JKIICE Journal of the Korea Institute of Information and Communication Engineering

한국정보통신학회논문지 Vol. 25, No. 4: 501~507, Apr. 2021

미분가능 신경망을 이용한 옵션 가격결정

지상문*

Option Pricing using Differentiable Neural Networks

Sang-Mun Chi*

*Professor, Department of Computer Science, Kyungsung University, Pusan, 48434 Korea

요 약

신경망은 미분가능한 활성화 함수를 사용하는 경우에는 입력변수에 대하여 미분가능하다. 본 연구에서는 신경망의 근사 능력을 향상시키기 위하여 신경망의 그래디언트와 헤시안이 블랙-숄즈 미분방정식을 만족하도록 한다. 본 논문은 확률 미분방정식과 블랙-숄즈 편미분 방정식이 옵션 가격과 기초자산의 미분관계를 표현하는 옵션 가격결정에 제안한 방법을 사용한다. 이는 옵션 가격의 일차와 이차미분은 금융공학에서 중요한 역할을 하므로 미분 값을 쉽게 얻을 수 있는 제안한 방법을 적용할 수 있기 때문이다. 제안한 신경망은 (1) 확률 미분방정식이 생성하는 옵션가격의 샘플 경로와 (2) 각 시간과 기초자산 가격에서 블랙-숄즈 방정식을 만족하도록 학습한다. 실험을 통하여 제안한 방법이 옵션가격과 일차와 이차 미분 값을 정확히 예측함을 보인다.

ABSTRACT

Neural networks with differentiable activation functions are differentiable with respect to input variables. We improve the approximation capability of neural networks by using the gradient and Hessian of neural networks to satisfy the differential equations of the problems of interest. We apply differential neural networks to the pricing of financial options, where stochastic differential equations and the Black-Scholes partial differential equation represent the differential relation of price of option and underlying assets, and the first and second derivatives of option price play an important role in financial engineering. The proposed neural network learns - (a) the sample paths of option prices generated by stochastic differential equations and (b) the Black-Scholes equation at each time and asset price. Experimental results show that the proposed method gives accurate option values and the first and second derivatives.

키워드 : 미분 신경망, 확률 미분방정식, 블랙-숄즈 방정식, 옵션 가격결정

Keywords : Differential neural networks, Stochastic differential equations, Black-scholes equation, Option pricing

Received 1 February 2021, **Revised** 24 February 2021, **Accepted** 8 March 2021

*** Corresponding Author** Sang-Mun Chi(E-mail:smchiks@ks.ac.kr, Tel:+82-51-663-5146)
Professor, Department of Computer Science, Kyungsung University, Pusan, 48434 Korea

Open Access http://doi.org/10.6109/jkiice.2021.25.4.501 print ISSN: 2234-4772 online ISSN: 2288-4165

Ⅰ. 서 론

신경망은 최근에 영상 이해, 기계번역, 음성인식, 음악생성, 약물탐색을 포함한 여러 분야에서 높은 성능을 보이고 있다[1-5]. 이러한 분야에서의 성공은 신경망이 함수의 입력과 출력사이의 수학적 관계식을 알지 못해도 입력과 출력 자료의 관계를 학습하여 정확하게 근사하는 능력이 있기 때문이다. 하지만, 금융, 유체역학, 양자역학과 확산현상 등을 지배하는 미분방정식이 존재하므로, 이러한 방정식을 추가적으로 적용하는 신경망은 더욱 정확한 근사가 가능할 것이다. 본 논문에서는 신경망이 주어진 문제의 미분방정식을 만족하는 정도를 신경망의 학습에 반영한다. 신경망의 미분을 위해서는 수치 근사가 아닌 연쇄법칙을 사용하여 해석적인 방법으로 미분을 수행하는 자동미분[6-8]으로 정확한 미분 값을 얻는다.

제안한 방법을 옵션 가격결정 문제에 적용하여 효과를 알아본다. 옵션 가격은 블랙-숄즈 편미분 방정식[9]을 만족하고, 옵션 가격의 미분값은 미래 자산 가격의 헤지(hedge)나 투기 등의 실제적인 응용에 사용된다[10-12]. 따라서 신경망의 미분을 모델링에 반영하는 본 논문의 방법의 효과를 검증하기에 적합하다. 대부분의 다차원 옵션은 일반적인 해가 존재하지 않으므로 유한차분법(Finite Difference Method:FDM), 몬테카를로 모의(Monte Carlo:MC), 퓨리에 방법 [10-13] 등의 수치근사법으로 옵션가격과 미분값을 구한다. 본 논문은 MC 모의에서 사용하는 확률 미분방정식(Stochastic Differential Equation:SDE)으로 자산 가격 서열을 생성하여 학습자료로 사용하고, 블랙-숄즈 방정식의 미분관계를 신경망이 만족하도록 한다. 이 방법은 FDM이 처리할 수 없는 고차원 옵션의 처리를 가능하게 한다.

