한국학교수학회논문집 제 24 권, 제 2 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 24, Number 2, 217-241, June 2021
http://doi.org/10.30807/ksms.2021.24.2.003

삼각함수의 모델링에서 그래픽 과정이 학생들의 질문 생성과 수학적 아이디어 교환에 미치는 효과

윤재연[1] · 신현성[2]

본 연구에서는 삼각함수의 모델링을 통한 그래픽 과정의 효과를 알아보기 위한 실험연구로 실험과정의 분석을 질적연구 방법으로 처리했다. 이를 위해 수학적 모델링의 절차를 세분하여 기존의 모델에 두 단계, 즉, 질문의 생성과 아이디어 교환을 강조하는 놀이실험단계와 컴퓨터 그래픽 과정의 단계를 추가했다. 실험은 고등학교 2학년을 대상으로 실험반(TMG) 26명이 참여했고, 데이터의 질적 분석을 위해 활동지, 면담 및 실험과정의 관찰자료를 분석하였다. 국내외 대부분의 연구가 통계적 방법을 이용한 양적 분석 방법이기 때문에 교사들에게는 모델링 수업에 큰 도움을 주지 못한다. 연구결과로 (1) 기존의 수학적 모델링의 절차에 두 개의 단계를 추가하여 보다 세분화한 모델링의 과정은 질문생성, 아이디어교환, 동료들과 소통 등에서 긍정적인 결과를 볼 수 있었다. (2) 실험학교의 수학과 수업에 컴퓨터 그래픽을 포함한 테크놀로지의 도입은 양과 수(Quantity) 교육에 매우 적절함을 보여주었다.

주요 용어 : 그래픽 과정, 수학적 모델링, 모델링의 과제, 질문의 생성, 아이디어교환

Ⅰ. 서론

1. 연구의 필요성 및 목적

고등학교 교실 수업의 문제점은 수학 교사는 물론이고 일반 대중들도 그 심각성을 알고 있다. 연구자의 수업 관찰 및 현장 경험에 의하면 가장 큰 문제는 학생들이 자기 생각을 생성하고, 질문하고, 동료들과 수학적인 아이디어를 교환하는 시간과 공간을 교실에서 충분히 마련해 주지 않는다는 점이다. 교과서에 있는 수학의 정의, 정리 그리고 간단한 공식 등은 전문가들이 긴 기간 연구한 내용을 한두 쪽으로 정리한 것이다. 교사가 그러한 내용을 짧은 시간 내에 전달하는 수업 방식은 학생들로 하여금 수학을 암기 과목으로 인식하게 하는 문제점을 야기할 수 있으며, 한편으론, 수능과 같은 입시 준비에 중점을 둔 수업에서 교사들은 기존의 수업 방식을 선호할 수밖에 없는 실정이기도 하다.

그럼에도 불구하고 국내외에서 지속적으로 전통적인 수학 수업을 개혁하려는 여러 가지 노력들이

---

*MSC2010분류 : 97D40
1) 가평고등학교 교사(yjy9420@korer.kr), 제1저자
2) 강원대학교 명예교수(hsshin@kangwon.ac.kr), 교신저자

있어왔다. 최근 미국 수학자 협회(AMS)에서 열린 탐구를 강조하는 2차 새수학운동이 제안되었다. 비록 다른 나라의 수학교육 개혁 운동이지만 우리 교실 또는 수학과 평가를 관리하는 정부 교육기관에서 눈여겨 볼 필요가 있다. 이 운동의 목적은 유치원 및 초중고 현행의 수학과 교육과정을 개혁하자는 것으로 핵심은 수학의 교수학습을 열린 탐구의 눈으로 실세계 또는 자연현상에 숨어있는 수학적인 아이디어를 찾아내자는 것이다. 이러한 측면이 우리나라의 고등학교 수학교육의 문제점을 개선할 수 있는 중요한 시사점이 될 수 있다(대한수학회 소식지, 2021). 미국을 포함한 여러 나라의 수학과 교육과정에 수학적 모델링이 중요한 요소 및 학습 주제로 제시되었는데, 이러한 변화는 앞으로 수학 교실의 교수학습을 설계하는데 새로운 학습 환경을 만들 것이다.

Zawojewski(테크놀로지 연구소, 2007)등은 '새로운 기술의 변화'에 알맞은 교육 시스템의 변화와 실세계의 응용도 학교 교육에 큰 의미를 준다고 하였다. 여기서 실세계 상황은 단순히 활용 측면이 아니고 수학적인 사고 방법을 수정하고 재창조하는 과정, 문제(과제)를 구조적으로 보는 상황을 의미한다. 많은 연구자들이 이러한 관점을 모델-모델링으로 설명한다. 특히 이들 시스템에서는 학습자들에게 산업현장에 기초한 수학적 모델과 전문적인 작업설계에서 사용되는 절차(팀 프로젝트 등)를 요구하기 때문에 종전의 교과서 중심의 전통적인 수업 방법으로는 모델링을 요구하는 수업 시스템에 적응할 수 없다.

본 연구에서는 수학적 모델링 과정에 대한 학생들의 이해를 촉진시키고, 모델 탐색 과정을 용이하게 하기 위하여 기존의 실세계 현상 탐구 단계와 수학적 모델 탐색 단계 사이에 놀이학습과정과 컴퓨터 그래픽 과정의 두 개 단계를 추가하여 총 5단계로 구성된 수학적 모델링 과정을 고안하여 그 효과를 살펴보고자 하였다. 특히, 본 연구에서 새롭게 추가된 모델링 단계(모델링 2단계와 3단계)에서 학생들의 학습 활동을 세밀하게 분석하고자 하였다.

본 연구의 목적을 달성하기 위하여 다음과 같은 연구 문제를 설정하였다.

연구문제1. 본 연구에서 실시한 수학적 모델링 학습 경험이 학생들의 학습에 어떤 영향을 미쳤는가?
연구문제2. 본 연구에서 고안한 수학적 모델링 하위 단계인, 놀이학습과정과 컴퓨터 그래픽 과정의 단계에서 모둠의 아이디어 교환(Idea Sharing), 아이디어 생성, 다양한 질문 생성과 같은 의미 있는 학습 활동이 이루어졌는가?

Ⅱ. 이론적 배경

1. 새수학운동

현 수학과 교육과정은 1차 새수학운동[3]의 영향을 받은 것으로 초중등 수학을 산수, 기하, 대수 그리고 미적분에 기초한 매우 정적인 수학 내용으로 구성되었다. 그러나 70년이 흐른 현대사회는 4차 산업의 진입 등 산업발전 면에서 큰 변화가 있어 수학을 기존 것과 다른 시각으로 보아야 한다는 주장이 제기되었다. 즉 수학은 수학 내적인 새로운 분야 또는 응용 분야로 급속히 성장해 왔으며, 그 원동력은 계산, 공식이 아닌 패턴을 위한 열린 탐구였다. 수학은 단순히 물리학과 공학 언어 역할이 아닌 은행, 제조업, 사회과학 그리고 의학 등의 전 분야에 필수적인 도구로 성장했다고 본다. 여기에 컴

3) 1950년대 미국의 초중등 수학과 교육과정을 새롭게 개혁하자는 운동으로 SMSG가 결성되고 수학 내용을 산수, 대수Ⅰ, 대수Ⅱ, 기하, 미적분으로 분류하여 광범위한 자료개발을 하였다. 엄격한 기호와 수학적 문장을 사용하고, 집합개념을 초등학교 2학년에 도입한 점이 특색이었다.

퓨터 그래픽이 더해지면서 패턴을 위한 수학자들의 열린 탐구는 실제 눈으로 볼 수 있는 방법을 생각했다. 새로운 수학적 지식과 응용력이 과학, 비즈니스 그리고 기술 등 사회 모든 분야에 확산되면서 학생들도 전통적인 수학교육으로는 새로운 변화를 읽을 수가 없을 뿐만 아니라 수학에 대한 다양한 사회적 요구를 이해할 수도 없음을 알게 되었다(Lingefjard,T.2005 ERME: Lombardi,D,F.2008 ICME).

자연스럽게 초중등학생들에게 '정말로 필요한 수학적 기본이 무엇인가?'를 묻게 되었고, 교육현장의 중요한 이슈는 '어떤 기본을 가르쳐야 할 것인가?', '어떻게 가르쳐야 할 것인가?' 였다. 이러한 수학교육의 변화는 다양한 토픽의 선택과 우선순위를 정하는 문제에 직면한다. 이번 2차 새수학운동은 수학의 4개 영역, 즉 측정, 대칭, 시각화, 알고리즘을 기본내용으로 정하고, 기본에서 분화한 수학 토픽으로 다섯 줄기를 정하였다. 이들 줄기를 열거하면 다음과 같다(대한수학회 소식지, 2021).

(1) 차원(Dimension) ,(2) 양과 수(Quantity), (3) 불확실성(Uncertainty), (4) 형(Shape), (5)변화(Change)

이들 줄기는 현재의 수학과 교육과정의 내용 체계와 대조적으로 비교된다. 이들 수학적 줄기는 영역 간 내적 연결(Inter-connection)은 물론이고 자연현상을 포함한 실세계에서 일어나는 다양한 현상과 연결된다. 이들의 학교교육은 초등학교의 비형식적인 직관에서 출발하여 대학까지 학생들이 어떻게 수학적 아이디어를 발전시키는가? 에 초점을 맞춘다. 즉 연못의 수위, 잎사귀 수, 주식의 변화 그리고 물리 화학 실험 결과 등등. 이들 실세계 현상으로부터 얻은 데이터는 수학과 다른 주제를 통합하는 효과가 있으며, 학생들은 패턴을 읽기 위해 이론적인 데이터를 생성하기 위한 공식과 수학적인 과정을 사용한다. 예를 들면 과일에 기생하는 파리의 개체 수의 증가에 대한 다양한 수치실험에서 단순한 수학적인 법칙이 규칙적인 진동상태와 불규칙적인 카오스 현상을 만들고, 학년이 올라가면서 컴퓨터 그래픽을 사용 변화를 그림으로 나타낼 수 있다.(Lingefjard,T.2005 ERME).

