韓國數學敎育學會誌 시리즈 C <初等數學敎育>
https://doi.org/10.7468/jksmec.2021.24.4.247
2021. 10. 제 24권, 제 4호, 247-264

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
October. 2021, Vol. 24, No. 4, 247-264

# Dienes의 수학학습이론에 따른 사다리꼴의 넓이 학습에서 학생들이 구성한 예 공간 분석

오민영(연서초등학교, 교사)†
김남균(청주교육대학교, 교수)

사다리꼴의 넓이는 수학적 사고와 역량을 기를 수 있는 중요한 개념이지만 다수의 학생은 사다리꼴의 넓이 공식을 도구적으로 이해하는 경향이 있다. 이러한 문제를 해결하는 실마리를 Dienes의 수학학습이론과 Watson과 Mason의 예 공간 개념에서 찾을 수 있었다. 본 연구는 사다리꼴의 넓이 교수학습에 관한 시사점을 얻고자 Dienes의 수학학습이론에 따른 사다리꼴의 넓이 학습에서 학생들이 구성한 예 공간을 분석하였다. 분석 결과, 학생들이 구성한 수학학습단계별 예 공간은 놀이 단계의 사다리꼴 변형에 대한 예 공간, 비교·표현 단계의 공통점 표현에 대한 예 공간, 기호화·형식화 단계의 사다리꼴 넓이 식에 대한 예 공간이었다. 단계별 예 공간을 구성하는 예의 종류, 생성, 비중, 관련성을 분석하고 예 공간의 구조를 맵으로 도식화하였다. 단계별 예 공간의 일반적인 예, 특수한 예, 관례적인 예를 분석하고 실제 사다리꼴의 넓이 교수학습 실행에서 예와 예 공간을 활용하는 방안을 논의하였다. Dienes의 수학학습이론에 따른 사다리꼴의 넓이 학습수행의 유의미함을 논의하였고 본 연구의 내용은 사다리꼴의 넓이 학습의 한 모델이 될 수 있다.

## I. 서론

사다리꼴의 넓이는 수학적 사고와 역량을 기르는데 좋은 소재이다. 사다리꼴의 변형이라는 기하학적 상황을 대수적으로 변환하여 넓이 공식을 구성하는 과정은 기하학적 사고와 대수적 사고를 동시에 필요로 한다(정영우, 2015). 넓이 공식을 재발견하고 식의 의미를 이해하는 과정을 통해 학생들은 수학적 사고의 유용성을 인식할 수 있다. 사다리꼴의 넓이를 구하는 다양한 방법을 탐구하면서 학생들은 창의적 사고와 수학적 의사소통 역량을 함양할 수 있다.

그러나 다각형의 넓이 학습에 관한 다수의 선행연구(e.g. 정경순, 임재훈, 2011; 나귀수, 2012; 김상화 외, 2013; 강문봉, 김정하, 2015)에서 학생들이 넓이 식의 의미를 이해하지 못한 채 기계적으로 식을 사용하는 현상에 대해 문제 제기하고 있다. 이런 현상을 사다리꼴의 넓이 공식 이면에 있는 수학적 구조를 이해하지 못한 채 형식화한 경우로 볼 수 있다. 수학적 구조를 이해한다는 것은 수학적 대상들 사이 관계에 내재한 일반적인 성질을 인식하는 것이다(Mason, Stephens, & Watson, 2009). 사다리꼴의 넓이 공식에 내재한 수학적 구조를 이해하지 못한 경우 대게 공식 암기로 이어지므로 지식을 적용하여 새로운 문제를 해결하는 생산적 사고를 기대하기 어렵다.

사다리꼴의 넓이 학습에 관한 연구를 검토한 결과 사다리꼴의 넓이 학습에 초점을 둔 사례 연구는 많이 이루어지지 않은 것으로 보인다. 이종욱(2006)과 정영우(2015)의 연구를 찾을 수 있었지만, 모두 예비교사에 관한 것이었다. 다각형의 넓이 학습에 관한 연구(e.g. 이선영, 2006; 임아름, 박영희, 2011; 유상휘, 송상헌, 2013; 김상화 외, 2013; 강문봉, 김정하, 2015; 권민서, 2018)는 꾸준히 이뤄져 왔지만, 연구물 일부에서 세부 연구내용으로 사다리꼴의 넓이 지도가 포함돼 있었다. 사다리꼴의 넓이 공식은 평면도형의 넓이 공식 중 복잡하고 어려운 편에 속한다고 밝힌 연구(e.g. 강문봉, 김정하, 2015; 권민서, 2018)에 비춰볼 때 사다리꼴의 넓이 학습에 초점을 둔 사례 연구가 필요함을 알 수 있다.

