한국학교수학회논문집 제 24 권, 제 2 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 24, Number 2, 173-190, June 2021
http://doi.org/10.30807/ksms.2021.24.2.001

# Newton의 역제곱 법칙 증명에서 기하학적 극한 분석 및 교육적 시사점

강정기[1]

본 연구는 Newton의 <Principia>의 핵심으로 일컬어지는 역제곱 법칙의 증명을 기하학적 극한과 관련하여 분석하고, 이를 수학교육에 활용하는 방안과 관련한 교육적 시사점을 제공하고자 하였다. Newton은 무한소에 대한 논쟁을 의식하여 전통적인 Euclid의 기하 방식으로 역학 문제를 해결하였다. Newton은 힘, 시간, 관성 궤도 이탈 정도 등을 기하 선분으로 표현함으로써 역학을 기하의 차원에 포함시키는 결과를 이뤄냈다. Newton은 특히 포물선 근사, 다각형 근사, 선분의 비의 극한이라는 기하학적 극한을 도입함으로써 Euclid 기하를 역학을 아우르는 새로운 차원으로 발전시킬 수 있었다. 이러한 분석을 바탕으로 Newton의 기하학적 극한을 수학의 유용성을 보여주는 도구로 활용, 곡선 면적은 정적분이라는 통념을 깨는 수단으로 활용할 것을 제안하였다. 더불어 학교수학에서 기하학적 극한의 바람직한 활용을 돕기 위해서는 미시 세계에서의 동등성 확대 강조, 발견술로서 활용하게끔 유도하는 질문 활용, 미시 세계에서 선분의 동등성 파악에는 비의 접근이 유용하다는 인식을 돕는 과정이 필요할 것이라는 교육적 시사점을 제안하였다.

주요용어 : Newton의 <Principia>, 역제곱 법칙, 포물선 근사, 다각형 근사, 선분의 비의 극한, 기하학적 극한

## Ⅰ. 서론

Newton의 <Principia>는 과학에서 중대한 문헌 중 하나로 근대 과학에 수학적 접근법을 확립시킨 기념비적 저작이다. 실세계의 현상에 대해 수학을 통해 접근하는 그의 아이디어는 현대 과학의 주요 방법이 되었으며, Einstein은 이에 대해 다음과 같이 말하였다.

> 지금까지 우리와 관계된 자연 현상에 관한 아이디어의 총 전체 진화는 Newton의 아이디어의 조직적 발전으로 간주해도 무방할 것이다(Pask, 2019).

<Principia>를 보다 자세히 살펴보면 수학 중에서도 기하학적 방법이 두드러짐을 알 수 있다. 특히 그는 Euclid 기하에 기하학적 극한을 적용하여 기존에 얻지 못한 여러 가지 새로운 결과를 도출할 수

* MSC2010분류 : 97-03
1) 진영중학교 교사 (jeonggikang@gmail.com)

있었다.

Newton이 기하학적 접근을 채택한 것은 고대 그리스 인들만큼의 엄밀성을 담보하기 위한 것이었다. 그렇다고 Newton이 그의 스승 Barrow처럼 보수적인 태도로 기하학적 방법을 고수한 것은 아니다(Merzbach & Boyer, 1991). Newton은 자신의 저서 <The Method of Fluxions and Infinite Series(유율법과 무한급수)>에서 대수적 접근 방식을 보여주었다. Newton은 단지 무한소의 도입으로 인해 야기되는 논란을 의식하여 기하학적 접근을 채택한 것이다(Kline, 1982).

무한소에 대한 대표적인 비판 중 하나로 Berkerey의 비판을 들 수 있다.

> 무한소를 사용하여 미분계수를 계산할 때, 처음에는 무한소를 0이 아닌 증분이라고 생각하다가 나중에는 0으로 두어 제거할 수 있다고 생각하는 논리적 오류에 빠져 있다(Kitcher, 1984).

Newton은 무한소가 어떤 상황에서는 0이 아닌 증분이었다가 또 다른 상황에서는 0이 되는 일종의 양면성을 띈다는 비판을 의식하여 <Principia>에서 기하학적 접근을 택하였다. Newton은 <Principia>에서 '궁극적인 비(ultimate ratio)'라는 표현을 자주 사용하였는데, 이를 통해 '극한'이라는 용어를 도입하여 사용하였다. 하지만 Newton의 기하학적 시도 역시 상황별로 양면적인 무한소를 완전히 배재한 것은 아니므로, Newton의 방식은 그다지 엄밀하지는 못한 것이었다(Kline, 1982).

어쨌든 Newton이 무한소에 대한 비판을 피하려는 의도로 기하학적 극한 방식을 택하였지만, 해법의 특수성은 응용의 어려움을 야기하였고 이로 인해 18세기에 Euler, Lagrange, Laplace 등의 학자들에 의한 역학의 해석화를 앞당기게 하였다(오가미 마사시, 와다 스미오, 2003). 다시 말해, 극한의 해석화는 기하학적 극한의 해법 특수성에 대한 반작용으로 출현된 응용성을 고양하는 방향으로의 발전이다. 그러나 여전히 극한에 대한 논란은 불식되지 않았는데, 18세기 수학자들 사이에서 가장 많은 논쟁을 일으킨 이 문제를 해결한 사람은 Cauchy이며, 그는 오늘날 극한 개념에 대한 엄밀한 정의를 최초로 준 사람이다(Grabiner, 1981).

Newton의 기하학적 극한 방식은 수학 역사의 입장에서 볼 때, 기하학에서 대수학으로, 가까워진다는 근사 개념에서 엄밀한 해석학의 단계로 이행하는 극한 개념 발전의 초기 단계라 할 수 있다. 다시 말해, Newton이 <Principia>에서 사용한 기하학적 극한 방식은 '기하학적 극한 → 해석화 → 엄밀화'로 진행되는 극한 개념 발전에서 초창기의 방식이라고 할 수 있을 것이다.

해석화, 엄밀화로 넘어가기 이전의 초기 단계로서의 의미를 지니는 기하학적 극한은 효과적인 발견 방식이다. 비록 '가까워진다'는 직관에 의존하는 기하학적 극한이 갖는 엄밀성의 결여라는 문제가 있기는 하지만(공민숙, 강윤수, 2014), 기하 차원에서 극한을 다루면 <Euclid 원론>에서 다루지 못한 새로운 정리를 발견할 수 있기 때문이다.

수학의 발전 양상을 '발견과 엄밀화의 교대 작용에 의한 상승'으로 이해할 때, 여러 가지 새로운 사실의 발견과 관련되는 기하학적 극한에 대하여 다루어 보고, 이를 교육적으로 활용하는 방안을 논의하는 것도 수학 교육적으로 의미 있는 일일 것이다. 이에 본 연구에서는 Newton의 <Principia>의 핵심으로 일컬어지는 역제곱 법칙의 증명을 기하학적 극한과 관련하여 분석하고, 이를 수학교육에 활용하는 방안과 관련한 교육적 시사점을 제공하고자 한다.

## Ⅱ. Newton <Principia>의 구성 및 특징

Newton이 라틴어로 집필한 <Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica(자연 철학의 수학적 원리)>는 간단히 <Principia>라고 부르는데, 과학 역사상 가장 위대한 지적 성취 중 하나로 간주된다. 그 탄생 배경에는 세 인물 Edmund Halley, Christopher Wren, Robert Hooke이 관련된다. 당시 이들은 역제곱 법칙으로부터 Kepler의 법칙을 유도하는 것에 대해 논의하고 있었다. 다시 말해, 궤도를 도는 물체에 중력이 거리의 제곱으로 감소한다는 가정으로부터 Kepler의 법칙을 유도할 수 있는지를 논의하였다. 세 사람은 이것이 가능하다고 믿었지만 누구도 그것을 설명하지 못했다. 1684년 8월 Halley가 Cambridge를 여행하던 중 Newton에게 이를 질문하였는데, Newton은 그것이 타원이며 몇 년 전 이를 유도하였다고 하였다. 하지만 그 노트를 찾을 수 없어 유도 과정을 새로이 작성하여 보낼 것을 약속하였다. 그로부터 3달 뒤인 1684년 11월 Halley는 9쪽 짜리 논문 '<De motu corporum in gyrum(궤도에서 물체의 운동에 관하여)>'를 받게 되는데, 이것이 곧 <Principia>의 기초가 된다(Henderson, 2005). Newton은 이 글에서 역제곱 법칙과 타원궤도가 어떻게 연결되는지를 보여주었다.

