The Korean Journal of Applied Statistics
2021, Vol. 34, No. 5, 735–744

DOI: https://doi.org/10.5351/KJAS.2021.34.5.735
Print ISSN1225-066X / Online ISSN 2383-5818

CUSUM charts for monitoring type I right-censored lognormal lifetime data

Minjae Choi[a], Jaeheon Lee[1,a]

[a]Department of Applied Statistics, Chung-Ang University

Abstract

Maintaining the lifetime of a product is one of the objectives of quality control. In real processes, most samples are constructed with censored data because, in many situations, we cannot measure the lifetime of all samples due to time or cost problems. In this paper, we propose two cumulative sum (CUSUM) control charting procedures to monitor the mean of type I right-censored lognormal lifetime data. One of them is based on the likelihood ratio, and the other is based on the binomial distribution. Through simulations, we evaluate the performance of the two proposed procedures by comparing the average run length (ARL). The overall performance of the likelihood ratio CUSUM chart is better, especially this chart performs better when the censoring rate is low and the shape parameter value is small. Conversely, the binomial CUSUM chart is shown to perform better when the censoring rate is high, the shape parameter value is large, and the change in the mean is small.

Keywords: average run length, cumulative sum chart, lognormal distribution, type I right-censored data

1. 서론

산업의 생산공정에서 관리도(control chart)는 공정의 상태를 파악하고 제품의 품질을 변화시키는 이상원인을 최대한 빠르게 탐지하여 공정을 효율적으로 관리할 수 있게 하는 통계적 도구이다. 관리도의 종류에는 Shewhart 관리도를 비롯하여 누적합(cumulative sum, CUSUM) 관리도, 지수가중이동평균(exponentially weighted moving average, EWMA) 관리도 등이 있다.

일반적으로 제품의 수명은 중요한 품질특성치 중 하나이다. 가속 검사, 파괴 검사 등 여러 방법으로 제품의 수명을 측정할 수 있는데, 비용과 시간의 제약 때문에 중도절단(censoring)은 빈번하게 발생하는 현상 중 하나이다. 중도절단은 제1형과 제2형으로 구분할 수 있는데, 제1형 중도절단(type I censoring)은 정해진 시점까지 시험을 진행한 후 중지하는 것이고 제2형 중도절단(type II censoring)은 정해진 개수의 수명 자료를 얻은 후 시험을 중지하는 것이다. 이때 시험 시작 후 관측을 하다가 중단하는 경우를 우측중도절단(right censoring)이라 하고, 시험 시작 후 관측을 하지 않다가 시험 중간에 관측을 시작하는 경우를 좌측중도절단(left censoring)이라 한다. 이 논문에서는 가장 빈번하게 발생하는 제1형 우측중도절단 자료를 고려하였다.

와이블분포(Weibull distribution)와 로그정규분포(lognormal distribution)는 제품의 수명을 나타내는데 적합한 분포로 알려져 있다. 제1형 우측중도절단이 존재하는 와이블 수명 분포의 관리도 절차에 관한 연구로는 Steiner와 Mackay (2000), Zhang과 Chen (2004), Dickinson 등 (2014), Choi와 Lee (2016), 그리고 Han과 Lee

This work was supported by the National Research Foundation of Korea (NRF) grant funded by the Korea government (MSIT) (No. 2020R1F1A1A01050674).
[1] Corresponding author: Department of Applied Statistics, Chung-Ang University, 84 Heukseok-Ro, Dongjak-Gu, Seoul 06974, Korea E-mail: jaeheon@cau.ac.kr

Published 31 October 2021 / journal homepage: http://kjas.or.kr

(2017) 등이 있다. Steiner와 Mackay (2000)는 중도절단된 자료를 조건부 기댓값으로 대체한 후 Shewhart 관리도에 적용하는 절차를 제안하였다. Zhang과 Chen (2004)은 이 조건부 기댓값의 개념을 EWMA 관리도에 적용하는 절차를 제안하고, 관리도의 성능을 Steiner와 Mackay (2000)의 관리도 절차와 비교하였다. Dickinson 등 (2014)은 형상모수는 변하지 않을 때 척도모수의 감소를 탐지하는 우도비(likelihood ratio)에 기초한 CUSUM 관리도 절차를 제안하였다. Dickinson 등 (2014)은 그들이 제안한 CUSUM 관리도의 성능이 Zhang과 Chen (2004)이 제안한 EWMA 관리도에 비하여 더 효율적임을 보였다. Choi와 Lee (2016)는 이항 CUSUM 관리도 절차를 제안하고 Dickinson 등 (2014)의 결과와 비교하여, 표본크기가 작고 중도절단율(censoring rate)이 높을수록 제안한 CUSUM 관리도의 성능이 좋음을 보였다. Han과 Lee (2017)는 일반화우도비(generalized lifelihood ratio, GLR) 관리도 절차를 제안하고 그 효율을 기존 연구와 비교하였다.

