있으므로 고차전단변형이론에서 요구되는 C^1 -연속성을 용이하게 충족시킬 수 있다. 본 연구에서는 등기하해석과 고차전단변형이론을 결합한 수치해석 방법을 이용하여 탄소 나노튜브 보강 기능경사복합재 판의 휨 거동을 해석하고자 한다.

탄소 나노튜브 보강 기능경사복합재판의 해석을 위한 고차전단변형이론

탄소 나노튜브 보강 기능경사복합재판

Fig. 1에 나타낸 바와 같이 두께 방향으로 보강된 4가지 종류의 탄소 나노튜브 보강 기능경사복합재판(균일분포 보강, V형 기능경사 보강, O형 기능경사 보강, X형 기능경사 보강)을 고려하였다. 직교좌표계(x, y, z)는 중앙면(mid-plane, $z = 0$)에 설정되어 있으며, 길이 a , 폭 b , 두께 h 인 직사각형 판 형상이다. 4가지 보강판에 대한 탄소 나노튜브 체적비(volume fraction)는 다음 식과 같이 정의된다(Mehrabadi et al., 2012).

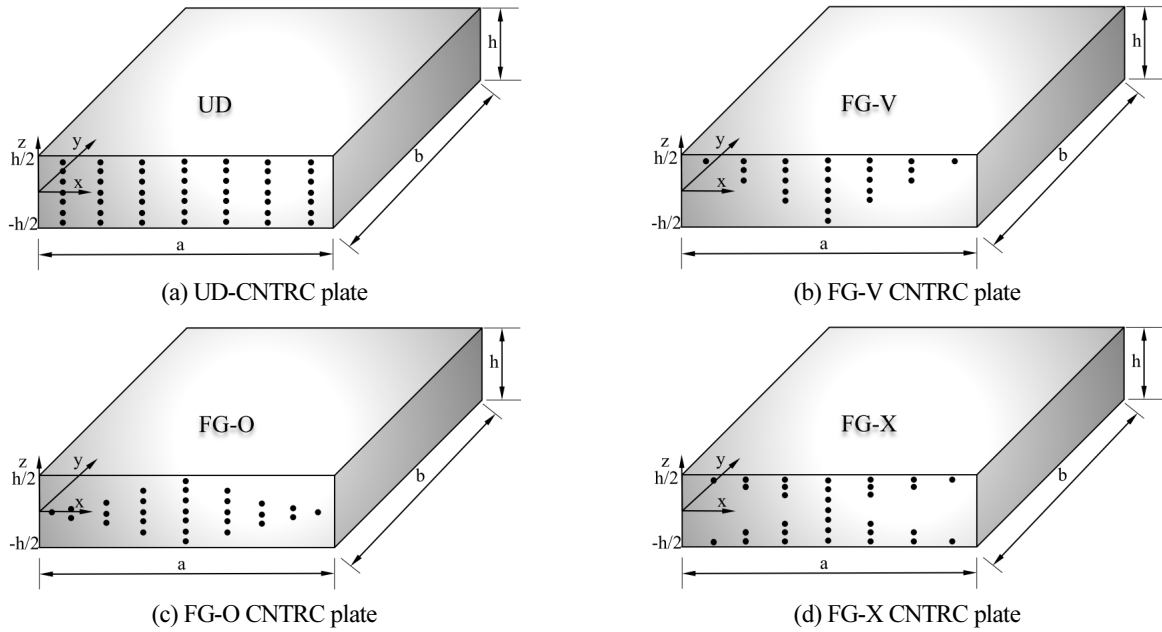


Fig. 1 Configuration of CNTRC plate

$$V_{CNT}(z) = \begin{cases} V_{CNT}^* & \text{(UD)} \\ \left(1 + \frac{2z}{h}\right)V_{CNT}^* & \text{(FG-V)} \\ 2\left(1 - \frac{2z}{h}\right)V_{CNT}^* & \text{(FG-O)} \\ 2\left(\frac{2z}{h}\right)V_{CNT}^* & \text{(FG-X)} \end{cases} \quad (1)$$