그로부터 1년이 넘는 1686년 4월 Halley는 영국왕립학회에 <Principia>의 제 1권을 받았다고 보고하였다. 왕립학회는 그 해 5월 19일 책을 출판하는 것을 허락하였으며, Halley가 책의 출판을 총괄하도록 하였다. 1687년 3월 7일 제 2권, 1687년 4월 4일 제 3권을 출판함으로써 <Principia>가 세상에 모습을 드러내게 되었다(Pask, 2019). Newton이 살아있는 동안 <Principia>는 2차례에 걸친 개정판을 출판하게 되는데, 제 1판이 등장한지 26년이 지난 1713년 제 2판, Newton이 사망하기 1년 전인 1726년 제 3판이 출판되었다(Brackenridge, 1995).

<Principia>의 기본 구조는 머리말, 정의, 공리나 운동 법칙, 책 제 1, 2, 3권으로 이루어져 있다. 그 중 제 1권 'De motu corporum(물체의 운동)'은 주로 저항 매체가 없는 상황에서의 운동, 제 2권 'De motu corporum(물체의 운동)'은 주로 저항 매체를 통과하는 운동, 제 3권 'De mundi systemate(세상의 체계)'은 중력의 많은 결과, 특히 천문학에 대한 결과와 관련한 내용을 담고 있다. 제 1권은 14개의 장, 제 2권은 9개의 장, 제 3권은 장에 대한 구분 없이 5개의 소제목으로 이루어져 있다.

<표 Ⅱ-1> <Principia>의 내용(제 3판)

| |
|---|
| 저자의 머리말 |
| 정의 |
| 공리나 운동 법칙 |
| |
| 제 1권. 물체의 운동 |
| Ⅰ. 첫 번째 비율과 마지막 비율을 이용하는 방법, 이 방법을 이용하여 우리는 다음 법칙을 설명한다. |
| Ⅱ. 구심력 찾기 |
| Ⅲ. 기이한 원추곡선에서의 물체의 운동 |
| Ⅳ. 주어진 초점으로부터 타원, 포물선, 쌍곡선 궤도 찾기 |
| Ⅴ. 초점이 주어지지 않았을 때 궤도를 찾는 방법 |
| Ⅵ. 주어진 궤도를 따라 움직이는 운동 찾는 방법 |
| Ⅶ. 직선을 따른 상승과 하강에 관련된 것 |
| Ⅷ. 어떤 종류의 구심력이 작용할 때, 회전하는 물체의 궤도 찾기 |
| Ⅸ. 움직이는 궤도에 따른 운동; 원일점, 근일점의 운동 |

X. 주어진 표면에서 물체의 운동과 물체의 진자운동
XI. 구심력으로 서로를 끄는 물체의 운동
XII. 구형 물체의 당기는 힘
XIII. 구형이 아닌 물체의 당기는 힘.
XIV. 매우 큰 물체의 여러 부분에 영향을 미치는 구심력을 받아 움직이는 작은 물체의 운동

제 2권. 물체의 운동
I. 속도의 비율로 저항을 받는 물체의 운동
II. 속도의 제곱의 비율로 저항을 받는 물체의 운동
III. 속도의 비율로 어느 정도 저항을 받고, 속도의 제곱의 비율로도 어느 정도 저항을 받는 물체의 운동
IV. 저항하는 매질 속에서 물체의 회전운동
V. 유체의 밀도와 압축; 정역학
VI. 진자의 운동과 저항
VII. 유체의 운동과 투사체에 발생하는 저항
VIII. 유체를 통해 전파되는 운동
IX. 유체의 회전운동

제 3권. 세상의 체계
자연철학에서 추론의 규칙
현상이나 형세
법칙들
달의 교점[2)]의 운동
일반적인 주석

제 1권은 <Principia>에서 주로 사용하게 될 수학적 방법에 대한 설명으로 시작된다. Newton은 제 1권에서 힘의 작용을 받는 하나의 입자와 관련된 문제에서부터 시작하여 연이어 보다 복잡한 상황을 구축하여 여러 입자로 구성된 물체의 운동을 논의하였다. Newton은 이것이 이론적 발달임을 강조하면서, 물리적 응용 가능성에 대하여 아무 거리낌 없이 공식을 확장하고 예시를 제공하였다(Pask, 2019). 제 1권은 Kepler의 문제에 대한 해답이 제시되어 있는데, 구체적으로 제 1권 2장의 법칙 1∼법칙 3은 구심력과 Kepler의 두 번째 법칙으로 알려진 면적 속도 일정의 법칙 사이의 관계를 다룬다. 법칙 5∼법칙 10은 중심으로부터의 거리의 역제곱으로 변하는 구심력과 원뿔곡선 궤도 사이의 관계를 다룬다. 법칙 11 문제 6에서 비로소 Kepler의 문제에 대한 해답인 역제곱 법칙의 증명을 다룬다.

제 2권은 <Principia>가 나오기 이전에 널리 받아들여진 Descartes의 이론을 반박하기 위한 목적으로 쓰여 졌다. 제 2권에서 Newton은 공기와 같은 매질의 저항 속에서 물체가 어떻게 운동하는지를 보여주고, 투사체와 진자 운동에서 저항의 효과를 다루었다. 이처럼 그가 매질의 저항을 다루었던 것은 매질에 기반한 천체의 회전을 주장한 Descartes의 소용돌이 이론을 분석하기 위한 목적을 지닌다(Pask, 2019).

2) 달의 교점은 달의 궤도가 황도와 교차하는 점이다.

제 2권은 흔히 이론과 응용의 혼합물로 간주되는데(Pask, 2019). 이는 제 2권에서 Newton은 보다 많은 실험에 대해 설명하고 있기 때문이다. 예컨대, Newton은 공기 저항의 특성을 조사하기 위하여 제 2권 6장에서 여러 가지 다른 조건에서 진자의 실제 움직임을 관찰하여 구체적 실험 결과를 제시하였다.

제 3권은 제 1권에서 얻은 수학 공식을 천문학에 적용하여 얻은 결과들을 제시하고 있다. Newton은 과학을 하기 위한 틀을 구현하기 위해 추론의 규칙을 제안하는 것으로 제 3권을 시작한다. 그는 태양계와 관련한 자료를 제시하는 것으로 시작하고, 중력이론을 발전시키기 위하여 이론과 현상을 혼합한다(Pask, 2019). Newton은 '제 3권 현상들'에서 천문학의 관측 결과를 나열하고 법칙 1 정리 1에서 목성의 위성에서부터 시작하여 단계적으로 진행하여 중력의 역제곱 법칙이 태양계의 행성에 적용되는 단계적 방식을 확립하였다.

또한 보조정리 4와 법칙 40에서 시작하여 혜성의 운동 이론을 제시하였다. 이는 보조정리 4에서 제시한 Falmsteed, Hewelcke, Cysat의 관측 결과와 법칙 42 문제 22에서 제시한 Halley의 관측 결과에 기반한 것이다. Newton은 제 3권에서 법칙 36 문제 17에서 바다를 움직이는 해의 힘을 구하는 방법, 법칙 37 문제 18에서 바다를 움직이는 달의 힘을 구하는 방법을 논의함으로써 조석과 같은 현상의 기원을 설명하기도 하였다.

Newton은 Galileo의 추종자답게 <Principia>에서 수학을 강조하였다. 때문에 책의 제목 역시 Descarte의 저서 <Philosophiae Principia>의 제목을 모방하였지만, Descartes가 시도한 것보다 훨씬 더 수학을 강조하여 저술하였음을 드러내기 위하여 제목을 <Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica(자연 철학의 수학적 원리)>라고 하였다(Pask, 2019).

<Principia>는 본질적으로 기하 추론에 기반한다. <Principia>에는 점과 선으로 이름 붙여진 많은 그림과 그 그림과 관련된 산문 형태로 제시된 논의들이 있다. Newton이 살던 시대에는 기하 증명은 표준이었으므로 이는 자연스러운 결과이다. 하지만 Newton이 <Principia>에서 사용한 기하 증명 기술의 우아함은 거의 알려져 있지 않다(Fleuriot, & Paulson, 1998).

