Journal for History of Mathematics http://dx.doi.org/10.14477/jhm.2021.34.2.039
Vol. 34 No. 2 (Apr. 2021), 39–54

On Symmetric Functions

대칭함수의 유래

Koh Youngmee 고영미 Ree Sangwook* 이상욱

One of the topics in school mathematics is the relation between the roots and the coefficients of equations. It deals with the way to find the roots out of the coefficients of equations. One of the concepts derived from the theory of equations is symmetric functions. Symmetry is a kind of functionality of human cognition. It is, in mathematics, geometrically related to the congruence and the similarity of figures, and algebraically a kind of invariants. We look at stories on the appearance of symmetric functions through the development of the theory of equations.

Keywords: Solving equations by radicals, Formula for the solutions (of equations), The fundamental theorem of algebra, Symmetry, Symmetric functions, Partitions; 방정식을 근호로 풀기, 근의 공식, 대수학의 기본 정리, 대칭, 대칭함수, 분할.

MSC: 01A05, 01A72, 05–03, 05A17, 05E05 ZDM: A30, H10, H20

1 서론

학교수학의 교육 내용 중 하나가 2차방정식의 근과 계수의 관계이다. 방정식은 계수에 의하여 결정된다. 그러므로 방정식의 근도 또한 계수에 의하여 결정된다. 특히 방정식의 근이 계수들의 사칙연산과 근호를 사용한 계산식으로 주어지면, 우리는 그것을 「근의 공식」이라고 한다. 그러한 「방정식의 근의 공식」을 찾는 일이 한 때[1)]에는 중요한 수학 문제였다.

방정식의 근의 값을 구하기에 앞서 근들을 「변수」로 생각했을 때 방정식의 계수는 이 변수들에 의한 「대칭함수」로 표현된다. 이 과정에서 근을 기호로 나타냈어야 했고, 기호의 사용은 수학의 발전에 기여하였다. 대칭함수는 현대 수학에서, 특히 조합수학이나 표현론을 포함한 대수학 분야에서 주요 연구 주제이다 [30]. 그러므로 수학사의 관점에서 대칭함수를 살펴보는

*Corresponding Author.
Koh Youngmee: Dept. of Data Science, Univ. of Suwon E-mail: ymkoh@suwon.ac.kr
Ree Sangwook: Dept. of Data Science, Univ. of Suwon E-mail: swree@suwon.ac.kr
Received on Mar. 25, 2021, revised on Apr. 6, 2021, accepted on Apr. 8, 2021.
1) Cardano가 활동하던 16세기부터 Galois에 의한 군 이론이 싹트기 시작한 19세기까지.

것은 의미가 있다고 여겨진다. 또 미국수학교사협의회[2)]는 대칭함수를 수학사를 이용한 수학 교육의 소재로 소개하였다 [5, p. 321–322]. 그러하기에 수학교육의 관점에서도 대칭함수에 관련된 기초 내용과 유래를 알아봄이 바람직할 것이다.

「대칭」이란 개념은 인류의 기본적인 인식 기능 중의 하나이다. 고대의 수사학(rhetoric)은 비유를 많이 사용하였다. 그것이 상황을 이해하는 좋은 수단이었기 때문이다. 비유는 일종의 닮음을 의미하고, 닮음은 일종의 대칭을 의미하며, 그러한 대칭성이 상황과 현상을 인식하는 수단이었다. 유사한 쉬운 경우를 예로 들어 문제 상황의 이해를 유도하는 교육 방법도 대칭성을 사용하는 하나의 사례로 볼 수 있다.[3)]

수학에서도 대칭성은 문제 상황을 이해하는 기본 수단이다. 기하에서는 합동이나 닮음의 개념으로 이어지기도 하고 대수적으로는 불변론(invariant theory)의 대상이기도 하다. 심지어 대칭성을 수학적 대상으로 정리한 군론(group theory)은 현대수학의 하나의 기둥이 되었다 [28, 29].[4)] 이러한 「대칭」 개념의 수학적 표현의 시작은 다항방정식의 근을 찾는 과정에서 유래한다. 그 과정에서 비롯된 수학 대상으로 대칭함수가 있다. 본 글은 이와 같은 대칭함수가 어디서 유래했는지를 알아보고자 한다.

2 수학적 개념

수학을 한 마디로 설명하기는 어렵지만,[5)] 교육의 관점에서 수학이 지닌 몇 가지 중요한 특성을 꼽아볼 수는 있다. 수학은 우선 논리를 담는 언어적 특성을 갖는 한편, 어떤 상황이나 현상을 객관적이며 합리적으로 판단할 수 있는 인식수단이기도 하고, 수학 안에서 이루어지는 수의 연산이 제공하는 일종의 사고방법이기도 하다 [19]. 또한 수의 연산은 논리의 대표적 사례이기도 하다 [19]. 이러한 논리를 담는 그릇이며 인식과 사고의 수단을 제공하는 수학에서, 대칭과 기호 그리고 방정식은 나름의 중요한 역할과 의미를 갖는다. 또한 어떤 문제가 주어졌을 때, 주어진 상황의 판단을 위한 상황의 분석 수단으로 「분해」와 「분할」이 사용된다. 수학에서도 분해와 분할은 중요한 의미와 역할을 갖는다. 특히 정수의 분할이 대칭함수와도 연결된다는 사실이 고무적이다.

---

2) NCTM, National Council of Teachers of Mathematics. 「미국수학교사회」 또는 「미국수학교사협의회」라고 함. 1920년에 설립된 세계 최대의 수학교육을 위한 기관으로 매년 교사를 위한 학술회의을 개최하고 학술지도 발행한다. https://www.nctm.org

3) 「무엇이 무엇이 똑같을까?」로 시작하는 윤석중 작사의 번안 동요 「똑같아요」가 하나의 예가 될 수 있다. 동요뿐만 아니라, 이미애 저, 유아용 그램책 「무엇이 무엇이 똑같을까?」(http://www.yes24.com/Product/Goods/2154101)도 비유에 의한 인식의 예를 보여준다.

4) 위키페디아에서 군론의 역사에 대한 간단한 설명을 찾을 수 있다 (https://en.wikipedia.org/wiki/Group_theory#History). 조금 더 자세히는 Stedall [24, Chapter 3] 또는 [4]나 [6]을 참조한다.

5) “ ... 수학은 물질적이고 감각적인 세계와는 무관한 추상적인 지적 구조에 대해 연구하는 학문이야. ... ” [9, p. 51–52]

2.1 대칭

우리는 거울에 자신을 비춰보았을 때「좌우는 바뀌어 보이는데, 왜 위아래는 바뀌어보이지 않을까?」라는 의문을 가질 수 있다. 이는 어린 학생들에게 묻는 넌센스퀴즈이기도 하다. 이 질문의 답은「대칭(symmetry)」에 있다. 우리의 모습이 좌우가 대칭이어서 우리가 거울에 비친 자신의 모습을 좌우가 바뀐 것으로 잘못 인식하기 때문이다.