학생 스스로 수학적 구조를 발견하고 온전히 이해

* 접수일(2021년 10월 18일), 심사(수정)일(2021년 10월 25일), 게재확정일(2021년 10월 29일)
* MSC2000분류 : 97D40
* 주제어 : Dienes의 수학학습이론, 예 공간, 사다리꼴의 넓이 학습
† 교신저자 : omy8529@gmail.com
* 이 논문은 오민영의 석사학위 논문(2020)의 일부분을 발췌하고 수정한 것임.

하기를 기대하는 것은 무리가 있으므로 사다리꼴의 넓이에 내재한 수학적 구조를 어떻게 교수 학습할 것인가에 대한 논의가 필요하다. Watson과 Mason(2015)은 수학적 구조를 학습하는 방안으로 예 구성 활동을 제안하였다. 예 구성 활동에서 학생들이 구성한 예들은 예들이 속한 전체인 예 공간을 이루는 대상들로 볼 수 있다(이근범, 이경화, 2016). 학생들은 예들의 변이 속 불변성을 탐구하며 예들에 내재한 관계와 일반적인 성질을 파악한다. 이를 통해, 학생들은 예 공간의 구조를 인식하고 수학적 구조를 학습한다. Watson과 Mason(2015)은 예 공간을 구조화하는 지도방법으로 여러 예를 관찰하고 비교하는 방안을 제시하였다. 이는 Dienes(1960)의 수학학습이론 중 수학학습단계의 비교, 표현 단계와 그 목적과 방식이 유사하다.

Dienes(1960)는 자신의 수학학습이론에서 수학학습원리와 수학학습단계를 제안하며 수학적 추상화의 과정을 설명하고 있다. Dienes(1960)에 따르면 학생들은 본질적인 구조가 같은 대상들을 구성하고 연결하면서 공통적인 구조를 추상화하고 일반적인 이해를 도모한다는 것이다. 이는 Watson과 Mason(2015)이 수학은 구성 활동이며 수학학습은 수학적인 생각을 담고 있는 예들을 일반화하는 것이라고 밝힌 점과 유사하다. 즉 수학학습단계와 예 구성 활동은 학생들이 구성한 다양한 대상들 사이 공통점 혹은 불변성을 탐구함으로써 수학의 구조를 학습할 수 있다고 보는 관점을 띤다. 따라서 본 연구에서는 두 이론을 접목하여 연구를 설계해보고자 한다.

학생들이 사다리꼴의 넓이를 구하는 방법을 관계적으로 이해할 수 있도록 Dienes의 수학학습이론을 적용하고 예 구성 활동을 촉진하는 시도는 의미가 있다. 그런데 Dienes의 수학학습이론의 관점에서 사다리꼴의 넓이 교수학습사례를 밝힌 연구가 드물고, 사다리꼴의 넓이 교수학습에 필요한 예와 예 공간을 보고한 연구가 거의 없다. 따라서 Dienes의 수학학습이론에 따른 사다리꼴의 넓이 학습사례와 사다리꼴의 넓이 학습에 필요한 예와 예 공간에 대한 정보가 필요하다. 이러한 정보를 통하여 사다리꼴의 넓이 수업에서 교사와 학생이 어떤 예를 어떻게 활용할 것인지 의사 결정할 수 있다. 그리고 사다리꼴의 넓이 학습에 대한 Dienes의 수학학습이론의 적용 가능성을 가늠할 수 있다.

이에 본 연구에서는 Dienes의 수학학습이론에 따른 사다리꼴의 넓이 교수실험을 고안하고 실제 학습 과정에서 학생들이 구성한 예 공간을 분석하고자 한다. 사다리꼴의 넓이 학습에서 학생들이 구성한 예 공간을 바탕으로 Dienes의 수학학습이론에 따른 사다리꼴의 넓이 학습수행의 의미를 논의하였다. 그리고 Watson과 Mason(2015)의 이론과 본 연구결과를 바탕으로 수학 교수학습에서 예와 예 공간을 활용하는 방안을 논의하였다.

## II. 이론적 배경

본 연구는 사다리꼴의 넓이 교수학습에 관한 시사점을 도출하고자 Dienes의 수학학습이론에 따른 사다리꼴의 넓이 학습에서 학생들이 구성한 예 공간을 분석한 연구이다. 교수실험 설계와 자료 분석을 위하여 Dienes의 수학학습이론, Watson과 Mason의 예 공간 구성에 관한 각 문헌을 검토하고, 사다리꼴을 포함한 다각형의 넓이 학습에 관한 교과서 분석을 하였다.