그 이유는 크게 네 가지로 생각된다. 첫째, <Principia>에 제시된 대부분의 명제 증명은 오늘날 대개 미적분을 사용해서 수행되기 때문이다. 후세의 학자들은 이 저작을 해석적이고 대수적 형태로 재생산하여 Newton이 <Principia>에서 구사한 기하학적 방법이 가려지는 결과로 이어진 것이다. 둘째, Newton의 <Principia>는 Perga의 Apollonius의 <Conics>에 기반하는데, 과학자들을 포함한 현대의 독자들이 원뿔곡선에 대한 지식이 Newton이 살던 시대만큼 갖춰져 있지 않기 때문이다(Whiteside, 1967). 셋째, <Principia>는 Galileo가 도입한 구어체 양식보다 Euclid, Archimedes, Huygens의 작품의 양식으로 기술하였기 때문이다. 결과 중심으로 서술된 <Euclid 원론>은 난해한 구성 방식의 저서로 널리 알려져 있다. 넷째, <Principia>에서 제시된 상당수의 내용은 수학 기호를 사용하기보다 산문의 형태로 제시되었기 때문이다. '~와 비례한다'는 표현이 여러 차례 반복적으로 등장함에도 불구하고 Newton은 이를 기호화하지 않고 산문의 형태로 기술하였다. Whiteside(1967)는 <Principia> 이해의 어려움과 관련하여 다음과 같이 말하였다.

> 나는 이 과학 역사의 거룩한 저작이 읽기 쉽지 않다는 것을 부인하지 않는다. .....(중략).... 우리는 <Principia>의 복잡한 수학 내용을 숙달하려고 할 때, Newton이 우리에게 양도했듯 저작의 난해함을 경험해야 한다.

<Principia>는 대수 기호에 익숙한 현대의 독자들에게 쉽게 접근 가능하지 않으며, 실제로 Feynman은 그의 강의(Goodstein, Goodstein, & Feynman, 2009)에서 <Principia>를 이해하기 어렵다

고 토로하기도 하였다.

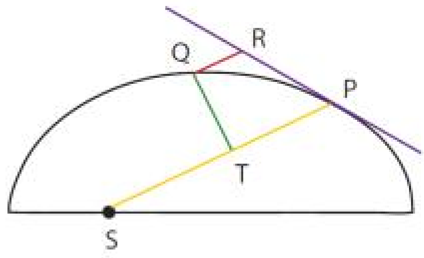
본 연구에서는 Kepler의 문제에 대한 해답을 제시한 <Principia>의 제 1권의 1장부터 3장의 내용에 초점을 두고자 한다. 이 부분이야말로 Newton 이론의 핵심과 정수가 담긴 곳이기도 하다. 실제로 1693년 당시 젊은 성직자 Richard Bentley가 <Principia>를 숙달하는 방법에 대해 Newton에게 조언을 구하였는데, Newton은 제 1권의 1장부터 3장까지만 읽기를 권하였다(Brackenridge, 1995). 본 연구에서는 이 내용의 골자인 역제곱 법칙의 증명에서 나타나는 기하학적 극한에 주목하여 Newton의 증명을 분석하고자 한다.

## Ⅲ. 역제곱 법칙의 증명 분석

역제곱 법칙 증명의 골자는 $F \propto QR/(SP \times QT)^2 = 1/(L \times SP^2) \propto 1/SP^2$인데, 본 장에서는 우선 그 증명 과정에서 드러나는 몇 가지 특징에 대하여 논의함으로써 증명 전체를 개괄하고자 한다. 다음 역제곱 법칙의 증명 과정에서 Newton이 구사한 기하학적 극한에 대하여 구체적으로 살펴보고 논의하고자 한다.

### 1. 역제곱 법칙의 증명 특징

<Principia>의 역제곱 법칙 증명 과정에서 드러나는 중요한 특징은 다음과 같다. 첫째, 역학을 Euclid 기하의 차원에서 접근했다는 점이다. Newton은 역학적 힘을 길이로서 표현하였다. 그는 '$F \propto QR/(SP \times QT)^2 \quad (Q \to P)$'라는 공식을 이끌어내는데, 이는 모두 길이로서 표현되어 있다. 구심력을 규정하는 일반 공식인 이것은 사실상 Newton 이론의 심장에 해당하는데(Brackenridge, 1995; Gandt, 1995), 힘에 대한 이 공식은 역학에 대한 Newton의 기하학적 접근을 잘 보여준다(Prentis, Fulton, Hesse, & Mazzino, 2007). Newton은 심지어 시간조차도 기하 선분으로 표현하고 있다. Kepler의 면적속도 일정의 법칙에 따라 Newton이 유도한 공식에서 $SP \times QR$은 시간의 기하학적 표현에 해당한다. $QR$ 역시도 관성 궤도인 접선에서 이탈한 정도를 기하학적으로 나타낸 양이다. 이처럼 Newton은 역학의 범주에 있던 힘, 시간, 관성 궤도의 이탈 정도 등을 기하 선분으로 표현함으로써 천체의 운동을 Euclid 기하의 범주로 가져올 수 있었다.




$F \propto QR/(SP \times QT)^2 \quad (Q \to P)$

[그림 Ⅲ-1] 점 $P$에서의 힘에 대한 Newton의 길이 표현[3)]

3) $S$는 별의 위치, $P$는 행성의 위치이다. $PR$은 힘이 작용하지 않을 때 행성 $P$의 관성 궤도로, 즉 점 $P$에서의

둘째, Newton은 Euclid의 전통을 고수하려는 모습을 보여준다. 예컨대, <Principia> 제 1권의 법칙 6의 따름정리 1에서 구심력을 ‘가상의 입체’와 관련시키는데, 이는 Euclid의 전통적 표현이다.

> <Principia> 제 1권 명제 6 따름정리 1
> 구심력은 입체의 크기가 항상 점 $P$와 점 $Q$가 합쳐질 때 궁극적으로 취해지는 것으로 가정하면 입체 $(SP^2 \times QT^2)/QR$와 반비례한다(Newton, 1999).

여기서 ‘입체 $SP^2 \times QT^2/OR$와 반비례’라는 표현에 주목할 필요가 있다. 그는 하필 왜 직접적으로 ‘$QR/(SP^2 \times QT^2)$와 비례’라고 표현하지 않았을까? 이에 대해 Gandt(1995)는 다음과 같이 분석하였다.

> 그것은 아마도 차원적 실체에 대한 관심 때문으로 보인다. $SP^2 \times QT^2/OR$의 차원은 3차원이므로 ‘부피(Solid)’가 되며 Newton이 보기에 이것이 더 받아들이기 쉬운 식이 된다. 반면, $QR/(SP^2 \times QT^2)$은 $-3$차원이므로 직관적인 의미가 없게 되므로 받아들이기 어렵다(Gandt, 1995).

더군다나 ‘입체’라는 표현 역시 Euclid의 전통을 따른 것이다. 이처럼 Newton은 Euclid의 전통을 고수하려고 하였다.

셋째, Newton은 Euclid 기하에 과감하게 기하학적 근사 방식을 도입하여 진일보시켰다. Newton은 무한소에 대해 명백히 언급한 적은 없지만 ‘운동 초기의 궤적’에 대해 숙고함으로써, 무한소를 실질적으로 적극 활용하였다. Newton이 제시한 많은 명제와 보조정리는 운동의 존재와 무한소의 허용을 통해 생산된 것으로 전통적인 Euclid 기하의 범위를 넘어선 것이다(Gandt, 1995).

## 2. 역제곱 법칙 증명에서 구사한 기하학적 극한

Newton은 역제곱 법칙을 유도하는 과정에서 포물선 근사(parabolic approximation)와 다각형 근사(polygonal approximation)의 두 가지 기하학적 근사 방식을 구사하였다[4]. 역제곱 법칙의 유도에 있어서 <Pinicipia>의 핵심으로 간주되는 $F \propto QR/(SP \times QT)^2$ $(Q \rightarrow P)$은 두 가지의 근사를 통해 얻어낸 결과이다. 또한 Newton은 두 근사 외에도 기하 맥락에서 선분의 비의 극한을 다루었다. $Q$가 $P$에 가까이 가면 $\dfrac{QR}{QT^2}$의 값이 $1/L$(여기서 $L$은 통경)에 가까워진다는 사실을 통해 Newton은 최종적으로 $F \propto QR/(SP \times QT)^2 = 1/(L \times SP^2) \propto 1/SP^2$을 얻게 된다. 이번 절에서는 이 세 가지 기하학적 근사 방식에 대해 좀 더 자세히 살펴볼 것이다.

---

타원의 접선이다. $R$과 $Q$는 각각 동일한 시간에 대하여 힘이 작용하지 않은 경우와 힘이 작용한 경우에 행성이 도달한 지점을 나타낸다.

4) Brackenridge(1995)에 따르면, 두 가지 근사 외에도 원형 근사(curcular approximation)를 구사하였다. 그러나 이것은 1687년에 출판된 초판에는 없던 것으로 Kepler 문제를 해결하는 대안적 해법으로 등장한 것이다. 본 연구에서는 Newton이 Principia 초판에 제시한 통상적 해법에 초점을 두었으므로 제 2판에서부터 등장하는 대안적 해법인 원형 근사는 논의에서 제외하였다.