좀 더 두 국제학술회의에서 다양하게 논의한 내용을 정리해 보자. 먼저 새수학운동의 핵심 중 하나는 수학 내용의 기본 요목으로 측정, 대칭, 시각화, 알고리즘을 정하고 있다는 점이다. 종전에는 개념을 표현하는 수단으로 시각화를 기본내용에서 제외했지만 이번에는 시각화를 수학적 기본 개념으로 받아들인 점이 특이하다. 컴퓨터가 인간 활동에 들어온 이후 수학적 그리고 과학적인 연구에서 빼어놓을 수 없는 수학적 아이디어가 되었다. AI나 반도체 연구 등과 같은 4차 산업혁명 시대에서 시각화와 알고리즘은 연구의 중심에 있다. 뿐만 아니라 시각화는 데이터 분석에서 또는 숨겨진 패턴을 찾는 시각적 디스플레이에서도 그 중요성이 강조되어왔다. 또 컴퓨터 시각화는 과학과 산업 분야에서 관찰되는 수학적 관계 또는 함수의 표현, 지도제작에서 삼차원 현상을 이차원 캔버스에 사상하는 투영 등과 같은 기하적 도구로, 그리고 컴퓨터 그래픽을 이용해 동역학계, 시스템의 안정성 등과 같은 다양한 자연현상을 수학적으로 해석하는 연구에서도 중요한 역할을 한다. 시각화로 수학적 패턴을 탐구하는 학습활동은 교육에서 절대적인 가치를 가진다. 이에 컴퓨터 그래픽은 수학의 모든 영역에 깊숙이 들어와 있다고 할 수 있다. 측정은 양의 개념, 산수적인 양의 개념, 랜덤 변동(동전 던지기 등), 그리고 동역학적 변수(이산적, 연속적, 카오스적)등에 관련되며 의미하는 것은 "얼마나 큰가?"이다. 측정과는 내용구조가 다르지만 수학의 모든 영역에 관련된 기본 개념으로 대칭을 들 수 있다. 자연에서 볼 수 있는 초입방체, 분자와 세포의 반복적 패턴, 원통형 빔의 움직임, 수정된 달걀의 성장에서 대칭개념을 관찰할 수 있다. 수학자들은 대칭을 인식하는 방법을 배우는 일은 수학적인 눈을 훈련하는 시작이라고 말한다. 종전의 알고리즘은 새로운 차원의 알고리즘, 즉 계산기 또는 컴퓨터와 결합하여 더 지적인 수준의 알고리즘으로 들어간다. 인구증가를 반영하는 반복절차는 다양한 현상, 즉 폭발, 쇠퇴, 반복 그리고 카오스 등의 패턴을 이해하고 연구하는데 유용하다. 실제로 쉬운 교육용 컴퓨터 언어를 이용하여 카오스, 프랙탈, 동역학을 배우는 고등학교에서 알고리즘의 중요성을 실험적으로 증명하고 있다.

이와 같이 알고리즘적인 생각을 배우는 것은 수학적 리터러시(literacy)를 풍부하게 만든다. 대한수학회(2021)는 새수학운동의 5개 줄기 중 하나인 양과 수(Quantity)의 영역에 대하여 그 성격을 말한다. 즉 인간의 생활은 항상 양적인 상황과 양적인 문제들과 공존한다. 학교에서 학생들은 양에 관련된 문제도 많이 풀고 개념적인 지식도 얻고 양적인 다양한 데이터 간에 성립하는 관계는 물론이고 많은 정보를 해석하여 수학적인 모델을 정한다. 이 과정에서 테크놀로지 문제, 수학적 응용문제, 양에 관련된 기초개념이 양과 수의 영역에 연결된다. 테크놀로지는 수학의 교육과 연구에 이미 깊숙하게 들어와 있다. 과거에는 고등학생들이 꼭 필요한 그래픽을 노트에 그려야 할 때 상상으로 머릿속에서 그렸기 때문에 교실에서 그래픽을 보고 이해하는 개념학습에서 그들은 어려운 시간을 보내야만 했다. 컴퓨터에 관련된 다양한 도구는 단순한 계산은 물론이고, 역동적인 그래픽 그리기, 기호를 조작하기 그리고 행렬연산까지 관여하게 되었다. 이들 도구는 수학의 본질 자체에 깊은 영향을 주기 시작했으며, 이제 과학자들은 실험을 통하여 가설을 탐구하는 것처럼 수학자들도 도구를 이용하여 숨겨진 패턴을 찾기 시작했다. 다른 말로 표현하면 정리의 발견과 이를 증명하는 활동을 서로 보완하면서 조화로운 연구를 할 수 있게 되었다는 뜻이다(대한수학회, 2021). 예를들면, 큰 소수를 발견하는 사례처럼 컴퓨터는 순수와 응용의 연구에서 중심적인 역할을 했다. 그러면 학교 교육에서는 어떤 일이 일어나고 있는가? 컴퓨터 활용과 더불어 종전의 교실에서 상상도 못한 실세계 상황이 학교 수업에 들어오면서 수학과 교과과정에 큰 변화가 일어났다는 점이다. 즉 양적인 연구방법이 실세계의 거의 모든 분야에 깊이 들어왔다[4].

이들 다양한 응용 상황과 응용문제는 지속적으로 양적인 정보를 조작 분석하는 능력을 필요로 한다. 교실에서 배운 산수 대수에서 배운 알고리즘의 기술로는 접근하기 어렵다. 왜냐하면 양적으로 잘 교육받은 학생이라면 처음 보는 상황에서 어떤 관계를 빨리 파악하고, 이를 효율적인 기호를 사용하여 표현하고 필요한 정보를 컴퓨터로 조작하여 의미 있는 계산 결과를 산출하기 때문이다(ERME논의,2005). 본 논문의 연구대상인 삼각함수의 모델링 과정은 이들 논의와 관련이 깊다. 정적인 수업이 이루어지는 고등학교의 교실에 다양한 응용 상황을 도입하고 양적인 정보를 조작하였으며 분석하는 기회를 주었다. 그들의 목표는 처음 보는 상황에서 어떤 관계를 빨리 파악하고, 이를 효율적인 기호를 사용하는 능력을 주며, 필요한 정보를 컴퓨터로 조작하는 역동적인 교실 환경을 만들어 주는 것이다.

2. 수학적 모델링에 대한 학교교육

수학적 모델링은 자연현상 또는 실생활에서 수학모델(예: 이차함수의 관계식, 이차방정식, 지수방정식 등등)을 만들고 이들 모델을 다양한 자연 또는 실세계의 문제 상황에 검증하는 과정이다. 모델과 모델링을 학교교육에 필수적으로 도입해야 하는 이유로 미래사회가 요구하는 수학적 능력을 든다. 즉 미래사회가 요구하는 수학적인 능력으로 (1) 계획하고, 모니터링하고, 의사소통하는 복합적인 문제해결에 협동할 수 있는 능력, (2) 수와 대수적 추론을 효율적이고, 창의적으로 활용할 수 있는 능력, (3) 비와 비례, 확률, 변화, 연속과 극한 등에 있는 핵심 수학적 아이디어를 활용하는 능력, (4) 복잡한 데이터를 분석, 생성, 변환하는 능력, (5) 복합적인 시스템을 구성하고, 기술하고, 설명하고, 조작하고, 예측하는 능력을 들 수 있다(Jenkins, Clinton, Purushotma, Ronbinson & Weigel, 2006; Lombardi, 2008). 이를테면, 교실에서 학생들의 수학적 능력을 기르기 위해 교사들은 다음과 같은 수학적 모델링에 관련된 과제를 자주 사용한다.

4) 이를테면 인구문제, 태풍허리케인, 인플레이션, 비즈니스에서 안전시스템 도입 등등.

활동 상황 : 항구에서 배의 출항과 입항의 문제 상황을 그래픽으로 보여줌

질문1 : 해안으로 밀려오는 이번 조류의 높이에서 다음 조류의 높이(주기)까지 12시간이 걸린다. 다음 질문에 답하여라.
0. 높이가 낮은 조류는 5.7미터, 높은 조류는 7.3미터이다. 높이에 대한 그래프를 그려라.
0. 컴퓨터의 그래픽을 보고 높이 H를 시간 T로 나타내는 관계식을 구하여라

질문2 : 낮은 조류는 3.6미터, 높은 조류는 4.9미터이다. 높이 H를 T에 대한 관계식으로 나타내어라.

물론 이 과제는 다양한 모델의 과제 중에서 교육용으로 쓰이는 단순한 유형에 속한다. 모델링의 다양한 정의가 논의의 대상이 되었다. Blum(1993)의 “실세계 상황으로부터 수학적 모델을 결정하는 과정, 즉 모델 구성의 과정”을 선호하는 연구자가 많았고, 모델링을 Kaiser(2008)의 “시스템의 역동성을 이해하고, 이 시스템 안에서 미래 결과를 예측하는 일종의 기술”로 수학적 모델링을 보는 연구자들도 있었다. 일부 연구자들은 수학의 교육적인 의미를 뛰어넘어 사회 시스템을 이해하는 수단으로 모델링을 이해하려 한다. 그러나 이들 정의는 상호 관련이 있어 (1) 어떤 양적인 측면과 성질을 가진 요소, (2) 이들 요소가 어떻게 작용하고 변하는지를 설명하는 과정을 기본적으로 가진다. 한편 학교교육으로 모델링은 핵심 수학 또는 과학적 구성을 이해하는 도구일 뿐 아니라 학생들의 삶, 커뮤니티 활동에서 제기되는 중요한 이슈들을 분석하는 비판적인 도구로 생각하는 경향이 있다(Greer, Verschaffel & Mukhopadhyay, 2007). 이들의 주장은 학교 수학이 지나치게 정적이고 형식적으로 흘러 학생들의 삶이나 사회활동과는 동떨어져 가는 현상을 경계하는 것으로 실제적 모델링의 중요성을 말하는 것이다. 이들 주장에 동조하는 Kadijevich(2008)는 대학생들을 대상으로 실세계 문제 상황에서 수학적 모델로 변환하는 실험을 하고, 학생들이 의사결정을 하는 과정을 컴퓨터로 발표하게 하였다. 이와 같이 실제적 모델링은 실세계를 이해하는 방법으로 이용되었으며 모델링 연구에서 가장 많은 연구자들이 관심을 보였던 분야이다. 비슷한 실험으로 Jordan,A. et al(2008)의 연구가 있다. 그들은 학생들의 모델링 상황을 해석하는 능력과 오류를 분석하고, 발생한 오류를 극복하기 위한 지도자료 및 과제를 만들어 공개하였다. 학교 학생들을 대상으로 모델링 과정의 생성을 실험한 Barbosa(2006)의 연구결과 역시도 모델링 교육을 선호하는 학교들이 자주 인용하는 사례이다. 그는 수학 전문가에 의해 만들어진 수학적 모델링과 이 모델을 실천하는 학교 모델링의 교육은 엄격히 구분해야 한다고 주장한다. 학교는 당연히 모델링과 실세계 활용에 대한 다양한 토론의 장을 마련해야 하고, 이러한 노력이 해결 과정을 탐구하고 새로운 상황에 그 기술을 활용하는 교육으로 연결이 되어야 한다고 보고 있다. 그의 주장은 (1) 문제설정, (2) 모델링 과정의 생성, (3) 추상화, (4) 수학화로 요약이 된다.