중도절단이 존재하는 로그정규분포 수명 자료를 모니터링하는 관리도 절차에 대한 연구는 많이 진행되지 않았는데, 최근 연구로는 Arif 등 (2018)이 있다. Arif 등 (2018)은 로그정규분포를 따르는 수명 자료에 대해 가속수명시험을 하는 상황에서 공정을 모니터링하는 관리도 절차를 제안하였다.

로그정규분포는 로그를 취하면 정규분포를 따르는 확률변수의 분포이며, 그 확률변수는 항상 양의 값을 갖는다. 수명을 나타내는 확률변수 T가 위치모수(location parameter) μ와 형상모수(shape parameter) σ를 갖는 로그정규분포, 즉 $LN(\mu, \sigma^2)$를 따른다고 할 때, 확률밀도함수(pdf)와 누적분포함수(cdf)는 각각 다음과 같다.

$$f(t\,|\,\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma t} \exp\left\{-\frac{(\log t - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad t > 0$$
$$F(t\,|\,\mu, \sigma^2) = \Phi\left(\frac{\log t - \mu}{\sigma}\right), \quad t > 0$$

여기서 $\Phi(\cdot)$는 표준정규분포의 누적분포함수를 나타낸다. 이때 T의 평균은 $\exp(\mu + \sigma^2/2)$이고, 미리 정해진 중도절단 시점을 C라 할 경우 중도절단율 pc는

$$pc = P(T \geq C) = 1 - \Phi\left(\frac{\log C - \mu}{\sigma}\right) \tag{1.1}$$

가 된다.

로그정규분포를 따르는 확률변수 T의 평균은 위치모수 μ뿐만 아니라 형상모수 σ의 변화에도 영향을 받는다. 그러나 이 논문에서는 σ가 고정된 상태에서, 좀 더 쉽게 변할 수 있는 μ의 변화로 인하여 평균이 감소하는 경우에 초점을 맞추어 이를 모니터링하는 상황을 고려하였다.

이 논문에서는 로그정규분포를 가정할 때 중도절단율이 0.5 이상으로 아주 높은 경우를 고려하며, 평균수명의 감소를 탐지하는 두 가지 CUSUM 관리도 절차를 제안한다. 그중 하나는 CUSUM 관리도에서 전통적으로 사용하는 우도비에 기초한 절차로서 2장에서 소개하고, 다른 하나는 이항분포에 기초한 절차로서 3장에서 소개하고 있다. 4장에서는 모의실험을 통하여 여러 가지 이상상태에서 두 관리도의 성능을 비교하였으며, 이 논문의 결론은 5장에 제시한다.

2. 우도비에 기초한 CUSUM 관리도 절차

각 시점에서 표본크기는 n이라 하고 시점 i에서 j번째 제품 수명의 관측값을 T_{ij}로 나타낼 때 ($i = 1, 2, \ldots, j = 1, 2, \ldots n$), T_{ij}가 $LN(\mu, \sigma^2)$를 따르는 공정으로 고려하자. 이때 모수 μ는 공정이 관리상태일 때 $\mu = \mu_0$, 이상상태일 때 $\mu = \mu_1$값을 갖는다고 가정하며, σ는 변하지 않는다고 가정하였다. 또한 관리상태에서의 모수인 μ_0와 σ는 알려져 있거나, 제1국면을 통하여 정확하게 추정되었다고 가정한다. 이 경우 제품 수명의 평균은 관리상태일 때 $E_0(T) = \exp(\mu_0 + \sigma^2/2)$이고, 이상상태일 때 $E_1(T) = \exp(\mu_1 + \sigma^2/2)$이 된다. $E_1(T) = \gamma E_0(T)$

라고 하면, γ는

$$\gamma = \frac{E_1(T)}{E_0(T)} = \frac{\exp\left(\mu_1 + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\exp\left(\mu_0 + \frac{\sigma^2}{2}\right)} = \exp(\mu_1 - \mu_0) \tag{2.1}$$

가 된다. 일반적으로 제품 수명의 평균이 감소하는 경우, 즉 $\gamma < 1$인 경우를 탐지하는 것에 더 관심이 많기 때문에 이 논문에서는 $\mu_1 < \mu_0$인 경우를 고려하였다.

$Y_{ij} = \log T_{ij}$로 치환할 경우 확률변수 Y_{ij}는 정규분포 $N(\mu, \sigma^2)$을 따른다는 사실이 잘 알려져 있기 때문에, 우리는 T_{ij} 대신 로그변환을 한 Y_{ij}를 사용한 절차를 제안하고자 한다. 우측중도절단 자료가 존재하는 경우 i 번째 표본 $\mathbf{y_i} = (y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{in})$에 대한 우도함수(likelihood function)는

$$L\left(\mu, \sigma^2 \,|\, \mathbf{y_i}\right) = \prod_{j=1}^{n} f\left(y_{ij} \,|\, \mu, \sigma^2\right)^{\delta_{ij}} \left[1 - F\left(y_{ij} \,|\, \mu, \sigma^2\right)\right]^{1-\delta_{ij}}$$