Ian Stewart는 자신의 저서《Why Beauty is Truth: The History of Symmetry》[26]의 머릿말에서 대칭성을 변환에 의해 변치않는 그 무엇이라고 설명한다. 실제 대칭성은 다양한 분야에서 나타난다 [28].[6] 우리의 모습이 그렇듯, 동물들이나 꽃의 모양에서 보듯이 많은 생물의 모습은 다양한 대칭성을 보여준다. 뿐만 아니라 눈의 결정처럼 자연계 속에서도 대칭은 산재해 있다. 이와 같은 대칭성은 시각에 기인하지만, 추상적 개념의 대칭을 생각할 수도 있다. 물리학에서는 대칭성을 어떤 변환을 가해도 변화가 발생하지 않는 불변의 대상이나 성질로 정의한다. 이러한 대칭성은 물리학, 특히 이론 물리학 연구의 강력한 연구 수단이 된다 [26].

대칭성은 수학에서 다루어지는 대표적 개념 중 하나이다 [28]. 특히 수학에서는 대칭의 개념을 군(group)이라는 대수적 대상에 담아서 다룬다.[7] 대수다양체(algebraic variety) 상에서의 군의 작용에 의한 불변량을 연구하는 불변론(invariant theory)은 David Hilbert (1862–1943)가 관심을 가졌던 연구 대상이었다 [20]. 수학사를 들여다보면, 군의 발생은 정수론이나 기하학을 포함하여 방정식을 연구하는 과정에서 유래하였는데, 관련된 대표 수학자로는 Joseph Louis Lagrange (1736–1813), Niels Henrik Abel (1802–1829), Évariste Galois (1811–1832) 등이 포함된다.

Hermann Weyl (1885–1955)은 그의 저서《Symmetry》[28]에서 대칭의 다양한 모습을 보여주며 인류가 대칭에 관심을 가지게 된 이야기를 포함하여 인류 문화 속에 담겨 있는 대칭을 잘 설명하였다. 이러한 대칭성은 그 의미를 확장하여 적용할 때는 우리의 인식 수단으로도 작용할 수 있다. 거울에 비친 자신의 모습뿐만 아니라, 수학에서의 동형사상(isomorphism)이나 준동형사상(homomorphism) 심지어 수사학의 수단인 비유법 등까지도 일종의 대칭으로 생각할 수 있다. 심지어, 교육에서 쉬운 문제로 학습 내용을 가르치는 것도 일종의 비유에 해당하며 대칭성을 활용한 교육방법으로 이해할 수 있다. 그러한 의미에서 대칭성은 우리의 대표적 인식 수단이라고 할 수 있다.

6) 대칭성 https://en.wikipedia.org/wiki/Symmetry

7) Group theory today is often described as the theory of symmetry, and indeed groups have been inherent in symmetric objects in ancient times [27, p. 383].

2.2 기호

우리는 매일 「기호」를 사용한다. 기호는 개념, 의미, 내용 등을 함축적으로 표현하는 방법 내지 수단이다. 숫자나 글자도 기호라고 할 수 있지만, 우리는 옳고 그름을 나타내는 $\circ$, $\times$ 나 진행과 변화를 나타내는 화살표($\to$, $\Rightarrow$), 또 같음을 뜻하는 등호($=$)와 같은 쉽게 뜻을 알 수 있는 기호들도 자주 사용한다. 우리는 과연 언제부터 이러한 기호들을 사용하기 시작했을까?

인류는 그림이나 어떤 상징을 표현하는 방법으로 「기호(symbol)」를 사용하였다. symbol 이라는 말은 그리스어 *sum*(together)과 *ballo*(to throw)를 합성한 용어라고 한다 [16]. 고대에 신분이나 관계의 확인을 위해 「동물의 뼈나 나무를 잘라서 나누어 지녔다가 신분의 확인이 필요할 때 나누어 가진 부분을 맞추어보았다」는 이야기로부터 용어의 기원을 추정해볼 수 있다.

기호는 그림으로부터 생겨났다고 한다.8) 상형문자를 보면 그런 추정이 가능해보인다.9) 인류는 오래 전부터 다른 생명체와 달리 그림을 그렸다. 수천, 수만년 전에 그려졌다는 동굴벽화가 그러한 예이다.10) 그림이 단순화되어 어떤 상징을 나타내거나 의미를 표현하는 수단으로 사용되면서 상형문자가 되기도 하고 또 「기호」가 되었을 것이다. 그런 의미에서 기호는 인류의 사고활동의 반영일 수 있다. Joseph Mazur는 기호가 어떤 패턴이나 모양을 인지하거나 인식하며 새로운 의미를 만들어내는 수단이라고 말한다 [16].11)

「기호」의 사용은 수학이 단연 으뜸이다. 모든 전문 분야는 나름의 기호를 사용한다. 음악에서는 다양한 음표를 사용하여 악보를 그리고, 건축에서도 설계도를 그리기 위해 다양한 기호를 사용한다. 하지만 수학은 새로운 개념을 만들고 그를 표현하기 위하여 새로운 기호를 만든다. 그런 의미에서 수학이 기호의 창조와 사용에 있어 으뜸이라고 할 수 있다.

Jacqueline Stedall도 기호의 사용과 표기법(notation)의 개선으로 수학이 발전할 수 있었음을 주장한다 [24]. 수학에서 기호는 복잡한 내용을 집적하여 개념의 이해를 용이하게 하는 수단으로 사용된다 [16].12) 더하기($+$)는 라틴어 *et*(and)의 t에서 기인했고, 함수를 나타내는 $f(x)$와도 같은 많은 수학 기호는 용어의 축약에 의한 표기법(notation)이다. 하지만 0이나 무한소 dx 등과 같은 기호는 새로운 생각이나 개념의 표현이며 새로운 수학을 만드는 데 기여

8) 생각과 마음을 형상화한 상징(기호)에 대한 설명을 David Fontana의 《상징의 모든 것》[10]에서 읽을 수 있다. Symbols are profound expressions of human nature. [10, Introduction, p. 8]

9) 중국 운남성에 모여사는 소수민족 나시족(納西族)은 현재도 「동파문(東巴文)」이라는 상형문자를 사용하고 있다고 한다. https://ko.wikipedia.org/wiki/동파_문자, https://en.wikipedia.org/wiki/Dongba_symbols

10) 2019년 12월, 인도네시아에서 인류 역사상 가장 오래된, 약 4만 4천여년 전의 동굴벽화가 발견되었다고 한다. http://m.dongascience.donga.com/news.php?idx=32917

11) ... symbols are a means of perceiving, recognizing and creating meaning out of patterns and configurations drawn from material appearance or communication. [16, p. x]

12) 실제로 J. Stedall은 Harriot의 사례를 연구하였다: Harriot went further: symbolism became for him not just a more concise way of writing, a kind of mathematical shorthand, but also an investigative tool. . . . using symbols to open up some old mathematics in an entirely new way. [23, p. 300]

하였다. 방정식의 근의 공식에 관한 연구가 수학 기호를 사용하는 계기가 되었고 그로 인하여 대칭함수와 같은 개념이 유래하였음도 흥미로운 수학사가 될 것이다.

2.3 방정식

방정식은 일반적으로 함수 $f(x)$를 0으로 놓음으로써 $f(x) = 0$ 과 같은 형태로 표현된다. 그런데 「방정식」은 고대[13)]로부터 다루어졌던 대상임에 반하여, 「함수」라는 용어는 17세기에 Leibniz로부터 쓰여지기 시작하였다.[14)] 그러면 「함수」가 사용되기 이전의 「방정식」은 무엇을 말하는 것일까? 등호(=)를 포함하여 x, $f(x)$와 같은 기호, 심지어 연산기호를 사용하기 전의 「방정식」은 어떤 의미를 가질까?