신경망은 옵션의 가격결정에 응용되는 연구가 활발한[14-18], 본 논문의 방법은 신경망의 학습에 신경망의 미분을 이용하는 방법[8,16]과 관련되어 있다. 본 논문에서는 SDE를 사용하여 모든 시간간격에서 옵션가격을 생성하고, 자동미분으로 신경망의 정확한 헤시안을 구하는 반면, 논문[16]에서는 경계값에서의 옵션가격을 사용하고, 수치적인 방법으로 헤시안을 계산하다. 논문[8]에서는 자동미분을 사용하지만, 블랙-숄즈 방정식을 반영한 학습을 수행하지는 않는다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서 다차원 옵션의 가격결정 이론과 수치적 근사를 알아보고, 3장에서 SDE와 블랙-숄즈 방정식을 신경망의 구성에 적용하는 방법을 제안한다. 4장에서 제안한 방법을 실험을 통하여 효율성을 검증하고, 5장에서 결론을 맺는다.

Ⅱ. 다차원 옵션의 가격과 그릭스 계산

이장에서는 다차원 옵션의 가격과 옵션의 일차와 이차 미분인 그릭스를 구하는 방법을 설명한다. 유러피안 옵션이란 옵션의 보유자가 옵션거래의 대상이 되는 자산을 일정한 만기일 T에 행사가격(strike price) K로 미리 정해진 가격에 구입하거나(call option) 팔 수 있는(put option) 권리를 말한다. 따라서 이러한 권리는 자체로 가격을 갖고, 옵션가격 또는 프리미엄이라고도 한다. 자산 i의 시간 t에서의 가격을 $S_i(t), i=1,2,\cdots,n$라 하고, 다음의 기하브라운 운동을 만족한다고 하자.

$$dS_i(t) = rS_i(t)dt + \sigma_i S_i(t) d\widetilde{W}_i(t), \tag{1}$$

여기서 r은 무위험 이자율, σ_i는 자산 i의 변동성, $\widetilde{W}_i(t)$는 위험중립 확률에서 브라운 운동이다. 공분산 $Cov(\widetilde{W}_i(t), \widetilde{W}_j(t)) = \rho_{ij}t$ 이라면, 상관관계가 있는 브라운 운동 $\widetilde{W}_i(t)$들은 $\sqrt{t}L_iZ(t)$로 표시할 수 있는데, L_i는 $n\times n$ 행렬 L의 i행이라고 하고, Σ의 i,j원소가 ρ_{ij}이고 행렬 L은 $LL^{'}=\Sigma$인 촐레스키 분해의 행렬이고, $'$은 행렬전치이다. 이러한 정의에 따라, 시간 t_1과 t_2 간의 자산의 가격은 다음과 같이 표현된다[10-12].

$$\begin{aligned} S_i(t_2) &= S_i(t_1) \times \\ &\exp((r-\frac{1}{2}\sigma_i^2)(t_2-t_1) + \sigma_i\sqrt{t_2-t_1}L_iZ(t_1)). \end{aligned} \tag{2}$$

본 논문에서 실험대상으로 사용하는 교환옵션(exchange option)은 식 (2)로 생성되는 두 개의 자산 $(i=1,2)$이 만기일 T가 되었을 때, 하나의 자산을 다른 자산으로 교환할 수 있는 권리로서 에너지 시장에서 사용되는 옵션이다. 이 옵션의 만기 지급금(payoff)은

$$V(T) = \max(S_1(T) - S_2(T), 0). \tag{3}$$

논문[19]에서 교환옵션의 시간 t에서의 가격 $u(t,S_1,S_2)$를 해석적으로 다음과 같이 구하였다.

$$u(t,S_1,S_2) = S_1 N(d_1) - S_2 N(d_2) \tag{4}$$

여기서 $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}$,

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left[\ln\left(\frac{S_1}{S_2}\right) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)\right],$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{\frac{1}{2}z^2} dz.$$

옵션 가격의 미분들을 그릭스(Greeks)라고 하고, 여러 위험 관리에 사용되므로 이를 정확하게 구하는 것이 중요하다. 예를 들어, 매도한 옵션은 옵션가격을 현재 자산의 가격으로 미분한 델타 값만큼 보유하면 위험을 상쇄할 수 있고, 다른 파라미터에 대한 미분값도 위험을 측정하거나 관리하기 위해서 사용된다. 다음은 그릭스에서 델타, 감마, 세타에 대한 정의이다.