가 된다. 여기서 δ_{ij}는 중도절단 시점 C에 대해서 $y_{ij} \leq \log C$인 경우에는 1이고, $y_{ij} > \log C$인 경우에는 0으로 정의한다. 즉, T_{ij}가 실제 고장시간을 나타내면 1이고 중도절단된 경우에는 0의 값을 갖는 것이다. 따라서 i 번째 표본에 대한 로그우도비(log likelihood ratio) Z_i는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} Z_i &= \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} \log\left[\frac{f(Y_{ij} \,|\, \mu_1, \sigma^2)}{f(Y_{ij} \,|\, \mu_0, \sigma^2)}\right] + \sum_{j=1}^{n} (1 - \delta_{ij}) \log\left(\frac{1 - F(Y_{ij} \,|\, \mu_1, \sigma^2)}{1 - F(Y_{ij} \,|\, \mu_0, \sigma^2)}\right) \\ &= \left(\frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma^2}\right) \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} \left[\left(Y_{ij} - \frac{\mu_0 + \mu_1}{2}\right)\right] + \sum_{j=1}^{n} (1 - \delta_{ij}) \log\left(\frac{1 - \Phi\left(\frac{\log C - \mu_1}{\sigma}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{\log C - \mu_0}{\sigma}\right)}\right) \end{aligned}$$

이때 i번째 표본에서 실제 고장이 발생한 개수를 X_i, 실제 고장이 발생한 시간의 총합을 Y_i^*라고 한다면, $X_i = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}$와 $Y_i^* = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} Y_{ij}$가 된다. 따라서 Z_i는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} Z_i &= \left(\frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma^2}\right)\left(Y_i^* - \frac{\mu_0 + \mu_1}{2} X_i\right) + (n - X_i) \log\left(\frac{1 - \Phi\left(\frac{\log C - \mu_1}{\sigma}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{\log C - \mu_0}{\sigma}\right)}\right) \\ &= \left(\frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma^2}\right)\left[Y_i^* - \frac{\mu_0 + \mu_1}{2} X_i + \left(\frac{\sigma^2}{\mu_1 - \mu_0}\right)(n - X_i) \log\left(\frac{1 - \Phi\left(\frac{\log C - \mu_1}{\sigma}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{\log C - \mu_0}{\sigma}\right)}\right)\right] \end{aligned} \tag{2.2}$$

식 (2.2)의 로그우도비에 기초하여, 시점 i에서 제품 수명의 평균 감소를 탐지하는 우도비에 기초한 CUSUM 관리도(우도비 CUSUM 관리도)의 관리통계량을 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$C_i^+ = \max\left(0, C_{i-1}^+ + Z_i\right), \quad C_0^+ = 0.$$

우도비 CUSUM 관리도 절차는 $C_i^+ > h_C$인 경우 공정에 이상이 발생했다는 신호를 주는 것이다. 여기서 관리한계 h_C는 주어진 n, pc, σ에 따라 관리상태일 때의 평균런길이(average run length, ARL), 즉 ARL_0가 주어진 값을 만족하도록 설정할 수 있다. 관리도에서 런길이(run length)는 이상신호를 줄 때까지 관측한 표본의 개수를 나타내는 용어로서, ARL_0는 가설검정에서 제1종 오류와 유사한 개념으로 생각할 수 있다. 이 논문에서는 일반적으로 많이 사용하는 $\mathrm{ARL}_0 \approx 370$인 경우를 고려하였다.

3. 이항분포에 기초한 CUSUM 관리도 절차

Choi와 Lee (2016)는 제1형 우측중도절단이 존재하는 와이블 수명 자료를 모니터링하는 이항 CUSUM 관리도 절차를 제안하고, 그 효율을 살펴보았다. 이 절차는 이항분포에 기초한 CUSUM 관리도(이항 CUSUM 관리도)

로서, 와이블분포의 모수가 변화할 경우 중도절단율 pc가 변화한다는 사실을 이용한 관리도 절차이다. 일반적으로 우도비에 기초한 관리도는 계량형 관리도(variables control chart)이고 이항분포에 기초한 관리도는 계수형 관리도(attributes control chart)이기 때문에, 계량형 자료를 사용하는 절차가 계수형 자료를 사용하는 절차에 비해 효율적이라고 알려져 있다. 그러나 중도절단율이 높은 경우 계량형 자료 또한 정보의 손실이 많기 때문에 이항 CUSUM 관리도의 효율이 좋은 경우가 많이 발생하였다.

이 장에서는 Choi와 Lee (2016)가 제안한 이항 CUSUM 관리도 절차와 유사하게, 제1형 우측중도절단이 존재하는 로그정규 수명 자료의 평균 수명을 모니터링하는 이항 CUSUM 관리도 절차를 제안하고자 한다. 제품 수명의 관측값 T_{ij}가 $LN(\mu,\sigma^2)$를 따르고 중도절단 시점을 C라고 할 때, 중도절단율 pc는 식 (1.1)과 같다. 따라서 2장에서 정의한 i번째 표본에서 실제 고장이 발생한 개수 X_i는 이항분포 $B(n, 1-pc)$를 따르게 된다.