### 1. Dienes의 수학학습이론

Dienes의 수학학습이론은 수학학습단계와 수학학습원리로 이뤄져 있다. 수학학습단계는 수학적 개념의 추상화 과정을 6단계로 나타낸 것이며 수학학습원리를 반영하고 있다. Dienes(2000)가 제시한 수학학습단계는 총 6단계로 단계 명은 단계 순서대로 자유놀이, 규칙놀이, 비교, 표현, 기호화, 형식화이다. Dienes의 수학학습단계에 관한 연구(e.g. 김수미, 2008; 방신영, 2013; 정지현, 2014)를 살펴보면 6단계 명을 다르게 번역하여 사용하는데 본 연구에서는 김수미(2008)의 단계 명을 따른다. 단계를 재구성하거나 결합한 연구도 있었는데, 정지현(2014)은 6단계를 5단계로 재구성하였고, 방신영(2013)은 6단계를 3·2·1단계로 묶어 3차시 수업을 설계하였다. 본 연구에서도, 단계 간 유사성과 유기적 연결을 고려하여 6단계를 두 단계씩 묶어 놀이 단계, 비교·표현 단계, 기호화·형식화 단계인 총 3단계로 교수실험을 구상하였다. 본 연구에서 수학학습단계란 Dienes의 수학학습 6단계를 재구성한 3단계를 의미한다. [표 1]은 Dienes의 수학학습 6단계와 본 연구에서 3단계로 재구성한 수학학습단계를 대조하고 각 단계의 특징을

요약한 것이다. [표 1]의 단계별 특징은 본 연구자가 Dienes(1960; 2000)의 수학학습 6단계 별 특징을 살펴보고 핵심을 정리한 것을 본 연구에서 재구성한 3단계에 맞게 배치만 달리한 것이다.

[표 1] Dienes의 수학학습단계 재구성

| Dienes의 수학학습단계 | 재구성한 수학학습단계 | 단계별 특징 |
|---|---|---|
| 6단계 | 3단계 | |
| 자유놀이 | 놀이 | 수학적 구조가 포함된 놀이 |
| 규칙놀이 | | |
| 비교 | 비교·표현 | 개념과 관련된 항목 비교와 공통점 표현 |
| 표현 | | |
| 기호화 | 기호화·형식화 | 개념의 여러 성질 탐구 및 여러 성질 간 관계 연결 |
| 형식화 | | |

첫째, 놀이 단계는 새롭게 학습을 시작하는 단계로 학생들은 이전의 경험이나 지식을 활용한다. 놀이 단계의 놀이는 수학적 다양성의 원리와 지각적 다양성의 원리에 따라 설계되어야 하며 학습하고자 하는 개념의 수학적 구조가 놀이의 규칙 또는 교구에 포함되어야 한다. 놀이에서 반드시 교구를 활용해야 하는 것은 아니지만 Dienes는 Dienes 블록, 속성 블록과 같은 수학 교구를 개발하여 활용하였다. 또한 수학학습단계 연구자들 대부분이(e.g. 김정하, 2000; 김현진, 2009; 방신영, 2013; 이승연, 2011; 정지현, 2014) 놀이에서 수학 교구를 활용하였다.

둘째, 비교·표현 단계는 앞서 구성한 놀이의 결과를 비교하여 발견한 공통점을 시각적으로 표현하는 단계이다. 김수미(2008)는 학생들이 단계별 활동을 충분히 경험하지 않고 다음 단계로 이행하는 경우를 우려하며 교사역할과 비계의 필요성을 주장한다. 비교·표현 단계에서 학생들이 수학적 대상들의 공통적인 구조를 혼자 완벽히 찾기는 어려우므로 비교해야 할 요소를 대응시킨 목록을 제시하는 등 적절한 안내가 필요하며 이를 Dienes(2000)는 비교 목록(dictionary)을 만들어 제공한다고 표현하였다. 학생들은 외양이 다른 행위나 상황의 공통적인 본질을 동일 표현으로 나타내면서 그 표현이 무수한 상황을 대표한다는 점을 인식한다.