$$\Delta_i = \frac{\partial u}{\partial S_i},\ \Gamma_{ij} \equiv \frac{\partial \Delta_i}{\partial S_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial S_i \partial S_j},\ \Theta = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{5}$$

교환옵션의 그릭스는 식 (4)를 직접 미분하여 얻을 수 있다. 아래식은 $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{1}{2}x^2}$ 이고 $\frac{\phi(d_1)}{\phi(d_2)} = \frac{S_2}{S_1}$ 임을 사용하여 구한다.

$$\Delta_1 = N(d_1),\ \Gamma_{11} = \frac{\phi(d_1)}{S_1\sigma\sqrt{T-t}}, \tag{6}$$

$$\Theta = -\frac{\sigma}{4\sqrt{T-t}}[S_1\phi(d_1) + S_2\phi(d_2)].$$

그러나 대부분의 다차원 옵션은 해석적인 옵션가격과 그릭스가 존재하지 않으므로 FDM이나 MC 모의 등의 수치 근사를 사용하여 값을 계산한다. FDM은 저차원 문제는 정확하고 빠른 계산이 가능하나, 높은 차원에서는 다차원의 격자구성이 어려워 사용하지 않는다. MC 방법은 다양한 형태의 다차원 옵션의 가격결정에 사용하지만, 정확도를 높이기 위한 계산량이 크다.

FDM은 다음의 블랙-숄즈 방정식에 기반하여 다차원 자산의 가격과 시간을 이산화한다[10,11].

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_i\sigma_j\rho_{i,j}S_iS_j\frac{\partial^2 u}{\partial S_i\partial S_j} + r\sum_{i=1}^{n}S_i\frac{\partial u}{\partial S_i} = ru. \tag{7}$$

본 논문에서는 이산화한 자산가격의 격자크기를 h, 시간 격자의 크기를 k로 나타내고, 자산가격에 대해서는 중앙차분, 시간에 대해서는 전방차분을 사용하였다. 만기시의 옵션가격과 초기 자산가격을 사용하여 식 (7)의 이산화된 연립방정식을 풀어서 자산가격 $u(\circ)$를 얻는다. 자산가격 $u(\circ)$에서 다음 그릭스를 계산한다.

$$\Delta_i = \frac{u(0,S_1,...,S_i+h,...,S_n) - u(0,S_1,...,S_i-h,...,S_n)}{2h},$$

$$\Gamma_i = \frac{u(0,...,S_i+h,...) - 2u(0,...,S_i,...) + u(0,...,S_i-h,...)}{h^2},$$

$$\Theta = \frac{u(k,S_1,...,S_n) - u(0,S_1,...,S_n)}{k}. \tag{8}$$

MC 모의는 식 (2)에 따라 자산가격의 경로를 만들고, 이러한 경로를 평균하여 옵션가격을 계산한다.

$$V(t) = E_Q[e^{-r(T-t)}V(T)|F(t)], \tag{9}$$

여기서 $V(T)$ 식 (3)과 같은 만기지급금이고, $F(t)$는 식 (1)의 브라운 운동 $\widetilde{W}_i(t)$의 여과(filtration), Q는 위험중립 확률척도이다[10-12]. 그릭스는 식 (9)의 자산가격을 미분하여 얻는다. 델타는 식 (9)에서 $e^{-r(T-t)}V(T)$를 먼저 미분하고, 기댓값을 취하는 PW(PathWise derivative estimate)[12]를 사용한다. 교환옵션은 $e^{-r(T-t)}[S_1(T) - S_2(T)]I(S_1(T) > S_2(T))$을 $t=0$에서 $S_1(0)$로 먼저 미분한다. 여기서 $I()$는 지시함수를 나타낸다.

$$\frac{de^{-rT}V(T)}{dS_1(0)} = e^{-rT}\frac{dV(T)}{dS_1(T)}\frac{dS_1(T)}{dS_1(0)} \tag{10}$$

$$= e^{-rT}I(S_1(T) > S_2(T))\frac{S_1(T)}{S_1(0)}.$$

마찬가지로, 세타를 구하기 위해서 t로 미분하면

$$\frac{de^{-r(T-t)}V(T-t)}{dt}\Big|_{t=0} = e^{-rT}I(S_1(T) > S_2(T))$$

$$[S_1(T)(\frac{\sigma_1^2}{2} - \frac{\sigma_1 L_1 Z}{2\sqrt{T}}) - S_2(T)(\frac{\sigma_2^2}{2} - \frac{\sigma_2 L_2 Z}{2\sqrt{T}})]. \tag{11}$$

식 (10)과 (11)을 여러 샘플경로에 대해서 구하고 평균을 구하면 델타와 세타가 된다.