3. 삼각함수의 지식체계

Eisenhart(1991)는 개념적 체계를 이론 또는 경험에 바탕을 둔 아이디어를 수렴한 정당화의 구조로 보며, 이 구조 속에는 데이터 분석과 해석도 포함한다. 이 관점으로 보면 사인함수 개념의 형성에서 관찰되는 수학적 아이디어 또는 모델링 과정도 당연히 개념체계에 들어간다. 특히 불변성을 강조한 Dreyfus(1990)는 한 개념의 획득은 대상에서 행한 활동과 그 활동 아래 이루어진 불변성이 연결된다고 말했고, Confrey(1991)는 다중 표현과 변형 과정을 중요한 지식체계의 구성요인으로 보았다. 이를테면 삼각함수를 정의하고 불변성(정리)을 얻기까지 학생들은 실험관찰도 하고 서로 생각을 교환하면

서 한 정리를 만들고 연결되는 다른 정리도 만들어간다는 것이다. 또 하나의 이론적 체계로 Thompson(1985)의 관계생성을 들 수 있다. 그는 삼각함수를 포함한 함수 개념은 여러 변수(변량)간의 관계를 나타내는 대표적인 수학적 도구이기 때문에 학생들의 수학적 지식의 구성은 기본적으로 관계생성에 있다고 보았다. 본 연구에서는 위의 이론가들의 주장을 깊이 탐구하지는 않았지만 수학적 개념형성을 위한 단계설정에서 Dines(1960)와 Van Hiele(1986)의 자유로운 오리엔테이션, 피아제의 반영적 추상화[5]를 참고하였다. 이런 이유로 본 연구는 학자들의 수준 높은 이론을 탐구하지는 않은 점을 연구의 제한점으로 남긴다. 다만 본 연구는 Blum(1993)의 "실세계 상황으로부터 수학적 모델을 결정하는 과정, 즉 모델 구성의 과정"에서 '모델을 결정하는 과정'의 연구가 부족하기 때문에 좀 더 많은 실험 데이터를 얻기 위한 것이라 할 수 있다. 따라서 연구자가 수학교사로 활동하면서 관찰한 학생들의 활동, 교사들의 오랜 경험 등을 모델 구성의 세부단계를 결정하는데 활용하였다. 이들 세부 두 단계는 연구방법 및 절차에서는 간단하게 논의하며, 중요한 점은 실세계의 상황을 동료들과 아이디어를 교환하고, 토론하면서 사인함수의 개념을 형성해 간다는 점이다. 교사의 역할은 학생들의 놀이 활동을 설계하고 파워포인트를 이용하여 놀이의 결과를 컴퓨터 그래픽으로 정리하는 과정을 만든다. 컴퓨터실이 준비된 학교에서는 프로그래밍 기술을 이용하여 그래픽을 직접 제작할 수도 있을 것이다. 특히 세부 두 단계에서는 학생들의 아이디어 교환은 물론이고 질문 생성을 강조한다.

역사적으로 보면 삼각비가 일반각의 함수로 인식되기 시작한 것은 함수의 개념이 등장한 17세기 이후로, 삼각함수의 급수 전개가 이루어진 이후이다. 19세기에 들어와 주기함수로서의 삼각함수에 대한 해석학적 연구가 시작됐고, 이후 삼각함수는 푸리에 급수에 의한 해석적 표현, 복소수 함수와의 관계 등의 함수론과 응용수학에서 눈부신 발전을 이루어왔다. 특히, 소리, 빛, 교류 전류, 원자 내의 전자 운동 등과 같이 주기함수와 관련 있는 자연현상은 삼각함수로 표현되어 물리학과 공학에 활용이 되었다. 많은 연구자들이 삼각함수를 포함한 함수 개념을 지도하는 유의점을 제시하면 다음과 같다.

첫째는 개념은 교과서의 형식적인 개념 이름보다 그 아래 숨어 있는 개념 이름에 연결된 비주얼 표현, 정신 모드, 느낌, 경험 등이 중요하다(Vinner, 1991)는 점이며, 둘째는 함수 지도의 핵심은 다양한 문맥(상황)속에서 그 개념을 이용하면서 가치를 전달하는 것(Norman, 1992)이고, 셋째는 함수 또는 삼각함수의 개념은 복합적인 구조는 물론이고 다양한 활용을 속성으로 가지기 때문에 식, 그래프, 표를 포함한 다양한 표상을 가진다는 것이다. 한 표상 속에 있는 함수 개념의 이해와 다른 표상 속 개념 이해 간의 절대적인 연결 관계는 아니지만 이들 표상 간의 연결은 상황을 해석하여 개념으로 연결하는 번역 능력을 길러준다(Even, 1990). 한편 김부윤(2010)은 "삼각함수의 Mathematization의 연구"에서 5단계의 과정, 즉 작도의 일반적 탐구 - 작도 - 문제 상황의 해결 - 삼각함수의 형식화를 제시한 바가 있다.

III. 연구 방법 및 절차

1. 연구대상

연구문제를 위한 실험집단을 경기도 가평의 G고등학교 2학년 26명이며, 연구자가 직접 수업 또는

5) 우정호. 홍진경은 반영적 추상화를 "전 단계에서 얻은 것을 보다 상위의 수준으로 옮긴다는 의미의 '반사'와 전 단계에서 반사된 것을 새로운 수준에서 재구성하거나 혹은 거기에 이미 있는 것과 전 단계에 요소를 관련 짓는 '반성'이라는 상보적인 두 과정"으로 해석한다(대한수학교육학회 수학교육연구 제9권 2호,1999,386-387.)

실험과정을 관리하였다. 실험집단은 4~6명으로 구성한 모둠으로 구성되었다. 실험과정을 한눈에 볼 수 있도록 <표 Ⅲ-1>을 제시한다.

<표 Ⅲ-1> 실험집단의 실험 기간의 활동 사항의 설계

집단	실험전준비	실험집단의 실험 활동	데이터 수집 기록 분석	
실험집단 (TMG)	1학년 2학기 2차지필 수학성적	0. 실험을 위한 교사의 그래픽, 학생과 면담 0. 학생의 모둠 활동, 아이디어 교환생성협력학습 수준별 과제해결 활동 0. 5차시 평균 80~120분	면담자료 ,활동지를 통한 관찰 및 자료제시	전이조사 모델링 과제풀이 모둠발표 자료

2. 실험과정

1) 교사의 모델링 상황 제시(전체활동)

교사는 전체학생에게 한 학생이 놀이터 '자이언트 휠'의 좌석에 앉아있는 상황을 동영상으로 보여주고, 휠의 반경을 1m로 정해주었다. 휠의 중심을 지나는 가로축이 수평인 상태에서 휠이 왼쪽으로 회전하기 시작했으며 각 모둠에게 다음과 같은 질문을 던졌다.

> "회전하는 자이언트 휠에 앉아있는 학생의 좌석에서 수평축까지의 거리는 어떻게 변할까?
> 이들 높이를 색종이로 오려 붙이세요. 어떤 그래프가 그려지는가요?"

이 질문은 교실의 학생들 수준을 고려하여 비교적 난이도가 낮은 열린 질문이었다. 이후 각 모둠은 아이디어를 교환하는 토론 시간을 가졌다. 연구자는 모둠의 활동을 간섭하지 않았다. 그러나 원래 연구자가 생각한 질문은 큰 질문으로 "회전하는 휠 위에 앉아있는 학생의 좌석의 높이가 변화하지요?, 어떤 패턴이 있는가요?, 색종이로 나타내어 보세요?, 모둠에서 자유롭게 아이디어를 교환하시오."와 같이 앞의 질문보다 열린 정도가 높았다.

2) 실험과정

한 차시를 80~120분으로 한 실험은 5차시로 진행되었다. 이 연구는 Blum(1993)의 모델링의 교육적인 정의 "실세계 상황으로부터 수학적 모델을 결정하는 과정, 즉 모델 구성의 과정"에서 '모델을 정하기전까지 어떤 세부 활동을 설정할 것인가?'에 목적이 있기 때문에 놀이학습에 관심이 많은 동료 교사들과 국내외 자료를 검토하여 다음과 같이 5단계 활동을 만들었다(대한수학회 소식지, 2017, 2018, 2021).

- 1단계: 수학적 모델링 과제 제시 및 상황 탐색 단계(전체활동)

교사는 전체학생에게 한 학생이 놀이터 '자이언트 휠'의 좌석에 앉아있는 상황을 동영상으로 보여주

고, 휠의 반경을 1m로 정해주었다. 휠의 중심을 지나는 가로축이 수평인 상태에서 휠이 왼쪽으로 회전하기 시작했으며 각 모둠에게 다음과 같은 질문을 던졌다.

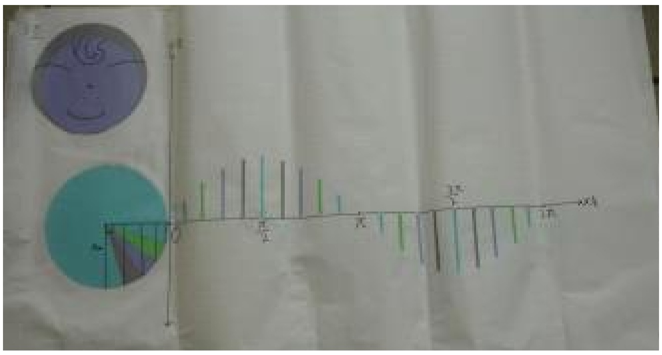
“회전하는 자이언트 휠에 앉아있는 학생의 좌석에서 수평축까지의 거리는 어떻게 변할까? 이들 높이를 색종이로 오려 붙이세요. 어떤 그래프가 그려지나요?”

이 질문은 교실의 학생들 수준을 고려하여 비교적 난이도가 낮은 열린 질문이었다. 이후 각 모둠은 아이디어를 교환하는 토론 시간을 가졌다. 연구자는 모둠의 활동을 간섭하지 않았다. 그러나 원래 연구자가 생각한 질문은 큰 질문으로 “회전하는 휠 위에 앉아있는 학생의 좌석의 높이가 변화 하지요?, 어떤 패턴이 있는가요?, 색종이로 나타내어 보세요?, 모둠에서 자유롭게 아이디어를 교환하시오.”와 같이 앞의 질문보다 열린 정도가 높았다.

- 2단계(자유로운 아이디어 교환) : 자유로운 아이디어의 교환이 이루어지는 단계로 모둠별로 교사가 던진 열린 질문에 대한 해결방법을 탐색하는 단계이다. 대부분의 모둠은 ‘지름이 1m’라는 정보를 이용하여 단위원을 색종이에 나타내기 시작했다. 가장 중요한 활동은 모둠 내 자유로운 의견교환이 이루어져 질문에 대한 모둠 해결방법을 찾는 것이다. 가장 필요한 정보를 수집하고 분석하는 활동이 역동적으로 이루어지는 단계이다.