셋째, 기호화·형식화 단계는 앞서 구성한 동일 표현에 근거하여 공통적인 성질을 기호로 나타내고, 성질 간 관계를 바탕으로 동치 표현을 정리하는 단계이다. 수학학습단계는 대부분 귀납적이지만 기호화·형식화 단계는 일부 연역적이다. Dienes(2000)는 기호화·형식화 단계가 연역적인 성격을 띠더라도 엄밀한 증명을 하는 단계는 아님을 밝히고 있다. 그러나 Dienes(2000)의 정수학습 사례 중 기호화·형식화 단계를 살펴보면 초등학생의 사다리꼴의 넓이 학습에 참고하기 어려울 만큼 복잡한 증명과정이다. Dienes의 수학학습이론에 근거하여 중등 교육과정의 개념을 다룬 연구는 있지만, 초등 교육과정의 개념을 다룬 연구는 매우 드물기에 초등학생의 기호화·형식화 단계를 이해하는 데 난점이 있었다. 그런데 본 연구자는 Dienes(2000)가 언급했듯 기호화·형식화 단계의 목적이 증명 자체에 있지 않다 판단하여 기호화·형식화 단계를 동치나 포함과 같은 성질 사이 관계를 연결하는 과정으로 해석하였다.

## 2. 예 공간의 구성

Watson과 Mason(2015)은 수학적인 예를 여러 가지 유형으로 구분한다. 이 중 가장 기본적인 예의 유형은 일반적인 예, 특수한 예, 관례적인 예라 할 수 있다. 일반적인 예는 예들을 구조적으로 연결하는 데 중심적인 역할을 할 수 있는 예이다. Watson과 Mason(2015)은 포괄적인 예를 찾으면 일반화를 할 수 있다고 하였다. 특수한 예는 포괄성은 낮지만, 예의 범위와 경계를 명확히 해주는 예이다. 일반적인 예라 하더라도 하나의 예가 개념의 전체를 대표할 수는 없는데 대표성의 부족을 보완하는 데 특수한 예를 활용할 수 있다. 관례적인 예는 교과서에 제시되어 있고 교사들이 좋은 예로 수업 중에 제시하는 예이다(Watson & Mason, 2015, p.211). 같은 예이더라도 개인에 따라 혹은 상황에 따라 일반적인 예, 특수한 예, 관례적인 예의 구분이 달라질 수 있다.

예 공간이란 예들의 단순한 축적이 아니라 관계있는 예들이 복합적으로 연결되어 수학적 구조를 이루는 체계이다(Watson & Mason, 2015). Watson과 Mason에 따르면 학생들은 교사와 달리 일반적인 예에 담긴 일반성을 처음부터 이해하진 못한다. 예를 구성하고, 예의 변화 가능한 범위를 인식하고, 예의 전체를 파악하고, 일반성을 구성하는 과정을 거쳐 예 공간이 확장

되며 비로소 예에 내재한 일반성이 보인다고 한다. 다시 말해, 학생들은 예들의 변이 속에서 불변하는 성질을 파악함으로써 수학적 구조를 이해하고 수학적 추상화를 경험한다. 예 공간의 구성을 Dienes의 수학학습 이론과 연결지어 보면, Dienes(2000)의 수학학습단계 중 비교·표현 단계와 그 핵심이 유사하다. 비교·표현 단계에서 다양한 수학적 대상들을 비교하여 공통점을 표현하는 과정은 예 공간 구성 과정 중 변이 속 불변성을 탐구하는 과정으로 볼 수 있기 때문이다. 예 공간은 예 공간을 확장하는 과정에서 도출된 기호 체계까지 포함한다. 그리고 교사가 적절히 과제를 설계할 경우 학생들은 예 공간을 자발적으로 구성하고 확장할 수 있다고 한다.

### 3. 사다리꼴의 넓이 학습 내용 분석

2007, 2009, 2015 개정 교육과정에 따른 수학 교과서(교육부, 2011; 2015; 2019)에 제시된 사다리꼴의 넓이 학습 활동을 본 연구에서 3단계로 재구성한 수학학습단계에 따라 분석하였다. 교과서 비교분석을 한 까닭은 사다리꼴의 넓이 학습에 쓰이는 보통의 활동들을 파악하고 수학학습단계에 따른 교수실험 설계에 참고하기 위함이다. 분석 결과 [표 2]와 같이 교과서의 학습 활동을 수학학습단계별로 대응시킬 수 있었다. 교과서 속 사다리꼴의 넓이 학습 활동은 재구성한 수학학습단계의 요소를 일부 갖추고 있었다.