한번 미분한 식 (10)이 미분이 불가능하여, 이를 다시 미분하여 감마를 계산할 수 없다. 본 논문에서는 다른 접근방법인 LR(Likelihood Ratio method)를 사용한다[12]. 파라미터 $\alpha = (S_1(0),...,S_n(0))$에 대한 확률밀도

함수가 g_α인 경우에 기댓값 E_α를 계산하는 과정에서 적분과 미분을 수행하는 순서를 바꾸어서 감마를 얻는데 이용한다. 즉,

$$\frac{d}{d\alpha}E_\alpha[V(T)] = \int_{R^n} V(T)\frac{d}{d\alpha}g_\alpha(x)dx \tag{12}$$
$$= \int_{R^n} V(T)\frac{\dot{g}_\alpha(x)}{g_\alpha(x)}g_\alpha(x)dx = E_\alpha[V(T)\frac{\dot{g}_\alpha(x)}{g_\alpha(x)}]$$

벡터의 i번째 성분이 $\mu_i = \ln(S_i(0)) + (r - \frac{1}{2}\sigma_i^2)T$인 $\mu(\alpha)$, i번째 행에 σ_i를 가지는 대각행렬을 A라 할 때 $\widetilde{\Sigma}(\alpha) = TA\Sigma A'$이면 정규분포 $N(\mu(\alpha), \widetilde{\Sigma}(\alpha))$를 따르는 $Y = (Y_1, Y_2, ..., Y_n)'$의 확률밀도함수는

$$g_\alpha(Y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|\widetilde{\Sigma}(\alpha)|}} \tag{13}$$
$$\exp[-\frac{1}{2}(y-\mu(\alpha))'\widetilde{\Sigma}(\alpha)^{-1}(y-\mu(\alpha))].$$

$LL' = \Sigma$이고, Z는 표준 정규분포 일 때, Y를 $\mu(\alpha) + \sqrt{T}ALZ$로 생성하면 $S_i(T)=\exp(Y_i)$는 식 (2)의 분포를 갖는다[12]. 감마를 구하기 위해서, 식 (12)에서 기댓값안의 $V(T)\frac{\dot{g}_\alpha(x)}{g_\alpha(x)}$를 먼저 미분한다.

$$\frac{d}{dS_1(0)}[V(T)\frac{\dot{g}_\alpha(Y)}{g_\alpha(Y)}] = \tag{14}$$
$$e^{-rT}\frac{(Z'L^{-1}A^{-1})_1}{\sqrt{T}}\frac{S_2(T)}{S_1^2(0)}I((S_1(T) > S_2(T)),$$

여기서 $\frac{\dot{g}_\alpha(x)}{g_\alpha(x)} = \frac{d}{d\alpha}log\, g_\alpha(x)$이고, 식 (13)에서 $\mu(\alpha)$에서 $S_i(0)$에 관련된 값은 u_i라는 사실을 이용하고, $()_1$표시는 벡터에서 첫 번째 원소를 나타낸다. 감마는 식 (14)를 여러 번 생성하고 이를 평균하여 계산한다.

Ⅲ. 확률 미분방정식과 블랙-숄즈 방정식의 학습

이장에서는 확률 미분방정식과 블랙-숄즈 방정식을 학습하여 만기일 이전의 여러 시간에서 옵션 가격을 결정하는 신경망을 제안한다.

3.1. 신경망 구성

만기일 T를 $N(=200)$개의 균일한 간격으로 분할하여 $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N = T$를 구성하고, 식 (2)에 따라 자산가격 $S(t_k) = (S_1(t_k), S_2(t_k), ..., S_n(t_k))$를 생성한다; 초기값 $S(t_0)$는 주어진다. 시간 t_k와 자산가격 $S(t_k)$를 입력으로 하고, 출력으로 옵션가격 $u(t_k, S(t_k))$을 예측하는 다음의 신경망 $NN(t_k, S(t_k))$을 구성한다.

$$NN^1(t_k, S(t_k)) = f[w^1(t_k, S(t_k)) + b^1], \tag{15}$$
$$NN^2(t_k, S(t_k)) = f[w^2 NN^1(t_k, S(t_k)) + b^2],$$
$$\cdots$$
$$NN^l(t_k, S(t_k)) = w^l NN^{l-1}(t_k, S(t_k)) + b^l,$$

여기서 NN^m은 m번째 층이고, f는 무한번 미분 가능한 활성화함수인 소프트플러스 $\log(1+e^x)$[20], w^m과 b^m은 m번째 층의 파라미터인 행렬과 벡터, 층의 개수 $l=5$, $m=1,2,3,4$층의 노드 개수는 35, 마지막 노드의 개수는 1개이다.