여기서,

$$V_{CNT}^* = \frac{w_{CNT}}{w_{CNT} + (\rho^{CNT}/\rho^m) - (\rho^{CNT}/\rho^m)w_{CNT}} \quad (2)$$

w_{CNT} 는 탄소 나노튜브의 질량비이고, ρ^{CNT} 와 ρ^m 은 각각 탄소 나노튜브와 기저물질의 밀도이다. 탄소 나노튜브 보강 기능경사복합재 판의 등가 재료물성치는 참고문헌(Lei et al., 2014)에 명시되어 있다.

고차전단변형 판 이론

고차전단변형이론에 근거한 나노튜브 보강 기능경사복합재 판의 변위장은 아래의 식과 같다(Reddy, 2000).

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} + f(z) \beta_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} + f(z) \beta_y(x, y), \quad \left(\frac{-h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \right) \\ w(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \tag{3}$$

여기서, $u_0(x, y)$, $v_0(x, y)$, $w(x, y)$ 는 중앙면($z = 0$)에서의 x , y , z 방향으로의 변위를 나타낸다. $\beta_x(x, y)$ 와 $\beta_y(x, y)$ 는 각각 y 축과 x 축에 대한 회전을 의미하고, $f(z) = z - \frac{4}{3}z^3/h^2$ 는 횡전단 형상함수(Reddy, 2000)이다. 판의 임의의 점에서의 면내 및 횡전단 변형률은 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_p &= \left\{ \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \gamma_{xy} \right\}^T = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + z \boldsymbol{\varepsilon}_1 + f(z) \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \boldsymbol{\gamma} &= \left\{ \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz} \right\}^T = f'(z) \boldsymbol{\varepsilon}_s \end{aligned} \tag{4}$$

그리고 응력과 변형률의 관계는 다음의 식과 같이 매트릭스 형태로 주어진다.

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{P} \\ \mathbf{Q}_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{E} & 0 \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{F} & 0 \\ \mathbf{E} & \mathbf{F} & \mathbf{H} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{D}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_s \end{Bmatrix} = \hat{\mathbf{D}} \boldsymbol{\varepsilon} \tag{5}$$

여기서,

$$\begin{aligned} A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} \left(1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z) \right) Q_{ij} dz; \\ D_{ij}^s &= \int_{-h/2}^{h/2} \left(f'(z) \right)^2 Q_{ij} dz \end{aligned} \tag{6}$$

탄소 나노튜브 보강 기능경사복합재 판의 정적거동에 대한 평형방정식은 총위치에너지함수에 대한 가상일의 원리를 이용하여 구할 수 있다.

고차전단변형이론을 적용한 등기하해석

NURBS 기저함수

NURBS 기저함수에 대한 자세한 사항은 참고문헌(Hughes et al., 2005)에 제시되어 있다. NURBS 기저함수는 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$R_A(\xi, \eta) = \frac{N_A(\xi, \eta)w_A}{\sum_{\lambda=1}^{m \times n} N_\lambda(\xi, \eta)w_\lambda} = \frac{N_A(\xi, \eta)w_A}{W(\xi, \eta)} \quad (7)$$

여기서, w_A 는 개별 가중치이고, $W(\xi, \eta)$ 는 가중치 함수이다. 그리고 $N_A(\xi, \eta)$ 는 2차원 B-스플라인 기저함수이다.