1) 포물선 근사

Prentis et al.(2007)은 Newton이 $F \propto QR/(SP \times QT)^2$ $(Q \rightarrow P)$을 얻는 과정에서 포물선 근사가 어떻게 작용하고 있는지를 잘 보여준다. 공식은 다음 4가지 기본 원리에서 유도된다.

(1) 포물선 근사: $F$는 아주 짧은 시간 $t$와 $d$에 대하여 상수
(2) Galileo의 운동 관계 $d = \frac{1}{2}at^2$
(3) Newton의 운동 법칙 $F = ma$
(4) Kepler의 면적속도 일정의 법칙 $t \propto A$

아주 짧은 시간에 대하여 타원 궤도는 곧 포물선 궤도가 되므로 Galileo의 운동 관계를 적용할 수 있게 된다. 힘을 구하고자 할 때, Galileo의 운동 관계의 적용은 대단히 중요한 의미를 지닌다. 왜냐하면 $F = ma$이므로 힘은 곧 가속도로 간주할 수 있는데, Galileo의 운동 관계에는 가속도 $a$가 포함되어 있으므로 힘을 파악하기에 용이한 출발점이 되기 때문이다. 이제 $d = \frac{1}{2}at^2$과 $F = ma$을 결합하면 $F = 2md/t^2$이므로 $F \propto d/t^2$이다. 이 공식을 순수한 기하학적 관계로 변형하기 위해서는 시간 $t$를 선분으로 바꾸어야 하는데, Kepler의 면적속도 일정의 법칙에 의해 $t \propto A$이므로 $F \propto d/t^2$은 $F \propto d/A^2$로 고칠 수 있다. 그런데 $d = QR$이고, $Q \rightarrow P$이면 $A = \frac{1}{2}(SP \times QT)$이므로 '$F \propto QR/(SP \times QT)^2$ $(Q \rightarrow P)$'이 된다.

여기서 주목할 부분은 (1)이다. Prentis et al.(2007)에 따르면 Newton의 결정적인 통찰은 아주 짧은 시간에 대해 힘은 크기나 방향 모두에서 상수의 힘으로 간주될 수 있다는 것을 깨달은 것이다.

이러한 Newton의 통찰과 과감한 가정은 역제곱 법칙을 유도하는데 결정적인 역할을 하였다. 만약 아주 짧은 시간을 가정하지 않는다면 힘은 상수가 될 수 없다. 힘은 두 물체 사이의 거리에 영향을 받는 함수인데 타원궤도로 운동하는 행성과 태양 사이의 거리는 시시각각 변하게 되므로 힘은 위치에 따라 계속 변화하는 양이 된다. 그러나 Newton은 아주 짧은 시간을 가정함으로써 힘이 이 구간에서만큼은 상수로서 작용하게 만들고, 궁극적으로 Galileo의 법칙 $d = \frac{1}{2}at^2$을 적용할 수 있는 기반을 마련하게 된다. Newton은 Galileo의 법칙이 힘을 상수로 가정할 수 있는 국소적 범위에서 적용 가능한 법칙임을 간판한 것이다[5]. Brackenridge(1995)가 지적했듯, Newton의 천재성은 보다 복잡한 행성의 타원 운동에 보다 간단한 운동 형태를 적용한 그 자체에서 나타난다고 볼 수 있다.

2) 다각형 근사

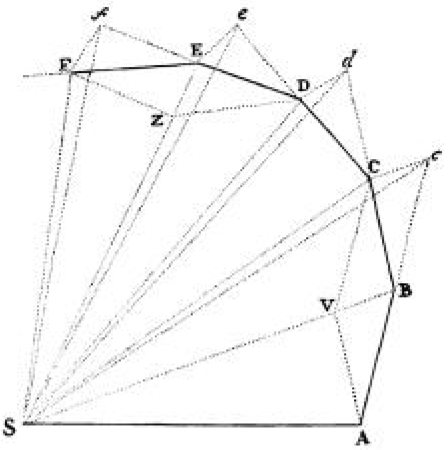
다각형 근사 역시 $F \propto QR/(SP \times QT)^2$ $(Q \rightarrow P)$의 유도 과정에서 결정적 역할을 하게 된다. 앞서 보았듯 이 공식 유도에 있어서 Kepler의 면적속도 일정의 법칙은 시간을 기하 차원으로 환원할 수

5) Galileo가 낙체의 법칙을 이론적으로 구상하고 실험한 것은 지표 근처인데, 지표 근처는 힘의 변화가 미미하므로 천체 운동의 입장에서 상수의 힘을 가정할 수 있는 국소적 범위가 된다. 이에 대해 Gandt(1995)는 다음과 같이 말하였다; Galileo의 낙체 법칙이 옳은 것은 어떤 구심력의 작용에 대해 극한 또는 무한소에서 옳은 것이다. 가변적 힘은 국소적으로 일정한 힘이 될 수 있으며, '국소적'이라는 단어는 두 가지 제한을 나타낸다. 하나는 힘은 점과 점에 따라 변하므로 공간의 한 점에 대한 것, 다른 하나는 운동 초기를 의미한다.

있는 주요 도구인데(Gandt, 1995), 다각형 근사는 이러한 Kepler의 면적속도 일정의 법칙을 증명하는 주요 방법이었다.

면적속도 일정의 법칙은 <Principia> 제 1권 2장 법칙 1 정리 1에 등장하며, 그 증명의 내용은 다음과 같다.

<Principia> 제 1권 2장 법칙 1 정리 1[6]
힘의 중심이 고정되어 있고, 어떤 물체가 그 힘의 중심으로 끌리면서 움직인다고 하자. 그러면 반지름(그 물체와 중심 사이의 거리)이 그리는 넓이는 시간에 비례하며, 같은 평면에 놓여 있다.
(증명) 시간을 일정한 마디로 쪼갰다고 하자. 시간의 처음 한 마디 동안, 잠재된 힘에 의해 물체는 직선 $AB$를 그리며 움직인다고 하자. 시간의 두 번째 마디 동안, 이 물체는 (법칙 1[7]에 따라) 직선 $Bc$를 따라 움직인다. 만약 방해가 없다면, 물체는 $AB$의 길이가 같은 $Bc$를 따라 $c$로 나아간다. 그러므로 중심에서 반지름 $AS$, $BS$, $cS$를 그리면, 동일한 면적 $ASB$, $BSc$가 나타난다. 하지만 물체가 $B$에 도달했을 때, 구심력이 순간적으로 강하게 작용하여 직선 $Bc$로부터 벗어나, 직선 $BC$를 따라 그 움직임이 계속된다고 하자. $BC$와 $C$에서 만나고 $BS$와 평행한 $cC$를 그려라. 시간의 두 번째 마디의 끝에서 물체는 (운동 법칙의 따름법칙 1에 따라) $C$에 있게 되며, $C$는 삼각형 $ASB$와 같은 평면에 있다. 직선 $SC$를 그어라. $SB$와 $Cc$가 평행하기 때문에, 삼각형 $SBC$의 넓이는 삼각형 $SBc$의 넓이와 같게 되고, 그러므로 역시 삼각형 $SAB$와도 같게 된다. 이와 같은 논의에 의해, 만약 구심력이 $C$, $D$, $E$에서 차례대로 작용한다면......
........(중략)........
이제 삼각형의 개수를 한없이 늘리고, 이들의 폭을 한없이 작아지도록 하자. 그러면 (보조정리 3, 따름법칙 4에 따라) 궁극적으로 둘레 $ADF$는 곡선이 된다. 그러므로 물체를 이 곡선의 접선으로부터 연속적으로 끌어당기는 구심력은 방해 없이 작용하게 된다. 이 경우에도 넓이 $SADS$, $SAFS$ 등등은 그 넓이를 그리는데 걸리는 시간에 비례한다. Q.E.D.




[그림 Ⅲ-2] 면적속도 일정의 법칙 증명(Cohen, & Whitman, 1999)

위와 같은 논법을 거듭하여 $\triangle SAB = \triangle SBc = \triangle SBC = \triangle SCd = \triangle SCD = \cdots$ 와 같은 증명이 이

6) 면적속도 일정의 법칙은 Newton이 1684년 Halley에게 보낸 소책자 'on Motion'의 정리 1에서 나타났던 만큼 그의 천체 역학에서 핵심 요소이다(Brackenridge, 1995)

7) 법칙 1은 관성의 법칙이다.

루어진다.

