

# Asymmetric and non-stationary GARCH(1, 1) models: parametric bootstrap to evaluate forecasting performance

Sun Woo Choi,<sup>a</sup> Jae Eun Yoon,<sup>a</sup> Sung Duck Lee,<sup>b</sup> Sun Young Hwang<sup>1,a</sup>

<sup>a</sup>Department of Statistics, Sookmyung Women's University;

<sup>b</sup>Department of Information and Statistics, Chungbuk National University

---

## Abstract

With a wide recognition that financial time series typically exhibits asymmetry patterns in volatility so called leverage effects, various asymmetric GARCH(1, 1) processes have been introduced to investigate asymmetric volatilities. A lot of researches have also been directed to non-stationary volatilities to deal with frequent high ups and downs in financial time series. This article is concerned with both asymmetric and non-stationary GARCH-type models. As a subsequent paper of Choi *et al.* (2020), we review various asymmetric and non-stationary GARCH(1, 1) processes, and in turn propose how to compare competing models using a parametric bootstrap methodology. As an illustration, Dow Jones Industrial Average (DJIA) is analyzed.

Keywords: asymmetric volatility, non-stationary volatility, parametric bootstrap

---

## 1. 서론

고전적인 시계열 모형인 ARIMA 모형은 자기상관(autocorrelation) 정보를 최대한 이용하기 위해 조건부 평균(conditional expectation)을 수리 모형화해서 최적 모형을 파악하는 절차이다. 시계열 자료  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 를 생성하는 기저 모형의 조건부 평균  $\mu_t = E(X_t|F_{t-1})$ 는 시간에 따라 변하는 함수로서 과거 정보  $(F_{t-1})$ 의 함수로 표현된다. ARIMA 모형에서는 조건부 분산  $h_t = Var(X_t|F_{t-1})$ 은 시간에 관해 상수(constant with respect to time  $E$ )이며, 따라서 ARIMA 모형에서  $X_t$ 의 1-시차 후 예측구간은  $\mu_t$ 를 중심으로 일정한 폭을 가진 구간이라는 특징이 있다.

금융자산가격과 관련된 금융 시계열 자료는 변동성(volatility)이 시점에 따라 변하는 특징이 있다. 금융 시계열 변동성을 측정하는데 가장 널리 이용되는 것은 조건부 분산(conditional variance)으로서 본 논문에서는  $h_t$ 로 표현하기로 한다. 금융 시계열 변동성은 자산 가격의 시간의 흐름에 따른 위험을 설명하는 수단이므로 금융자산의 가치평가에 중요한 역할을 한다 (Hwang (2016), Kim과 Hwang (2018), Choi 등 (2020)). 변동성 모형을 사용하는 경우에는  $X_t$ 의 95% (1-시차 후) 예측구간이 다음과 같이 계산되며, 따라서 예측구간의 폭이 시점에 따라 변화(time-varying)하는 특징을 가진다.

$$\text{예측구간} : \mu_t \pm 2 \sqrt{h_t}.$$

---

This research was partially supported by a grant from the National Research Foundation of Korea (NRF-2021R1F1A1047952).

<sup>1</sup> Corresponding author: Department of Statistics, Sookmyung Women's University, Cheongpa-ro 47-gil 100, Yongsan-gu, Seoul, 04310, Korea. E-mail : [shwang@sookmyung.ac.kr](mailto:shwang@sookmyung.ac.kr)

금융 시계열의 변동성을 측정하는 점화식으로 가장 널리 이용되는 수식은 GARCH(1, 1) 모형이다. Bollerslev (1986)는 시계열  $\{\epsilon_t\}$ 가 다음의 점화식에 의해 생성될 때 GARCH(1, 1) 모형이라 정의하였다.

$$\epsilon_t = \sqrt{h_t}e_t, \quad h_t = \alpha_0 + \alpha_1\epsilon_{t-1}^2 + \beta_1h_{t-1}. \quad (1.1)$$

여기서  $h_t = \text{Var}(\epsilon_t|F_{t-1})$ 는 조건부 분산 시계열, 즉 변동성 시계열이며(표준화) 오차  $\{\epsilon_t\}$ 는 평균이 0이고 분산이 1인 iid 과정이다. 모수들은 모두 비음, 즉,  $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \beta_1 \geq 0$ 을 가정한다. 모형 (1.1)의 중요한 특징 중 하나는 변동성이  $\{\epsilon_t\}$ 에 관해 대칭인 점이다. 최근에 금융 시계열 분야에 널리 인정되는 사실(stylized fact; Tsay (2010))은 변동성이 비대칭이라는 것이다. 같은 양이면 수익률의 상승보다 수익률의 하락이 변동성에 미치는 영향이 큼을 의미하는 레버리지(leverage, 비대칭) 효과를 반영하는 비대칭 변동성 모형의 연구가 지난 30년간 계량경제학 및 금융 시계열 분야에서 활발하게 이루어져 왔다. EGARCH 모형은 초창기 비대칭 모형이라 할 수 있다. 비대칭-Threshold-GARCH 모형, 즉, TGARCH(1, 1) 모형은 다음과 같다.

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_{11}(\epsilon_{t-1}^+)^2 + \alpha_{12}(\epsilon_{t-1}^-)^2 + \beta_1h_{t-1}. \quad (1.2)$$