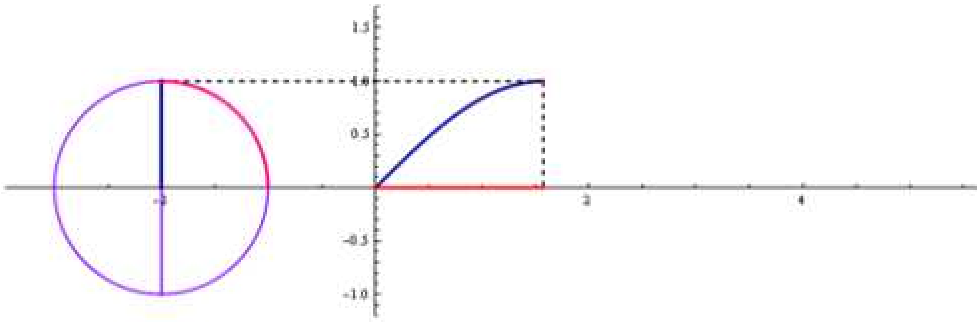
0. 5개조로 나누어 모둠별로 갱지, 풀, 색종이, 자, 컴퍼스, 각도기, 칼, 펜 등을 준비한다.
0. 모둠별로 결과물(사인함수 그래프)을 발표하는 활동을 한다.

아래 <그림 Ⅲ-1>은 한 모둠이 1단계의 활동을 하고 동료들한테 발표한 자료이다. 실세계의 휠의 상황을 단위원으로 나타내고 X축, Y축도 정하여 회전각에 대한 높이를 색종이로 오려붙였다. 실패한 모둠의 경우는 실세계 상황을 수학적인 아이디어 변환하지 못하였지만 결국은 완성했다. 이들 개념은 X축과 Y축의 설정, 회전각의 기호도입, 변수θ의 이해, 점 P의 위치설정, 삼각비를 위한 직각삼각형의 설정 등에서 아이디어 교환이 익숙하지 않았다. 색종이 활동에는 어떤 수학적인 아이디어가 있는가?, 그리고 어떻게 그들은 실세계 정보를 적절하게 수학적 아이디어로 연결했는가?는 결과분석에서 논의한다.



<그림 Ⅲ-1> 사인값을 종이로 오려 붙이는 활동

- 3단계(컴퓨터의 그래픽 표현) : 원래 계획은 모둠별로 파워포인트를 이용하여 색연필로 오려붙인 그래프의 끝점을 연결하여 곡선으로 표현하는 활동을 계획했으나 컴퓨터 시설의 부족 등 과정이 순조롭게 진행되지 않았다. 일부 모둠은 방과 후 동료들의 도움을 받아 완성한 경우도 있었으나, 대부분은 색연필로 종이 막대의 끝점을 연결하여 사인 곡선을 완성하였다. 결국 교사(연구자)가 파워포인트를 이용하여 컴퓨터 그래픽을 완성하고 빔 프로젝트로 전체학생들에게 보여주면서 설명을 하였다. 학생들은 자기들이 활동한 결과를 교사의 컴퓨터 그래픽과 비교하는 시간을 가졌다. 즉 학생들은 모둠활동에서 연필로 그린 사인곡선이 정교한 컴퓨터 그래픽으로 그려지는 것을 직접 확인하고 자기들이 그린 사인 곡선을 비교하여 교사의 그래픽을 이해하기 시작했다. 이 단계에서는 전문가들이 제작한 동영상도 의미 있게 활용할 수 있다.



<그림 Ⅲ-2> 사인곡선의 컴퓨터 그래픽 표현

- 4단계(교과서 진술, 수학적 문장 기호도입) : 학생들은 교과서 정의를 해석하고 이해하는 단계이다. 또, 삼각함수 $y = \sin x$의 그래프를 정의하고 정의역, 치역, 주기, 대칭 등을 확인한다. 전통적인 교실 수업은 수능시험을 고려하여 위의 1, 2, 3단계의 과정을 생략하고, 바로 4단계부터 시작하기 때문에 수업시간의 절약은 가능하지만 학생들의 개념 이해는 확인할 수가 없다. 평소 교실 수업에서는 사인함수의 정의와 교과서에 있는 사인 그래프를 한번 보고 문제 풀이 시간을 가지는 경우가 대부분이어서 동료들과 아이디어 교환, 협동, 흥미 그리고 동기유발과 같은 활동 등을 생략하는 경우가 많다. 4단계가 종료할 무렵 $y = \cos x$에 대한 그래프를 그리기도 하였다. 각 모둠의 활동이 전보다 훨씬 빠르게 진행되었고, 생각도 독창적인 면이 있었다. 4단계 이후 수업은 그래프의 주기와 이동을 교과서의 내용을 자세히 설명하고 학생들이 그린 그래프를 활용하여 두 축으로 이동하는 과정을 교사와 같이 실습하는 시간이었다.

- 5단계(대화와 토론 질문을 통한 아이디어 교환) : 학습한 수학적 모델인 삼각함수에 대한 이해 확장 활동하는 단계이다. 이 단계에서는 학생들이 이해한 내용과 방식을 서로 소통하면서 의견을 나누었고, 이 과정을 통해 삼각함수 그래프의 여러 확장된 개념 이해를 확인하였다. 이후 학습한 모델을 적용할 수 있는 수학적 모델링 문제를 제시하여 풀어 보면서 적응력을 확인하는 시간을 가졌다.

3. 실험도구

1) 활동지(실험과정)

이 활동지는 실험집단에서 학생들의 학습 과정을 알아보는 것으로 구체적으로는 개념형성의 3단계를 관찰하기 위한 자료이다. 이를테면, 첫 단계에서 활동지는 모둠 내에서 사용하는 것으로 두꺼운 용지에 단위원을 그리고 각 θ를 정하며, 칼로서 $\sin\theta$의 값을 잘라 붙이는 게임을 위한 것이었다. 두 번째 단계는 컴퓨터 활용에 능숙한 학생들은 학교 또는 집에서 파워포인트로 사인 그래프를 시도하고, 다른 학생들은 색종이 끝점을 색연필로 그어 사인곡선을 완성했다. 마지막에는 교사가 화면에 사인그래프가 그려지는 과정을 컴퓨터 그래픽으로 처리했다. 이후에는 $y=\sin\theta$를 정의하고 주기와 축이 이동하는 과정을 교사의 설명으로 진행한다. 같은 방식으로 $y=\cos\theta$의 그래프 실험도 빠르게 진행할 수 있었다.

2) 실험 결과의 전이를 관찰하기 위한 테스트(모델링 과제)

실험집단의 전이를 관찰하는 것도 관심을 두어 두 모델링 과제를 준비했다. 두 과제 모두 우리나라 고등학교의 수업 또는 학원의 문제집에서 볼 수 없었던 과제로 제목만 적고 학생이 이 과제들을 해결한 답지는 결과 분석에 제시한다.

삼각함수 모델링 과제
0. 자전거 뒷바퀴가 지면을 이동하는 상황(열린문제)
0. 달과 지구의 중력으로 인한 항구의 밀물, 썰물의 패턴(열린 과제)

3) 데이터 분석

면담은 주로 신설한 세부 두 단계의 활동에서 시행되었으며, 학생의 아이디어의 생성 과정과 사고전략, 아이디어 교환, 질문 생성 등에 관련된 자료를 알기 위해 실시했다. 이러한 자료를 얻기 위한 아이디어 본 연구는 기존의 세 단계를 다음과 같이 5단계로 세분하였다.

<표 Ⅲ-2> 학생들의 5단계 개념형성 모델링 과정

1단계	2단계	3단계	4단계	5단계
실세계 상황, 자연현상 관찰 및 해석	놀이도입으로 수학적 질문구성 및 개념연결	컴퓨터 그래픽과정, 반영적 추상 과정의 이해	수학적 모델 설정 (문장, 기호, 정의, 정리 등)	대화와 토론 질문을 통한 아이디어 교환

다음 결과 분석에서는 학생들이 실생활 상황을 수학적으로 해석하고 알맞은 개념을 연결하는 과정이 소개된다. 또, 그들이 발전적이고 창의적인 질문을 생성하는 과정도 대화형식으로 소개한다.

IV. 결과분석

1. 추가된 두 단계에서 일어난 수학적 아이디어 교환 및 질문의 생성

본 연구에서는 기존의 모델에 두 단계, 즉, 질문의 생성과 아이디어 교환을 강조하는 놀이실험단계와 컴퓨터 그래픽 과정의 단계를 새로 추가했다. 따라서 이들 단계에서 어떤 활동이 있었는지를 질적인 연구방법으로 조사하며, 주로 학생들의 수학적인 아이디어 교환, 질문 생성 등에 연구의 초점을 둔다.

추가된 모델링 두 단계에서 관찰된 의미 있는 모둠의 아이디어의 생성과 교환, 다양한 질문의 생성 등이 있었는가?

이 질문에서 논의하려는 이슈는 “어떻게 모둠 내 멤버들은 수학적 질문과 아이디어를 생성하는가? 또는 그들은 어떻게 아이디어를 교환하는가? 이들 과정은 의미 있는가?”와 같은 내용이다. 이들 질문에 답하기 위해 두 단계, 즉 놀이상황 도입와 컴퓨터그래픽 과정으로 나누어 기술한다.

1) 놀이상황 도입(사인, 코사인의 색종이 실험)

연구의 실험과정으로 돌아가서 이들 이슈에 대해 구체적인 논의 내용을 알아보자. 과제는 단순상황인 놀이터 휠의 상황을 동영상으로 보고 모둠별로 <그림Ⅲ-1>과 같이 단위원에서 직각삼각형을 그리고, 변수θ에 대한 사인값을 육십분법의 각 또는 라디안으로 계산하여 색종이로 오려 붙이는 활동이었다.

교사 : 사인값을 종이로 오려 붙이는 활동 전에 모둠의 멤버들이 어떻게 놀이공원 휠 상황을 색종이 붙이기 활동으로 옮길 수 있었어요? 놀이공원의 휠에서 원점이 O인 원으로 어떻게 옮겼어요?

학생 1 : 거대한 철 구조대가 휠의 중심을 받들고 있어 동료들이 이 지점을 원점으로 하는 원을 두꺼운 종이에 그려보자고 했어요.

교사 : 좌표축 X, Y는 어떻게 정했어요?

학생 2 : 휠의 중심을 지나는 가로 직선와 세로 직선을... 가로를 X, 세로를 Y로...

모둠발표자 : 우리 3조는 그림의 왼쪽에 반지름이 10cm인 원을 그려 단위원으로 가정하고 4분원을 5등분하여 높이를 측정하였습니다. $\sin 18^\circ$은 3.2cm, $\sin 36^\circ$은 6cm, $\sin 54^\circ$는 8.1cm, $\sin 72^\circ$는 9.5cm9, $\sin 90^\circ$은 10cm가 나왔습니다. 이 측정된 길이를 색종이로 오려 붙이면 그림과 같이 사인 곡선 모양이 됩니다.

(발표자는 <그림 Ⅲ-1>의 포스터를 보여주면서 활동과정을 설명하였다. 다른 모둠에서 질문이 있었고 간단한 대화가 오고 갔다)

이 모둠은 물리적 상황을 수학적 아이디어인 단위원으로 정확히 표현하였고, 더 나가서 휠의 물리적 상황에서 $\sin\theta$, $\cos\theta$의 값을 색종이를 오려 붙이고, 팀원 간의 수학적 아이디어를 교환하는 과정을 보였다. 발표가 끝나고 연구자는 전체 모둠을 대상으로 이들이 물리적 상황에서 수학적인 개념을 생성하는 과정을 확인하였다.