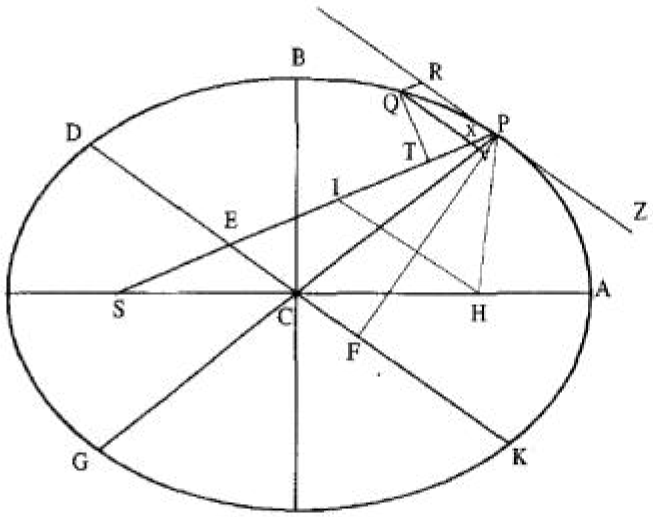
이 증명에서 Newton은 다각형 $ABCDEFS$가 행성의 연속적 움직임에 근사해 간다는 것을 이용했다. 위 증명에서 '물체가 $B$에 도달했을 때, 구심력이 순간적으로 강하게 작용하여 직선 $Bc$로부터 벗어나, 직선 $BC$를 따라 그 움직임이 계속된다고 하자'라는 표현에서 보듯 두 점 사이의 움직임에서 힘의 결손이 발생하게 되므로 차례대로 발생하는 힘 역시 이산적인 점에서만 작용하게 된다(Brackenridge, 1995). 힘이 순간적으로 작용하는 이산적인 점 $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$는 행성의 실제 경로에 위치한 점이다. 왜냐하면 행성의 실제 경로는 힘이 작용하는 모든 점들의 집합이기 때문이다. 따라서 힘이 작용하는 점을 늘려 가면 힘의 공백이 발생한 구간이 감소하면서 행성의 실제 경로에 근사해 가게 되며, Newton은 이를 이용하여 면적속도 일정의 법칙을 증명하였는데, 이 아이디어에는 이산적 힘이 결국 무한소의 시간을 가정한다면 궁극적으로 연속적 힘으로 변모 가능하다는 암묵적 가정이 깃들어 있다.

3) 선분의 비의 극한

Newton은 이러한 두 근사 외에도 기하 맥락에서 선분의 비의 극한을 다룬다. 이 과정의 핵심은 정확한 관계를 찾을 필요가 없다는 것이다. Brackenridge(1995)에 따르면, Newton은 정확한 기하학적 관계를 찾을 필요가 없었으며, 단지 극한을 구하는 과정에서 바람직한 함수 형태로 감소시킬 수 있는 관계를 찾는 것이 필요하였다.

대표적으로 곡선의 직선화를 들 수 있다. [그림 Ⅲ-1]에서 점 $Q$가 점 $P$에 매우 가까이 다가감에 따라 호 $QP$는 현 $QP$로 다가간다는 점을 이용하여 시간 $t$가 면적 $QT \times SP$와 비례한다는 것을 유도한다. 이 과정에서 호 $QP$는 현 $QP$와 정확히 다른 개념이지만, 힘의 극한을 구하는 과정에서 곡선을 직선처럼 다루기 위한 수단으로 도입된다. 이처럼 Newton은 극한을 구하는 과정에서 실제로는 같지 않지만, 곡선을 미시 세계에서 같다고 보아도 무방한 선분으로 변형하여 다루는 기법을 구사하였다.

Newton은 미시 세계에서 같다고 보아도 무방한 선분들을 변형함으로써 $QR/QT^2$이 $1/L$(여기서 $L$은 통경)과 같아진다는 것을 증명하였다. Newton은 <Principia> 제 1판 법칙 11 문제 6에서 점 $Q$가 점 $P$로 줄어들면서 비 $QR/QT^2$이 $1/L$과 같아지게 된다는 정리를 다룬다.




[그림 Ⅲ-3] <Principia> 제 1판의 법칙 11 문제 6의 그림

$QR/QT^2$이 $1/L$과 같다는 정리의 증명 과정에서 미시 세계에서의 선분 변형은 그야말로 절정을 이루는데, 그 증명의 골자는 다음과 같다. Brackenridge(1995)은 1~3단계로 증명의 골자를 제시하였지만, 본 연구에서는 '미시적 범위에서의 선분의 변형'을 두드러지게 할 목적으로 4단계를 추가하여 제시하였다.

1단계 $QR$ 찾기
$\triangle PXV$와 $\triangle PEC$가 닮음이므로 $PE/PC = PX/PV = QR/PV$이다.
즉, $QR = PV(PE/PC)$이다.
$PE = AC$[8]이므로 $QR = PV(AC/PC)$이다.
Apollonius의 원추곡선(conics)의 제 1권의 명제 15로부터 $PV \times VG/QV^2 = PC^2/DC^2$이다.
즉, $PV = (QV^2/GV)(PC^2/DC^2)$이다.
따라서 $QR = (QV^2/GV)(PC^2/DC^2)(AC/PC)$이다.

2단계 $QT^2$ 찾기
$\triangle EPF$와 $\triangle XQT$가 닮음이므로 $QT/QX = PF/PE$이다.
즉, $QT^2 = QX^2(PF^2/AC^2)$이다.
주어진 타원에 외접하는 평행사변형의 넓이는 일정하므로
$PF/AC = BC/DC$이다.
따라서 $QT^2 = QX^2(BC^2/DC^2)$이다.

8) 이 성질은 원추곡선(Conics)에 대한 Newton 이전의 문헌에서 발견되지 않은 타원의 성질로, Newton이 직접 발견한 성질이다(Brackenridge, 1995). 반사의 법칙(Apollonius 원추곡선 제 3권 명제 48)과 $IH // RZ$임을 이용하면 $\triangle PIH$는 두 내각의 크기가 같은 삼각형이므로 $PI = PH$이다. 또 $IH // EC$이므로 중점연결정리에 의하여 $SE = EI$이다. 따라서 $PE = EI + PI = SE + PH = \frac{1}{2}(2AC) = AC$이다.

3단계 $QR/QT^2$ 찾기
$QR=(QV^2/GV)(PC^2/DC^2)(AC/PC)$이고 $QT^2=QX^2(BC^2/DC^2)$이므로
$QR/QT^2=(QV^2/QX^2)(PC/GV)(AC/BC^2)$이다.
통경의 정의에 따라 $L=2BC^2/AC$이므로
$QR/QT^2=(QV^2/QX^2)(PC/GV)(2/L)$이다.

4단계 미시적 범위에서 선분 변형하기
점 $Q$가 점 $P$에 다가감에 따라
$QV$는 $QX$로 다가가고 $GV$는 $2PC$로 다가간다.
따라서 $QR/QT^2$는 $1/L$로 다가간다.

주목할 부분은 바로 4단계인데 미시 세계에서 선분의 변형 가능성이 확대되는 성질로 인해 $QR/QT^2$은 한결 간단한 형태로 변형이 가능하게 된다. 다시 말해, 미시 세계에서는 거시 세계에 비해 선분의 동등성의 범위가 확대되면서 변형이 보다 용이해지게 되므로 간단한 형태의 변화가 한결 수월해지는 것이다.

그런데 미시 세계에서의 선분의 동등성은 면밀한 검토가 필요하다. 점 $Q$가 점 $P$에 다가갈 때, 다음의 세 가지 경우에 대해 생각해보자.

(1) $QX \to QV$ ?
(2) $PX \to PV$ ?
(3) $QT \to QX$ ?

앞에서 언급하였듯, (1)은 참이 된다. 하지만 (2)와 (3)은 거짓이다. 왜 그럴까? 이 문제는 두 가지 시각에서 바라보는 것이 도움이 될 수 있다. 먼저, 차의 시각에서 보면 $|QV-QX|$, $|PV-PX|$, $|QT-QX|$의 값은 모두 0에 가까이 수렴한다. 그래서 자칫 이들이 미시 세계에서 모두 같은 것이라고 착각하기 쉽다. 그러나 차가 0으로 수렴한다는 결과는 점 $Q$가 점 $P$에 다가가는 미시 세계에서는 당연한 결과이다. 다시 말해, 미시 세계에서는 두 선분이 동시에 작아지기 때문에 두 선분의 차 역시 0에 수렴해야 하는 것이다. 미시 세계에서 선분의 동등성을 파악하는데 차의 시각이 도움이 되지 못하는 이유는 선분의 변형을 통해 궁극적으로 '선분의 비의 극한'을 구할 것이기 때문이다. 변형은 차의 시각에서 이루어지고, 최종적으로 구하는 것은 비의 시각이므로 관점의 불일치가 발생하는 것이다.