3.2. 확률 미분방정식 학습

신경망을 학습하기 위해서는 신경망의 출력인 옵션가격을 알아야 하지만, 이는 만기일 T이전에는 알 수 없는 값이다. 본 논문에서는 알 수 없는 옵션가격을 생성해 내기 위해서, 식 (1)에 따라 생성되는 자산가격 S에 대한 옵션의 가격 $u(\circ)$가 다음의 SDE를 만족한다는 사실을 이용한다[10-12].

$$du = (u_t + \sum_{i=1}^{n} rS_i u_{S_i} + \frac{1}{2}S'HS)dt \tag{16}$$
$$+ \sum_{i=1}^{n}\sigma_i S_i u_{S_i} d\widetilde{W}_i,$$

여기서 $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, S' = (S_1, S_2, ..., S_n), u_{S_i} = \frac{\partial u}{\partial S_i}$이고, 행렬 H의 i,j번째 원소는 $\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j\frac{\partial^2 u}{\partial S_i \partial S_j}$이다. 식 (15)에 기반하여, 시간 t_k에서의 옵션가격을 시간 t_{k-1}에서의 정보를 이용하여 구한다. 하지만, 시간 t_{k-1}에서의 정보도 알 수 없으므로, 이를 신경망을 이용한 다음 근사식을 사용한다.

$$\tilde{u}(t_k, S(t_k)) = NN(t_{k-1}, S(t_{k-1})) + \tag{17}$$

$$[NN_t(t_{k-1},S(t_{k-1}))+\sum_{i=1}^{n} rS_i(t_{k-1})NN_{S_i}(t_{k-1},S_i(t_{k-1}))$$
$$+\frac{1}{2}S(t_{k-1})'H_{k-1}S(t_{k-1})]dt_k$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\sigma_i S_i(t_{k-1})NN_{S_i}(t_{k-1},S_i(t_{k-1}))d\widetilde{W}_i(t_k),$$

여기서 $NN_t=\frac{\partial NN}{\partial t}, NN_{S_i}=\frac{\partial NN}{\partial S_i}$, 행렬 H_{k-1}의 i,j번째 원소는 $\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j\frac{\partial^2 NN}{\partial S_i \partial S_j}$, $dt_k=t_k-t_{k-1}$이고 $d\widetilde{W}_i(t_k)=\sqrt{t_k-t_{k-1}}L_i Z(t_{k-1})$이다. 식 (17)로 근사된 옵션가격으로 시간 t_k에서의 신경망을 학습하기 위하여 다음의 손실함수를 정의한다.

$$L_{SDE}=\sum_{k=1}^{N}[\tilde{u}(t_k,S(t_k))-NN(t_k,S(t_k))]^2. \quad (18)$$

3.3. 블랙-숄즈 방정식 학습

신경망이 식 (7)의 블랙-숄즈 편미분 방정식의 구조를 갖도록 각 시간 t_k와 자산가격 $S(t_k)$에서 다음의 손실함수를 정의한 다.

$$L_{BS}=\sum_{k=1}^{N}[NN_t(t_k,S(t_k))+\sum_{i=1}^{n} rS_{i(t_k)}NN_{S_i}(t_k,S_i(t_k))$$
$$+\frac{1}{2}S(t_k)'H_kS(t_k)-rNN(t_k,S(t_k))]^2. \quad (19)$$

식 (19)와 식 (17)에서는 신경망 $NN(t_k,S(t_k))$을 t_k,S_k로 미분하여야 한다. 본 논문에서는 자동미분[6,7,8]을 사용하였다. 자동미분은 유한차분법과 같은 근사적방법이 아니라, 연쇄법칙에 기반한 해석적인 방법으로 정확하다. 텐서플로우[7]와 같은 소프트웨어 라이브러리의 함수를 사용해서 헤시안과 그래디언트를 계산하는 방법을 구현할 수 있는데, tensorflow.Gradient.gradient를 본 논문에서 사용하였다.

추가적인 손실함수를 도입하였는데, 이는 만기일 T에는 옵션가격이 식 (3)과 같은 함수로 만기지급금 $V(T)$로 결정되므로, 신경망이 이 값을 갖도록 한다.

$$L_T=[NN(T,S(T))-h(T)]^2\, w_T \quad (20)$$

여기서 W_T는 만기에서의 옵션가격에 주는 가중치로, 본 논문에서는 $N/20=10$을 사용한다.