공정이 관리상태, 즉 $LN(\mu_0,\sigma^2)$인 경우 중도절단율 pc_0는

$$pc_0 = 1-\Phi\left(\frac{\log C-\mu_0}{\sigma}\right) \tag{3.1}$$

가 되고, 공정이 이상상태, 즉 $LN(\mu_1,\sigma^2)$인 경우 중도절단율 pc_1은

$$pc_1 = 1-\Phi\left(\frac{\log C-\mu_1}{\sigma}\right) \tag{3.2}$$

이 된다. 앞에서 언급한 바와 같이 이 논문에서는 평균 수명이 감소하는 경우, 즉 식 (2.1)의 γ가 $\gamma<1$인 경우만 고려하였다. 이 경우 $\mu_1<\mu_0$이고, 식 (3.1)과 (3.2)로부터 $pc_1<pc_0$가 성립한다.

σ가 고정된 상태에서 평균 수명이 감소하는 것, 즉 μ가 감소하는 것을 탐지하는 것은 pc가 감소하는 것을 탐지하는 것과 동일하기 때문에, 이항 CUSUM 관리도 절차를 적용할 수 있다. pc의 감소, 즉 $1-pc$의 증가를 탐지하는 이항 CUSUM 관리도의 관리통계량 S_i^+는

$$S_i^+ = \max\left(0, S_{i-1}^+ + X_i - k\right), \quad S_0^+ = 0$$

가 된다. 이때 참고값(reference value)인 k는 다음과 같다.

$$k = \frac{n\log\left(\frac{pc_0}{pc_1}\right)}{\log\left(\frac{(1-pc_1)\,pc_0}{(1-pc_0)\,pc_1}\right)}$$

이항 CUSUM 관리도 절차는 $S_i^+ > h_S$인 경우 공정에 이상이 발생했다는 신호를 주는 것이다. 여기서 관리한계 h_S는 우도비 CUSUM 관리도와 마찬가지로 주어진 n, pc_0, σ에 따라 $\mathrm{ARL}_0 \approx 370$을 만족하도록 설정하였다.

4. 모의실험

이 장에서는 앞에서 제안한 우도비 CUSUM 관리도와 이항 CUSUM 관리도 절차의 성능을 모의실험을 통하여 비교하고자 한다. 관리도의 성능 비교의 측도는 일반적으로 많이 사용하는 ARL을 사용하였다.

먼저 σ는 0.5, 1, 2, 5인 경우를 고려하였고, 각 경우에서 평균의 변화율 γ는 0.99, 0.98, 0.95, 0.9, 0.8, 0.65, 0.5인 경우를 고려하였다. 관리상태일 때 중도절단율 pc_0는 0.5, 0.8, 0.95를 사용하여 중도절단율이 50%인 경우, 높은 경우, 아주 높은 경우를 나타낼 수 있도록 하였다. 표본크기 n은 크기에 따른 성능 변화의 양상을 살펴보기 위해 3, 5, 10인 경우를 살펴보았다. 확률변수 T가 $LN(\mu,\sigma^2)$을 따를 때 $Z=e^{-\mu}T$로 치환할 경우 Z는 $LN(0,\sigma^2)$인 표준 로그정규분포를 따른다. 따라서 일반성을 잃지 않기 때문에 μ_0는 0으로 설정하였다. 각 경우에 대해 50,000번씩 반복을 수행하여 ARL값을 계산하였다.

Table 1: Comparison of the ARL_1 values for $n = 3$, pc_0=0.5

γ	σ=0.5		σ=1		σ=2		σ=5	
	LCUSUM	BCUSUM	LCUSUM	BCUSUM	LCUSUM	BCUSUM	LCUSUM	BCUSUM
0.99	*257.394*	266.169	*303.915*	310.774	*334.597*	337.420	*354.781*	356.969
0.98	*186.179*	202.906	*255.497*	266.534	*303.939*	310.742	*342.247*	344.863
0.95	*89.916*	103.430	*159.942*	176.026	*233.513*	246.321	*306.829*	312.321
0.90	*38.975*	48.312	*86.601*	100.586	*157.835*	172.815	*250.506*	262.886
0.80	*13.518*	18.578	*36.642*	45.163	*82.855*	95.859	*177.585*	189.642
0.65	*4.755*	7.787	*14.560*	19.435	*38.007*	47.223	*105.610*	120.870
0.50	*2.327*	4.501	*6.787*	10.082	*19.763*	25.891	*64.756*	77.316