방정식(equation)은 식(formula)이나 항등식(identity)과는 다른 의미를 지닌다. 우선, 식이나 항등식은 수의 연산을 설명한다. 식 a^2+b^2은 a와 b를 각각 제곱하여 더한다는 연산을 의미하며, 항등식 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$는 $a^2 - b^2$의 연산과 $(a+b)(a-b)$의 연산이 동일한 결과를 준다는 의미이다. 수의 연산은 (문제)상황을 설명하는 「사고방법」으로 생각할 수 있다. 예를 들어, 한 변의 길이가 5인 정사각형의 양탄자에서 한 변의 길이가 1인 정사각형 만큼의 부분을 잘라낸다고 하자. 이때의 상황은 $5^2 - 1^2$이라는 연산, 즉, 식으로 표현된다. 그리고 그 결과는 $(5+1)(5-1)$의 연산 결과와 동일한데, 이것이 곧 항등식의 의미이다.[15)]

그에 반해, 방정식은 「역문제」의 의미를 지닌다. 또한 방정식은 자연스럽게 「기호의 사용」을 요구한다. 예를 들어, 어떤 정사각형에서 한 변의 길이가 1인 정사각형을 잘라낸 난 후의 넓이가 24일 때, 정사각형의 크기가 얼마인지를 묻는 문제를 생각해보자. 이때 「정사각형」은 문제 상황의 「원인」에 해당하고 넓이 24는 「결과」를 의미한다. 기호를 사용하지 않고 설명할 수 있지만 편의상 기호를 사용하자. 정사각형의 한 변의 길이를 x라고 하면, 방정식 $x^2 - 1^2 = 24$가 주어진 문제 상황을 설명한다. 이때 방정식을 푼다는 것은 「결과」 24로부터 「원인」 x를 구하는 것이다. 즉, 방정식은 수의 연산을 되돌리는 「역문제」의 의미를 지닌다. 이때 우리는 당연히 우리가 알고 있지 않은 정사각형의 크기, 즉 한 변의 길이 x를 염두에 두어야 하는데, 이러한 생각은 자연스럽게 기호의 사용을 유도한다.[16)]

이와 같이, 2차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$의 근의 공식 $x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$을 포함하여 방정식의 근을 구함은 수의 연산을 통하여 결과로부터 원인을 계산해낸다는 의미를

13) 기원전 1650년경 이집트의 린드 파피루스에 11개의 일차방정식 문제가 나온다.

14) 함수(函數)는 이선란(李善兰, 1810–1882)과 Alexander Wylie(1815–1887)가 번역서《대수학(代數學)》(1859)과《대미적습급(代微積拾級)》(1859)에서 17세기에 Gottfried Wilhelm Leibniz가 사용했던 라틴어 functio(영어의 function)의 번역으로 사용한 용어이다. https://ko.wikipedia.org/wiki/함수. 함수에 대한 자세한 역사를 알고 싶은 독자는 Stedall [24, Chapter 9]을 참조한다.

15) 이는 두 수의 곱을 사각형의 넓이로 이해하여 도형을 그림으로써 기하적 상황으로도 설명 가능하다.

16) 필자는 학생들을 지도할 때 「아는 척」이 필요함을 강조하는데, 이때의 「아는 척」은 기호의 사용을 의미한다. 기호를 사용함으로써 계산(생각)의 과정을 읽을 수 있기에 「아는 척」은 유용한 학습 수단이 된다.

지닌다. 이러한 방정식의 근, 또는 근의 공식을 찾아냄은 문제의 「원인 분석」이라는 의미에서 중요한 문제이다. 그러한 문제는 과정(연산)에 의해 주어진 방정식(결과)의 연산을 되돌리는 「역연산」의 문제로 이해할 수 있다.

2.4 분할

수의 연산은 덧셈(뺄셈)과 곱셈(나눗셈)으로 대표된다. 그러한 수의 연산은 사고방법으로 이해되고, 수의 연산으로 구성되는 방정식은 연산에 의한 결과의 서술로 이해된다. 이때 연산이 복잡하게 얽히면 문제 자체가 복잡해진다. 복잡한 문제의 해결에는 예로부터 지금까지도 상대적으로 풀이가 쉬운 「여러 개의 작은 문제로 분해하여 공략(divide and conquer)」하는 전략이 사용된다. 그러하기에 「분해」는 자연스런 「문제해결의 기본 전략」이다.

「분해」의 대표적 예가 정수의 「소인수분해」이다. 양의 정수는 유일하게 소수의 곱으로 표현된다. 뿐만 아니라, 벡터공간이나 위상공간의 「기저」도 분해 전략을 응용한 수단이다.[17)] 그런데 정수의 소인수분해를 생각하면 하나의 의문이 생긴다. 양의 정수를 그보다 작거나 같은 소수의 「곱」으로 쓸 수 있도록 분해하는 것이 소인수분해라면, 양의 정수를 자신보다 작거나 같은 다른 자연수의 「합」으로 쓸 수 있도록 분해하는 문제도 있어야 하는 것이 아닌가?

그렇다. 우리는 양의 정수를 다른 정수의 합으로 분해하는 문제도 생각한다. 자연수를 그보다 작거나 같은 자연수의 「합」으로 표현하는 것을 자연수의 「분할(partition)」이라고 한다. 그러나 자연수 n은 n개의 1의 합 $n = 1 + \cdots + 1$이므로 실제로는 의문을 가질 만한 문제가 못 된다. 대신, 자연수를 홀수만의 합으로 표현을 한다던가, 짝수만의 합으로 나타내보려는 시도가 가능하며, 소수만의 합으로 표현하거나, 제곱수의 합으로 표현하는 자연수의 「분할」 문제를 생각할 수 있을 것이다.[18)]

실제로 Waring 문제나 Goldbach 추측 등이 그러한 분할 문제에 해당한다. Waring 문제는 자연수를 k제곱수의 합으로 표현하는 문제이다.[19)] Diophantus는, Waring 문제의 특수한 경우에 해당하는 문제로, 자연수를 4개 이하의 자연수의 제곱의 합으로 표현할 수 있음을 추측하였고, 1770년에 Lagrange가 증명함으로써 「4-제곱수 정리(four-square theorem)」로 알려졌다. Goldbach의 추측은 「모든 짝수는 2개의 소수의 합으로 쓸 수 있다」는 정수의 분할 문제로 아직까지 해결되지 않았다.[20)] 심지어 피타고라스의 정리 $a^2 + b^2 = c^2$은, 그것의 기하적 의미를 차치하고, 제곱수를 제곱수의 합으로 표현하는 「분할」 문제로 이해할 수 있다.

1696년 Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)는 자연수의 분할과 관련하여 Johann

17) 벡터공간의 벡터는 기저(basis)에 속한 벡터의 선형결합으로 표현되고, 위상공간의 열린집합은 기저에 속한 집합의 합으로 표현된다.

18) 자연수를 두 개의 제곱수의 합으로 표현하는 문제를 《하늘책의 증명》 [1] 제 4장에서 다루고 있다.