여기서  $\epsilon_{t-1}^+ = \max(\epsilon, 0)$ 와  $\epsilon_{t-1}^- = \max(-\epsilon, 0)$ 는 분계 함수(threshold function)를 나타내며 다양한 비대칭 변동성 모형에 대해서는 Andersen 등 (2009)을 참고하기 바란다. 변동성  $h_t$ 는 관측 불가능 시계열(unobservable time series)로서 보통 정상(stationary) 시계열로 모형화한다 (Bollerslev (1986)). 최근 들어 금융 시계열 변동성이 비정상(non-stationary) 형태를 자주 보이는 경향이 있다. 이는 현재 변동성이 금방 없어지는 것이 아니라 미래에도 상당 기간 지속(persistent)하는 현상을 반영하는 것으로 보인다. Integrated GARCH, 즉, IGARCH 모형은 정상 변동성과 비정상 변동성의 경계모형으로서 ARIMA 모형에서의 단위근(unit root) 모형과 유사하다. IGARCH 모형보다 더 큰 비정상 변동성을 보이는 경우는 폭발적 변동성 모형이다. 시계열  $\{\epsilon_t\}$ 에 대한 미래  $l$ -시차 후 변동성( $l$ -step ahead volatility)을  $h_t(l) = \text{Var}(\epsilon_{t+l}|F_t)$ 으로 표현하자. 변동성이 정상인 모형은  $l \rightarrow \infty$ 일 때  $h_t(l)$ 이 고정된 상수로 수렴하는 모형이며 폭발적(비정상)-변동성은  $l \rightarrow \infty$ 일 때  $h_t(l)$  지수함수의 형태로 빠르게 무한대로 발산하는 모형이다 (Choi 등 (2020)).  $h_t(l)$ 이  $l$ 의 선형(linear) 함수 형태로 증가하는 모형을 지속(persistent) 변동성 모형이라 부르며 IGARCH 모형이 지속-변동성 모형의 대표적인 예이다. 식 (1.1)의 GARCH(1, 1) 모형에 대해서는 다음이 성립한다. 정상-변동성 조건은  $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ 이며  $h_t(l)$ 은  $l$ 이 무한대로 갈 때 상수  $\alpha_0/(1 - \alpha_1 - \beta_1)$ 로 수렴한다. 정상-변동성의 경계모형으로서  $\alpha_1 + \beta_1 = 1$ 이면  $h_t(l) = (l-1)\alpha_0 + h_t(1)$ 이므로  $l$ 이 무한대로 갈 때  $h_t(l)$ 이 선형으로서 무한대로 발산하므로 비정상인면서 지속-변동성이다. 모수가  $\alpha_1 + \beta_1 > 1$ 을 만족할 때는  $h_t(l)$ 이 지수함수의 형태로 빠르게 무한대로 발산하므로 폭발적-변동성 모형이다.

본 연구에서는 변동성이 비대칭이면서 동시에 비정상인 모형에 대해 알아보려고 한다. 최근, Choi 등 (2020)은 비대칭 비정상 변동성 모형에 대해 정리하고 미국 다우존스 산업평균지수(DJIA)에 다양한 변동성-비대칭/비정상 모형을 적용해서 비교한 바 있다. 본 연구는 Choi 등 (2020)의 후속연구로서 모형의 예측력을 모수적-붓스트랩(parametric bootstrap)을 통해 평가하고 이를 통해 변동성-비대칭/비정상 모형 선택 방안을 제시하고자 한다. 다양한 비대칭/비정상 변동성 모형의 문헌연구로는 Choi 등 (2020)과 그 안에 제시된 문헌들을 참고하기 바란다.

## 2. 비대칭 및 비정상 GARCH(1, 1) 모형

본 절에서는 식 (1.1)의 표준적인 GARCH(1, 1) 모형의 변형으로서 다양한 비대칭/비정상 GARCH(1, 1) 점화식을 소개하고자 한다. 선행연구인 Choi 등 (2020)의 2절과 3절을 참고하여 일차 모형식만을 서술하였으며 일반적인 비대칭 변동성 및 비정상 변동성 모형에 대해서는 Choi 등 (2012), Park 등 (2009), Hwang 등 (2010),

Rabemananjara와 Zakoian (1993), Terasvirta (2009), Glosten 등 (1993), Hwang와 Basawa (2004), Chung과 Hwang (2017) 연구와 이 문헌들의 내부 참고문헌을 추천한다.

**비대칭 변동성 모형인 TGARCH (Threshold GARCH) 모형식**

$$\epsilon_t = \sqrt{h_t}e_t, \quad h_t = \alpha_0 + \alpha_{11}(\epsilon_{t-1}^+)^2 + \alpha_{12}(\epsilon_{t-1}^-)^2 + \beta_1 h_{t-1}, \quad (2.1)$$

여기서  $\alpha_{12} > \alpha_{11}$  경우, 같은 양이면 음의 수익률을 가질 때가 양의 수익률을 가질 때보다 변동성(금융자산 위험)이 더 크다는 leverage effect를 의미한다.

**멱변환 모형인 Power-transformed GARCH (Power GARCH) 모형식**

$$\epsilon_t = \sqrt{h_t}e_t, \quad h_t^\delta = \alpha_0 + \alpha_{11}(\epsilon_{t-1}^+)^{2\delta} + \beta_1 h_{t-1}^\delta, \quad (2.2)$$

멱변환  $\delta > 0$ 에 따른 다양한 모형 특징은 Hwang과 Basawa (2004)를 참고하기 바란다.

**비대칭/멱변환 모형인 Power transformed threshold GARCH (Power TGARCH) 모형식**

모형 (2.1)과 (2.2)를 융합한 모형으로서 점화식은 다음과 같다.

$$\epsilon_t = \sqrt{h_t}e_t, \quad h_t^\delta = \alpha_0 + \alpha_{11}(\epsilon_{t-1}^+)^{2\delta} + \alpha_{12}(\epsilon_{t-1}^-)^{2\delta} + \beta_1 h_{t-1}^\delta. \quad (2.3)$$

Choi 등 (2020)은 변동성 모형의 정상/비정상을 각각  $l \rightarrow \infty$ 일 때  $l$ -시차 후 변동성( $l$ -step ahead volatility)  $h_t(l)$ 이 상수로 수렴하는 모형과 무한대로 발산하는 모형으로 구분하였다. 변동성 비정상 모형도 더욱 세분하여 Integrated-비정상과 폭발적-비정상으로 설명할 수 있으나 본 연구에서는 편의상 Integrated-비정상 변동성만을 다루며 폭발적-비정상 변동성에 대해서는 Choi 등 (2020)과 Hwang 등 (2010)을 참고하기 바란다. 식 (2.3)에서 정의한 비대칭/멱변환 모형인 Power transformed threshold GARCH (Power TGARCH) 모형식을 고려한다. Hwang 등 (2010)은 모수  $\phi(\delta)$ 를 도입하여 정상-변동성과 비정상-변동성을 구분하였다.

$$\phi(\delta) = (\alpha_{11} + \alpha_{12})E(\epsilon_{t-1}^+)^{2\delta} + \beta_1. \quad (2.4)$$

Choi 등 (2020)은 모수  $\phi(\delta) < 1$ 인 경우는 정상-변동성이며  $\phi(\delta) = 1$ 일 때 Integrated-비정상 변동성 모형으로서 “ $\delta$ GARCH” 모형으로 명명하였다. 여기서  $\delta > 0$ 은 멱변환 차수를 의미하며  $\delta = 1$ 인 경우는 무변환인 경우이다.