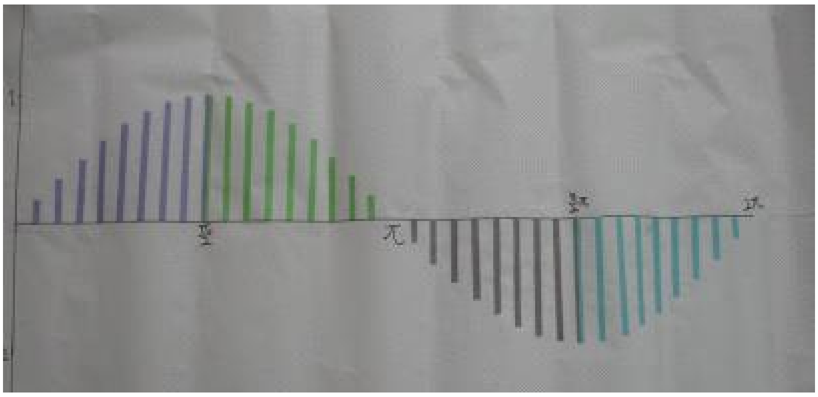
교사 : 어떻게 놀이(휠 상황)에서 변수 θ의 개념을 알게 되었나요?

학생 3 : 왜냐하면 학생이 놀이 기구에 앉아있는 것을 점 P로 놓으면 P의 위치는 계속 변하는데요. 따라서 각 POQ(Q는 X축)를 변수θ로 상상했어요.

교사 : $\sin\theta$, $\cos\theta$의 값은 “휠 상황”의 어디에서 아이디어를 얻었나요?

학생 4 : 학생이 앉아있는 의자를 점 P로 보면 사인값은 점 P에서 X축에 수선을 내리고, X축 위의 수선의 발을 Q로 하면 $\overline{PQ}$ 입니다. 코사인값은 원점에서 점 수선의 발까지의 거리니까 $\overline{OQ}$ 가 되고요.

놀이공원의 휠을 원 또는 단위원으로 생각한 이 모둠은 학교 수업에서 수학 능력이 뛰어난 집단이 아니었으며, 수능형 문제해결의 성취에서도 탁월한 수준은 아니었다. 다음 모둠4의 멤버들의 수학적 아이디어의 교환은 한결 수준이 높았다.



<그림 Ⅳ-1> 모둠4의 라디안으로 환산한 색종이 붙이기 활동

교사 : 다음 조에서는 어떤 생각을 했는지 발표해 보세요.

모둠발표자 : 저희 4조는 왼쪽에 반지름이 15cm인 원을 그려 단위원으로 가정하고 원을 작도하였습니다. X축에 π라디안을 45cm로 하고 $\frac{\pi}{18}$라디안은 2.5cm로 하여 간격을 잡고, 작도한 단위원에서 10도 간격으로 높이를 잘랐습니다. 그림에서 처음 막대가 $\frac{\pi}{18}$ 라디안 일 때 높이를 의미합니다. 그래서 π라디안을 넘기면 단위원의 높이가 아래로 내려간 막대가 X축 아래로 붙어나갔습니다.

이 모둠은 각도를 라디안으로 환산하여 막대 길이를 계산하는 더욱 발전적인 아이디어를 내놓았다. 그리고 단위원을 그리지 않고 암산으로 사인값에 해당하는 막대를 그릴 수 있었다. 각 θ대신 라디안을 도입했다는 것은 사인과 코사인 개념을 두 축을 사용하여 그래픽으로 나타내는 과정을 잘 이해한다는 것을 말해준다. 특히 π를 넘을 때 오려 붙이기가 3, 4분면에서 이루어진다는 것을 알고 있는 것도 의미 있는 대답이다. 이 모둠들은 $\sin\theta$의 그래픽을 색종이로 나타낸 것처럼 $\cos\theta$의 그래픽도 색

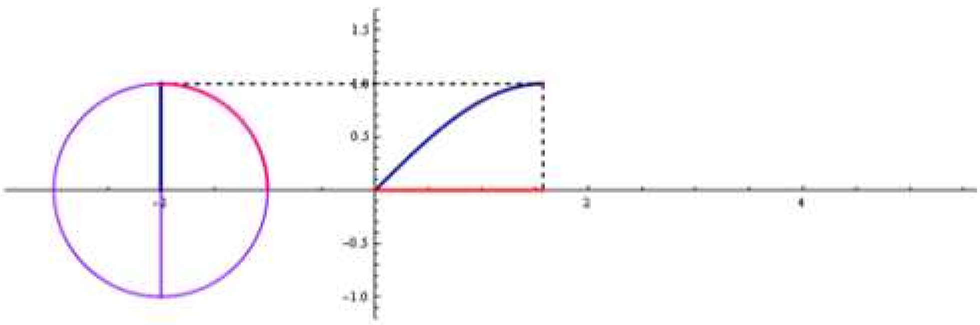
종이로 무난하게 표현했다.

교사 : $\cos\theta$의 그래픽에 대한 큰 질문을 처음 누가 제시했나요? 어떻게 아이디어를 얻었나요?
한 학생 : 저요. 문제를 풀 때 사인값은 삼각형의 높이로 코사인값은 밑변의 길이로 생각해서... 밑변의 길이 $d=\cos\theta$로 했지요. 그린 그래프 보세요......

2) 컴퓨터 그래픽 과정

이들 모둠이 교과서에 있는 사인과 코사인 함수의 그래프와 함수의 정의를 이해하기 위한 전 단계로 컴퓨터 그래픽 과정을 경험해야 한다. 일부 교사들은 칠판에 사인값에 해당하는 점을 몇 개 찍고 분필로 점들을 곡선으로 연결하는 동작을 보이고, 학생들이 교사의 지시에 따라 자연스럽게 사인 또는 코사인 곡선을 그린다. 그러나 대부분 교사들은 교과서 그림을 보고 사인곡선을 선언한다. 본 연구에서는 교사(연구자)가 컴퓨터를 이용하여 사인함수의 그래프가 어떻게 그려지는가? 그 과정을 학생들에게 천천히 동영상으로 보이고, 학생들은 색종이 막대 끝을 부드러운 곡선으로 이어가는 경험을 했다. 교과서는 인쇄된 곡선을 보일 뿐이다. 그러나 학생들은 그 과정이 어떻게 이루어지는가? 에 관심을 가진다. 컴퓨터의 소프트웨어는 역동성을 더해주기 때문에 컴퓨터의 그래픽 표현은 개념의 이해를 위해서 필수과정이다. 모델링의 수업에서는 실세계의 데이터를 교실에서 보이고 이들이 나타내는 패턴을 찾아야 하는 기회가 많다. 현재 연구자가 속해있는 학교는 교사의 인식이 부족하고 컴퓨터 시설도 부족하여 이런 유형의 패턴을 학생들에게 보여주기가 쉽지 않다. <그림 Ⅳ-2>와 같이 파워포인트로 그래프가 만들어져가는 과정을 동영상으로 보여주는 시간에 모둠들은 다양한 질문과 자기들의 아이디어를 교환하는 기회를 가졌다.

학생 5 : 동영상의 그래픽은 우리 모둠에서 붙인 막대 색종이의 끝을 연결하여 곡선으로 나타냈고..... 그래프는 어떻게 말해야 하나? 점들의 집합인가?
학생 6 : 복잡한 함수를 나타내는 식, 이를테면 $h=2+2.5\sin 30t$의 그래프는 어떻게 나타내나? 노트나 칠판에서 그리기도 어렵고......
모둠발표자 : 컴퓨터 소프트웨어를 개발해야 한다. 2,3D프로그램도 있고...



<그림 Ⅳ-2> 컴퓨터 그래픽 활동 예시

학생들의 대화는 수학교과서 또는 문제집에 나타내어진 정적인 그래픽과 그래픽 없이 기호와 문자로 엄격하게 표현한 수학적 정의와 정리, 난해한 관계식 등을 말하는 듯했다. 사실 구체적 놀이 활동, 수학이 만들어가는 과정을 그래픽 활동으로 나타내는 행위는 교과서의 함수식과 기호를 이용한 정의를 읽기 전에 있어야 할 과정이다. 새로운 수학의 운동을 주장하는 미국수학회(AMS)는 그래픽 표현, 과학적인 실험 데이터의 컴퓨터 표현 등은 중요한 지식으로 분류한다. 이를테면, 양적인 변수들 사이에 일어나는 관계를 그림으로 표현하는 것은 교육에서 매우 중요하다고 보았다. 예를 들면 3000rpm으로 달리는 4인치 스트로크(stroke)를 가진 피스톤의 위치는 함수 $y=2\sin(100t)$, t초로 나타내어진다. 이들 위치의 패턴을 그래픽으로 나타내면 우리는 그래픽으로부터 쉽게 이 운동은 주기적인 성질을 가진 다는 것을 이해한다. 한 가지 주의할 점은 그래픽은 함수식보다 덜 엄격한 표현으로 정확성은 떨어진다. 그렇지만 정교한 컴퓨터 소프트웨어가 그래픽의 생성과 활용에 영향을 주고 있고, 관계식이나 과학적인 실험에서 나오는 많은 데이터를 효과적으로 처리하거나 명료한 그래픽을 생성하는 기술의 진보로 그래픽의 약점이 크게 개선되고 있다. 따라서 학생들에게 그래픽을 지적으로 해석하고 기호, 그래픽, 숫자로 나타낸 데이터의 연결 관계를 강조하는 수업이 매우 중요하다(대한수학회 소식지.2021). 사실 삼각함수의 개념과 그래프의 이동, 즉 함수 $y=\sin\theta$를 이동하여 함수

$$y=\sin(\theta+c)+d$$

를 얻는 과정은 그래픽을 이용하지 않고는 이해하기 어렵다. 잘못하면 두 식을 보고 암기하는 수업방법을 생각할 수도 있다. 칠판수업에서 흔히 볼 수 있는 오류로 교사는 $y=\sin\theta$의 그래프를 X축의 방향으로 c, Y축 방향으로 d만큼 이동하여 함수 $y=\sin(\theta+c)+d$의 그래프를 얻을 수 있다고 말한다. 그리고 진폭, 주기 등에 대한 공식을 쉽게 말하여 학생들은 암기의 방식으로 공식을 기억한다. 이런 방식의 수업은 열린 탐구를 중요시하는 교실에서 점점 멀어져간다. 이 연구에서 중점을 둔 주제는 실세계의 다양한 물리적 상황과 컴퓨터 그래픽수단을 가진 삼각함수의 개념을 열린 탐구로 수업할 수 있는가? 또는 교재개발의 가능성이 있는가? 를 알아보는 것이었다. 실험에서는 모둠활동을 강조했고, 모둠 내 멤버들의 다양한 수학적 아이디어의 소통과 질문의 생성 등의 활동을 중요시했기 때문에 다양한 수준의 질문 생성에 대한 학생들의 모둠 활동을 관찰하는 도중에 매우 의미 있는 수준의 질문이 생성되었다. 그 중 하나를 소개하면 다음과 같다(모둠 내 활동)

모둠멤버1 : 지금까지는 자이언트 휠의 중심을 원점O로 하고 단위원을 생각했다. 만일 우리 모둠에서 휠의 가장 낮은 지점에서 위의 앉아있는 좌석까지의 높이를 대상으로 사인 함수를 생각하면 그래픽은 어떤 모양?