19) https://en.wikipedia.org/wiki/Waring%27s_problem

20) 골드바흐의 추측을 소재로 한 수학소설도 있다: 아포스톨로스 독시아디스 지음, 정희성 옮김, 강석진 감수, 「사람들이 미쳤다고 말한 외로운 수학 천재 이야기」, 생각의 나무, 2000. [9]

Bernoulli (1667–1748)에게 양의 정수를 하나 또는 여러 개의 양의 정수의 합으로 나타내는 「경우의 수」를 구하는 방법을 물었다 [8, p. 33]. Leibniz 가 이러한 의문을 가졌던 이유는 대칭함수에 대한 관심때문이었는데, 동차 대칭 다항함수를 기본대칭함수[21)]의 선형결합으로 표현하고 싶어한 것이었다 [8]. 더 근본적으로는 다항식의 근을 기본대칭함수인 계수에 의한 함수로 표현할 수 있기 때문이었다.

자연수의 분할 문제는 대칭함수 외에도 다양한 조합수학적 의미를 내포한다. 대표적으로는 자연수의 홀수만에 의한 분할의 개수와 서로 다른 자연수에 의한 분할의 개수가 같음을 보이는 문제를 생각할 수 있는데, 이에 관한 놀라우며 흥미로운 이야기를《하늘책의 증명》[1, 제 29장]에서 볼 수 있다. 자연수의 분할에 대한 많은 다채로운 내용은 George Andrews의《Integer Partitions》[2]나 Bruce Sagan의《The Symmetric Groups》[21] 등을 참조한다.

3 방정식의 역사: 근의 공식, 대수학의 기본정리, 대칭함수

방정식의 역사[22)]는 현대대수학을 태동시킨 밑거름이 되었다 [3, 4, 6, 12, 13, 24, 27]. 「5차 이상의 방정식은 일반적인 근의 공식을 가질 수 없다」고 하는 Abel의 정리와 대수학의 기본정리, 군론을 포함한 Galois 이론의 개발 등은 실로 수학사에서 그 의미가 중대하다고 할 수 있다.

3.1 방정식과 근의 공식

우리는 방정식의 해를 구함을, 어떤 과정 (연산)을 거쳐 어떤 「결과」가 도출되었을 때 그 결과로부터 「원인」을 찾아내는 일종의 「역연산」으로 이해하였다. 예를 들어, 양의 정수를 계수로 갖는 일차방정식은 유리수 내에서의 사칙연산에 의한 역연산 과정을 거쳐 쉽게 해를 구할 수 있다. 이차방정식의 경우, 해를 알려주는 「근의 공식」이 오래전부터 어느 정도 알려져 있었다. Funkhouser [11]에 따르면, 15세기까지의 수학을 개괄한 Luca Pacioli (c. 1445—1509)의 저서《Summa de Arithmetica》(1494)에 완전제곱을 이용한 이차방정식의 해를 구하는 방법이 설명되어 있었다고 한다.[23)]

그러나 흥미로운 방정식에 관련한 수학의 역사는 삼차방정식으로부터 시작된다. 삼차방정식의 근의 공식은 16세기 이탈리아 수학자 Gerolamo Cardano (1501—1576)에 의하여 세상에 알려진다 [15, 제 7장, 60–67].[24)] Cardano는 자신의 저서《Ars Magna》(1545)에서

21) 기본대칭함수의 정의는 3.3절을 참조한다.

22) 동·서양의 방정식론의 역사에 대한 좋은 소개 자료로, 2014년 「국가수리과학연구소」의 지원으로 한국수학사학회가 주최한 「수학사 여름학교」 때에 사용된 한국수학사학회 발행의 프로시딩 [13]을 들 수 있다.

23)《Summa de Arithmetica》내의 *L' Arte Magiore; ditta dal vulgo la Regola de la Cosa, over Alghebra e Amucabala* 라는 대수를 다루었던 글에 이차방정식의 해법이 나온다고 한다. [11]

24) Cardano의 삼차방정식 $x^3 + px = q$에 대한 근의 공식: $x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$.

다양한 방정식의 해법과 성질을 설명하면서 삼차방정식의 근의 공식을 제시하였다 [25, p. 3–17]. 또한 최고차 항의 계수가 1 인 삼차방정식에서 x^2 의 계수가 세 근의 합으로 주어짐도 언급하고, 그의 제자 Lodovico Ferrari (1522–1565) 와 함께 구한 사차방정식의 해법도 설명하였다.

삼차방정식의 근의 공식은 Cardano의 공식으로 알려져 있지만, 실제로 Cardano는 Niccolò Fontana Tartaglia (1499–1557) 로부터 그 해법을 알아내었다. Cardano와 Tartaglia 간의 지식재산권에 관한 논쟁은 수학사의 흥미로운 얘깃거리이다. Cardano와 Scipione del Ferro (1465–1526) 그리고 Tartaglia 간에 얽힌 흥미로운 이야기는《세상을 바꾼 방정식 이야기》[15]를 참조한다.[25)]

삼, 사차방정식의 근의 공식이 알려진 후로 사람들은 자연히 고차 방정식에 관심을 가지게 된다. 1771년 Joseph Louis Lagrange (1736–1813)는「Cardano의《Ars Magna》이후 200년 이상 동안 방정식론의 발전이 없었다」[26)]고 했다지만, 실제로는 산발적이고 단속적이기는 해도 꾸준히 연구가 진행되었다. Jacqueline Stedall의 최근 연구《From Cardano's great art to Lagrange's reflections》[25]가 Cardano 이후 Lagrange에 이르기까지의 방정식론 연구의 궤적을 잘 정리하여 전해준다.

먼저 삼, 사차방정식에 대한 Cardano와 Ferrari의 해법을 일반화하려는 시도가 있었다. 예를 들면, Rafael Bombelli (c. 1526–1572)가 1572년에 출간된 그의 저서《L'Algebra》에서 del Ferro와 Tartaglia의 방법, 즉, Cardano의《Ars Magna》의 해법을 조금 더 체계적으로 다듬었다. 그러면서 그는 삼차방정식 $x^3 = 15x + 4$ 의 해법을 다루는 과정에서 허수 (imaginary number)의 계산을 다루게 된다.[27)] 그러다가 방정식의 연구는 Cardano의 해법의 일반화보다는 방정식의 근과 계수의 관계에 대한 연구로 전환된다.

3.2 방정식의 근과 계수의 관계, 그리고 대수학의 기본정리

방정식의 근과 계수의 관계에 대한 연구로는 François Viète (1540–1603)를 지목할 수 있다. 그는 의회에서 일을 했었는데, 정치적 문제에 휘말려 1584년에서 1589년까지 유배된다. 그는 유배 기간 중인 1588년부터 암호분석을 연구하였는데, 암호 자체가 부호 또는 일종의 기호의 사용이기에 암호분석 연구로 인하여 방정식 연구에서 보다 체계적으로 기호를 사용하게 된 듯하다.

Viète는 당시의 수학 전반에 영향을 미쳤다 [25, p. 19–33]. 그는 대수를 기하와 연결시키려

《세상을 바꾼 방정식 이야기》[15, p. 61] 참조.