**비대칭/비정상 변동성 모형인  $\delta I$ -TGARCH 모형식**

모형 점화식 (2.3)에서

$$\epsilon_t = \sqrt{h_t}e_t, \quad h_t^\delta = \alpha_0 + \alpha_{11}(\epsilon_{t-1}^+)^{2\delta} + \alpha_{12}(\epsilon_{t-1}^-)^{2\delta} + \beta_1 h_{t-1}^\delta,$$

모수  $\phi(\delta)$ 가 다음과 같은 경계조건을 만족하는 비대칭/비정상 변동성 모형이다.

$$\phi(\delta) = (\alpha_{11} + \alpha_{12})E(e_t^+)^{2\delta} + \beta_1 = 1. \quad (2.5)$$

여기서  $\{e_t\}$ 의 분포는 평균이 영이고 분산이 1인 표준화된 분포로서 조건식 (2.5)를 풀기 위해서는  $E(e_t^+)^{2\delta}$ 를 결정해야 하며 이 값은 오차항  $\{e_t\}$  분포에 따라 달라진다. 본 논문에서는 평균이 영이고 분산인 1인 표준화 오차의 분포로서 표준정규분포와 함께 자유도( $df$ )가  $\nu$ 인 다음과 같은 표준화  $t$ -분포를 고려하기로 한다.

$$f(e_t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \sqrt{(\nu-2)\pi}} \left(1 + \frac{e_t^2}{\nu-2}\right)^{-\frac{(\nu+1)}{2}}, \quad \nu > 2. \quad (2.6)$$

### 3. 모수적 붓스트랩

미래 수익률과 변동성을 예측하기 위해 모수적 붓스트랩(parametric bootstrap)을 이용한 예측분포의 추정을 소개한다. 모수적 붓스트랩은 Miguel과 Olave (1999)가 제안한 방법으로서 자세한 내용은 Tsay (2010)을 참고하기 바란다. 모수적 붓스트랩 방법은 수익률의 예측분포를 구성하는데 주안점을 두고 있으며 붓스트랩 과정에서는 추정된 모수를 고정해서 참값으로 간주하고 진행하므로 모수 추정의 불확실성은 고려하지 않는다. 최근 Kim과 Hwang (2020)은 모수적 붓스트랩을 사용해서 정수형(integer valued)-GARCH 모형의 예측력 비교를 수행한 바 있다. 일반적인 조건부 이분산 모형  $\epsilon_t = \sqrt{h_t}e_t$ 에 대한 조건부 붓스트랩 알고리즘을 설명하도록 하자. 모형은 일반적으로 다음과 같으며 자료는  $\{r_1, r_2, \dots, r_T\}$ 이다.

$$\text{모형: } r_t = \mu_t + \epsilon_t, \quad \epsilon_t = \sqrt{h_t}e_t.$$

여기서  $\mu_t$ 는 조건부 기댓값  $E(r_t|F_{t-1})$ 이다.

Step 1. 준-최대가능도(quasi maximum likelihood; QML)방법으로 모수를 추정한다.

Step 2. 모형을 통해 추정된 표준화 잔차(standardized residuals)  $\hat{e}_t = \epsilon_t / \sqrt{h_t}$  을 계산한다.

Step 3. 중심화 잔차  $\hat{e}_t - \hat{e}_\bullet$ 를 생성한 후 분포  $\hat{F}$  를 구한다. 여기서  $\hat{e}_\bullet = \sum_{t=1}^T \hat{e}_t / T$ 이다.

$$\hat{F}(x) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T I_{[\hat{e}_t - \hat{e}_\bullet, \infty)}(x).$$

Step 4. 중심화 잔차 분포( $\hat{F}$ )로부터 랜덤 추출하여  $e_{T+j}^*$ ,  $j = 1, 2, \dots, l$ 을 생성한다. 여기서  $j = 1$ 은 1-시차 후 예측, 그리고  $j = l$ 은  $l$ -시차 후 예측을 위한 잔차이다. 다음 절에서는  $l = 1$ 과  $l = 2$ 를 고려한다.

Step 5. Step 1에서 추정한 모수와 랜덤 추출한 잔차를 기반으로 새로운 시계열 표본  $\{r_{T+j}^*\}$ 과 조건부 분산  $\{h_{T+j}^*\}$ 을 생성한다.

Step 6. Step 4와 Step 5를  $B$ 번 반복하여 예측값의 분포를 구한다. 다음 절에서는  $B$ 를 300, 1,000, 3,000으로 택하고 있다.