하지만 비의 시각에서 보면 결과가 판이하게 다르다. $QX/QV$는 1로 수렴하지만, $PX/PV$와 $QT/QX$는 1로 수렴하지 않는다. 점 $Q$가 점 $P$에 다가가는 미시 시계에서도 $\triangle PXV$와 $\triangle PEC$는 닮음이므로 $PX/PV=PE/PC$이 되어 $PX/PV$는 언제나 상수의 값을 갖게 된다. 마찬가지로 $\triangle QTX$와 $\triangle PFE$는 닮음이므로 $QT/QX=PF/PE$이 되어 $QT/QX$ 역시 상수의 값을 갖게 된다. $PX/PV$와 $QT/QX$의 경우에는 미시 세계에서도 거시 세계의 관계가 그대로 유지되므로 미시 세계에서의 변형이 가능하지 않다. 이처럼 미시 세계에서는 선분의 동등성에 대한 면밀한 검토가 요구되는데, 차의 관점을 배제하고 비의 관점에서 동등성을 파악해야 함을 알 수 있다.

이상에서 3가지 극한 방식을 다루어 보았는데, 포물선 근사와 다각형 근사는 Newton의 독창적인 아이디어라고 보기 어렵다. 포물선 근사는 Galileo에게 빚을 지고 있으며, 다각형 근사는 Descartes에게 빚을 지고 있다(Brackenridge, 1995). 선분의 비의 극한은 고대 그리스의 실진법(exhaustion method)에 빚을 지고 있는 것으로 생각된다. 고대 그리스의 실진법 역시 기하학적 극한으로 간주할 수 있기 때문이다.

그러나 고대 그리스에서는 기하학적 극한으로 얻은 결과를 실진법이라는 엄밀한 방식을 통해 제시하는 바람에 기하학적 극한을 확대 적용하지는 못하였던 것으로 생각된다. 고대의 기하학적 극한이 주로 도형의 넓이와 부피를 구하는데 치중되어 있는 것은 바로 엄밀성에 대한 집착 때문인 것으로 판단된다. 반면, Newton은 <Principia>를 집필하면서 고대 그리스의 실진법을 적용하지 않고, 다소 엄밀하지는 못할지라도 기하학적 극한을 적극 활용하면서 도형의 넓이와 부피에 국한되지 않고 선분의 비의 극한으로까지 확대 적용할 수 있었던 것으로 생각된다.

고대 그리스의 '완전소진'을 전제한 Antiphone의 아이디어와 '완전소진'이 불가능하다는 입장에서 그 반작용으로 등장한 실진법[9]을 극한 개념 발전의 역사에 포함시킬 경우 극한 개념 발전의 역사는 '원적 문제에서 완전소진을 전제한 Antiphone의 아이디어 → Antiphone의 아이디어에 대한 반작용으로 등장한 실진법(넓이와 부피를 다루기 위한 기하학적 극한) → Newton의 기하학적 극한(포물선 근사, 다각형 근사, 선분의 비까지 포함) → 해석화 → 19세기 초 Cauchy, Weirschtrass 등의 엄밀화'로 진행되는 과정인데, 이는 발견과 엄밀화의 교대작용에 의한 상승으로 이해해도 무리가 없는 것으로 보인다. 이 관점에서 Newton의 기하학적 극한은 엄밀함에 치우쳐 여러 가지 발견을 놓칠 수 있는 실진법에 대한 반작용으로 파생한 방식으로 이해할 수 있을 것이다.

## Ⅳ. 교수학적 시사점 논의

본 연구에서는 Newton의 <Principia>의 전반적 특징을 살펴보고, 역제곱 법칙의 유도를 기하학적 극한의 관점에서 분석해 보았다. 이를 통해 수학교육적 입장에서 몇 가지 교육적 시사점을 얻을 수 있었다.

첫째, Newton이 <Principia>에서 구사한 기하학적 방식을 자연에서 수학의 위력을 보여주는 도구로 활용하는 방안을 생각해 볼 수 있다. 학교 수학에서 수학의 유용성을 학생들에게 일깨워주는 교육이 필요하다고 주장하는데, 그 구체적 방법의 하나로 Newton의 방식을 접하게 하는 방안을 고려해 볼 수 있다. 역학을 기하의 선분으로 표현하여 기하학적 극한으로 접근하는 아이디어를 경험함으로써 자연에서 수학이 갖는 위력을 깨닫게 할 수 있다. 흔히 사과가 떨어지는 것을 보고 Newton이 만유인력의 법칙을 깨달았다고 말하기도 하지만, 역제곱의 법칙은 당시의 몇몇 지식인들이 이미 짐작하고 있던 바였다. Newton이 실제로 해냈던 것은 Kepler의 법칙에서 역제곱 법칙을 수학적으로 유도한 것으로 이는 기하학적 극한에 의존한다. 따라서 실세계의 현상의 진정한 원인을 수학을 이용하여 파헤친 Newton의 방식을 학교수학에서 경험할 수 있게 한다면 수학의 유용성에 대한 더없이 좋은 지도가 될 수 있을 것으로 보인다.

둘째, 다각형 근사를 곡선의 면적을 구하는 문제에 적극 활용하여 곡선 면적에 대한 정적분식 접근이라는 고정관념을 깨는 수단으로 활용 가능하다. 곡선의 면적 문제를 다룰 경우 무조건적으로 정적분 계산을 수행하기 쉽다. 왜냐하면 학교수학에서 곡선의 면적 문제를 전적으로 정적분의 방식으로 다루기 때문이다. 이는 자칫 곡선의 면적 문제를 해결하는 수단으로 정적분이 유일하다는 고정관념을

9) Antiphone은 원적 문제를 해결하는 과정에서 원에 내접하는 정다각형의 변의 수를 두 배씩 늘려감으로써 원과 정다각형 사이의 넓이의 차이를 궁극적으로 없앨 수 있다고 생각했다. 반면, 실진법에서는 Antiphone의 방법의 원과 정다각형 사이의 넓이의 완전소진에 대한 반작용으로 출현하게 된 것이다(박선용, 2019).

심어주기 쉽다.

사실 다각형 근사 방식과 유사한 방식이 초등학교 6학년 원의 넓이를 구하는 과정에서 다루어지고 있지만, 이후 정적분이 등장하는 고등학교 과정 이전까지 전혀 다루어지지 않는다. 초등과 고등 사이의 공백은 곡선의 면적은 곧 정적분이라는 고정관념을 갖게 하기 쉽다. Newton의 다각형 근사 방식은 이러한 고정관념을 깨뜨릴 수 있는 좋은 수단이며[10], 중학교 시기에도 활용 가능한 방식이므로 초등과 고등 사이의 가교 역할을 할 수 있을 것으로 생각된다.

구체적으로 Newton의 다각형 근사 방식으로 면적속도 일정의 법칙이 증명 가능함을 숙지하게 하는 것도 곡선 면적에 대한 다양한 접근이 있음을 인식하게 만드는 주요 도구가 될 수 있을 듯 보인다. 중학교 2학년 과정의 등적변형의 내용이 간혹 활용 문제로 등장하기도 하는데, 이 부분을 지도할 때 Kepler의 제 2법칙인 면적속도 일정의 법칙을 다룬다면 학생들에게 '수학과 과학의 융합, 실세계 현상에 대한 수학의 활용, 곡선 면적에 대한 다각형 근사로의 접근'을 경험할 수 있는 교육 기회가 제공될 수 있을 것이다.

셋째, 학교 수학에서 기하학적 극한을 지도할 때, 미시 세계에서 동등성의 범위가 확대된다는 성질을 강조할 필요가 있다. Newton이 역제곱 법칙 증명에 성공을 거둘 수 있었던 이유는 거시 세계에서 성립하지 않던 것이 미시 세계에서 성립하는 것들로 변모될 수 있음을 간파한 때문이다. 이처럼 Newton식 접근의 핵심 아이디어는 미시 세계에서 변형 가능성이 확대된다는 점을 적극 활용하는 데 있다. 미시 세계에서는 타원이 포물선이 될 수 있으며, 곡선이 직선이 될 수 있으며, 부채꼴의 넓이가 삼각형의 넓이가 될 수 있다. 미시 세계에서의 동등성 확대가 결국 식의 변형을 더욱 용이하게 한다는 주요 아이디어를 강조하여 Newton의 기하학적 극한을 새로운 성질을 발견하는 용도로 이용하게끔 지도할 필요가 있다.