25) 참고할 만한 글로 Tony Rothman, Cardano v Tartaglia: The Great Feud Goes Supernatural (`https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1308/1308.2181.pdf`)이 위키페디아에서 Lodovico Ferrari (`https://en.wikipedia.org/wiki/Lodovico_Ferrari`)의 참고문헌으로 인용되어 나온다.

26) J. L. Lagrange, *Réflexions sur la résolution algébrique des équations*, 1770(또는 1771). [25, p. vii]

27) 허수 또는 복소수에 관한 수학사는 Paul Nahin 의 저서《An Imaginary Tale》[17]을 참조한다.

하였는데, 그렇게 하기 위해서는 방정식의 구조를 이해했어야 했다. 특히 수를 기하학적 의미로 이해하려 하였기에 방정식으로 주어지는 근과 계수 등에 의미를 부여할 수 있었다. Viète는 또한 문제를 풀지 않고 내버려두지 않으려 했기에[28] 방정식의 수치적 해법을 제시하였다. 그런 과정에서 근의 속성을 알아야 했는데, 그것이 근과 계수의 관계를 이해하려는 노력으로 이어진 듯하다.

이러한 Viète의 연구는 그가 죽기 전까지 별로 알려지지 않다가 1615년 Alexander Anderson (1592–1620)에 의해《Tractatus duo》로 출판되었다.[29] 그 책의 14장에는 근과 계수의 관계에 관한 4개의 정리가 포함되어 있다. 이때 근은 양수로 제한되었다. 첫 정리를 현대 용어로 풀어 쓰면「$(a+b)x - x^2 = ab$의 근이 $x = a, b$」라는 것이었고, $3x - x^2 = 2$의 근이 $x = 1, 2$ 임을 예로 들었다. 3차, 4차, 5차방정식도 같은 방식으로 다루어졌다.[30]

Viète는 이전의 단편적 지식을 종합하여 방정식 연구의 발판을 마련하였다. 그의 기호의 사용과 방정식의 이해는 17세기 방정식 연구의 초석을 이루며 후대의 수학자들에게 영향을 미쳐 수학 발전에 상당한 기여를 했고 방정식의 근을 변수로 갖는 대칭함수 연구의 문을 연 첫 학자로 평가되기도 한다 [11].

수학사에서 잘 알려져 있진 않지만, Viète의 영향을 받은 수학자로 영국의 Thomas Harriot (1560–1621)이 있다.[31] 그는 Viète의 거의 모든 연구 결과를 면밀히 연구할 수 있었는데, Viète의 기호의 사용을 더욱 간편하게 체계화하였고, 다항방정식을 저차다항식의 곱으로 이해함으로써 방정식의 구조에 대한 이해를 높였다.[32] 그러한 과정에서 방정식의 근과 계수의 관계에 대한 이해도 높아졌다. 그러나 근과 계수의 관계는 방정식의 근이 양수여야 한다는 생각의 제약으로 인하여 현재 학교수학에서 다루어지는 것처럼 간단하진 않았다.

또다른 Viète의 영향을 받은 수학자로는 1629년에《Invention Nouvelle en l'Algebre》를 출판한 Albert Girard (1595–1632)가 있다. 그는 이론보다는 사례를 들어 설명하였다. 예를 들어, 이차방정식 $x^2 = 6x + 40$ 을 $x = 6 + \frac{40}{x}$ 으로 써서 방정식의 근이 정수인 경우 40의 약수가 되어야 함을 말함으로써, 이차항의 계수가 1 인 이차방정식의 정수 근은 상수항의 약수여야 함을 설명하였다. 또 근의 중복과 복소수 근을 포함하여「모든 다항방정식은 자신의 차수와 같은 개수의 근을 가짐」과「근과 계수의 관계」도 주장하였는데, 사차방정식 $x^4 = 4x - 3$을 예로 제시하였다. 이와 같이 Girard는 증명 없이 방정식의 계수로부터 방정식과 근의 성질을 유도하였다.

---

28) For Viète, such a method was essential to his vision of leaving no problem unsolved. [25, p. 29]

29) . . . but the *Tractatus duo* came out only in 1615, edited by Alexander Anderson twelve years after Viète's death. [25, p. 21]

30) 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 설명한 계산은 Stedall [25, p. 27]에 자세하게 설명이 나온다.

31) Harriot은 잘 알려지지 않았지만 Stedall [23]이 최근 그를 집중적으로 연구하였다.

32) Harriot's treatment of polynomials as products of factors opened up a range of new insights. [25, p. 42]

Girard는 방정식의 근의 합, 근의 제곱의 합, 근의 세제곱의 합 등을 방정식의 계수로 나타내었다.[33] 이러한 그의 아이디어가 후대의 수학자들에 의한 대칭함수 연구의 근간이 되었다 [6, 4, 17]. 이러한 내용은 1631년에 출간된 Harriot의 저서 《Praxis》에서도 이론적으로 다루어졌다. 하지만 그는 Harriot을 몰랐고 1632년 37세의 이른 나이로 죽음을 맞이했다.

3차, 4차 방정식의 해를 찾는 데 성공한 후로 고차방정식의 해를 구하기 위한 연구 노력이 있었다. 그러나 고차방정식에 대한 연구는 쉽지 않았고 얼마간 연구의 정체도 겪으며 방정식에 대한 체계적 연구의 필요성이 대두되었다 [6, p. 27–32]. 예를 들어, 방정식의 근을 찾기에 앞서 주어진 수를 해로 갖는 방정식이 무엇인지 알아보려는 노력이 있었다. René Descartes (1596–1650)[34]는 x_1을 해로 가지는 다항방정식 $f(x)$는 그의 인수로 선형(일차) 인수 $(x-x_1)$을 가짐을 말했다 [6]. 이것이 학교수학에서 말하는 「인수정리」 또는 「나머지 정리」인데, 1804년 Paolo Ruffini (1765–1822)가 조립제법에 그 내용을 담았다.[35]

Descartes는 인수정리의 증명을 위해 방정식의 변수 x를 $(x-x_1)+x_1$으로 대치하였다. 예를 들어, $f(x_1) = 0$ 인 이차다항식 $f(x) = x^2 + bx + c$ 에서 x를 $(x-x_1)+x_1$으로 대치하면 $f(x) = ((x-x_1)+x_1)^2 + b((x-x_1)+x_1)+c$ 가 되는데, 이를 전개하여

$$f(x) = (x-x_1)^2 + (2x_1+b)(x-x_1) + f(x_1) = (x-x_1)(x+x_1+b)$$

를 얻음으로써, $f(x)$가 선형인수 $(x-x_1)$로 나누어 떨어짐, 즉, 선형인수를 가짐을 확인할 수 있다. 이러한 논의는 고차 다항방정식에 대해서도 동일하게 적용된다.

인수정리는 결과적으로 「n차 방정식은 기껏해야 n개의 해를 가짐」을 의미하는데, 당시에는 이에 대한 증명이 없었다. 인수정리는 또한 「다항방정식이 선형인수를 몇 개나 가질 수 있는가」 라는 의문도 갖게 했다. 당시의 수학자들은 모든 방정식이 해를 가진다고 믿었는데, 그러면 다항방정식은 결국 차수와 같은 개수의 해를 가진다는 「대수학의 기본정리」로 귀결된다. 대수학의 기본정리에 대한 생각은 Descartes 이전에 이미 Girard도 가지고 있었다. 그는 1629년 「n차 다항방정식이 중복도를 고려하여 n개의 해를 가진다」는 추측을 했지만 그에 대한 증명을 얻기 위해서는 1799년까지 Carl Friedrich Gauss (1777–1855)를 기다려야 했다.