ARL: average run length, LCUSUM: likelihood ratio CUSUM, BCUSUM: binomial CUSUM

Table 2: Comparison of the ARL_1 values for $n = 3$, pc_0=0.8

γ	σ=0.5		σ=1		σ=2		σ=5	
	LCUSUM	BCUSUM	LCUSUM	BCUSUM	LCUSUM	BCUSUM	LCUSUM	BCUSUM
0.99	*271.142*	272.028	*313.760*	317.445	344.914	*342.594*	359.055	*357.052*
0.98	*206.996*	211.304	*271.943*	274.967	*313.416*	317.921	*346.742*	346.768
0.95	*107.323*	112.640	*180.187*	185.790	*252.546*	254.992	*312.584*	317.555
0.90	*48.433*	51.845	*103.894*	109.249	*178.611*	183.113	*268.814*	272.980
0.80	*16.531*	18.201	*45.063*	48.191	*98.315*	103.635	*195.391*	201.285
0.65	*5.617*	6.938	*17.226*	19.397	*46.677*	50.608	*124.380*	130.145
0.50	*2.524*	3.297	*7.924*	9.300	*24.044*	26.550	*79.441*	83.283

ARL: average run length, LCUSUM: likelihood ratio CUSUM, BCUSUM: binomial CUSUM

Table 3: Comparison of the ARL_1 values for $n = 3$, pc_0=0.95

γ	σ=0.5		σ=1		σ=2		σ=5	
	LCUSUM	BCUSUM	LCUSUM	BCUSUM	LCUSUM	BCUSUM	LCUSUM	BCUSUM
0.99	*298.331*	301.107	*330.181*	330.766	351.578	*349.620*	362.919	*360.223*
0.98	*242.028*	244.874	*297.524*	298.891	329.529	*329.216*	354.679	*353.222*
0.95	*143.477*	144.837	*218.652*	222.022	*281.343*	282.645	330.668	*330.286*
0.90	*71.195*	73.232	*143.074*	143.886	*217.523*	220.858	*294.031*	295.893
0.80	*24.806*	25.904	*66.892*	68.608	*134.296*	137.457	*233.454*	236.659
0.65	*7.812*	8.420	*25.936*	27.328	*69.837*	70.876	*162.759*	165.543
0.50	*2.976*	3.318	*11.403*	12.092	*36.994*	37.840	*110.567*	113.030

ARL: average run length, LCUSUM: likelihood ratio CUSUM, BCUSUM: binomial CUSUM

관리한계 h_C와 h_S는 $ARL_0 \approx 370$를 만족하도록 설정했는데, 이항 CUSUM 관리도의 경우 이산형 통계량을 사용하기 때문에 pc_0가 높을 때 $ARL_0 \approx 370$을 만족하는 h_S를 찾기 어려운 경우가 발생하였다. 특히 σ와 γ값이 작은 경우 이러한 현상이 발생했는데, 이때에는 이상상태 성능의 공정한 비교를 위하여 두 관리도 절차의 관리한계를 모두 조정하여 ARL_0가 370에 가까우면서 서로 유사하도록 설정하였다.

Tables 1–3은 $n = 3$일 때, Table 4–6은 $n = 5$일 때, 그리고 Tables 7–9는 $n = 10$일 때의 결과를 각각 나타낸다. Tables 1, 4, 7은 $pc_0 = 0.5$일 때, Tables 2, 5, 8은 $pc_0 = 0.8$일 때, 그리고 Tables 3, 6, 9는 $pc_0 = 0.95$일 때의 결과를 각각 나타낸다. LCUSUM은 우도비 CUSUM 관리도, BCUSUM은 이항 CUSUM 관리도를 나타내고, 이상상태일 때 두 관리도 절차 중 성능이 더 좋은 경우, 즉 이상상태일 때 ARL인 ARL_1값이 더 작은 경우를 이탤릭체로 표시하였다. 이때 CUSUM 관리도에서는 탐지하고자 하는 모수의 변화값을 사전에 지정을 해야 하는데, 관리도 설계의 편의상 각 γ의 값에 해당되는 모수의 값을 목표값으로 설정하였다.

Table 3을 제외하면 대부분의 경우에서 우도비 CUSUM 관리도의 성능이 더 좋은 것으로 나타났다. Table

Table 4: Comparison of the ARL_1 values for $n = 5$, pc_0=0.5

γ	σ=0.5		σ=1		σ=2		σ=5	
	LCUSUM	BCUSUM	LCUSUM	BCUSUM	LCUSUM	BCUSUM	LCUSUM	BCUSUM
0.99	*228.979*	243.214	*288.482*	299.985	*327.635*	328.777	353.900	*352.025*
0.98	*159.439*	174.041	*232.880*	243.890	*287.506*	296.848	*335.368*	338.661
0.95	*68.783*	81.178	*134.593*	148.889	*207.857*	222.070	*287.322*	297.863
0.90	*28.087*	35.349	*67.048*	78.870	*130.709*	144.371	*230.230*	240.808
0.80	*9.243*	12.598	*26.093*	32.645	*63.150*	74.083	*149.559*	163.379
0.65	*3.787*	5.112	*9.723*	13.189	*27.177*	33.948	*83.034*	96.557
0.50	*1.744*	2.994	*4.595*	6.240	*13.635*	17.883	*48.672*	58.197