2007, 2009, 2015 개정 교과서는 공통으로 놀이 단계에서 사다리꼴 변형 활동을 포함하고 있다. 강문봉, 김정하(2015)에 따르면 다각형의 넓이 지도에 도형변형 활동은 유효하다. 따라서 놀이 단계의 수학적 구조를 포함한 놀이를 도형변형 활동으로 설계하는 것은 타당해 보인다. 2007, 2009, 2015 개정 교과서의 다각형의 넓이 학습 차시들을 보면 도형변형 활동은 대게 배적변형과 등적변형이고 일부 분할변형과 반적변형이다. 그리고 배적변형 또는 등적변형 후 모양은 직사각형 또는 평행사변형인데 이때 평행사변형이란 한 쌍의 변만 평행하여 직사각형이 아닌 평행사변형을 의미한다. 그리고 도형을 변형하기 위해 도형의 일부를 떼거나 도형을 추가하여 아래쪽이나 옆쪽으로 붙이도록 한다. 따라서 놀이 단계의 놀이를 직사각형, 평행사변형으로 배적변형, 등적변형하는 놀이로 설계하고, 놀이 결과를 변형 후의 넓이 변화, 변형 후 모양, 변형하는 방향을 기준으로 분석할 수 있다.

[표 2]의 기호화·형식화 단계를 보면 공통으로 사다리꼴의 구성요소를 사용하여 식을 쓰는 활동이 있고, 2009 개정 교과서의 경우 수치를 사용하여 식을 쓰는 활동이 있다. 따라서 기호화·형식화 단계를 설계할 때 사다리꼴의 구성요소 외에 구체적인 수치를 사용할 수 있다. [표 2]의 기호화·형식화 단계를 좀 더 살펴보면 2007 개정 교과서에서는 밑변의 길이 합이 같고, 높이가 같은 사다리꼴은 넓이가 같다는 성질을 탐구하게 하지만, 이 활동은 이후 삭제됐다. 대신 2015 개정 교과서에서는 사다리꼴의 두 넓이 식을 비교해 다양한 방법으로 같은 식을 얻을 수 있음을 알게 한다. 따라서 기호화·형식화 단계를 넓이 식 간 관계를 연결하는 활동으로 설계함이 적절해 보인다.

[표 2] 수학학습단계별 교과서 사다리꼴의 넓이 학습 활동

| 수학학습단계 | 2007 개정 교과서 | 2009 개정 교과서 | 2015 개정 교과서 |
|---|---|---|---|
| 놀이 | 단위 세기<br>배적변형 예 그리기<br>분할변형 예 그리기 | 단위 세기<br>배적변형 예 그리기<br>분할변형 예 그리기 | 배적변형 예 붙이기<br>등적변형 예 붙이기<br>분할변형 예 그리기 |
| 비교·표현 | - | - | - |
| 기호화·형식화 | 식 쓰기 (사다리꼴 구성요소)<br>사다리꼴의 넓이의 성질 탐구하기 | 식 쓰기 (사다리꼴 구성요소& 수치) | 식 채우기 (사다리꼴 구성요소)<br>사다리꼴의 두 넓이 식 연결하기 |

이선영(2006)은 도형변형 활동과 공식 도출 사이의 간격을 좁히는 방안이 필요하다고 하였고 본 연구자는 수학학습단계의 비교·표현 단계가 그 역할을 할 수 있다고 보았다. 그런데 2007, 2009, 2015 개정 교과서는

공통으로 비교·표현 단계의 활동을 담고 있지 않았다.

## Ⅲ. 연구방법

### 1. 연구 참여자

본 교수실험에 참여한 학생은 세종시의 면 지역에 소재한 11학급 규모의 Y초등학교 5학년 학생 6명이다. Y초등학교는 인근 지역에 소재한 초등학교에 비해 학력이 다소 떨어진다는 교사들의 평판을 얻고 있으며 Y초등학교 5학년은 총 학생 수가 9명인 단일학급이다. 우선, 초등학교 5학년생을 연구대상으로 선정한 이유는 사다리꼴의 넓이 교수학습이 교육과정 상 5학년 때 이뤄지기 때문이다. Y초등학교 5학년생 9명 중, 학생, 보호자가 교수실험 참여에 동의하고, 5학년 기초학력 진단검사 결과가 60점 이상이며, 수학 교과서에 제시된 수준의 자연수 혼합계산과 두 양의 대응 관계표현이 가능한 학생 6명을 선정하였다. 이때 성별은 고려하지 않았다. 자연수의 혼합계산과 두 양의 대응 관계표현 능력을 연구 참여자 선정 기준에 포함한 이유는 이 두 개념이 본 연구의 주제인 사다리꼴의 넓이 학습과 직결된 선행지식이며, 선행지식의 결손이 교수실험 결과에 주는 영향을 최소화하기 위함이었다.