정식화

등기하요소의 변위장은 아래와 같이 NURBS 기저함수를 사용하여 표현할 수 있다.

$$\mathbf{u}^h(\xi, \eta) = \sum_{A=1}^{n \times m} R_A(\xi, \eta) \mathbf{q}_A \quad (8)$$

여기서, $n \times m$ 은 총 조절점의 수이고, $\mathbf{q}_A = [u_{0,A} \ v_{0,A} \ w_A \ \beta_{x,A} \ \beta_{y,A}]^T$ 는 조절점 A 의 자유도를 포함한다. 힘이 작용하는 탄소 나노튜브 보강 기능경사복합재 판의 시스템 방정식은 총위치에너지함수에 변분을 취하여 총 라그랑지안(total Lagrangian) 형태로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{q} = \mathbf{f}^{ext} - \mathbf{f}^{int} \quad (9)$$

여기서, \mathbf{f}^{int} 은 내부하중벡터, \mathbf{f}^{ext} 는 외력벡터 그리고 $\Delta \mathbf{q}$ 는 변위증분벡터이다. 강성행렬은 다음의 세가지 부분으로 분리할 수 있다.

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_{NL} + \mathbf{K}_g \quad (10)$$

여기서, K_L 과 K_{NL} 은 각각 선형 및 비선형 강성행렬이고, K_g 는 기하학적 강성행렬이다. 수치적분을 위해서 가우스 구적법 규칙(Gaussian quadrature rule)을 이용하였다. 즉, 각각의 NURBS 요소에 $(p + 1) \times (q + 1)$ 개의 가우스 적분점을 사용하여 하중벡터와 강성행렬을 계산하였다. 그리고 수정된 Newton-Raphson 반복 기법을 사용하여 비선형 대수방정식의 해를 구하였다.

힘을 받는 탄소 나노튜브 보강 기능경사복합재 판의 비선형 거동 해석

먼저, 힘을 받는 탄소 나노튜브 보강 기능경사복합재 판의 검증해석을 수행하여 제안한 해석방법의 타당성을 증명하였다. 이후, 매개변수해석을 통하여 탄소 나노튜브의 배치 형상, 판의 폭-두께 비 및 경계조건이 탄소 나노튜브 보강 기능경사복합재 판의 휨 거동에 가지는 영향을 조사하였다. 해석에 사용된 경계조건은 아래와 같다.

$$\text{단순지지(Simply supported, S): } \begin{cases} v_0 = w = \beta_y = 0 & \text{at } x = 0, a \\ u_0 = w = \beta_x = 0 & \text{at } y = 0, b \end{cases}$$

$$\text{고정지지(Clamped, C): } u_0 = v_0 = w = \beta_x = \beta_y = w_{,n} = 0$$

처음으로, 등분포 횡방향 압력($q_0 = -0.1 \text{ MPa}$)을 받는 두께가 2mm, 폭-두께 비가 10이고 탄소 나노튜브 체적비 V_{CNT}^* 가 0.11인 단순지지(SSSS) 상태의 정사각형 탄소 나노튜브 보강 기능경사복합재 판을 해석하였다. 해석에 사용된 재료의 종류 및 특성치는 참고문헌에 제시되어 있다(Lei et al., 2013). 메쉬 민감도 분석을 통하여 15×15 cubic NURBS 요소들로 판을 모델링 하였으며, Table 1에 해석결과로부터 얻어진 네 가지 종류의 탄소 나노튜브 보강 기능경사복합재 판의 중앙 처짐 ($\bar{w} = w/h$)을 나타내었다. 그리고 일차전단변형이론에 근간한 kp -Ritz 무요소법(Lei et al., 2013)과 유한요소해석법(Zhu et al., 2012)에 의한 결과를 함께 나타내었다. 그리고 보다 정확한 비교를 위하여 본 연구에서 제안한 등기하해석방법과 일차전단변형이론을 이용하여 계산한 해석결과도 함께 제시하였다. 해석결과를 비교해 보면 본 연구에서 제안한 등기하해석방법에 의한 결과 값과 다른 두가지 해석방법으로부터 얻은 결과들이 상당히 일치함을 알 수 있다. Fig. 2에 동일한 조건에 대한 다양한 형태의 탄소 나노튜브 보강 기능경사복합재 판의 두께 방향으로의 전단응력($\tau_{xz}^* = \tau_{xz} h/q_0 a$)의 분포를 도시하였다. 표면에서의 재료 전단응력/전단변형률 조건을 만족시키며, 최대전단응력은 두께 중앙부에서 발생하여 표면에 가까울수록 점차 줄어들음을 알 수 있다. 이제까지의 결과로부터 제안된 등기하해석과 고차전단변형이론을 결합한 수치해석 방법은 휨 거동을 정확하게 예측함을 알 수 있다.