모둠멤버2 : 글쎄. 아이디어를 구체적으로 종이에 그려서 설명을 해줄래?(문제를 제안한 학생은 동료에게 노트에 자기 아이디어를 그림으로 나타내고 문제 상황을 동료들에게 설명한다)

모둠멤버3 : 그러니까. 휠의 가장 낮은 지점에서 앉은 자리 점 P까지 거리를 시간의 함수로 나타내자는 말이니?

모둠멤버1 : 그렇지. 높이를 y, 시간을 t로 하여 높이 y를 시간 t의 함수로 나타낼 수 있는가? 이지...

모둠전체: 글쎄. 될 것 같은데......

우수학생에 제안한 아이디어는 대단히 유익한 문제정보이지만 이 모둠에서는 문제형태로 완성하기가 쉽지 않았다. 연구자는 이 학생이 새로운 수업 이슈를 창출할 수 있는 질문을 생성할 수 있는가?에 감탄을 하였다. 이들 실험에서 실험학교의 수업시스템 혁신에 도움이 되는 몇 가지 아이디어를 얻

을 수 있다.

2. 학생들의 수학적 아이디어의 교환(Idea Sharing), 질문의 생성

실험과정에서 연구자도 그리고 학생들도 현행 수업시스템에서 어떤 변화가 필요하다는 것을 확인할 수 있었다. 교사는 학생들의 자유로운 아이디어의 발산을 억제한 결과를 낳고, 학생들은 이제는 교실의 수업시스템이 바뀌어야 한다는 분위기가 있었다. 실험에 참여한 학생의 말을 들어보자.

학생 : 색종이 오려 붙이기는 유치원 같아 좀 어색했는데... 지나면서 동료들과 자유롭게 의견을 나누고 내가 부족했던 배운 것들을 동료들이 메꿔 주기도 하고... 내 생각 시간을 가질 수도 있고..... 교과서든 학원의 문제풀이든 이게 얼마나 유익한가요. 왜 학교에서는 틈도 없이 문제만 풀고, 또 풀고... 정말로 살아가는 데 도움이 되나요?

모든 학생들에게 관련이 있지는 않지만 학생들은 실험에 집중하면서 동료들과 자유로운 토론 속에서 나름대로 새로운 의미를 생성해 나갔다. 일부 학생들은 실세계의 현상 속에 수학적 개념이 들어있다는 것을 흥미 있게 바라보았고(물레방아와 대보름 불꽃놀이에 대한 대화) 나름의 수학적 의미를 자기 동네 평범한 일상에서 찾는 것 같았다. 이를테면 일상생활에서 볼 수 있는 물레방아에서 사인, 코사인의 주기적 그래프가 숨어있다는 사실에 수학을 새롭게 보는 눈을 가지기 시작한 것이다. 학생들 개개인은 어릴 때부터 직간접적으로 다양한 경험을 통해 자신만의 독특한 수학을 보는 눈을 가졌지만 학교교육을 시작하면서 사라지고 모든 학생이 같은 목표를 두고 달린다. 질문의 생성에서도 학생들은 교사의 생각을 뛰어넘는 경우가 종종 있었다. 실험에서 어떤 학생은 동료들과 아이디어의 교환 중 매우 발전적인 과제생성에 가까운 아이디어를 제시했다(위 모둠 멤버 3의 발언). 사실 이 모둠은 교실보다 필드 실험을 통하여 실세계에서 자신에 맞는 과제의 생성을 할 수 있는 학생이다. 이를테면 00회사의 물류창고를 방문하여 수학적 패킹문제에 접해도 되며 할인 광고 회사에서 수학적인 아이디어를 현지인들과 교환 할 수 있다. 실험에 참여한 대부분의 보통 학생은 배운 내용을 재생하는 간단한 질문을 하였다(00 모둠의 라디안 공식 등).

3. 전 단계에서 일어난 삼각함수 개념의 그래픽 과정의 다양한 사고 활동

연구문제에 대한 실험 과정에서 여러 모둠의 놀이 활동, 특색이 있는 아이디어 교환 방식 그리고 모둠의 질문 구성방식은 실험집단의 모델링 과정을 이해하는데 도움이 된다. 이 과정 속에는 수학적 상황을 이해하는 센스가 있고, 창조하고, 확장하고, 재정의하는 학생들의 탐구 활동이 있다. <표 Ⅳ-1>는 실험기간 중에 실험집단의 모둠활동에서 일어난 학생들의 대화, 생각, 특이한 활동을 한눈에 볼 수 있도록 정리한 것이다. <표 Ⅳ-1>에서 보여주는 각 모둠의 다양한 사고 활동은 현재 정적인 교실문화, 즉 수업시스템, 교실의 자유로운 학습 분위기, 학생들의 방과 후의 수학 활동 등의 혁신을 추진하는 실험학교에 의미 있는 시사점을 준다. 현재 대부분의 고등학교에서는 수능 중심 수업시스템에서 실험집단이 보여준 교수학습의 활동은 어렵다고 말한다. 이 연구는 새로운 교실 환경을 학생들이 만들어 갈 수 있는가? 를 적극적으로 탐구해보는 실험 연구이기도 하다.

<표 Ⅳ-1> 실험집단(TMG)의 전 단계에서 일어난 다양한 사고활동

모델링과제 단계	$\sin\theta,\cos\theta$모델링 (TMG집단)	모둠의 활동, 질문생성, 아이디어 교환 및 소통
단계1 : 실세계 상황 또는 자연현상 관찰(수학적 의미 함축)	놀이공원의 휠 또는 불꽃놀이의 원 모양의 회전, 원 모양의 물레방아, 원, 휠, 회전체 둥근 모양에 대한 동영상과 사진	모둠 또는 일부의 필드 실험을 통해 자연현상, 실생활 상황에서 수학적 아이디어 발견, 동료와 아이디어를 교환 수학적인 생각의 창출, 놀이공원 동네시장 등 수학적 개념이 포함된 상황 확인, 상인들과 대화, 다양한 자연과학 자료를 탐색하여 질문구성.
단계2 : 놀이상황 도입, 수학적인 질문, 상황과 수학적 개념연결,	자이언트 휠, 회전체, 둥근 모양을 단위원으로 전환, 휠의 좌석을 단위원의 한 점 P로 전환, 휠의 중심을 원점 O, 두 개의 가로 세로를 좌표평면 X,Y축으로 전환, 좌석점 P에 가로축 거리를 색종이 막대로 표현.	1단계의 관찰결과를 수학적 교실 활동으로 연결, 연결되는 수학적 개념이나 계산을 확인하는 질문 생성, 생성된 질문의 단체검토확인 과정, 개인 질문 권장, 모둠 멤버들의 발산적 사고질문 요청, 다양한 놀이 상황을 구상실천, 마트 방문 직원과 대화.
단계3 : 컴퓨터그래픽, 수학화(반영적추상), 수학적인 모델설정	컴퓨터 그래픽으로 2단계 막대 끝점의 연결 또는 도화지에 2단계의 그림의 정교한 완성, 소프트웨어 전문기관의 동영상, 교사의 칠판에서 그리기 가능. 그래픽 계산기도 컴퓨터 역할.	교사가 만든 컴퓨터 그래픽의 경우 그래픽 설정 과정 이유를 모둠과 공유, 학생들과 공동으로 컴퓨터 그래픽을 창출 또는 모둠의 주말 과제로 컴퓨터 그래픽 작성, 이전 단계와 연결 수학적인 아이디어의 확인, 모둠별 정교한 곡선 그리기도 권장하면서 동료들 소통 활성.
단계4 : 수학적 문장기호 도입, 정의, 공식, 정리	교과서의 정의, 공식, 법칙 소개, 수학적 문장과 기호 도입, 그래픽 과정을 정리함. 엄격한 서술.	교과서의 정의, 공식, 정리를 읽기, 읽은 내용의 해석을 앞 단계와 연결 설명하기, 앞 단계를 기억하여 교과서 문장기호를 스스로 쓰는 창의적 활동, 모둠별 교과서 읽기와 해석을 발표, 모둠별 발표를 비교 검토하고 교사가 평가.
단계5 : 대화와 토론 질문을 통한 아이디어 교환	모둠이 생성한 새로운 실세계 상황, 모둠 멤버의 큰 질문을 전체 토론에 유도, 모둠이 만든 $\sin\theta,\cos\theta$ 모델링 과제의 발전 또는 필드 실험을 통한 사인, 코사인 함수에 대한 과제 만들기.	이미 기본 모둠의 활동을 확장, 발전시키는 창의적 아이디어 발표, $\sin\theta,\cos\theta$에 대한 발전적 모델링 소재 질문과 생성, 모둠 내 아이디어 생성, 권장, 발산적 생각을 권장. 토론, 발표 토론, 개인 발문존중을 존중, 모델링 과제 생성을 위한 다양한 실세계 경험 존중.

4. 실험학교의 교실 환경의 변화

위의 <표Ⅳ-1>에서 실험 기간에 고등학생들이 보여주었던 자연현상 또는 실세계 상황을 해석하고, 교실의 색종이 오려 붙이는 놀이를 동료들과 소통하며 성공적으로 수행한 것을 볼 수 있다. 또 컴퓨터의 그래픽 프로그래밍에 기초한 교사 활동을 받아들인 것을 보면서 연구자는 새로운 수업시스템을 실험학교에 도입 할 수 있다는 믿음이 있었다. 오히려 수학문제집의 형식화된 문제해결을 수업의 이슈로 삼는 것은 우리 학교교육이 해결해야 하는 문제점으로 보였다. 연구에서 보여준 데이터는 만일 우리 학생들의 수학적 응용능력이 미래사회를 살아가는데 필수적인 요소라 생각한다면 모델링 과정은 바로 교실에 도입되어야 한다는 것을 실증한다. Blum(2008,1993)은 이점에 대해 수학적인 순환 과정의 단절로 표현했다. 이 연구에서 위 모델링 절차의 처음 3단계 “상황해석, 분석⇒ 수학적 질문탐구⇒컴퓨터그래픽 과정”을 성공적으로 이끌어 갔던 모둠들은 수학적 모델링의 과제해결에서 질문의 생성과 동료들의 아이디어 교환, 특히 질문의 생성 등에서도 다른 반 학생들보다 훨씬 의미 있는 활동을 하였다.