선정된 연구 참여자들의 수학학습능력은 담임교사의 견해와 연구자의 관찰, 진단검사 등을 종합해볼 때 중하에서 중상 정도로 보인다. 연구 참여자들은 사다리꼴의 넓이와 관련하여 직사각형, 평행사변형, 삼각형의 넓이 구하는 방법을 학습한 상태였다. 특히 삼각형의 넓이 학습의 경우 본 교수실험의 수학학습단계와 유사한 방식으로 이뤄졌기 때문에 본 교수실험의 수학학습단계에 따른 사다리꼴의 넓이 학습을 학생 혼자서 수행할 수 있을 것으로 예상하였다. 학생들은 직사각형, 평행사변형, 사다리꼴의 포함관계, 그리고 각 도형의 구성요소를 알고 있었다.

### 2. 교수실험

학생들이 수학학습단계를 적용한 사다리꼴의 넓이 학습 과제를 해결하며 예 공간을 구성하고 확장하는 과정을 자세히 관찰하고자 교수실험 방법을 사용하였다. 교수실험의 구성이 수학학습단계별 특징([표 1])을 적절히 반영하는지 5학년 학생 8명을 대상으로 한 예비실험, 수학교육에 관심도가 높은 초등학교 현장 교사 2명의 검토, 초등수학교육 전문가의 검토로 삼각검증하고 타당도를 확보하였다. 사다리꼴의 넓이 교수실험 내용은 다음과 같다.

가. 교수실험 구성

본 교수실험은 놀이 단계, 비교·표현 단계, 기호화·형식화 단계로 총 3단계 구성이며 각 단계는 Dienes의

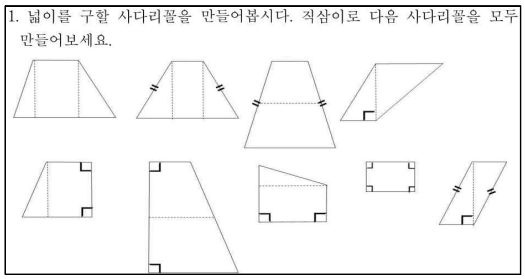
[표 3] 사다리꼴의 넓이 학습 교수실험 구성

| 단계 | 시간 | 교수실험 내용 | 설명 | 학습자료 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 활동지 | 교구 | 맵 |
| 놀이 | 40~50분 | 사다리꼴 변형하기 놀이 | 삼각형 직소 교구를 사용해 다양한 사다리꼴 만들기 | 1번 | 조작 | |
| | | | 자신이 만든 사다리꼴을 조건에 맞게 변형하고 맵 채우기 | 2번 | 조작 | 기록 |
| 비교·표현 | 40~50분 | 사다리꼴 변형 양상 비교 | 채워진 맵에서 사다리꼴 변형 전후의 모양, 넓이, 밑변, 높이 비교하기 | 3번 | 관찰 | 기록 |
| | | 비교결과 발견한 공통점 표현 | 맵의 일부 또는 전체에서 공통점을 찾고 그림, 기호, 글 등으로 표현하기 | 4번 | 관찰 | 기록 |
| 기호화·형식화 | 40~50분 | 사다리꼴의 여러 가지 넓이 식 기호화 | 수치, 직사각형·평행사변형·사다리꼴의 구성요소를 사용해 넓이 식 쓰기 | 5번 | 관찰 | 기록 |
| | | 사다리꼴의 넓이 식 간 관계 연결 | 수치, 직사각형·평행사변형 구성요소를 변환하고 사다리꼴 넓이 공식과 연결하기 | 6번 | 관찰 | 관찰 |

수학학습 6단계를 단계 간 유사성과 유기적 연결을 고려하여 두 단계씩 묶어 재구성한 것이다. [표 1]의 수학학습단계별 특징을 반영하여 교수실험을 구성하였고, [표 3]은 단계별 교수실험 시간, 교수실험 내용, 교수실험 내용에 대한 설명, 교수실험에 사용한 학습자료를 요약한 것이다. [표 3]의 학습자료를 살펴보면, 각 단계에 해당하는 활동지 문항 번호가 있다. 학생들이 교구와 맵을 사용한 방식을 조작, 관찰, 기록으로 구분하여 [표 3]에 요약하였다.