Table 1. Comparison of the present result with the different numerical solution

b/h	CNT distribution	Present	Element-free (Zhu et al., 2012)	FEM (Lei et al., 2013)
10	UD*	3.741×10^{-3}	3.751×10^{-3}	3.739×10^{-3}
	UD	3.710×10^{-3}		
	FG-V*	4.469×10^{-3}	4.479×10^{-3}	4.466×10^{-3}
	FG-V	4.425×10^{-3}		
	FG-O*	5.228×10^{-3}	5.245×10^{-3}	5.230×10^{-3}
	FG-O	5.439×10^{-3}		
	FG-X*	3.180×10^{-3}	3.188×10^{-3}	3.177×10^{-3}
	FG-X	3.101×10^{-3}		

(*) implies the results by the present IGA method based on the first-order shear deformation plate theory

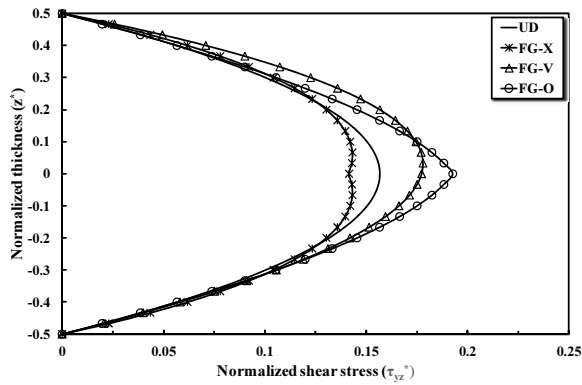


Fig. 2. Non-dimensional edge shear stress distributions across the thickness ($b/h = 10$)

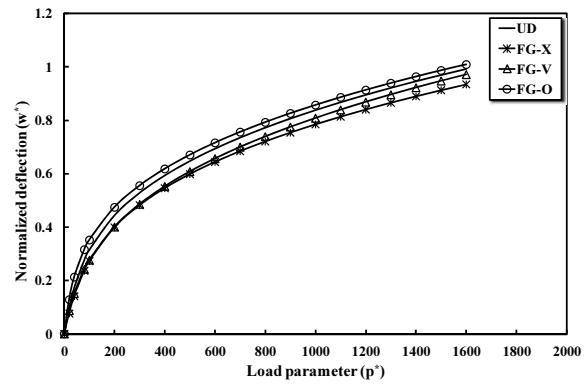


Fig. 3. Normalized central deflection versus load parameter curves ($b/h = 20$, SSSS)

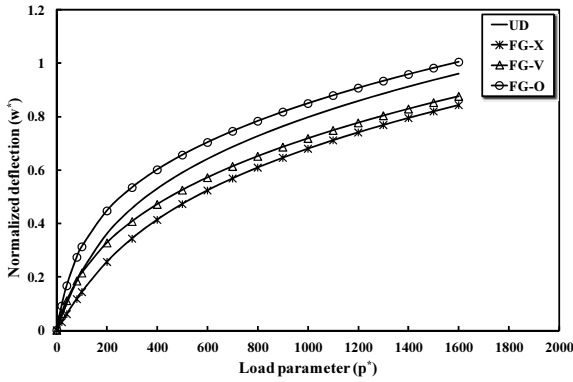


Fig. 4. Normalized central deflection versus load parameter curves ($b/h = 50$, SSSS)