## 4. 모수적 붓스트랩을 통한 비대칭-비정상 시계열 예측력 비교: 미국 다우지수

### 4.1. 다우지수분석: 2014년 1월 2일 - 2017년 12월 29일(1007개 일별 증가 데이터)

Choi 등 (2020)은 미국 다우존스 산업평균 지수(Dow Jones Industrial Average; DJIA)의 특정 기간 일별 증가 시계열에 비대칭성과 비정상성이 있음을 탐지하여 식 (2.3)에서 정의된 비대칭/비정상 변동성 모형인  $\delta$ -TGARCH 모형식을 다양한 멱변환 모수  $\delta$ 를 변화시키면서 적합한 바 있다.

$$\epsilon_t = \sqrt{h_t}e_t, \quad h_t^\delta = \alpha_0 + \alpha_{11}(\epsilon_{t-1}^+)^{2\delta} + \alpha_{12}(\epsilon_{t-1}^-)^{2\delta} + \beta_1 h_{t-1}^\delta.$$

여기서 모수  $\phi(\delta)$ 는 식 (2.5)의 경계조건 " $\phi(\delta) = (\alpha_{11} + \alpha_{12})E(e_t^+) + \beta_1 = 1$ "을 만족하는 비대칭/비정상 변동성 모형이다. 각 모형에서 표준화 오차  $\{e_t\}$ 의 분포는 표준정규분포와 표준화  $t$ -분포(식 (2.6) 참조)를 고려하였다. 비대칭/비정상 변동성 모형 적합을 위해서 사용된 자료는 2014년 1월 2일에서 2017년 12월 29일까지 총 1,007개의 일별 증가 데이터  $\{P_t\}$ 이다. 수익률  $\{r_t\}$ 는 일별 백분위 로그-수익률 " $r_t = (\ln P_t - \ln P_{t-1}) \times 100$ "이다.

Table 1: Estimated equations of  $\delta$ I-TGARCH models (Choi 등, 2020)

Model	Estimated equation
1.2 I-TGARCH(1, 1)-Normal	$r_t = 0.031 + \epsilon_t; \epsilon_t = \sqrt{h_t}e_t$ $h_t^{1.2} = 0.035 + 0.060(\epsilon_{t-1}^+)^{2.4} + 0.476(\epsilon_{t-1}^-)^{2.4} + 0.684h_{t-1}^{1.2}$
0.9 I-TGARCH(1, 1)- $t$ ( $\delta = 5$ )	$r_t = 0.046 + \epsilon_t; \epsilon_t = \sqrt{h_t}e_t$ $h_t^{0.9} = 0.016 + 0.018(\epsilon_{t-1}^+)^{1.8} + 0.291(\epsilon_{t-1}^-)^{1.8} + 0.779h_{t-1}^{0.9}$
1.0 I-TGARCH(1, 1)- $t$ ( $\delta = 8$ )	$r_t = 0.042 + \epsilon_t; \epsilon_t = \sqrt{h_t}e_t$ $h_t = 0.018 + 0.221(\epsilon_{t-1}^+)^2 + 0.339(\epsilon_{t-1}^-)^2 + 0.759h_{t-1}$
1.1 I-TGARCH(1, 1)- $t$ ( $\delta = 10$ )	$r_t = 0.042 + \epsilon_t; \epsilon_t = \sqrt{h_t}e_t$ $h_t^{1.1} = 0.018 + 0.022(\epsilon_{t-1}^+)^{2.2} + 0.345(\epsilon_{t-1}^-)^{2.2} + 0.779h_{t-1}^{1.1}$
1.1 I-TGARCH(1, 1)- $t$ ( $\delta = 15$ )	$r_t = 0.038 + \epsilon_t; \epsilon_t = \sqrt{h_t}e_t$ $h_t^{1.1} = 0.021 + 0.025(\epsilon_{t-1}^+)^{2.2} + 0.385(\epsilon_{t-1}^-)^{2.2} + 0.738h_{t-1}^{1.1}$

수익률  $\{r_t\}$ 의 자기 상관성이 유의하지 않고 수익률 제곱  $\{r_t^2\}$ 의 자기 상관성은 유의하여 이분산 모형이 합리적이고 판단하고 다음과 같은 수식을 고려하였다.

$$r_t = \mu + \epsilon_t, \quad \epsilon_t = \sqrt{h_t}e_t. \quad (4.1)$$

R의 rugarch 패키지와 SAS의 AUTOREG와 MODEL 프로시저를 이용하여 얻은 “후보 모형” 추정식과 모형 비교 통계량은 각각 다음과 같다. 식 (2.5)의 비정상성 조건식 계산을 위해서,

$$\begin{aligned} \text{표준화 } t\text{-분포: } E(e_t^+)^{2\delta} &= \frac{(\nu - 2)^\delta \Gamma\left(\frac{2\delta + 1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu - 2\delta}{2}\right)}{2 \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}, \\ \text{표준정규분포: } E(e_t^+)^{2\delta} &= \frac{1}{2 \sqrt{\pi}} 2^\delta \Gamma\left(\frac{2\delta + 1}{2}\right) \end{aligned}$$

을 사용하였다. 예를 들어, “0.9 I-TGARCH(1, 1)- $t$  ( $df = 5$ )” 은  $\delta = 0.9$ 인 TGARCH(1, 1) 모형으로서 오차항  $e_t$  분포가 자유도가 5인 표준화  $t$ -분포임을 의미한다. Table 1의 각 모형별 AIC와 BIC 값을 비교한 결과  $\delta = 0.9$ 이고 자유도가 5인 표준화  $t$ -분포를 가진  $\delta$ I-TGARCH(1, 1) 모형이 가장 작은 AIC와 BIC를 제공하여 가장 우수한 것으로 판단하였다 (Choi 등, 2020).