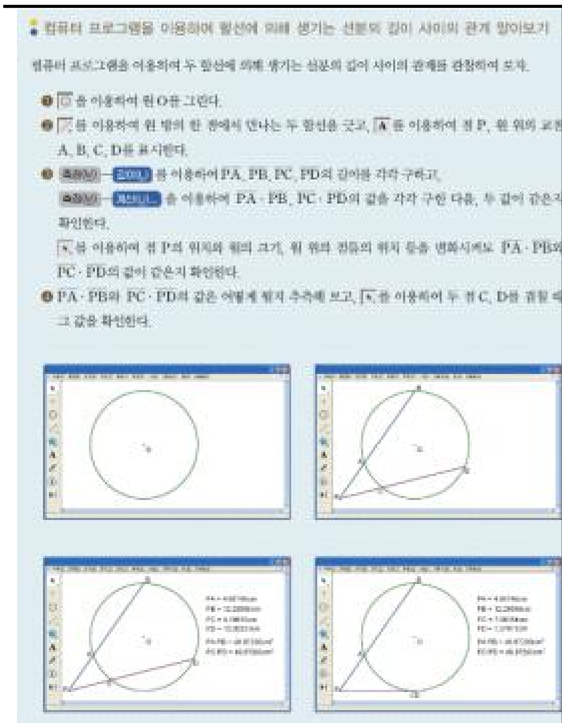
실제로 Newton의 기하학적 극한은 이전 교육과정의 중학교 교과서에서 간간히 활용되기도 하였다. 예컨대, 중학교 3학년 교과서에 할선의 극한이 곧 접선이 된다는 가정을 통해 '할선 사이의 선분의 길이 사이의 관계'를 '할선과 접선 사이의 길이 사이의 관계'로 변모시키는 과정이 대표적이다. 이 과정은 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$인 관계가 미시 세계에서 $PC = PD$인 점을 이용하여 $PA \cdot PB = PC^2$인 새로운 관계로 변모된다는 점에서 Newton의 기하학적 극한으로 볼 수 있다.

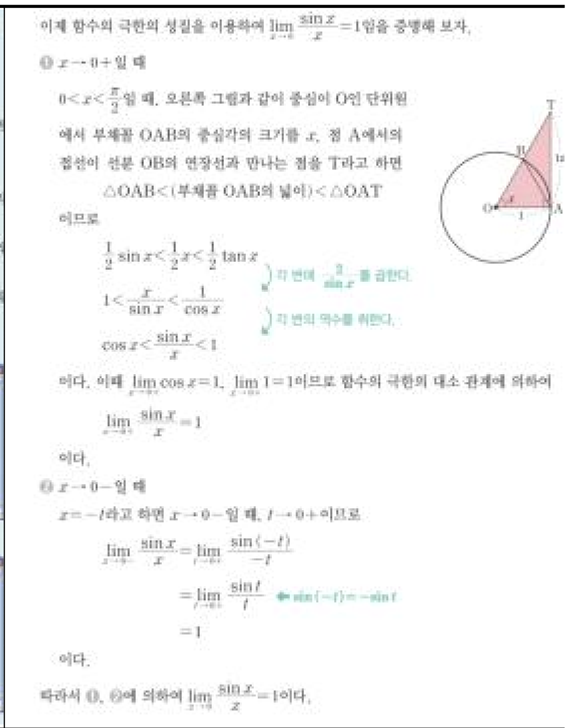
고등학교 미적분 교과서에 등장하는 $\sin x/x$의 극한 역시 Newton의 방식으로 처리가 가능하다. 교과서에서는 압축정리를 통해 증명을 완성 짓고 있지만 Newton의 방식대로 고쳐 덜 엄밀한 방식으로도 접근 가능하다. '$\sin x/x = \triangle OAB$의 넓이/부채꼴 $OAB$의 넓이'인데, 미시 세계에서 '$\triangle OAB$의 넓이 = 부채꼴 $OAB$의 넓이'이므로 $\sin x/x$의 극한은 1이 되는 식의 접근이 가능하다.

앞서 언급한 이 같은 방식이 증명으로 채택되지 않는 것은 엄밀성의 결여 때문이다. 접선 정의의 형식화가 이루어지지 않을 경우 할선의 극한이 접선이 된다는 것은 증명을 요하는 개념이 된다. 현대 수학에서처럼 접선을 할선의 극한으로 정의한다면 '곡선과 직선이 한 점에서 만날 때 그 직선을 접선이라 한다'는 Euclid의 직관적 접선 개념보다 형식화되고(조완영, 2006), 더불어 할선의 극한이 접선이 된다는 증명은 필요 없게 된다. 접선을 현대적으로 정의하더라도 여전히 점 $C$와 점 $D$가 일치하는 상황은 그 이전 상황과 구별된다는 점에서 이러한 추론을 증명으로 받아들이기는 어려웠을 것이다.

10) 원의 넓이를 분할하여 구하는 전략은 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 분할된 직사각형들의 넓이를 합한 값에 대한 극한으로 정의하는 구분구적법의 아이디어와 다르지 않다(신보미, 2008). 그러나 이러한 원의 넓이를 분할하는 전략은 삼각형과 유사한 도형(혹은 삼각형)으로 분할하여 재배열하는 방식이므로 직사각형 분할에 기반한 정적분과는 분할의 기본도형이 다르다는 점에서 차별된다. 이런 점에 비추어 볼 때, Newton의 다각형 근사 방식은 곡선의 면적을 구할 때 분할의 기본도형이 다양할 수 있음을 인식하게 해주는 수단이 될 수 있을 것이라고 보는 것이 본 연구의 입장이다.

[표 Ⅳ-1] Newton의 기하학적 극한의 접근이 가능한 교과서 내용





이제 함수의 극한의 성질을 이용하여 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$임을 증명해 보자.

① $x \to 0+$일 때

$0 < x < \frac{\pi}{2}$일 때, 오른쪽 그림과 같이 중심이 O인 단위원에서 부채꼴 OAB의 중심각의 크기를 $x$, 점 A에서의 접선이 선분 OB의 연장선과 만나는 점을 T라고 하면

△OAB < (부채꼴 OAB의 넓이) < △OAT

이므로

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$$

각 변에 $\frac{2}{\sin x}$를 곱한다.

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

각 변의 역수를 취한다.

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

이다. 이때 $\lim_{x \to 0+} \cos x = 1$, $\lim_{x \to 0+} 1 = 1$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

이다.

② $x \to 0-$일 때

$x = -t$라고 하면 $x \to 0-$일 때, $t \to 0+$이므로

$$\lim_{x \to 0-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{t \to 0+} \frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{t \to 0+} \frac{\sin t}{t} = 1$$

← $\sin(-t) = -\sin t$

이다.

따라서 ①, ②에 의하여 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$이다.

| 원에서 기하학적 극한 | $\sin x/x$의 기하학적 극한 |
|---|---|
| (고호경, 최수영, 김응환, 이성재, 양순열, 노솔, 권세화, 백형윤, 임유원, 홍창섭, 2019) | (이준열, 최부림, 김동재, 전철, 장희숙, 송윤호, 송정, 김성철, 2019) |

넷째, 수학 발전의 양상이 '발견→엄밀화→발견→엄밀화→…'식의 교대작용이라는 입장에서 중·고등학교 시기는 엄밀화에 초점을 둔 시기라기보다 발견에 주목해야 할 시기로 보고 기하학적 극한을 발견술로서 활용하게끔 유도하는 질문이 요구된다. 예컨대, '원의 할선 사이의 관계에서 점을 움직여 새로운 결과를 얻을 수 있겠는가? 점 $C$를 점 $D$에 일치할 때까지 가져가면 기존의 결과는 어떻게 변하게 되겠는가?'와 같은 발문을 제공함으로써 학생들에게 발견술을 가르칠 수 있을 것이다. 학교수학에서 발견해야 할 수학적 결과를 먼저 제시하고 증명을 요구하는 형태가 많기 때문에, 발견에 초점을 둔 기하학적 극한은 학교수학에 발견의 무게를 더해 줌으로써 추론 교육에서 발견과 증명의 균형추 역할을 할 수 있을 것으로 생각된다.