1) 놀이 단계

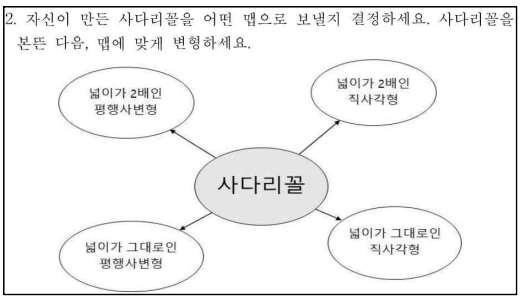
사다리꼴 변형하기 놀이는 두 부분으로 구성된다. 사다리꼴 만들기와 사다리꼴 변형하기이다. 사다리꼴을 만들 때, 학생들은 삼각형 직소 교구를 사용한다. 삼각형 직소 교구는 오민영, 이미림, 이윤기, 김남균(2019)과 오민영, 이윤기, 김남균(2020)이 개발한 교구로 다양한 크기와 모양의 직각삼각형으로 구성되어있다. 직각삼각형을 결합하여 다각형을 구성하고 변형할 수 있으며, 자석 퍼즐과 스티커 퍼즐의 형태로 제작되어 있다. 학생들은 사다리꼴을 그리고 오리고 자르는 데 능숙하지 않기 때문에 교수실험 시간 내에 손쉽게 다양한 사다리꼴을 만들고 변형할 수 있도록 놀이에 교구를 사용하였다. 학생들은 활동지 1번([그림 1])에 그려진 9종의 사다리꼴을 참고하여 다양한 사다리꼴을 만든다. 예의 수는 제약이 없고, 학생마다 달랐으나 교수실험 시간 내에 구성된 예의 수의 평균은 12개였다.




[그림 1] 활동지 1번: 놀이 단계

만든 사다리꼴을 변형하기 위해 학생들은 사다리꼴 변형방법이 시각적으로 구조화된 맵을 사용한다. A1 종이 크기인 맵에는 [그림 2]와 같이 4가지 변형조건이 방사형으로 적혀있다. 학생들은 앞서 만든 사다리꼴 중 하나를 정하고, 맵의 4가지 조건 중 하나를 정한다. 학생들은 사다리꼴을 맵에 놓고 본뜬 다음 변형조건에 맞게 사다리꼴을 변형한다. 맵에 사다리꼴이 놓이는 위치는 학생이 선택한 조건이 적힌 곳 부근이며 본을 뜨는 까닭은 변형 전 모양을 기록하기 위함이다. 학생들은 사다리꼴과 변형조건을 각각 선택하고 맵에 놓고 본뜨고 변형하는 과정을 앞서 만든 사다리꼴이 모두 소진될 때까지 반복한다. 맵에 적힌 4가지 변형방법 외의 방법을 사용한 학생에게는 시도한 방법에 스스로 이름을 붙이고 맵에 추가 기재토록 하였다.

[그림 2]의 맵에서 직사각형으로 변형된 예는 모두 직사각형으로 분류되었기 때문에 결국 평행사변형으로 분류된 예는 직사각형이 아닌 평행사변형 예만 있었다. 학생들은 사각형의 포함관계를 교수실험 전부터 알고 있었기 때문에 본 교수실험으로 인한 수학적 오류는 발견되지 않았다.




[그림 2] 활동지 2번: 놀이 단계

2) 비교·표현 단계

비교·표현 단계는 두 부분으로 구성된다. 사다리꼴의 변형 양상 비교와 공통점 표현이다. 학생들은 놀이 단계에서 구성한 맵을 보고 다양한 사다리꼴의 변형 양상을 관찰한다. 기호화·형식화 단계로 진전이 이루어지기 위해서는 사다리꼴의 넓이 공식을 구성하는 데 필요한 요소들을 비교·표현 단계에서 비교해야 한다. 따라서 활동지 3번 지시문([그림 3])에 총 4가지 비교 목록인 모양, 넓이, 밑변, 높이를 제시하였다. 학생들은 4가지 비교 목록을 참고하여 맵의 일부 또는 전체에서 공통점을 찾는다. 그리고 찾은 공통점을 그림, 기호, 글 등 각자의 방식으로 맵에 표현한다. 수학적 구조를 시각화한 맵은 놀이 단계에 이어 비교·표현 단계에도

사용된다. [그림 3]에서 활동지 3번에 비교 목록이 주어진 것과 달리 활동지 4번에는 공통점 예시는 전혀 주어지지 않았다.