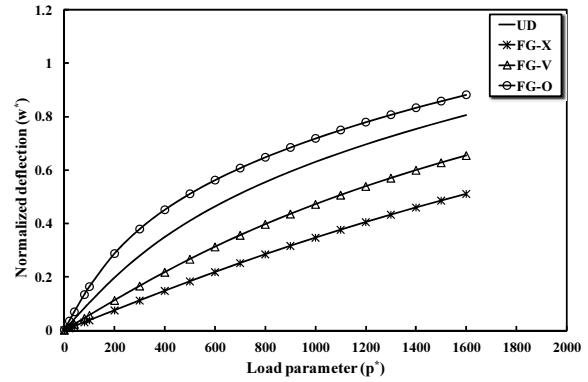


Fig. 5. Normalized central deflection versus load parameter curves ($b/h = 50$, CSCS)

타당성 검증 후 네 가지 형태의 탄소 나노튜브 보강 기능경사복합재 판에 대한 매개변수해석을 수행하여 비선형 휨 거동을 조사하였다. Figs. 3-5에 단순지지(SSSS) 및 고정지지(CSCS) 상태의 탄소 나노튜브 보강 기능경사복합재 정사각형 판의 서로 다른 폭-두께 비에 대한 하중 파라메타($p^* = qa^4/E_m h^4$, 여기서 q 는 등분포하중의 크기이고, E_m 은 기저물질의 영율을 의미한다)에 따른 무차원 중앙 처짐($\bar{w} = w/h$) 곡선을 나타내었다. 결과를 보면 모든 경우에 대하여 O형 기능경사 보강을 한 복합재 판이 가장 큰 처짐을 나타내며 X형 기능경사 보강을 한 복합재 판의 처짐이 가장 작음을 알 수 있다. 이것은 휨에 의한 응력이 최대가 되는 표면 인근의 탄소 나노튜브 보강이 가장 효율적임을 의미한다. 그리고 고정지지된 탄소 나노튜브 보강 기능경사복합재 판의 중앙처짐의 경우 단순지지된 판의 처짐과 비교해 볼 때 그 값이 상당히 줄어들음을 알 수 있다.

결론

본 연구에서는 일차전단변형이론에서 사용되는 전단보정계수를 사용할 필요가 없이 기하학적 비선형성을 고려할 수 있는 고차전단변형이론과 등기하해석을 결합한 수치해석 방법을 이용하여 기능경사복합재 개념을 탄소 나노튜브의 분포에 적

용한 탄소 나노튜브 보강 기능경사복합재 판의 휨 거동을 해석하고자 하였다. 등기하해석 방법은 NURBS 기저함수에 기초를 두고 있으며 고차전단변형이론에서 요구되는 C^1 -연속성을 용이하게 충족시킬 수 있다. 가상일의 방법을 이용하여 탄소 나노튜브 보강 기능경사복합재 판의 휨 거동에 대한 평형방정식과 지배방정식을 유도하였으며, 수정된 Newton-Raphson 반복 방법을 사용하여 전체 시스템방정식의 해를 구하였다. 먼저, 등분포 횡방향 압력을 받는 탄소 나노튜브 보강 기능경사복합재 판에 대한 검증해석을 실시하여 본 연구에서 제시한 해석방법의 유효성을 입증하였다. 이후, 매개변수 해석을 통하여 탄소 나노튜브 보강 형상, 폭-두께 비 및 경계조건이 탄소 나노튜브 보강 기능경사복합재 판의 휨 거동에 미치는 영향을 조사하였다. 해석 결과 제안된 고차전단변형이론에 근간한 등기하해석 방법은 휨을 받는 탄소 나노튜브 보강 기능경사복합재 판의 휨 거동을 해석하는데 있어 정확하고 효과적인 수치해석 방법임을 확인하였고, 탄소 나노튜브 배치 형상, 판의 폭-두께 비 및 경계조건은 탄소 나노튜브 보강 경사복합재 판의 휨 거동에 많은 영향을 끼침을 확인할 수 있었다. 또한, X형 기능경사보강이 휨에 의한 처짐을 감소시키는 가장 효율적인 보강 방법임을 알 수 있었다. 그리고 탄소 나노튜브 체적비, 세장비, 폭-두께비 및 경계조건 등의 영향에 관한 상세한 매개변수 해석은 추후 수행할 예정이다.