대수학의 기본정리의 증명은 다항식의 연속성이나 실수의 연속체와 같은 내용을 전제하기 때문에 성격상 「대수적」이진 않다 [6, p. 31]. 증명은 1815년 Robert Argand (1768–1822)가 제시하였는데, 몇 년 후 Augustin-Louis Cauchy (1789–18570)가 간단히 정리하였다. 참고로 간략하고 직관적인 증명을 기억해둠도 좋을 듯하다.

- 대수학의 기본정리 (Fundamental Theorem of Algebra). 일차 이상 차수의 모든 다

33) 이때 Girard는 흥미롭게도 Blaise Pascal (1623–1662)의 삼각형을 사용하였다고 한다.

34) Descartes는 1637년 《Discours de la Méthode (방법서설)》를 출판하였고, 그 책의 부록으로 수학 내용을 담은 《La Geometrie》가 포함되었다.

35) 어떤 블로그(http://blog.daum.net/jhr2580/2279)에 〈조립제법을 만든 $\cdots$〉 이라는 제목으로 『조립제법을 조선인 「조립제」가 만든 것』으로 설명한 글이 있다. 하지만 그 글은 흥미를 위한 허구의 글이다.

항방정식 $f(z) = 0$ 은 (복소수 근을 허용하여) 하나 이상의 근을 갖는다.

증명 [6, p. 32–34]. 다항식 $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ (단, $a_0 \neq 0$)이 주어졌을 때 $|\,a_0\,| < R/2$ 인 큰 실수 $R = |z^n| = |z|^n$ 을 생각한다. 함수값은 최고차 항이 주도하므로

$$|\,f(z) - z^n\,| = |\,a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0\,| \leq \frac{1}{2}|z^n| = \frac{1}{2}R$$

이 된다. 그러면 삼각부등식에 의하여 $\frac{1}{2}R = |z^n| - \frac{1}{2}R \leq |f(z)| \leq |z^n| + \frac{1}{2}R = \frac{3}{2}R$ 가 성립하여, $|z|^n = R$ 인 원 $\{z : |z| = R\}$ 의 f 에 의한 상(image)은 원점을 n 번 감아도는 원으로서 반지름이 $\frac{1}{2}R$과 $\frac{3}{2}R$인 환형 고리 안에 놓인다. 이제 반지름 $R \to 0$을 생각하면 $z \to 0$ 이 되며, 함수의 연속성(continuity)에 의해 환형고리 안의 상이 연속적으로 한 점 $f(0) = a_0$ 로 쪼그라든다. 그러면 $f(z_0) = 0$가 되는 복소수 z_0가 존재해야 한다. •

3.3 대칭함수

대칭함수란 그 함수에 사용된 변수들을 서로 교환하여도 함수 자체에 아무런 변화가 발생하지 않는 함수를 말한다 [11].[36] 방정식의 근과 계수의 관계에서 알 수 있듯이, 근을 변수로 한 계수가 대칭함수의 대표적 예이다. x_1과 x_2를 근으로 갖는 이차방정식 $x^2 + bx + c = 0$의 경우, $x_1 + x_2 = -b$ 와 $x_1 x_2 = c$ 가 근과 계수의 관계인데, 계수 $-b$ 와 c 가 곧 방정식의 근 x_1과 x_2를 변수로 갖는 대칭함수가 된다. 이때 두 근 x_1, x_2가

$$\frac{(x_1 + x_2) \pm (x_1 - x_2)}{2} = \frac{(x_1 + x_2) \pm \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}}{2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

로 주어짐을 알 수 있어 대칭함수(계수) b, c가 방정식의 해를 줌을 알 수 있다. 이와 같이 방정식의 근을 변수로 생각하여 계수를 대칭함수로 이해함은 일종의 사고의 도약이었다. 그리고 대칭함수는 방정식의 근과 계수의 관계에 관한 연구로부터 비롯한다.

대수학의 기본정리가 고차 다항방정식이 차수와 같은 개수의 근을 가짐을 보장해주지만 실제로 근을 구하는 데는 아무런 도움도 되지 않았다. 하지만 방정식의 근의 존재, 즉, $x_1, \ldots, x_n$ 이 방정식의 근임과 방정식의 선형인수에 의한 분해, 즉,

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = (x - x_1)\cdots(x - x_n) = 0$$

가 동치임을 인지함은 좋은 정보였다. 이때 방정식의 근과 계수의 관계는

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = -a_{n-1},\ \sum_{i<j} x_i x_j = a_{n-2},\ \sum_{i<j<k} x_i x_j x_k = -a_{n-3},\ \ldots\ ,\ x_1 \cdots x_n = (-1)^n a_0$$

로 주어지는데, 이것이 Viète와 Girard가 가졌던 생각이었고, 이들 (부호를 포함한) 계수들이 곧 근을 변수로 갖는 대칭함수가 되었다. 우리는 이러한 대칭함수들을 특별히 「기본대칭함수 (elementary symmetric functions)」라고 부른다.

36) 변수끼리 바꾸어도 아무런 변화가 발생하지 않는 다항식 $p(X_1, X_2, \ldots, X_n)$을 대칭다항식이라고 한다: $p(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \ldots, X_{\sigma(n)}) = p(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ $(\forall \sigma \in S_n)$, 여기서 S_n은 대칭군을 의미한다. [30]

대수학의 발전 과정을 보면, 대칭함수에 관한 연구는 수학에 기호주의(symbolism)가 도입되어 어느 정도 발전하기까지 기다림이 있어야 했다. Cardano가 삼차방정식에 대하여 근과 계수의 관계를 말로 구술하였을 때에는 그 의미가 뚜렷하지 않았다. 실제로 수를 나타내기 위한 기호를 처음 도입한 Viète 이전에는 대칭함수와 관련된 자료는 (거의) 없다. 그래서 우리는 「대칭함수를 이해하기 위해서는 기호의 사용이 절대적으로 필요했다」고 말할 수 있다. 실제로 기호를 사용해야 대칭성을 직접 확인할 수 있기 때문이다.

Viète가 대칭함수를 상상했던 16세기 후반에는 방정식의 「근」의 개념이 오늘날의 그것과는 달랐다. Viète도 Cardano와 마찬가지로 양수 근만을 생각하였고, 음수나 허수(복소수) 근은 근으로 생각하지 않았다. 그러나 근을 기호로 표현하고 변수로 생각함으로써 음수 해와 복소수 해에 대한 계산도 자연스럽게 포함될 수 있었다.