본 논문에서는 3절에서 소개한 모수적 붓스트랩을 통한 각 모형의 예측력 평가를 하고자 한다. 모수적 붓스트랩의 [Step 4]–[Step 6]에서 1-시차 후 예측( $l = 1$ )을 하였으며 반복수  $B$ 는  $B = 300$ 과  $B = 1000$ 을 고려하였다. 붓스트랩 방법으로 얻은  $B$ 개의  $r_{t+1}$ 을  $\{r_{t+1}^{(i)}\}_{i=1}^B$ 으로 표현하자.  $\{r_{t+1}^{(i)}\}_{i=1}^B$ 로부터 붓스트랩 예측 구간(bootstrap predictive interval: BPI)을 구성한 후 coverage probability (CP)를 계산하여 Table 1의  $\delta$ I-TGARCH(1, 1) 모형들의 예측력을 평가하였다. 비교모형으로서 전통적 비대칭 모형인 TGARCH와 IGARCH 모형도 분석에 포함하였다. 비교 방법은 먼저, 데이터를 바탕으로 1-시차 후의 실제 값이 구성된 붓스트랩 예측구간(BPI)에 포함되는 비율을 나타내는 coverage probability (CP)로 모형의 예측력을 평가한다. 예측구간은 신뢰도 95%와 99% 예측구간을 구하였으며 CP가 (명목) 신뢰도에 가까운 모형이 예측력이 우수한 모형이다. 다운 자료에서는 최근 300개의 BPI를 구성하여 CP를 계산하였다. Table 2는 95%와 99% CP 계산 결과이다. 95% 예측구간의 경우 자유도가 5인 0.9 I-TGARCH(1, 1)- $t$  모형이 (명목) 신뢰도 95%에 제일 가까웠으며 99% 예측구간의 경우 1.2 I-TGARCH-Normal 모형이 가장 정확하였다. 붓스트랩 방법으로 얻은  $\{r_{t+1}^{(i)}\}_{i=1}^B$ 으로부터  $\{r_{t+1}^{(i)}\}_{i=1}^B$ 의 표본평균을 예측값  $r_t(1)$ 으로 정하는 것이 최소-MSE 기준에 의한 점-예측(point forecast)값이다. 최근 300개의 다운 자료부터 계산한 mean square error (MSE)와 mean absolute deviation (MAD)를 Table 3에 정리하였다. 최소

Table 2: Coverage probabilities (CP) for candidate models

Model	95%		99%	
	B = 300	B = 1000	B = 300	B = 1000
1.2 I-TGARCH(1, 1)-Normal	96.0%	96.0%	<b>99.0%</b>	<b>99.0%</b>
0.9 I-TGARCH(1, 1)-t ( $\delta = 5$ )	<b>94.7%</b>	<b>95.3%</b>	98.3%	98.7%
1.0 I-TGARCH(1, 1)-t ( $\delta = 8$ )	94.3%	94.3%	98.0%	97.6%
1.1 I-TGARCH(1, 1)-t ( $\delta = 10$ )	94.7%	95.7%	98.0%	97.6%
1.1 I-TGARCH(1, 1)-t ( $\delta = 15$ )	94.7%	95.7%	98.0%	97.6%
TGARCH(1, 1)-Normal	96.3%	96.0%	98.3%	98.7%
TGARCH(1, 1)-t ( $\delta = 8$ )	94.7%	94.3%	97.0%	98.0%
IGARCH(1,1)-Normal	96.0%	96.0%	98.7%	98.7%
IGARCH(1,1)-t	95.7%	96.3%	98.0%	98.7%

Table 3: MSE and MAD for candidate models

Model	MSE		MAD	
	B = 300	B = 1000	B = 300	B = 1000
1.2 I-TGARCH(1, 1)-Normal	0.195	0.196	0.318	0.319
0.9 I-TGARCH(1, 1)-t ( $\delta = 5$ )	<b>0.191</b>	<b>0.192</b>	<b>0.316</b>	<b>0.317</b>
1.0 I-TGARCH(1, 1)-t ( $\delta = 8$ )	0.193	0.194	0.317	0.318
1.1 I-TGARCH(1, 1)-t ( $\delta = 10$ )	0.193	0.194	0.317	0.318
1.1 I-TGARCH(1, 1)-t ( $\delta = 15$ )	0.193	0.194	0.317	0.318
TGARCH(1, 1)-Normal	0.195	0.197	0.317	0.319
TGARCH(1, 1)-t ( $\delta = 8$ )	0.196	0.196	0.317	0.318
IGARCH(1,1)-Normal	0.197	0.197	0.319	0.320
IGARCH(1,1)-t	0.194	0.197	0.318	0.318

MSE와 최소 MAD 기준 모두 자유도가 5인 0.9 I-TGARCH(1, 1)-t 모형이 가장 우수한 것으로 나타나서 Choi 등 (2020)에서 얻은 결론과 일치하였다.

## 4.2. 구간 2015.01.02부터 2017.12.29까지의 755개 일별 증가 데이터 분석

분석의 시간 구간별 안정성을 확인하기 위해, 4장 1절에서 이용된 다우지수의 일부인 후반부 755개(2015.01.02.부터 2017.12.29 일별 증가) 데이터만을 사용해서 분석을 해보았다. 연구모형은 비대칭  $\delta$  I-TGARCH 점화식으로서 비정상성을 위한 제약식 (2.5)를 만족한다.

$$r_t = \mu_t + \epsilon_t, \quad \epsilon_t = \sqrt{h_t} e_t, \quad h_t^\delta = \alpha_0 + \alpha_{11}(\epsilon_{t-1}^+)^{2\delta} + \alpha_{12}(\epsilon_{t-1}^-)^{2\delta} + \beta_1 h_{t-1}^\delta. \quad (4.2)$$

SAS의 MODEL procedure을 이용하여  $\delta$ I-TGARCH 모델을 적합하였다. 모델 적합 시 멱변환 모수  $\delta$ 는 고정된 값으로 취급하며  $\delta$ 를 0.1에서 1.5까지 0.1 간격으로 바꿔가며 15개 시나리오로 적합하였다. 오차항의 분포는 4장 1절과 마찬가지로 표준정규분포와 표준화  $t$ -분포( $df=5, 8, 10, 15$ )를 고려하였다. 모델 적합 후 각 오차항의 분포별로 log-likelihood가 가장 큰  $\delta$ 를 1차적으로 선정하였다. 예를 들어서 Figure 1에서 보면 표준화  $t$ -분포의 경우  $df=5$ 일 때  $\delta=1.0$ ,  $df=8$ 일 때  $\delta=1.1$ ,  $df=10$ 일 때  $\delta=1.1$  그리고  $df=15$ 일 때  $\delta=1.2$ 에서 최고 점을 갖는다. 표준정규분포에서는  $\delta=1.4$ 가 최대 log-likelihood를 제공하였다. 선택된  $\delta$ 에 대한 후보모형들을 추정된 결과와 log-likelihood, AIC 및 BIC는 Tables 4-5에 제시되어 있다.