신경망의 학습에는 위에서 정의한 손실함수들의 합을 사용한다.

$$Loss=L_{SDE}+L_{BS}+L_T \quad (21)$$

이 손실함수에서 L_{SDE}는 신경망의 출력과 SDE로 생성되는 옵션가격과의 차이를 나타내고, L_{BS}는 신경망의 미분이 블랙-숄즈 방정식을 만족하는 지를 나타내고, L_T는 만기에 주어지는 옵션의 가격을 정확히 예측하는 지를 나타낸다. 식 (21)을 최소화하는 파라미터를 찾기 위하여 adam 방법[21]을 사용하고, 학습률을 10^{-3}부터 10^{-7}까지 텐서플로우 함수 PolynomialDecay 스케쥴을 사용하여 선형적으로 감소시켰다.

Ⅳ. 옵션가격결정 실험

이장에서는 수치실험을 통하여 제안한 방법이 옵션가격, 델타, 감마와 세타를 정확히 계산하는지를 알아본다. 본 논문의 실험대상인 교환옵션은 해석적인 해가 존재하므로, 이를 이용하여 각 방법의 정확도를 측정할 수 있다. 옵션가격과 그릭스에 대한 해석적인 해는 식(4)와 식(6)이다. FDM은 식 (7)과 식 (8), MC 모의는 식 (9)-(11)과 식 (14)를 이용한다. 제안한 신경망은 옵션가격은 $NN(t,S(t))$, 그릭스는 $\Delta_i=NN_{S_i}(t,S(t))$, $\Gamma_i=NN_{S_iS_i}(t,S(t)), \Theta=NN_t(t,S(t))$이다.

옵션가격결정의 정확도는 가장 중요한 값인 현재시간 $t=0$에서의 옵션가격과 그릭스에 대해서 다음 오차로 나타낸다.

$$rError=\left|\frac{Exact-Estimate}{Exact}\right|, \quad (22)$$

여기서 $Exact$는 해석적인 방법의 값이고, $Estimate$는 수치적 근사를 사용하여 얻은 값이다. 실험에 사용한 값은 $S_1(0)=60$, $S_2(0)=60$, $T=1$, $\sigma_1=0.4$, $\sigma_2=0.2$, $r=0.1$, $\rho_{12}=0.4$이다.

Table. 1 FDM estimate of the price and Greeks of the exchange option.

	Exact	FDM1	FDM2
Price	8.777591	8.765359	8.776234
rError	0	1.39e-03	1.55e-04

	Exact	FDM1	FDM2
Δ_1	0.573140	0.572740	0.573102
rError	0	7.09e-04	7.80e-05
Γ_{11}	0.017726	0.017728	**0.017726**
rError	0	1.15e-04	**1.07e-05**
Θ	-4.339281	-4.344155	-4.339812
rError	0	1.12e-03	1.22e-04

표 1의 유한차분법은 자산가격의 구간 [0, 300]을 동일간격의 구간으로 FDM1은 100개로 FDM2는 300개로 나누었고, 시간구간 $[0, T]$를 동일간격으로 FDM1은 5,000개로 FDM2는 50,000개로 나누었다. 표 1에서 보듯이 교환옵션과 같은 저차원 옵션의 경우에는 유한차분법의 정확도가 매우 높았다. FDM1보다 세밀한 간격으로 이산화한 FDM2가 성능이 더 높았다.

Table. 2 MC simulation estimate of the price and Greeks of the exchange option.

	MC1	MC2	MC3
Price	8.784203	8.776402	8.777109
rError	7.53e-04	1.35e-04	5.49e-05
Δ_1	0.573611	0.573094	0.57313
rError	8.10e-04	9.24e-05	2.97e-05
Γ_{11}	0.017738	0.017724	0.017725
rError	6.82e-04	9.47e-05	4.06e-05
Θ	-4.343678	-4.338946	**-4.339065**
rError	1.01e-03	7.72e-05	**4.99e-05**

표 2의 MC 방법은 옵션가격과 그릭스의 추정을 위해서는 많은 샘플경로를 생성하여야 하는데, MC1은 10^7개, MC2는 10^8개, MC3은 10^9개를 사용하였다. 교환옵션과 같은 저차원 옵션의 경우에는 MC 방법이 FDM보다 부정확하고 계산속도가 느리지만, 많은 샘플경로를 사용하면 표 2에 보듯이 정확도가 높아져서 FDM에 근접한다.

Table. 3 Differential neural network estimate of the price and Greeks of the exchange option.