Girard는 Viète의 결과를 확장시키려 했다. 그는 양수 근뿐만 아니라 음수 근과 불가능한 근(impossible/imaginary root)도 근으로 생각했던 듯하다. 그러면서 근들에 의한 기본대칭함수인 방정식의 계수 $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + \cdots$, $x_1x_2x_3 + \cdots$ 등을 생각했다. 그는 또한 근들의 멱수의 합 $x_1^k + x_2^k + x_3^k + \cdots \ (k = 2, 3, \dots)$에도 관심을 두었던 듯하다. 그런데 이들은 기본대칭함수와는 다른 종류의 대칭함수이다. 실제로 그는《Invention nouvelle en l'algèbre》(1629)에서 방정식

$$x^n - A\,x^{n-1} + B\,x^{n-2} - C\,x^{n-3} + \cdots = 0$$

에 대하여, $n = 4$의 경우, 근의 멱수의 합이

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = A, \quad \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = A^2 - 2B, \quad \sum_{i=1}^{4} x_i^3 = A^3 - 3AB + 3C, \ \dots$$

가 됨을 제시하였다.

Girard는 연역적 논리보다는 사례를 제시하여 결과를 주장하였다. 그래서인지 17세기의 수학자들은 Girard의 결과에 그다지 주목하지 않았다. 그러나 방정식과 계수에 의한 함수의 연구는 지속되었고, 1693년에는 John Wallis (1616–1703)의《De Tractatus Algebra, Historicus et Practicus》가 출판되었다. 그렇게 18세기로 넘어서며, 1707년에 출판된 Isaac Newton (1642–1726)의《Arithmetica Universalis》에 다수의 정리와 함께 지금은 Newton's theorem으로 알려진 방정식의 근의 멱수에 관한 정리인 Girard의 주장의 증명도 포함되었다. 이후, Colin Maclaurin (1698–1746), Leonhard Euler (1707–1783)와 Lagrange 등은 Newton 정리의 증명과 방정식론의 일반화를 위한 연구를 이어갔다.

Joseph Louis Lagrange (1736–1813)는 1770년에서 1771년에 걸쳐 출판된《Réflexions sur la résolution algébrique des equations》에서 Cardano부터 시작된 200여년 간의 방정식 연구를 총정리하였다. 특히 방정식의 근을 구하기 위한 보조방정식(resolvant equation)의 구성을 위해 근들간의 순열에 의한 효과를 집중적으로 연구하였다. 이는 후일 5차 이상의

다항방정식에 대한 근의 공식의 존재 가능성을 불식시킨 Abel의 정리와 Galois에 의해 싹튼 군론의 단초가 된다.

Lagrange는 또한 방정식의 근을 변수로 갖는 함수가 방정식의 계수로 표현될 수 있음을 말한 첫 수학자였다 [11]. 그러나 Edward Waring (1736–1798) 역시 대칭함수에 관한 3개의 중요한 정리를 제시한 《Meditationes Algebraicae》(1770)에서 같은 내용을 발표하였다.[37] 이를 현대 용어로 풀어 쓴 것이 대칭함수의 기본정리이다.

- **대칭함수의 기본정리** (Fundamental Theorem of Symmetric Functions). 모든 대칭함수는 기본대칭함수의 다항함수로 주어진다. •

그러나 「대칭함수의 기본정리」라는 용어를 누가 처음 사용했는지는 확인하기가 어렵다. 다만 Meyer Hirsch (1765∼70–1851)의 저서 《Algebra》의 머릿말에 「대칭함수가 다른 모든 것의 기본」이라는 말이 나온다고 한다.[38] 1856년의 Arthur Cayley (1821–1895)의 글 〈Memoir on the Symmetric Functions of the Roots of an Equation〉에도 Hirsch가 대칭함수의 표를 제공하고 있음을 언급하고 있다.

참고로, 대칭함수의 기본정리가 Galois 이론으로 정리되기까지의 의미는 수학사의 관점과 교육의 관점, 그리고 수학적 관점에서 논의를 제공한 Ben Blum-Smith와 Samuel Coskey의 논문 [7]을 참조한다.

4 결론

우리는 수학에서 자주 언급되는 대칭과 기호의 사용 그리고 방정식과 분해 및 분할과 같은 개념의 의미를 생각해보는 한편, 대칭함수의 유래에 초점을 맞추어 Cardano에서 Viète와 Girard, Descartes와 Waring 그리고 Lagrange로 이어지는 방정식의 역사를 간략히 살펴보았다. 그러면서 우리는 수학(이나 지식)의 발전 과정에서 나타나는 일면을 관찰할 수 있었다. 방정식과 대칭함수의 이야기에서 관찰했듯이, 우리는 학생들 나름의 생각과 또 그의 오류나 실수도 교육의 과정으로 봐야한다는 수학교육의 한 관점을 그려볼 수 있을 것 같다.

J. Stedall [25, p. ix]은 「수학은 많은 사람들의 노력의 결실이지만, 꼭 성공적인 연구 결과뿐만 아니라 무르익지 않고, 잠정적인 생각일지라도 그리고 풀다만 문제나 잘못된 결과라고 하더라도 그러한 노력이 쌓여 수학이 발전한다」고 말한다.[39] D. M. Bressoud도 자신의 저서 《Proofs and Confirmation》 [8]에서 교대부호행렬(alternating sign matrix)에 관련된

37) Waring이 현대적인 대칭함수 연구의 선구자로 평가받기도 한다 [11].

38) "I begin with symmetric functions; they are the foundation of all others." [11]. 이와 유사한 언급은 「David E. Smith, *History of Mathematics* (2nd ed.), p. 470」에서도 흔적을 볼 수 있다.

39) mathematics is the result of a cumulative endeavor to which many people have contributed, and not only through their success but through half-formed thoughts, tentative proposals, partially worked solutions, and even outright failures. [25, p. ix]

역사를 풀어나가면서 상상이나 직관과 추측 그리고 다양한 분야에서의 실패와 성공의 거듭된 연구 노력에 의한 수학의 발전 사례를 보여주었다. 대칭함수의 시작도 처음부터 이론이 정립되었던 것은 아니고, Viète의 상상력과 기호의 사용, Girard에 의한 추측과 연구가 후일 대칭함수 이론으로 발전하게 된다.

학교 수업에서 수학사 활용의 교육효과는 이미 많이 논의되어 왔다. 우리나라에서도 유사한 논의가 있음은 교육계에 잘 알려져 있다. 미국은 조금 더 적극적 행태를 보이는 듯하다. 예를 들어, 미국수학협회(MAA)[40]는 2001년 위스콘신 주 메디슨에서 MAA MathFest를 개최하였다. 그때의 수학 페스티벌에서는 전통적인 주제가 주를 이루었다. 2002년에는 버몬트 주 벌링톤에서 최근 200년의 수학사를 활용한 교육을 핵심 주제로 삼아 MathFest를 개최하였다. 많은 좋은 발표가 있었고, 그결과를 모아 《From Calculus to Computers》[22]를 출간하였다. 특히 본 글의 내용과 관련하여, 군론을 다룬 첫 논문을 발표한 Cayley의 논문을 교육 소재로 삼은 논문 [18]과 현대대수학 교육에 Galois의 아이디어를 활용한 논문 [14]를 들 수 있다. 미국수학교사협의회(NCTM)도 1993년에 이미 수학교육에 활용할 수 있는 수학사 항목을 요약 정리한 책 《Historical Topics for the Mathematics Classroom》 [5]을 출간하였다. 여기에 대칭함수도 하나의 항목으로 나온다. 방정식과 관련한 수학사에서 그다지 주목하지 않았던 대칭함수에 관한 이야기의 정리는 수학교육을 위한 참고자료로 유용하게 사용될 수 있을 것 같다.