다섯째, 미시 세계에서의 선분의 동등성 파악을 위해서는 비의 접근이 유용하다는 인식을 돕는 과정이 필요하다. 자칫 미시 세계에서는 작아지는 모든 선분이 같아질 수 있는 것으로 오인하기 쉬우므로 이에 대한 명확한 기준을 제시할 필요가 있다. 본 연구에서는 미시 세계에서 동등하지 않은 선분을 다루어 이에 대해 숙고할 기회를 제공하는 것이 명확한 기준을 인식시킬 수 있는 하나의 교육 방법이라고 본다. 예컨대, [그림 Ⅲ-3]에서 '$QX = QV$인가?, $PX = PV$인가?, $QT \to QX$인가?'와 같은 물음을 통해 미시 세계에서의 선분의 동등성에 대한 기준을 수립할 수 있도록 도울 수 있을 것이다.

## Ⅴ. 결론

본 연구에서는 과학에서 중대한 문헌 중 하나로 손꼽히는 Newton의 <Principia>의 핵심으로 일컬어지는 역제곱 법칙의 증명을 기하학적 극한과 관련하여 분석하고, 이를 수학교육에 활용하는 방안과 관련한 교육적 시사점을 제공하고자 하였다.

Newton은 당대의 화두가 되었던 Kepler 문제를 해결하기 위해 힘, 시간 등을 기하 선분 혹은 그 비로 표현함으로써 역학을 기하의 차원에 포함시키는 결과를 이뤄내었다. 그의 증명은 당시 문제시되었던 무한소에 대한 논쟁을 의식하여 전통적인 Euclid의 기하 방식으로 문제에 접근하였다. 이처럼 그는 Euclid 기하의 전통을 고수하려 하였지만, 이에 머물지 않고 과감하게 포물선 근사, 다각형 근사, 선분의 비의 극한이라는 기하학적 극한을 도입하여 Euclid 기하를 역학을 아우르는 새로운 차원으로 발전시킬 수 있었다.

이러한 분석을 바탕으로 Newton이 <Principia>에서 구사한 기하학적 극한을 자연에서 수학의 유용성을 보여주는 도구로 활용, 다각형 근사를 곡선의 면적을 구하는 문제에 적극 활용하여 곡선 면적에 대한 정적분식 접근이라는 공식화된 통념을 깨는 수단으로 활용할 것을 제안하였다. 더불어 학교수학에서 기하학적 극한의 바람직한 활용을 돕기 위해서는 미시 세계에서의 동등성의 범위 확대에 대한 강조, 기하학적 극한을 발견술로서 활용하게끔 유도하는 질문 활용, 미시 세계에서 선분의 동등성 파악을 위해서는 비의 접근이 유용하다는 인식을 돕는 과정이 필요할 것이라는 교육적 시사점을 제안하였다.

본 연구에서의 제안이 역사 발전을 그대로 재현하자는 입장은 아니다. 왜냐하면 Newton이 <Principia>에서 구사한 기하학적 극한이 갖는 응용의 어려움으로 인해 해석화가 촉진된 것은 사실이지만, 그러한 역사 발전을 한 개인이 재현하기에는 어려움이 따른다고 생각했기 때문이다. Euler를 필두로 이루어진 Newton 역학의 해석화는 18세기 당시의 학자들에게도 많은 논란이 되었다. Newton의 방식의 우수성을 지지하는 학자와 새롭게 대두된 Leibniz 계열의 해석화 방식의 우수성을 지지하는 학자들 간의 논쟁이 설왕설래하였다(Guicciardini, 1999). 이처럼 어느 방식이 우수한지에 대한 논쟁의 역사도 짧지 않은 만큼 이러한 역사 발전을 그대로 따라가는 것이 교육적으로 바람직한지에 대하여 본 연구자는 다소 회의적이다. 그보다는 차라리 Newton의 기하학적 극한을 다양한 방법 중 한 가지로, 특히 발견술로 다룰 때 그 교육적 이점이 크다고 보는 것이 본 연구의 입장이다. Newton의 기하학적 극한은 마치 Archimedes가 곡선 혹은 곡면으로 둘러싸인 도형의 넓이나 부피를 구할 때 활용한 역학적 방법처럼 발견술로서의 의미가 크다고 보기 때문이다.

다만 기하학적 극한을 학교수학에 발견술의 하나로 도입하여 학생을 지도할 경우 극한을 직관적으로 이해하는데 도움을 줄 수는 있으나, 극한의 결과가 직관과 위배되는 경우도 있으므로 중등학교 수학에 활용할 경우 내용과 방법에 신중을 기할 필요가 있다.

## 참고 문헌

고호경, 최수영, 김응환, 이성재, 양순열, 노솔, 권세화, 백형윤, 임유원, 홍창섭(2019). **중학교 수학 3.** 서울: 교학사.

공민숙, 강윤수(2014). **GeoGebra를 활용한 극한 지도가 고등학생들의 수학 학습에 미치는 영향.** 한국학교수학회논문집, 17(4), 697-716.

박선용(2019). **실진법의 특성과 기원에 대한 분석.** 한국수학사학회지, 32(1), 27-44.
신보미(2008). **구분구적법과 정적분의 개념 분석.** 한국학교수학회논문집, 11(3), 421-438.
오가미 마사시, 와다 스미오(2003). **수학으로 풀어보는 물리의 법칙.** 임정 역(2005). 서울: 이지북.
이준열, 최부림, 김동재, 전철, 장희숙, 송윤호, 송정, 김성철(2019). **고등학교 미적분.** 서울: 천재교육.
조완영(2006). **고등학교 미적분에서의 수학화 교수·학습에 관한 연구.** 학교수학, 8(4), 417-439.
Brackenridge, J. B.(1995) *The key to Newton's dynamics.* Berkeley: University of Califonia.
Fleuriot, J. D., & Paulson, L.(1998). A combination of nonstandard analysis and geometry theorem proving, with application to newton's principia. *Proceedings of the 15th International Conference on the Automated Deduction, LNAI 1421,* 3-16. Springer.
Cohen, I. B., & Whitman, A. (transls.)(1999). *The principia: mathematical principles of natural philosophy.* University of California Press.
Gandt, F. De(1995). *Force and geometry in Newton's principia.* New Jersey: Princeton University Press.
Goodstein, D., Goodstein, J., & Feynman, R.(2009). *Feynman's lost lecture: the motion of planets around the sun.* Norton.
Grabiner, J. V.(1981). *The origin of Cauchy's rigorous calculus.* Cambridge MA: MIT Press.
Guicciardini, Niccolò(1999). *Reading the principia.* Cambridge: Cambridge University Press.
Henderson, H.(2005). Of orbits, conics, and grammar. *The Physics Teacher*, 43(2), 84-87.
Kitcher, P.(1984). *The nature of mathematical knowledge.* New York: Oxford university press.
Kline, M.(1982). *Mathematics: the loss of certainty.* New York: Oxford university press.
Merzbach, U. C., & Boyer, C. B.(1991). *A history of mathematics.* New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
양영오, 조윤동 공역(2000). **수학의 역사 상, 하.** 서울: 경문사.
Pask, C.(2019). *Magnificent principia: exploring Isaac Newton's masterpiece.* New York: Prometheus Books.
Prentis, J., Fulton, B., Hesse, C., & Mazzino, L.(2007). Elliptical orbit $\Rightarrow$ $1/r^2$ force. *The physics teacher*, 45(1), 20-25.
Whiteside, D. T.(1967). *The mathematical papers of Isaac Newton. Vol I*. Cambridge: Cambridge University Press.

# In Newton's proof of the inverse square law, geometric limit analysis and Educational discussion

Kang, Jeong Gi[1)]

## Abstract

This study analyzed the proof of the inverse square law, which is said to be the core of Newton's <Principia>, in relation to the geometric limit. Newton, conscious of the debate over infinitely small, solved the dynamics problem with the traditional Euclid geometry. Newton reduced mechanics to a problem of geometry by expressing force, time, and the degree of inertia orbital deviation as a geometric line segment. Newton was able to take Euclid's geometry to a new level encompassing dynamics, especially by introducing geometric limits such as parabolic approximation, polygon approximation, and the limit of the ratio of the line segments. Based on this analysis, we proposed to use Newton's geometric limit as a tool to show the usefulness of mathematics, and to use it as a means to break the conventional notion that the area of the curve can only be obtained using the definite integral. In addition, to help the desirable use of geometric limits in school mathematics, we suggested the following efforts are required. It is necessary to emphasize the expansion of equivalence in the micro-world, use some questions that lead to use as heuristics, and help to recognize that the approach of ratio is useful for grasping the equivalence of line segments in the micro-world.

Key Words : Newton's <Principia>, Inverse Square Law, Parabolic Approximation, Polygon Approximation, Limits of Ratio of Line Segments, Geometric Limits

Received May 14, 2021
Revised June 4, 2021
Accepted June 7, 2021

*MSC2010 classification : 97-03

1) Jinyeong Middle School (jeonggikang@gmail.com)