Iteration number	100,000	200,000	400,000
Price	8.777660	**8.777587**	8.777516
rError	7.85e-06	**4.85e-07**	8.51e-06
Δ_1	0.573152	0.573139	**0.573152**
rError	9.44e-06	1.45e-05	**9.37e-06**
Γ_{11}	0.017699	0.017708	0.017701
rError	1.52e-03	1.01e-03	1.38e-03
Θ	-4.330462	-4.330742	-4.331632
rError	2.03e-03	1.97e-03	1.76e-03

표 3에서는 제안한 미분신경망의 학습회수에 따른 정확도를 보여준다. 학습회수가 커지면 학습시간은 증가하나 성능이 향상되었다. 신경망은 10,000개의 샘플경로를 사용하여 배치로 학습하였고, 신경망 다섯 개를 독립적으로 학습하였다. 옵션가격과 그릭스의 추정시에는 다섯 개의 신경망에서 각각 1000번의 추정치를 얻어, 이를 평균하였다. 표 1, 2, 3에서 가장 높은 정확도를 굵은 글씨체로 나타낸 것에서 보듯이 옵션가격과 금융공학에서 중요한 역할을 하는 델타의 계산에는 신경망을 사용하는 것이 효과적이었으나, 감마와 세타의 경우에는 성능이 하락하였다.

Table. 4 rErrors of numerical methods for the exchange options with several initial stock prices.

$S_1(0), S_2(0)$		20,60	40,60	60,40	60,20
Price	FDM2	5.64e-02	5.55e-04	**4.08e-07**	**1.81e-08**
	MC2	**3.13e-03**	**2.36e-05**	9.42e-05	6.75e-05
	Ours	1.25e-02	6.22e-05	1.31e-06	2.90e-07
Δ_1	FDM2	4.67e-02	2.15e-04	1.03e-04	3.28e-06
	MC2	**1.52e-03**	2.91e-04	1.20e-04	4.21e-05
	Ours	2.22e-03	**6.63e-05**	**1.78e-05**	**2.25e-06**
Γ_{11}	FDM2	4.06e-02	**1.70e-04**	2.48e-04	**2.07e-04**
	MC2	1.74e-03	2.55e-04	**5.14e-05**	2.06e-02
	Ours	**1.36e-03**	2.11e-03	4.14e-03	8.42e-02
Θ	FDM2	8.95e-02	**6.51e-06**	**2.82e-05**	**2.07e-04**
	MC2	1.15e-03	1.55e-04	2.71e-04	2.39e-02
	Ours	**8.80e-04**	3.73e-03	6.84e-03	1.09e-01

표 1-3의 실험에서는 초기 자산가격이 $S_1(0) = 60$, $S_2(0) = 60$이었고, 표 4에서는 다양한 초기값을 사용하였다. 실험 시간의 감소를 위하여 수행시간이 작은 MC2와 Ours로 표시한 제안한 방법은 학습회수를 100,00을 사용하였다. 가장 높은 정확도를 굵은 글씨체로 나타내었고, FDM2는 7번, MC2는 4번, 제안한 방법은 5번의 가장 높은 성능을 나타내었다.

Ⅴ. 결 론

본 논문에서는 신경망의 학습에 해결하려고 하는 문제의 미분관계식을 포함하였다. 이러한 접근에 따라 확률미분방정식과 블랙-숄즈 방정식을 만족하는 신경망을 사용하여 옵션의 가격과 그릭스를 계산하였다. 옵션가격과 금융공학에서 중요한 역할을 하는 델타의 계산에는 제안한 방법이 효과적이었으나, 감마와 세타의 경

우에는 성능이 하락하였다.

옵션의 차원이 커지만 유한차분법은 사용할 수 없으므로, 몬테카를로 방법의 장점을 결합한 신경망 방법이 효과적일 것이다. 향후에는 몬테카를로 방법에서 분산 감소 방법을 적용하여 신경망의 성능을 향상시키는 연구가 필요하다 판단된다.

References

[1] A. Howard, M. Sandler, G. Chu, L.-C. Chen, B. Chen, M. Tan, W. Wang, Y. Zhu, R. Pang, V. Vasudevan, Q. V. Le, and H. Adam, "Searching for MobileNetV3," in *Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision*, pp. 1314-1324, 2019.

[2] K. Clark, M. T. Luong, C. D. Manning, and Q. Le, "Semi-Supervised Sequence Modeling with Cross-View Training," in *Proceedings of the 2018 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing*, pp. 1914-1925, 2018.