포석이란 바둑에서 사용하는 용어로 어떤 상황에 처하기 전 그에 대한 대비 내지 준비를 의미하는 용어로 사용된다. 학교교육이 미래의 삶을 위한 준비라는 의미에서 학교교육의 학습내용은 미래를 대비한 포석에 해당할 것이다. 최근 학교교육에서는 학생들의 학습 부담을 경감시켜주기 위해 교육 내용을 감축하고 있다. 특히 최근 학교 수학교육의 내용 중에 「기하와 벡터」나 「행렬」 등이 교육내용에서 제외되었다. 그러나 이러한 학습내용의 축소가 제4차 산업혁명이나 인공지능 시대를 대비한 올바른 포석인지는 숙고해보아야 할 문제인 것 같다.

평가를 목적하는 것이 아닌 그저 이야기로 들려줄 수 있는 수업 내용으로 다양한 용어와 개념들을 접해두는 것은 학생들의 향후의 공부를 위한 좋은 포석이 될 수도 있다. 최소한, 중요하게 사용될 용어나 개념을 미리 습득해둠은 교육학 관점에서 긍정적 의미를 내포한다. 방정식에 관한 역사를 살펴보며, 근과 계수의 관계가 대칭함수로 발전하고, 그 과정에서 「대칭」이나 「분할」, 「기저」 등의 새로운 용어나 개념들을 경험함은 교육의 관점에서 미래를 위한 하나의 좋은 포석이 될 것이다.

수학을 가르치는 교육자의 입장에서, 학생들의 상상력이나 직관과 추측을 정립된 이론과 비교하여 그 괴리로 인해 틀린 생각으로 치부하는 대신, 학생들의 상상을 부추길 수 있는 다양한 소재를 공급하고 그들의 상상에 용기를 북돋우고 조금 더 논리적 체계를 갖춘 생각으로

40) Mathematical Association of America https://www.maa.org/

변모시켜 새로운 생각의 싹을 틔울 수 있도록 도모하는 것이 교육자의 좋은 자세가 될 것이다.

References

1. Martin Aigner, Günter Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, 3rd edition, Springer-Verlag, 2004. 이상욱, 고영미, 강미현 옮김, 하늘책의 증명, 교우사, 2008.
2. George Andrews, Kimmo Eriksson, *Integer Partitions*, Cambridge University Press, 2014.
3. Avner Ash, Robert Gross, *Elliptic Tales*, Princeton University Press, 2012.
4. I. G. Bashmakova, G. S. Smirnova, *The Beginnings & Evolution of Algebra*, MAA, 2000.
5. J. K. Baumgart, D. E. Deal, B. R. Vogeli, A. E. Hallerberg (eds.), *Historical Topics for the Mathematics Classroom*, NCTM, 1993 (originally, 1969).
6. Jörg Bewersdorff, *Galois Theory for Beginners: A Historical Pespective*, AMS, 2006.
7. Ben Blum-Smith, Samuel Coskey, The Fundamental Theorem on Symmetric Polynomials: History's First Whiff of Galois Theory. https://arxiv.org/abs/1301.7116v5
8. David M. Bressoud, *Proofs and Confirmations: The Story of the Alternating Sign Matrix Conjecture*, Cambridge University Press, 1999.
9. Apostol Doxiadis, *Uncle Petros and Goldbach's Conjecture: A Novel of Mathematical Obsession*, Bloomsbury USA, 2001. 아포스톨로스 독시아디스 지음, 정희성 옮김, 강석진 감수, 사람들이 미쳤다고 말한 외로운 수학 천재 이야기, 생각의 나무, 2000.
10. David Fontana, *The Secret Language of Symbols: A Visual Key to Symbols Their Meanings*, Chronicle Books, 1994. 데이비드 폰타나 지음, 공민희 옮김, 상징의 모든 것, 사람의 무늬, 2011.
11. H. Gray Funkhouser, A Short Account of the History of Symmetric Functions of Roots of Equations, *The American Mathematical Monthly* 37(7)(1930), 357–365.
12. Hardy Grant, Israel Kleiner, *Turning Points in the History of Mathematics*, Birkhäuser, 2015.
13. Koh Youngmee, Kim Young Wook, Ree Sangwook (eds), 2014 KSHM-NIMS Summer School, *Proceedings of the Korean Society for History of Mathematics* 24(1)(2014).
14. Matt D. Lunsford, Using Galois' Ideas in the Teaching of Abstract Algebra, in *From Calculus to Computers* (Shell-Gellasch and Jardine des.), MAA, 2005.
15. Dana Mackenzie, *The Universe in Zero Words: The Story of Mathematics as Told through Equations*, Princeton University Press, 2012. 다나 매켄지 지음, 오채환, 이상욱, 이장주 옮김, 세상을 바꾼 방정식 이야기, 사람의무늬, 2014.
16. Joseph Mazur, *Enlighting Symbols: A Short History of Mathematical Notation and Its Hidden Powers*, Princeton University Press, 2014.
17. Paul J. Nahin, *An Imaginary Tale: The Story of* $\sqrt{-1}$, Princeton University Press, 1998.
18. David J. Pengelley, Arthur Cayley and the First Paper on Group Theory, in *From Calculus to Computers* (Shell-Gellasch and Jardine des.), MAA, 2005.
19. Ree Sangwook, Koh Youngmee, MaPhiA: Mathematics, Philosophy, and Artificial Intelligence, *Journal for History of Mathematics* 32(5)(2019), 217–231. 이상욱, 고영미, 수학, 철학, 그리고 인공지능, *Journal for History of Mathematics* 32(5)(2019), 217–231.
20. Constance Reid, *Hilbert*, Springer-Verlag, 1996. 콘스탄스 리드, 이일해 옮김, 현대수학의 아버지 힐베르트, 사이언스북스, 2005.

21. Bruce E. Sagan, *The Symmetric Group: Representations, Combinatorial Algorithms and Symmetric Functions*, Wadworth & Brooks/Cole, 1991.
22. Amy Shell-Gellasch, Dick Jardine (eds.), *From Calculus to Computers: Using the last 200 years of Mathematical History in the Classroom*, MAA, 2005.
23. Jacqueline Stedall, Symbolism, combinations, and visual imagery in the mathematics of Thomas Harriot, *Historia Mathematica* 34 (2007), 380–-401.
24. Jacqueline Stedall, *Mathematics Emerging: A Sourcebook 1540–1900*, Oxford University Press, 2008.
25. Jacqueline Stedall, *From Cardano's geeat art to Lagrange's reflections: filling a gap in the history of mathematics*, European Mathematical Society, 2011.
26. Ian Stewart, *Why Beauty is Truth: The History of Symmetry*, Basic Books, 2007.
27. John Stillwell, *Mathematics and Its History* (3rd ed.), UTM, Springer, 2010.
28. Hermann Weyl, *Symmetry*, Princeton University Press, 1952.
29. Wikipedia, Group theory. https://en.wikipedia.org/wiki/Group_theory (10 July 2020)
30. Wikipedia, Symmetric polynomial. https://en.wikipedia.org/wiki/Symmetric_polynomial (10 July 2020)