ARL: average run length, LCUSUM: likelihood ratio CUSUM, BCUSUM: binomial CUSUM

Table 5: Comparison of the ARL_1 values for $n = 5$, pc_0=0.8

γ	σ=0.5		σ=1		σ=2		σ=5	
	LCUSUM	BCUSUM	LCUSUM	BCUSUM	LCUSUM	BCUSUM	LCUSUM	BCUSUM
0.99	*252.226*	254.150	*300.195*	305.074	*330.718*	335.249	*354.041*	355.880
0.98	*182.232*	185.786	*251.533*	254.358	*299.019*	302.652	*341.089*	341.999
0.95	*83.658*	88.595	*153.605*	158.704	*226.986*	233.281	*299.750*	303.124
0.90	*35.124*	38.070	*82.088*	86.667	*150.105*	156.988	*247.611*	250.120
0.80	*11.327*	12.703	*32.403*	35.313	*77.149*	81.168	*168.205*	174.945
0.65	*3.669*	4.392	*12.044*	13.416	*34.103*	36.803	*100.438*	105.593
0.50	*1.772*	2.288	*5.403*	6.218	*17.004*	18.729	*60.024*	64.084

ARL: average run length, LCUSUM: likelihood ratio CUSUM, BCUSUM: binomial CUSUM

Table 6: Comparison of the ARL_1 values for $n = 5$, pc_0=0.95

γ	σ=0.5		σ=1		σ=2		σ=5	
	LCUSUM	BCUSUM	LCUSUM	BCUSUM	LCUSUM	BCUSUM	LCUSUM	BCUSUM
0.99	*281.520*	284.142	323.519	*322.944*	*344.605*	344.944	*361.452*	362.030
0.98	*218.751*	221.941	*282.988*	283.256	321.500	*321.330*	*344.161*	350.401
0.95	*118.145*	121.142	*192.125*	198.065	*262.171*	263.265	322.760	*318.869*
0.90	*54.327*	55.669	*116.432*	118.622	*190.303*	195.237	*276.942*	280.374
0.80	*17.698*	18.297	*50.002*	51.451	*110.531*	111.632	*210.162*	211.458
0.65	*5.269*	5.650	*18.617*	19.498	*52.994*	54.188	*136.584*	140.019
0.50	*2.076*	2.283	*7.994*	8.428	*26.612*	27.555	*88.305*	89.254

ARL: average run length, LCUSUM: likelihood ratio CUSUM, BCUSUM: binomial CUSUM

Table 7: Comparison of the ARL_1 values for $n = 10$, pc_0=0.5

γ	σ=0.5		σ=1		σ=2		σ=5	
	LCUSUM	BCUSUM	LCUSUM	BCUSUM	LCUSUM	BCUSUM	LCUSUM	BCUSUM
0.99	*197.526*	212.162	*260.489*	274.532	*311.179*	316.482	*344.409*	348.493
0.98	*121.977*	136.459	*195.785*	211.169	*261.202*	272.102	*319.468*	323.302
0.95	*46.723*	55.185	*99.588*	112.473	*171.381*	185.310	279.859	*274.071*
0.90	*17.454*	21.912	*45.082*	53.665	*96.180*	109.767	*191.090*	207.505
0.80	*5.409*	7.426	*15.995*	20.207	*41.720*	49.891	*112.841*	125.898
0.65	*1.900*	2.906	*5.772*	7.795	*16.805*	21.312	*57.389*	67.415
0.50	*1.086*	1.661	*2.769*	4.054	*8.143*	10.812	*31.333*	38.386

ARL: average run length, LCUSUM: likelihood ratio CUSUM, BCUSUM: binomial CUSUM

Table 8: Comparison of the ARL_1 values for $n = 10$, pc_0=0.8

γ	σ=0.5		σ=1		σ=2		σ=5	
	LCUSUM	BCUSUM	LCUSUM	BCUSUM	LCUSUM	BCUSUM	LCUSUM	BCUSUM
0.99	*216.775*	223.547	*279.267*	281.278	*321.588*	322.277	*345.558*	347.648
0.98	*142.679*	148.827	*218.621*	221.123	*277.120*	282.473	*329.089*	330.309
0.95	*58.112*	62.035	*118.669*	123.424	*193.160*	197.295	*276.138*	282.565
0.90	*22.311*	24.216	*56.102*	59.768	*116.536*	120.755	*213.280*	217.996
0.80	*6.737*	7.552	*20.381*	22.111	*52.854*	55.675	*133.134*	137.903
0.65	*2.291*	2.709	*7.276*	8.151	*21.600*	23.434	*71.121*	74.462
0.50	*1.175*	1.369	*3.317*	3.840	*10.231*	11.329	*39.930*	42.478

ARL: average run length, LCUSUM: likelihood ratio CUSUM, BCUSUM: binomial CUSUM

Table 9: Comparison of the ARL_1 values for $n = 10$, pc_0=0.95

γ	σ=0.5		σ=1		σ=2		σ=5	
	LCUSUM	BCUSUM	LCUSUM	BCUSUM	LCUSUM	BCUSUM	LCUSUM	BCUSUM
0.99	*253.621*	256.353	*303.352*	304.606	336.163	*334.803*	354.288	*353.394*
0.98	*185.710*	187.106	*255.978*	256.675	*305.080*	308.705	*340.222*	342.966
0.95	*87.859*	88.352	*159.070*	160.353	*233.065*	235.902	*303.053*	303.944
0.90	*36.055*	36.905	*84.920*	86.656	*155.709*	159.497	*251.487*	252.492
0.80	*10.817*	11.273	*33.260*	34.035	*79.492*	81.640	*173.710*	176.683
0.65	*3.380*	3.616	*11.537*	11.945	*34.654*	36.087	*104.366*	105.547
0.50	*1.331*	1.451	*4.801*	5.310	*16.746*	17.301	*62.102*	63.677