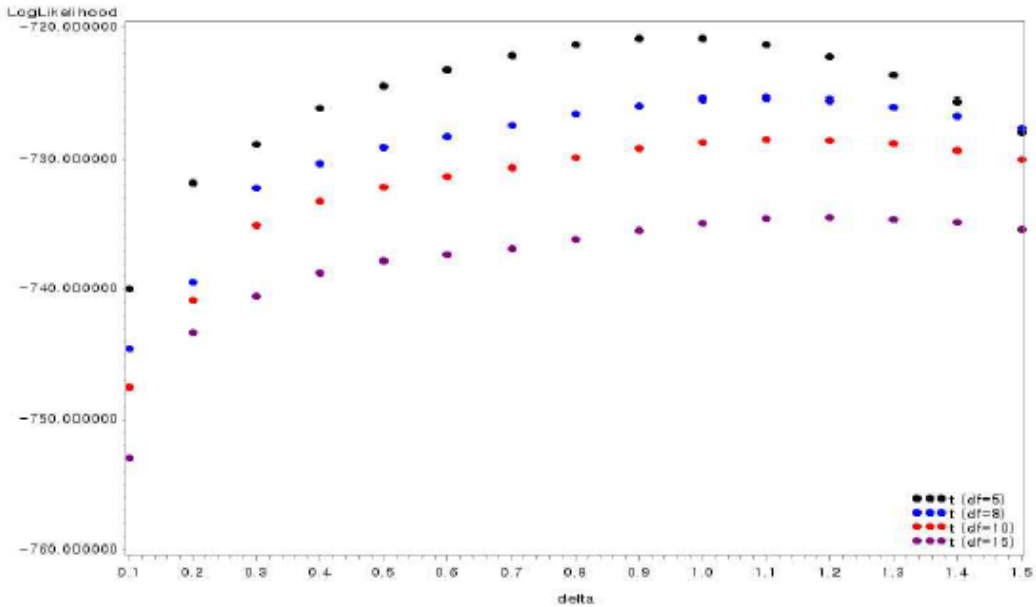


Figure 1: Log-likelihood of  $\delta I$ -TGARCH equations with  $t$ -distributed errors.

Table 4: Estimated results for candidate models (selected  $\delta$ )

오차분포	$\delta$	$\mu$	$\alpha_0$	$\alpha_{11}$	$\alpha_{12}$	$\beta_1$
Normal	1.4	0.038	0.032	0.072	0.400	0.665
$t$ ( $df=5$ )	1.0	0.048	0.014	0.023	0.241	0.780
$t$ ( $df=8$ )	1.1	0.045	0.015	0.028	0.293	0.758
$t$ ( $df=10$ )	1.1	0.043	0.017	0.030	0.321	0.750
$t$ ( $df=15$ )	1.2	0.043	0.019	0.033	0.341	0.734

Table 5: AIC and BIC for candidate models (selected  $\delta$ )

오차분포	$\delta$	Log-likelihood	AIC	AIC Rank	BIC	BIC Rank
Normal	1.4	-757.570	2.246	5	2.276	5
<b><math>t</math> (<math>df=5</math>)</b>	<b>1.0</b>	<b>-720.837</b>	<b>2.190</b>	<b>1</b>	<b>2.220</b>	<b>1</b>
$t$ ( $df=8$ )	1.1	-725.356	2.192	2	2.223	2
$t$ ( $df=10$ )	1.1	-728.487	2.196	3	2.227	3
$t$ ( $df=15$ )	1.2	-734.467	2.205	4	2.236	4

Log-likelihood, AIC, BIC로 비교하였을 때, 모두 자유도 5인  $t$  분포(역변환  $\delta = 1$ )가 선택되었다. 모수적 붓스트랩을 통한 예측력 평가를 하도록 한다. 전체 755개 데이터의 최근 200개를 평가에 이용하였다. Coverage probability (CP)는 다음과 같이 계산한다.

1. 모수적 붓스트랩으로 구한  $B$ 개의  $\{r_{t+1}^{(i)}\}_{i=1}^B$ 을 가지고 예측분포를 만든 후 (0.025, 0.975) 분위수를 구성하여 이를 95% bootstrap prediction interval (BPI)로 사용한다.
2. 구한 95% BPI에 속한 실제 수익률의 수를 이용한 데이터 수인 200으로 나눈 값이 coverage probability (CP)

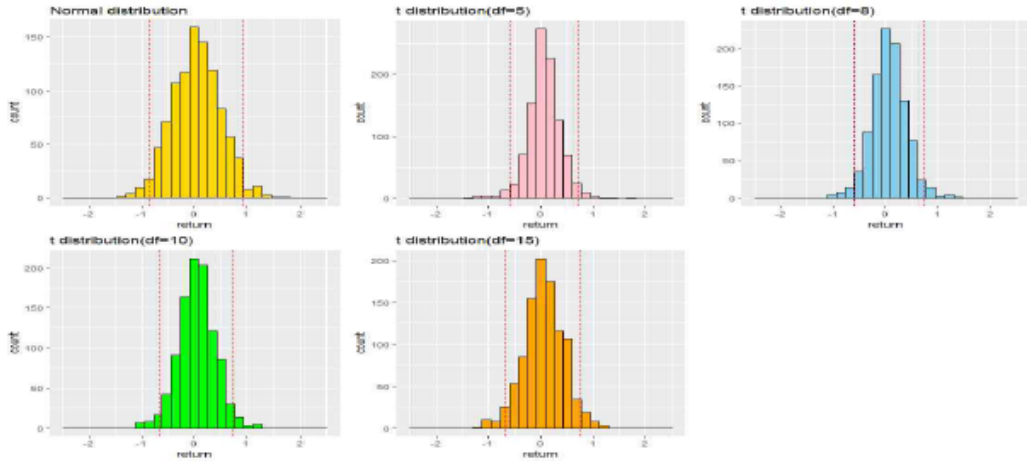


Figure 2: 1-step ahead predictive distribution( $B = 1000$ ).