<표 Ⅳ-2> 학생들의 5단계 개념형성 모델링 과정

1단계	2단계★	3단계★	4단계	5단계
실세계 상황, 자연현상 관찰 및 해석	놀이도입으로 수학적 질문구성 및 개념연결	컴퓨터 그래픽과정, 반영적 추상 과정의 이해	수학적 모델 설정 (문장, 기호, 정의, 정리 등)	대화와 토론 질문을 통한 아이디어 교환

실험기간에 새로 설정한 ★단계에서 학생들이 보여주었던 수학적 아이디어의 교환(Idea Sharing), 질문생성, 동료들과 토론은 현재와 같은 교실 환경에서는 생각할 수도 없는 광경이다. 수학교사들은 삼각함수의 수업에서 학생들이 ‘무엇을 알겠는가?’라는 선입견을 갖지 말고 교실에서 이들 활동을 하도록 수업 과제 및 자료선택, 수업방법, 수업활동에 관련되는 토론 분위기 등을 미세하게 준비하여야 한다.

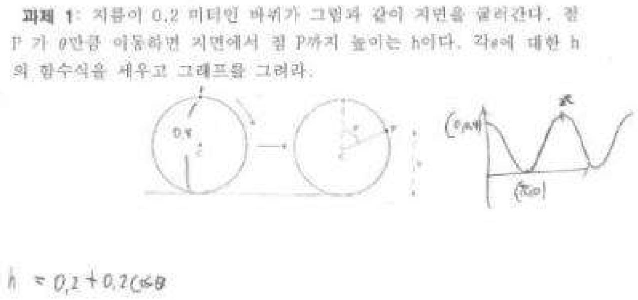
5. 양과 수(Quantity) 수업에서 컴퓨터를 포함한 테크놀로지의 활용

교실의 환경을 바꾸는 아이디어에는 학교 밖의 변화를 교실에 받아들이는 문제도 포함된다. 서론에서 기술한 Zawojewski(테크놀로지 연구소, 2007)등의 ‘새로운 기술의 변화’에 알맞은 교육 시스템 변화를 받아들여야 한다. 실세계 상황은 전통적인 교실에서는 단순히 활용을 의미하고 있지만 이제는 수학적인 사고방법을 수정하고 재창조하는 과정, 문제(과제)을 구조적으로 보는 상황을 의미한다. 더 나아가 컴퓨터를 이용한 시각화는 데이터 분석에서 또는 숨겨진 패턴을 찾는 시각적 디스플레이에서도 그 중요성이 강조되어왔다. 또 컴퓨터 시각화는 과학과 산업 분야에서 관찰되는 수학적 관계 또는 함수의 표현, 지도제작에서 삼차원 현상을 이차원 캔버스에 사상하는 투영 등과 같은 기하적 도구로, 그리고 컴퓨터 그래픽을 이용해 동역학계, 시스템의 안정성 등과 같은 다양한 자연현상을 수학적으로 해석하는 연구에서도 중요한 역할을 한다. 이제는 학교 내외에서 컴퓨터의 시각화로 수학적 패턴을 탐구하는 학습활동은 교육에서도 절대적인 가치를 가진다. 국내의 4차산업의 현장을 가보면 현재 학교는 구시대의 교실 환경 속에서 살고 있다는 것을 실감한다. 이 연구에서 중점을 둔 이슈는 ‘어떻게

컴퓨터 그래픽을 수학교실에 자연스럽게 도입하는가?'이었다. 본 연구자도 실험의 3번째 단계, 즉 컴퓨터 그래픽 과정을 학생들에게 충분히 보여주지 못한 것을 인정한다. 그러나 실험학교에서 수학수업에 컴퓨터 시각화를 도입할 수 있다는 확신을 가지게 되었다. 이제는 학생들이 컴퓨터 소프트웨어를 교사보다 능숙하게 활용을 할 수 있고, 특히 '지오지브라' 컴퓨터 프로그램을 이용하여 칠판에서 그릴 수 없는 함수의 그래프를 그린다는 점은 연구자를 놀라게 했다. 수업시간에 함수에 관련된 수업에서 칠판에 모든 수업 활동을 집중하려 했던 교사의 무관심이 교실 환경을 변화시키지 못한다는 것을 깨달았다. 교실에 컴퓨터가 없으면 방과 후 집에 가서 컴퓨터 과제를 할 수 있게 숙제로 제시해야 한다. 그 결과는 다음 날 수업시간에 유용하게 쓰인다. 이 실험에서는 각 모둠이 매우 의미 있는 교실 활동, 즉 수학적 아이디어의 교환, 질문 또는 아이디어의 생성 그리고 소통을 통하여 컴퓨터 그래픽을 스스로 제작하는 실험을 일부 모둠에게 시도했으나 만족스러운 결과를 얻지는 못했다. 이 점에 대하여 실험학교가 소속한 교육청 산하 수학교사 협의회에 컴퓨터 그래픽을 교실에 자유롭게 도입하는 문제를 심도 있게 논의하였다. 회의에서는 컴퓨터 그래픽이 적용되는 다양한 수학적인 토픽에 학생들과 교사가 공동을 참여하는 프로그램을 개발하고 자유롭게 학생들이 수업에 참여하는 교실 환경을 만들기로 하였다. 미적분 시간에 복잡한 함수의 그래픽을 학생들이 제작하여 교사 대신 동료들에게 보여주는 교실 환경이 미래를 준비하는 교육체제에서는 해 볼만한 활동이다. 반복하지만 이 실험은 다양한 컴퓨터 그래픽수단을 이용하여 삼각함수의 개념을 열린 탐구로 수업할 수 있고 가능하게 다양한 교재개발을 할 수 있다는 신호를 주었다. 고등학교의 수업시스템을 혁신적으로 개선하자는 실험학교의 운영 방침에 매우 도움이 되는 의미 있는 연구였다.

6. 실험과정의 확장, 전이 문제

실험이 끝나고 학생들은 과제를 어떻게 해결하는가?에 관심이 있어 간단한 실세계 과제를 교실에서 검사했다. 연구자의 관심은 학생들의 전이 문제를 관찰하기 위한 것이었다. 이 과제는 실험집단의 중수준 이상의 학생들도 해결할 것으로 기대했다. 과제 속에 이미 X축, Y축이 암시되어 있고, 점 P가 가장 높을 때는 지름의 길이 0.4이므로 $h=0.4$이고, $\theta=90^\circ$ 일때는 $h=0.4$이다. 또 $\theta=0^\circ$ 일 때 $h=0$이고, $\theta=180^\circ$ 일 때는 $h=0.4$가 다시 된다. 따라서 주기적 운동이 되기 때문에 자연스럽게 코사인 그래프가 그려지며 실험에서 교사로부터 주기, 그래프 폭, 축의 이동을 배우고 자기 모둠에서 제작한 색종이 그래프를 이용하여 실험을 해보았기 때문에 이 과제를 풀기 전 선수학습을 끝낸 상태이다. 과제에서 요구하는 답은 그래프를 먼저 그리고, 그래프를 보고 함수식 $h=0.2+0.2\cos\theta$를 써야 하는 상황이었다. 다음은 학업 성취도 중상 수준이 해결한 답지이다.



<그림 Ⅳ-3> 과제1에 대한 학생 답안

이 학생은 몇 개의 수치를 암산으로 알아보고 주기적 운동임을 이해했다. 땅을 X축으로 생각하는 것은 간단하지만 땅과 90도인 지름을 연장하는 선을 Y축으로 생각하는 것은 간단한 문제가 아니다. 그런데 이 학생은 상황에 알맞게 수학적으로 이를 변환하는 기술을 보였다. 보통 고등학생들은 새로운 과제 상황과 마주하면 당황해한다. 바퀴가 돌아가는 상황은 학교나 학원에서 소개하지 않기 때문에 이 학생에게는 생소한 과제이다. 무엇이 이 학생으로 하여금 처음 보는 실세계 상황을 수학적인 아이디어인 주기함수의 그래프로 옮기게 했을까? 수학교사들에게는 흥미로운 자료이다.

다음은 축의 이동을 잘 선택했으며, $\cos\theta$의 그래프를 Y축으로 이동하여 구하고자 하는 학생과 면담한 결과를 보자.

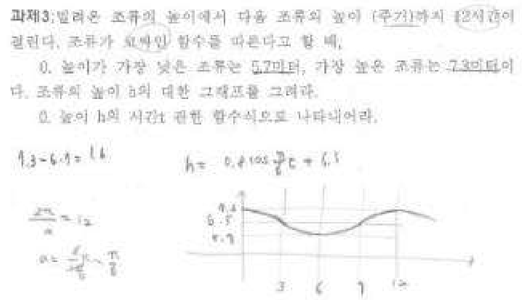
연구자 : 상황을 읽고 어떻게 생각했어요?

학 생 : 먼저 주기적 운동이라는 생각이 있었고....., 이 상황은 사인함수나 코사인 함수에 관한 문제라 생각했어요.

연구자 : 당황한 점은 있어요?

학 생 : 아, 예. 교과서나 학원에 다루는 문제집 어느 곳에도 각θ의 위치와 방향이 이 과제 상황과는 다르게 있어요. 위 문제처럼 하지 않아요. 혼동했어요.

이 학생의 말대로 학교 또는 학원에서는 각θ를 과제처럼 설정하지는 아니한다. 이 학생은 새로운 상황에 당황했지만 θ에 대한 점 P의 위치를 좌표에서 확인하면서 교과서에서 본 코사인함수 그래프일 뿐이라는 것을 확인하였다. 한참 시간이 지나고 연구자는 난이도가 높은 모델링의 과제를 주었다.



<그림 Ⅳ-4> 과제3에 대한 학생 답안

이 학생은 앞의 과제에서 생각한 방법을 사용해서 상황을 수학적인 그래프로 옮겨서 정확한 답을 얻었다. 연구자의 생각보다 상황을 수학적 모델로 변환하는 능력이 탁월했다. 이를 위해 과제에 주어진 정보 42시간, 코사인, 6.7m 와 7.3m를 주목했고 주기 구하는 공식과 진폭을 계산하여 그래프를 그렸다. 이 과제 상황도 교과서나 문제집에 소개되지 않아서 학생이 어떤 과정을 거쳐 실세계 상황과 수학적인 모델을 성공적으로 연결하였는지 관심을 가지기 시작했다. 이 학생들이 새로 보는 실세계의 과제를 어떻게 성공적으로 해결했는가?를 전이 문제로 이해하기에는 심층 면담이 필요하지만, 학생들은 실험과정이 과제해결에 상당한 영향을 주었다고 말했다.