Acknowledgement

이 논문은 2021학년도 인하공업전문대학 교내연구비지원에 의하여 연구되었음..

References

- [1] Esawi, A.M.K., Farag, M.M. (2007). "Carbon nanotube reinforced composites: Potential and current challenges." *Materials & Design*, Vol. 28, pp. 2394-2401.
- [2] Fazzolari, F.A. (2018). "Thermoelastic vibration and stability of temperature-dependent carbon nanotube-reinforced composite plates." *Composite Structures*, Vol. 196, pp. 199-214.
- [3] Hughes, T.J.R., Cottrell, J.A., Bazilevs, Y. (2005). "Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 194, pp. 4135-4195.
- [4] Iijima, S. (1991). "Helical microtubules of graphitic carbon." *Nature*, Vol. 354, pp. 56-58.
- [5] Ke, L.L., Yang, J., Kitipornchai, S. (2010). "Nonlinear free vibration of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite beams." *Composite Structures*, Vol. 92, pp. 676-683.
- [6] Lei, Z.X., Liew, K.M., Yu, J.L. (2013). "Large deflection analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates by the element-free kp-Ritz method." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 256, pp. 189-199.
- [7] Lei, Z.X., Zhang, L.W., Liew, K.M., Yu, J.L. (2014). "Dynamic stability analysis of carbon nanotube-reinforced functionally graded cylindrical panels using the element-free kp-Ritz method." *Composite Structures*, Vol. 113, pp. 328-338.
- [8] Mehrabadi, S.J., Aragh, B.S., Khoshkharesh, V., Taherpour, A. (2012) "Mechanical buckling of nanocomposite rectangular plate reinforced by aligned and straight single-walled carbon nanotubes." *Composites Part B: Engineering*, Vol. 43, pp. 2031-2040.
- [9] Mindlin, R.D. (1951) "Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates." *Journal of Applied Mechanics Transactions of ASME*, Vol. 18, pp. 31-38.

- [10] Reddy, J.N. (2000) "Analysis of functionally graded plates." *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 47, pp. 663-684.
- [11] Reissner, E. (1945) "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates." *Journal of Applied Mechanics Transactions of ASME*, Vol. 12, pp. 69-77.
- [12] Shen, H.S. (2009) "Nonlinear bending of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates in thermal environments." *Composite Structures*, Vol. 91, pp. 9-19.
- [13] Thostenson, E.T., Ren, Z., Chou, T.W. (2001) "Advances in the science and technology of carbon nanotubes and their composites: A review." *Composites Science and Technology*, Vol. 61, pp. 1899-1912.
- [14] Zhang, L.W., Song, Z.G., Liew, K.M. (2015) "Nonlinear bending analysis of FG-CNT reinforced composite thick plates resting on Pasternak foundations using the element-free IMLS-Ritz method." *Composite Structures*, Vol. 128, pp. 165-175.
- [15] Zhong, R., Wang, Q., Tang, J., Shuai, C., Qin, B. (2018) "Vibration analysis of functionally graded carbon nanotube reinforced composites (FG-CNTRC) circular, annular and sector plates." *Composite Structures*, Vol. 194, pp. 49-67.
- [16] Zhu, P., Lei, Z.X., Liew, K.M. (2012) "Static and free vibration analyses of carbon nanotube-reinforced composite plates using finite element method with first order shear deformation plate theory." *Composite Structures*, Vol. 94, pp. 1450-1460.