ARL: average run length, LCUSUM: likelihood ratio CUSUM, BCUSUM: binomial CUSUM

3의 조건인 $n = 3$, $pc_0 = 0.95$에서는 두 관리도 절차의 성능이 대체적으로 비슷한 것을 알 수 있다. 전반적으로 우도비 CUSUM 관리도의 성능이 좋지만, 중도절단율이 아주 높은 경우 이항 CUSUM 관리도의 성능이 우도비 CUSUM 관리도와 유사해지거나 더 좋은 것을 확인할 수 있었다. 이 결과는 와이블 수명 자료에 대한 Choi와 Lee (2016)의 연구와 유사한 결과라고 할 수 있다.

Table 10은 중도절단율이 아주 높은 경우, 즉 $pc_0 = 0.95$일 때 각각의 조건에 따라 표본크기 n에 따른 성능을 비교한 것이다. n이 커질수록 두 관리도의 성능은 모두 좋아지며, 두 관리도간의 성능 차이는 전반적으로 비슷한 경향을 나타냈다. 따라서 중도절단율이 아주 높은 경우 두 관리도의 성능은 n에 따라 큰 차이가 나지는 않음을 알 수 있었다. 이 논문에 결과를 제시하지는 않았지만, 다른 pc_0일 때에도 유사한 결론을 얻었다.

5. 결론

이 논문에서는 로그정규분포를 따르는 제1형 우측중도절단 수명 자료를 관리하는 두 가지의 CUSUM 관리도 절차를 제안하고, 모의실험을 통해 각 조건에 따른 성능을 비교하였다. 특히 분포의 형상모수 σ는 고정되어 있고, 제품 수명의 평균 감소를 탐지하는 상황을 고려하였다.

고려한 공정 상황에서 관리도의 성능은 σ, pc_0, 그리고 n에 영향을 받는다. 모의실험 결과, 일반적으로 pc_0가 클수록 또는 n이 작을수록, 즉 사용 가능한 정보의 양이 적을수록 관리도의 전반적인 성능이 나빠지는 경향을 나타내었다. 또한 σ값이 클수록 관리도의 전반적인 성능이 나빠지는 경향 또한 발견할 수 있었다. 우도비 CUSUM 관리도와 이항 CUSUM 관리도 절차를 비교했을 때, 대체로 우도비 CUSUM 관리도의 성능이 좋게 나타났으나, σ값이 큰 경우 또는 pc_0가 큰 경우, 이항 CUSUM 관리도의 성능이 좋은 경우도 많이 발생하는 것을 알 수 있었다. 종합적으로 살펴볼 때, pc_0가 작은 경우 또는 σ값이 작은 경우에는 우도비 CUSUM 관리도 절차의 사용을 권장한다. 반대로 pc_0가 큰 경우 또는 σ값이 크고 매우 미세한 변화를 탐지하는 경우에는 이항 CUSUM 관리도 절차를 사용하는 것이 효율적이라고 할 수 있다.

Table 10: Comparison of the ARL_1 values for pc_0=0.95

σ	γ	n = 3		n = 5		n = 10	
		LCUSUM	BCUSUM	LCUSUM	BCUSUM	LCUSUM	BCUSUM
0.5	0.99	*298.331*	301.107	*281.520*	284.142	*253.621*	256.353
	0.98	*242.028*	244.874	*218.751*	221.941	*185.710*	187.106
	0.95	*143.477*	144.837	*118.145*	121.142	*87.859*	88.352
	0.90	*71.195*	73.232	*54.327*	55.669	*36.055*	36.905
	0.80	*24.806*	25.904	*17.698*	18.297	*10.817*	11.273
	0.65	*7.812*	8.420	*5.269*	5.650	*3.380*	3.616
	0.50	*2.976*	3.318	*2.076*	2.283	*1.331*	1.451
1	0.99	*330.181*	330.766	323.519	*322.944*	*303.352*	304.606
	0.98	*297.524*	298.891	*282.988*	283.256	*255.978*	256.675
	0.95	*218.652*	222.022	*192.125*	198.065	*159.070*	160.353
	0.90	*143.074*	143.886	*116.432*	118.622	*84.920*	86.656
	0.80	*66.892*	68.608	*50.002*	51.451	*33.260*	34.035
	0.65	*25.936*	27.328	*18.617*	19.498	*11.537*	11.945
	0.50	*11.403*	12.092	*7.994*	8.428	*4.801*	5.310
2	0.99	351.578	*349.620*	*344.605*	344.944	336.163	*334.803*
	0.98	329.529	*329.216*	321.500	*321.330*	*305.080*	308.705
	0.95	*281.343*	282.645	*262.171*	263.265	*233.065*	235.902
	0.90	*217.523*	220.858	*190.303*	195.237	*155.709*	159.497
	0.80	*134.296*	137.457	*110.531*	111.632	*79.492*	81.640
	0.65	*69.837*	70.876	*52.994*	54.188	*34.654*	36.087
	0.50	*36.994*	37.840	*26.612*	27.555	*16.746*	17.301
5	0.99	362.919	*360.223*	*361.452*	362.030	354.288	*353.394*
	0.98	354.679	*353.222*	*344.161*	350.401	*340.222*	342.966
	0.95	330.668	*330.286*	322.760	*318.869*	*303.053*	303.944
	0.90	*294.031*	295.893	*276.942*	280.374	*251.487*	252.492
	0.80	*233.454*	236.659	*210.162*	211.458	*173.710*	176.683
	0.65	*162.759*	165.543	*136.584*	140.019	*104.366*	105.547
	0.50	*110.567*	113.030	*88.305*	89.254	*62.102*	63.677