[3] D. S. Park, W. Chan, Y. Zhang, C. C. Chiu, B. Zoph, E. D. Cubuk, and Q. V. Le, "SpecAugment: A Simple Data Augmentation Method for Automatic Speech Recognition," in *Proceedings of Interspeech*, pp. 2613-2617, 2019.

[4] T. Bazin and G. Hadjeres, "NONOTO: A Model-agnostic Web Interface for Interactive Music Composition by Inpainting," in *Proceedings of the 10th International Conference on Computational Creativity*, 2019.

[5] H. Chen, O. Engkvist, Y. Wang, M. Olivecrona, and T. Blaschke, "The rise of deep learning in drug discovery," *Drug Discovery Today*, vol. 23, pp. 1241-1250, 2018.

[6] J. Nocedal and S. J. Wright, *Numerical Optimization*, second ed., New York, NY, USA, Springer, 2006.

[7] M. Abadi, A. Agarwal, P. Barham, E. Brevdo, Z. Chen, C. Citro, G. S. Corrado, A. Davis, J. Dean, M. Devin, S. Ghemawat, I. Goodfellow, A. Harp, G. Irving, M. Isard, Y. Jia, R. Jozefowicz, L. Kaiser, M. Kudlur, J. Levenberg, D. Mane, R. Monga, S. Moore, D. Murray, C. Olah, M. Schuster, J. Shlens, B. Steiner, I. Sutskever, K. Talwar, P. Tucker, V. Van houcke, V. Vasudevan, F. Viegas, O. Vinyals, P. Warden, M. Wattenberg, M. Wicke, Y. Yu, and X. Zheng, "TensorFlow: a system for large-scale machine learning," in *Proceedings of the 12th USENIX conference on Operating Systems Design and Implementation*, pp. 265-283, 2016.

[8] M. Raissi, "Forward-backward stochastic neural networks: Deep learning of high-dimensional partial differential equations," *arXiv:1804.07010*, 2018.

[9] F. Black and M. Scholes, "The pricing of options and corporate liabilities," *the Journal of Political Economy*, vol. 81, pp. 637-654, 1973.

[10] J. Hull, *Options, futures, and other derivatives*, 10. ed., pearson internat. ed ed., Pearson Prentice Hall, 2018.

[11] S. E. Shreve, *Stochastic calculus for finance 2, Continuous-time models*, New York: NY; Heidelberg, Springer, 2004.

[12] P. Glasserman, *Monte Carlo methods in financial engineering, Springer*, New York: NY, 2004.

[13] P. Carr, M. Stanley, and D. Madan, "Option valuation using the fast fourier transform," *J. Comput. Finance*, vol. 2, pp. 61-73, 1999.

[14] R. Gencay and Min Qi, "Pricing and hedging derivative securities with neural networks: Bayesian regularization, early stopping, and bagging," *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 12, pp. 726-734, 2001.

[15] M. Kohler, A. Krzyzyzak, and N. Todorovic, "Pricing of high-dimensional american options by neural networks," *Mathematical Finance*, vol. 20, pp. 384-410, 2010.

[16] J. Sirignano and K. Spiliopoulos, "Dgm: A deep learning algorithm for solving partial differential equations," *Journal of Computational Physics*, vol. 375, pp. 1339-1364, 2018.

[17] W. E, J. Han, and A. Jentzen, "Deep learning-based numerical methods for high dimensional parabolic partial differential equations and backward stochastic differential equations," *Communications in Mathematics and Statistics*, vol. 5, pp. 349-380, 2017.

[18] S. Becker, P. Cheridito, A. Jentzen, and T. Welti, "Solving high-dimensional optimal stopping problems using deep learning," *CoRR abs/1908.01602*, 2019.

[19] W. Margrabe, "The value of an option to exchange one asset for another," *Journal of Finance*, vol. 33, pp. 177-186, 1978.

[20] X. Glorot, A. Bordes, and Y. Bengio, "Deep sparse rectifier neural networks," in *Proceedings of the Fourteenth International Conference on Artificial Intelligence and Statistics*, Fort Lauderdale, FL, USA, pp. 315-323, 2011.

[21] D. P. Kingma and J. Ba, "Adam: A method for stochastic optimization," *the 3rd International Conference for Learning Representations*, San Diego, 2015.

지상문(Sang-Mun Chi)

1991년 서울대학교 수학교육학과 졸업(이학사)
1993년 한국과학기술원 수학과 졸업(이학사)
1998년 한국과학기술원 전산학과 졸업(공학박사)
1993년 ~ 2000년 삼성전자 무선사업부 선임연구원
2001년 ~ 현재 경성대학교 소프트웨어학과 교수
※관심분야 : 딥러닝, 생물정보학, 계산금융