Table 6: Coverage probability

오차분포	$\delta$	$B = 1000$	$B = 3000$
Normal	1.4	96.5%	96.5%
t( $df=5$ )	1.0	91.0%	91.0%
t( $df=8$ )	1.1	91.5%	92.5%
t( $df=10$ )	1.1	92.5%	93.5%
t( $df=15$ )	1.2	<b>95.5%</b>	<b>95.5%</b>

이다.

$B = 1,000$ 과  $B = 3,000$ 을 고려하였으며  $B = 1,000$ 인 경우 각 모형의 1-시차 후(모수적 붓스트랩) 수익률 예측분포는 Figure 2와 같다.

각 모형의 Coverage Probability (CP : 신뢰도 95%)는 Table 6에 정리되어 있다.

$B = 1,000$ 과  $B = 3,000$ 인 경우 모두 정규분포( $\delta = 1.4$ )일 때 CP가 가장 높으며 명목 신뢰도 95%에 가장 가까운 경우는 오차항의 분포가 자유도 15인  $t$ -분포일 때이며 CP-기준으로 예측력이 가장 정확한 모형으로 판단된다.  $\{r_{t+1}^{(i)}\}_{i=1}^B$ 의 표본평균을 예측값으로 택한 후에 구한 예측 오차의 요약 통계량을 다음과 같이 정의한다. 기호는 MSE(평균제곱오차), MAD(평균절대오차) 그리고 MAPE(평균절대백분위오차)이다.

$$\begin{aligned}
 \text{MSE} &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (X_{T+1+i} - X_{T+i}(1))^2, \\
 \text{MAD} &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |X_{T+1+i} - X_{T+i}(1)|, \\
 \text{MAPE} &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left| \frac{X_{T+i}(1)}{X_{T+1+i}} - 1 \right| \times 100.
 \end{aligned}$$

여기서  $T$ 는 예측시점이며  $X_{T+i}(1)$ 은 예측값이다. 최근  $n = 200$ 일로부터 계산한 요약통계량 값은 Table 7과 같다.



Table 7: Summary statistics for the latest  $n = 200$ 

오차분포	$\delta$	MSE	MSE Rank	MAD	MAD Rank	MAPE	MAPE Rank
<b><math>B = 1000</math></b>							
Normal	1.4	0.1780	5	0.305	5	<b>1.192</b>	<b>1</b>
$t(df=5)$	1.0	<b>0.1759</b>	<b>1</b>	<b>0.303</b>	<b>1</b>	1.294	5
$t(df=8)$	1.1	0.1770	4	0.303	4	1.284	4
$t(df=10)$	1.1	0.1763	3	0.304	3	1.261	2
$t(df=15)$	1.2	0.1761	2	0.303	2	1.267	3
<b><math>B = 3000</math></b>							
Normal	1.4	0.1777	5	0.3050	5	<b>1.209</b>	<b>1</b>
$t(df=5)$	1.0	<b>0.1764</b>	<b>1</b>	<b>0.3040</b>	<b>1</b>	1.256	5
$t(df=8)$	1.1	0.1765	2	0.3041	3	1.246	4
$t(df=10)$	1.1	0.1767	3	0.3042	4	1.231	2
$t(df=15)$	1.2	0.1769	4	0.3041	2	1.234	3

$$\begin{array}{ccc}
 \text{실제 수익률} & \text{vs} & \text{2-시차 후 예측} \\
 r_{t+1} & & \hat{r}_{t-1}(2) \\
 r_{t+2} & & \hat{r}_t(2) \\
 \vdots & & \vdots \\
 r_{t+n} & & \hat{r}_{t+n-2}(2)
 \end{array}$$

Table 8: 2-step ahead 95% coverage probability

오차분포	$\delta$	$B = 1000$	$B = 3000$
Normal	1.4	96.5%	96.5%
$t(df=5)$	1.0	91.0%	90.0%
$t(df=8)$	1.1	92.0%	92.5%
$t(df=10)$	1.1	93.0%	93.0%
$t(df=15)$	1.2	<b>95.0%</b>	<b>95.0%</b>

$B = 1,000$ 과  $3,000$  모두에서 MSE/MAD 기준으로는 자유도 5인  $t$  분포( $\delta = 1.0$ )를 선택하고 있으며 MAPE 기준에 따르면 정규분포( $\delta = 1.4$ )가 가장 우수하다.

이제, 미래  $l = 2$  시차 후 예측의 예측력을 알아보도록 하자. 2-시차 후 예측 오차는 “예측 시점  $t-1$ ”에서 실제 수익률( $r_{t+1}$ ) 과 2-시차 후 예측값( $\hat{r}_{t-1}(2)$ )과의 차이이다.

모수적 붓스트랩 [Step 4]–[Step 6]에서  $l = 2$  에 해당하는 절차이다. 2-시차 후 95% CP는 Table 8과 같으며 정규분포( $\delta = 1.4$ )일 때 CP가 가장 높고 자유도 15인 분포( $\delta = 1.2$ ) 일 때 2- 시차 후 CP가 가장 정확하다.

Table 9: Summary statistics for 2-step ahead prediction error

오차분포	$\delta$	MSE	MSE Rank	MAD	MAD Rank	MAPE	MAPE Rank
<b>B = 1000</b>							
Normal	1.4	0.1754	5	0.3049	5	1.2170	3
$t(df=5)$	1.0	<b>0.1745</b>	<b>1</b>	0.3030	3	1.2539	5
$t(df=8)$	1.1	0.1751	4	0.3031	4	1.2199	4
$t(df=10)$	1.1	0.1750	3	0.3029	2	<b>1.1984</b>	<b>1</b>
$t(df=15)$	1.2	0.1746	2	<b>0.3025</b>	<b>1</b>	1.1999	2
<b>B = 3000</b>							
Normal	1.4	0.17710	5	0.30524	5	1.2257	3
$t(df=5)$	1.0	<b>0.17550</b>	<b>1</b>	<b>0.30389</b>	<b>1</b>	1.2748	5
$t(df=8)$	1.1	0.17570	2	0.30405	4	1.2360	4
$t(df=10)$	1.1	0.17597	4	0.30399	3	1.2063	2
$t(df=15)$	1.2	0.17594	3	0.30399	2	<b>1.1999</b>	<b>1</b>