ARL: average run length, LCUSUM: likelihood ratio CUSUM, BCUSUM: binomial CUSUM

이 논문에서 제안한 두 가지 절차는 로그정규분포를 따르는 중도절단된 수명 자료를 모니터링하는 관리도 절차이다. 기술의 발전에 따라 제품의 수명은 점점 늘어나기 때문에, 수명 시험에서 시간 및 비용의 문제로 인해 중도절단율은 더욱 높아질 것이다. 따라서 표본에서 중도절단되지 않은 자료의 개수에 기초한 이항 CUSUM 관리도 절차는 상대적으로 간편하게 적용할 수 있다는 장점이 있기 때문에 유용하게 사용할 수 있을 것으로 판단한다. 이 논문에서는 σ가 고정된 상태에서 제품 수명의 평균 감소를 탐지하는 관리도 절차를 제안하였는데, 향후 μ와 σ가 동시에 변화하는 경우를 탐지하는 관리도 절차에 대해 연구를 진행할 예정이다.

References

Arif O, Aslam M, and Butt K (2018). Attribute control chart for a lognormal distribution under accelerated time-censoring, *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*, **15**, 919–923.

Choi M and Lee J (2016). A binomial CUSUM chart for monitoring type I right-censored Weibull lifetimes, *Korean Journal of Applied Statistics*, **29**, 823–833.

Dickinson RM, Roberts DAO, Driscoll AR, Woodall WH, and Vining GG (2014). CUSUM charts for monitoring the characteristic life of censored Weibull lifetimes, *Journal of Quality Technology*, **46**, 340–358.

Han SW and Lee J (2017). A generalized likelihood ratio chart for monitoring type I right-censored Weibull lifetimes, *Korean Journal of Applied Statistics*, **30**, 647–663.

Steiner SH and Mackay RJ (2000). Monitoring processes with highly censored data, *Journal of Quality Technology*, **32**, 199–208.

Zhang L and Chen G (2004). EWMA charts for monitoring the mean of censored Weibull lifetimes, *Journal of Quality Technology*, **36**, 321–328.

Received June 18, 2021; Revised July 7, 2021; Accepted July 7, 2021

제1형 우측중도절단된 로그정규 수명 자료를 모니터링하는 누적합 관리도

최민재[a], 이재헌[1,a]

[a]중앙대학교 응용통계학과

요 약

제품의 수명을 유지시키는 것은 품질관리의 주요 목표 중 하나이다. 실제 공정에서는 시간 및 비용의 문제로 인해 모든 표본의 수명을 측정할 수 없는 경우가 많이 발생하기 때문에, 대부분 중도절단된 자료를 포함시켜 표본을 구성한다. 이 논문에서는 제1형의 우측중도절단된 수명 자료가 로그정규분포를 따르는 경우, 제품 수명의 평균을 모니터링하는 두 가지 누적합 관리도 절차를 제안한다. 하나는 우도비에 기초한 누적합 관리도이고, 다른 하나는 이항분포에 기초한 누적합 관리도 절차이다. 모의실험을 통해 평균런길이를 비교하는 방법으로 제안된 두 관리도 절차의 성능을 비교하였다. 모의실험 결과, 중도절단율이 낮은 경우, 형상모수값이 작은 경우, 평균의 감소 변화량이 큰 경우에는 우도비 누적합 관리도가 더 효율적이며, 반대로 중도절단율이 높은 경우, 형상모수값이 큰 경우, 평균의 감소 변화량이 적은 경우에는 이항 누적합 관리도가 더 효율적인 것으로 나타났다.

주요용어: 누적합 관리도, 로그정규분포, 제1형 우측중도절단 자료,평균런길이

이 논문은 정부(과학기술정보통신부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임 (No. 2020R1F1A1A01050674).

[1]교신저자: (06974) 서울시 동작구 흑석로 84, 중앙대학교 응용통계학과. E-mail: jaeheon@cau.ac.kr