V. 결론 및 토론

본 연구는 현행 학교 수업시스템과 교실의 학습환경을 개선하는 혁신 운동의 하나로 시행되었으며 기존의 모델링 단계에 세부 두 단계를 보완하여 실험하였다. 따라서 새로 보완한 두 단계를 학습하면서 종전에 실험집단 학생에서 찾아볼 수 없던 의미 있는 아이디어의 교환(Idea Sharing), 아이디어 생성 그리고 다양한 질문 생성이 있는가?를 면담, 관찰 그리고 실험의 전이 문제로 알아보았다. 결론으로

첫째는 새로 추가한 두 단계 수학적 모델링의 학습은 실험집단의 학생들에게 의미 있는 결과를 보였다. 여기서 연구자는 “의미 있는 결과”는 종전의 수업에서 볼 수 없었던 아이디어의 생성과 교환이 활발하게 이루어진 것으로 판단했다(결과분석 2개 표본모둠의 활동), 또 질문의 생성은 단순한 질문을 생략하거나 발전적이며 창의적인 질문을 볼 수 있었다(결과분석 모둠4의 토론). 다른 모둠에 대해서도 종전의 수업에서는 보기 힘든 그들의 토론과정을 관찰할 수 있었다. 추가한 두 단계는 2단계와 3단계이다.

<표 V-1> 학생들의 5단계 개념형성 모델링 과정

1단계	2단계★	3단계★	4단계	5단계
실세계 상황, 자연현상 관찰 및 해석	놀이도입으로 수학적 질문구성 및 개념연결	컴퓨터 그래픽과정, 모델의 비형식적 아이디어 교환	수학적 모델 설정 (문장, 기호, 정의, 정리 등)	대화와 토론 질문을 통한 아이디어 교환

모델링 단계를 연구한 Blum, W. & Leiβs,D.,(2005)등은 양적인 통계 방법을 이용하여 영가설을 검증하는 방법을 사용했기 때문에 직접적으로 두 연구의 결과를 비교할 수는 없다. 더구나 이들 연구는 위의 ★단계를 생략해서 실험 결과를 보였기 때문에 비교가 쉽지 않다. 본 연구에서는 ★단계를 고려한 모델링 수업이 미래사회를 대비하는 수업이고 학생들에게 긍정적인 영향을 준다는 생각에 모델링 수업 모형을 개발하고 활용할 것을 제안한다.

둘째는 고등학교 학생들의 수업시스템 및 교실학습의 환경개선에 의미 있는 결과를 보였다(결과분석 <표 Ⅳ-1>). 적어도 실험 학교의 전통적인 수업시스템과 학습환경이 크게 바뀌어졌다는 것을 확인할 수 있었다. 그동안 국내에서는 고등학교의 수학 수업에서 발문 생성과 아이디어 교환에 중점을 둔 모둠 수업을 할 수 있는가?에 대해 부정적인 의견들이 많았다(강원도 교육청 교사 심포지움, 2014), 그러나 실험에서 질문생성, 아이디어교환, 동료들과 소통 등에서 긍정적인 결과를 볼 수 있었다. 이에

본 연구에서는 전통적인 수업방식에서 벗어나 소통을 할 수 있는 5단계 모델링 수업 방식이 실제 교수학습 현장에서 활용되기를 기대한다.

셋째는 고등학교의 양과 수(Quantity)의 교육에서 컴퓨터 그래픽 등 테크놀로지의 자유 교실 도입은 매우 긍정적이였고 학교의 여러 제약 조건에도 불구하고 이론적 배경에서 논의한 "양적으로 잘 교육받은 학생이라면 처음 보는 상황에서 어떤 관계를 빨리 파악하고, 이를 효율적인 기호를 사용하여 표현하고 필요한 정보를 컴퓨터로 조작하여 의미 있는 계산 결과를 얻어야한다"는 필연성이 실험과정에서 확인이 되었다. 다만 수학 수업 테크놀로지의 도입을 꺼려하는 교사들의 관심도에 문제가 있다고 생각한다. 온라인 수업의 확대로 학교 기반 시절은 급속도로 좋아지고 있으며 이를 사용하는 학생들의 능력은 크게 향상되고 있음에도 불구하고 교사들의 참여 의지는 다소 미흡하다고 할 수 있다. 이러한 문제를 해결하기 위해서는 대입시 제도의 개선이 필요하고 모델링 수업이 대학 진학에 크게 벗어나지 않아야 한다고 생각한다. 이에 모델링 수업이 대학 입시에 미치는 영향에 대한 후속 연구를 제안한다. 모델링 수업의 중요성과 활용도는 여러 연구에서 검증되었지만 이런 수업을 진행했을 때 대입시에 어떤 영향을 줄 것인가는 현장에서 모델링 수업이 얼마나 실제로 적용될 것인가를 결정하는데 아주 중요한 사안일 것이다.

참고문헌

강원도교육청 교사 심포지움. (2014). **수업시스템과 교실 환경을 혁신하기 위한 방안.** 춘천: 강원 교육연구원.

교육부. (2015). **개정교육과정 총론**. 교육부. 고시 제2015-74호 서울: 교육부.

김부윤, 정영우. (2010). 삼각함수의 Mathematization에 관한 연구. **East Asian mathematical journal.** 26(4), 487-507.

신현성. (2021). 새수학운동에 대한 다양한 논의, **대한수학회 소식지 7월** 서울: 대한수학회

신현성, 전영주. (2017). 유럽수학교육학회 정기발표회 주요내용소개. **대한수학회 소식지 7월**. 서울: 대한수학회.

신현성, 전영주. (2019). 유럽수학교육학회 정기발표회 주요내용소개. **대한수학회 소식지 7월**. 서울: 대한수학회.

박민규. (1996). **중학교 수학에서 모델링 지도가 수학적 응용력에 미치는 영향**. 한국교원대학교 대학원 석사학위 논문.

신현성. (1985). 수학적 문제해결 과정의 분석 및 풀이 방법의 탐색. **강원대학교 논문집, 제22집**. 별책. 107-117.

장현석. (2020). 수학적 모델링 교수·학습에서 중학생들의 담화 분석. **학교수학, 23**(1), 45-65.

최희선, 한혜숙. (2018). 수학적 모델링 기반 수업이 중학교 1학년 학생들의 수학적 문제제기 능력에 미치는 영향. **학습자중심교과교육, 18**(14), 755-782.

Barbosa, J. C. (2006). Mathematical Modelling in classroom: A critical and discursive perspective. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik,* 33(3), 293-301.

Blum, W. (1993). Mathematical Modelling in Mathematics Education and Instruction. *Teaching and Learning Math.* In Context, Edited by Breiteig.(etc.), Ellis Horwood Limited, Chichester.

Blum, W. et al (2008). *On the Development of Mathematical Modelling Competencies-The Palma*

Longitudinal Study(1), ICME 2008, Mexico.

Blum, W. & Leiβs, D. (2005). *"Filling Up" – the problem independence preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks*. Proceedings of the 4th European Congress of Mathematics Education, Spain.

Confrey, J., & Smith, E. (1991). A framework for function : Prototypes, multiple representations, and transformations. In R. G. Under hill. (ED.). *Proceedings of thirteenth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*(Vol. 1, pp. 57-63). Blacksburg: Division of Curriculum and Instruction, Virginia Polytechnic Institute and State University.

Dienes, Z. P. (1960). *Building up mathematics*. New York: Hutchinson Educational Ltd.

Dreyfus, T. (1990). Advanced mathematical thinking. In P. Nesher, & Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* England. : Cambridge University Press.

Eisenhart, M. A. (1991). Conceptual frameworks for research circa 1991 : Ideas from a cultural anthropologist : Implications for mathematics Education researchers. In R. G. Underhill(ED.), *Proceedings of thirteenth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 202-219). Blacksburg, V. A: Division of Curriculum and Instruction, Virginia Polytechnic Institute and State University.

Erme. (2005). *Proceedings of the 4th European Congress of Mathematics Education*, Spain.

Erme. (2005). *Discussion: Mathematical Modelling, Quantity, Problem Solving. Proceedings of the 4th European Congress of Mathematics Education*, Spain.

Even, R. (1990). *Subject matter knowledge for teaching and the case of functions.*

Greer, B., Verschaffel, & Mukhopadhyay. (2007). Modelling for life:Mathematics and children's experience. In W. Blum, W. Henne, & M. Niss (Eds), *Applications and modelling in mathematics drecht*: Reidel.

Jenkins, H., Clinton, K., Purushotma, R., Ronbinson, A. J., & Weigel, M. (2006). *Confront Confronting the challenges of participatory culture : Media education for the 21st century.* Chicago: IL: MacArthur.

Jordan, A. et al. (2008). *On the development of mathematical modelling - The Palma Longitudinal Study(2)*, ICME 2008, Mexico.

Kaiser & Sriraman. (2008). *Six perspectives on research in modelling and application*. ICME 2008, Mexico.

.Lingefjard, T. (2005). Applied or pure mathematics. *Proceedings of the 4th European Congress of Mathematics Education*, Spain.

Lombardi, D. F. (2008). From classroom to the real world. ICME 2008, Mexico. Niss, M., Blum,W. & Galbraith, P. (2007). Introduction. In Blum, W., Galbraith, P. L. (Eds.), *Modelling and Application in Mathematics Education.* The 14th ICMI Study. New-York: Springer.

Norman, A. (1992). Teachers' mathematical knowledge of the concept of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.). *The concepts of function : Aspects of epistemology and pedagogy.* (MAA notes. Vol. 25). Washington, DC : Mathematical Association of America.

Pollak, H. (2008). *The Realistic Perspective On Research in Modelling and Application-Key*

Reference, ICME 2008, Mexico.

Thompson, P. W. (1985). Experience, Problem Solving, and Learning Mathematices : Consideration in Developing Mathematices Curricula. In Silver, E. A. (Eds.). *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving.* New Jersey, Hill sate: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight.* Theory of Mathematics Education. Academic Press Inc.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. T. all(Ed.) *Advanced mathematical thinking.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Weber, K. (2005). Students' understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research Journal, 17*(3), 91 - 112.

Zawojewski, Judith S. (2007). Problem solving and Modelling. In F. Lester (Ed.). *Second Handbook of Research on Math, teaching and learning.* Reston, V. A. : National Council of Teachers of Mathematics

The Effects of Graphics Representation of Trigonometry Modelling on Question Generating and Idea Sharing

Jae yeon Yoon[1] · Hyun sung Shin[2]

Abstract

The purpose of this study is to qualitatively examine the effects of graphics representation of trigonometry modelling concerning question generating and idea sharing. The experimental setting(Experiment Group) was one class (N=26) at a public high school. The modelling process was designed as a process-oriented conceptualization divided into three steps i.e., (1) game with idea sharing and question generating, (2) graphic representation, and (3) symbolization in the mathematical applied tasks related to trigonometry function. The result indicates that Graphic Representation with Game Activity increases the opportunity of question generating and idea sharing during experimental work. Also, the results show that the introduction of computer graphics enhances the teaching of mathematical quantity in highschool classrooms.

Key words : Computer Graphics, Mathematical Modelling, Modelling Tasks, Idea generating, Idea Sharing.

Received June 2, 2021
Revised June 21, 2021
Accepted June 23, 2021

---

* 2010 Mathematics Subject Classification : 97D40

1) Gapyong High School Teacher(yjy9420@korea.kr)
2) Kangwon University Honorary Professor(hsshin@kangwon.ac.kr), Corresponding author