2-시차 후 예측오차의 요약 통계량은 다음과 같이 계산하였다.

$$\begin{aligned} \text{MSE} &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (X_{T+1+i} - X_{T+i}(2))^2, \\ \text{MAD} &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |X_{T+1+i} - X_{T+i}(2)|, \\ \text{MAPE} &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left| \frac{X_{T+i}(2)}{X_{T+1+i}} - 1 \right| \times 100. \end{aligned}$$

Table 9에 정리된 2-시차 후 예측 오차의 요약 통계량을 보면  $B = 1000$ 일 때는 자유도 5, 10, 또는 15인  $t$ -분포를 선택하고,  $B = 3000$ 일 때는 자유도 5이거나 15인  $t$ -분포를 선택하였다.

## 5. 결론

본 연구에서는 비대칭/비정상 시계열 분석을 하였으며 특정 기간 수익률 패턴이 비대칭/비정상성을 보여주고 있는 미국 다우지수분석을 제시하였다. 이를 위해  $\delta$ I-TGARCH 점화식을 제안하였다. 다우지수의 경우 멱변환 모수  $\delta$ 는 1 근처 값이 우수하며 오차항의 분포로는 주로 자유도가 작은 표준화  $t$ -분포가 추천되었다. 표준정규분포 오차는  $\delta$ 가 1을 상당히 넘는(1.4근처) 값을 추천하였다. 국내 금융 시계열에 대한 확장된 분석은 흥미로운 미래 연구주제일 것이다. 표준정규분포 오차와 표준화  $t$ -분포 오차는 모두 대칭분포이다. 대칭분포를 비대칭화(skewed)시킨 비대칭-표준정규분포와 비대칭-표준화  $t$ -분포를 오차항의 분포로 고려하면 비대칭 변동성 분석에 유용할 것으로 판단하며 이에 관한 연구를 현재 진행하고 있다.

## References

- Andersen TG, Davis RA, Kreiss JP, and Mikosch T (2009). *Handbook of Financial Time series*, Springer, Berlin.
- Bollerslev T (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *em Journal of Econometrics*, **31**, 307-327.
- Choi MS, Park JA, and Hwang SY (2012). Asymmetric GARCH processes featuring both threshold effect and bilinear structure, *Statistics & Probability Letters*, **82**, 419-426.

- Choi SW, Hwang SY, and Lee SD (2020). Volatility-nonstationary GARCH(1, 1) models featuring threshold-asymmetry and power transformation, *Korean Journal of Applied Statistics*, **33**, 713–722.
- Chung SA and Hwang SY (2017). A profile Godambe information of power transformations for ARCH time series, *Communications in Statistics : Theory and Methods*, **46**, 6899–6908.
- Glosten LR, Jagannathan R, and Runkle DE (1993). On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks, *The Journal of Finance*, **48**, 1779–1801.
- Hwang SY (2016). A recent overview on financial and special time series models, *Korean Journal of Applied Statistics*, **29**, 1–12.
- Hwang SY and Basawa IV (2004). Stationarity and moment structure for Box-Cox transformed threshold GARCH(1, 1) processes, *Statistics & Probability Letters*, **68**, 209–220.
- Hwang SY, Baek JS, Park JA, and Choi MS (2010). Explosive volatilities for threshold-GARCH processes generated by asymmetric innovations, *Statistics & Probability Letters*, **80**, 26–33.
- Kim JY and Hwang SY (2018). A threshold-asymmetric realized volatility for high frequency financial time series, *Korean Journal of Applied Statistics*, **31**, 205–216.
- Kim DR and Hwang SY (2020). Forecasting evaluation via parametric bootstrap for threshold-INARCH models, *Communications for Statistical Applications and Methods*, **27**, 177–187.
- Miguel JA and Olave P (1999). Bootstrapping forecast intervals in ARCH models, *TEST: An Official Journal of the Spanish Society of Statistics and Operations Research*, **8**, 345–364.
- Park JA, Baek JS, and Hwang SY (2009). Persistent threshold-GARCH processes: Model and application, *Statistics & Probability Letters*, **79**, 907–914.
- Rabemananjara R and Zakoian JM (1993). Threshold ARCH models and asymmetries in volatility, *Journal of Applied Econometrics*, **8**, 31–49.
- Terasvirta T (2009). An introduction to univariate GARCH models, In: Mikosch T, Kreiß JP, Davis R, Andersen T (ed.) *Handbook of Financial Time Series*, 17–42, Springer, Berlin, Heidelberg.
- Tsay RS (2010). *Analysis of Financial Time Series*(3rd ed.), Wiley, New York.

Received June 14, 2021; Revised June 28, 2021; Accepted June 29, 2021

## 비대칭-비정상 변동성 모형 평가를 위한 모수적-붓스트랩

최선우,<sup>a</sup> 윤재은,<sup>a</sup> 이성덕,<sup>b</sup> 황선영<sup>1,a</sup>

<sup>a</sup>숙명여자대학교 통계학과 <sup>b</sup>충북대학교 정보통계학과

---

### 요 약

본 논문에서는 변동성의 비대칭성과 비정상성을 동시에 고려하고 있다. 다양한 변동성 모형을 분석하고 있으며 모수적-붓스트랩을 통한 예측분포를 이용하여 변동성 모형의 예측 성능을 비교하고 있다. 오차항 분포로서 표준정규분포 및 표준화  $t$ -분포를 고려하였으며 1-시차 후 예측과 2-시차 후 예측을 미국의 다우지수 사례를 통해 설명하였다.

주요용어: 비대칭 변동성, 비정상 변동성, 모수적 붓스트랩

---

<sup>1</sup>교신저자: (04310) 서울특별시 용산구 청파로 47길 100, 숙명여자대학교 통계학과. E-mail: shwang@sookmyung.ac.kr