3. 변형 전과 변형 후의 모양, 넓이, 밑변, 높이를 비교하여 맵에 간단히 기록하세요. (단, 두 밑변이 길이가 다를 경우 둘 다 기록해야 합니다.)

4. 같은 맵 안에서 공통점을 찾아보세요. 찾은 공통점을 맵에 표현하세요. (단, 선, 기호, 문자, 수 등을 사용해 명확하게 표현합니다.)

[그림 3] 활동지 3, 4번: 비교·표현 단계

3) 기호화·형식화 단계

기호화·형식화 단계도 두 부분으로 이뤄진다. 사다리꼴의 넓이 식 기호화와 넓이 식 간 관계 연결이다. 학생들은 사다리꼴의 다양한 변형 양상에서 발견했던 공통점을 토대로 사다리꼴의 여러 가지 넓이 식들을 구성한다. 학생들은 수치, 직사각형의 구성요소, 평행사변형의 구성요소, 사다리꼴의 구성요소를 사용하여 사다리꼴의 넓이 식을 기호화한다. 이 기호화 활동을 통해 학생들은 각 넓이 식이 맵의 일부 또는 전체를 대표한다는 점을 인식한다. 활동지 5번([그림 4])에서 몇 가지 기호들을 제공하여 학생들이 넓이 식을 구성할 때 참고할 수 있도록 했고, 제시된 기호 외에 가로, 세로, 밑변, 수치 등도 사용할 수 있다고 말해주었다.

5-2. 맵 마다 알 수 있는 사다리꼴의 넓이 구하는 식을 맵에 쓰세요.
(단, 식을 쓸 때, 다음 기호들을 참고합니다.)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ( ) | × | ÷ | + | 2 | = | 높이 | 두 밑변 | 윗변 | 아랫변 |

6-1. 맵 마다 나온 사다리꼴의 넓이 식을 비교해보세요.

(A 학생 예시) 직사각형 가로 = 사다리꼴의 ( )
직사각형 세로 = 사다리꼴의 ( )

[그림 4] 활동지 5, 6번: 기호화·형식화 단계

이어지는 활동은 사다리꼴의 넓이 식 간 관계 연결하기다. 이 활동의 의도는 넓이 식들이 서로 관련이 있고 하나의 식으로 정리될 수 있음을 학생들이 인지하는지 파악하기 위함이다. 활동지 6번([그림 4])은 학생마다 달랐는데 그 이유는 학생마다 놀이 단계부터 비교·표현 단계까지 다루고 있는 사다리꼴이 달라서 활동지에 발문을 일괄 인쇄할 수 없기 때문이다. 따라서 즉석에서 학생의 맵을 보고 활동지에 추가 발문을 써주었는데, 발문을 써줄 여백과 추가 질문의 종류는 미리 계획된 것이다. 활동지 6번 발문의 목적은 수치, 직사각형의 구성요소, 평행사변형의 구성요소를 각각 사다리꼴의 구성요소 중 무엇과 대응할 수 있는지 고민하게 하는 것이다. 사다리꼴의 여러 가지 넓이 식들을 사다리꼴의 전형적인 넓이 공식과 연결하는지 관찰하고자 하였다.

나. 교수실험 실행

교수실험은 연구자가 진행하였다. 교수실험 진행자로서 학습자료 배부, 시간 확인, 활동전환, 학생 관찰에 충실하였다. 연구자로서는 교수실험 기획과 구상, 학습자료 제작, 자료 수집 및 분석을 하였다. 교수실험 중 연구자나 교사가 아닌 진행자로서 객관적이고 중립적인 태도를 유지하려 노력했다.

놀이 단계, 비교·표현 단계, 기호화·형식화 단계는 각 40~50분씩 진행되었다. 5학년 학생들이 연속하여 40~50분씩 3단계를 수행하기 쉽지 않으므로 학생들의 신체적, 정신적 피로를 고려하여 3단계를 양일로 나눠 교수 실험하였다. 연구자가 한 번에 교수실험 참여자 6명을 자세히 관찰하기 어려우므로 참여자 6명을 3명씩 오전 한 팀, 오후 한 팀으로 나눴다. 즉, 첫날에는 놀이 단계와 비교·표현 단계를 오전 한 팀, 오후 한 팀 진행하고, 바로 다음 날 기호화·형식화 단계를 오전 한 팀, 오후 한 팀 진행하였다. 오전 교수실험이 같은 날 오후 교수실험에 영향을 주지 않도록 계획한 대로만 실험을 진행하였다. 팀별 3명 학생이 한 공간에 있었으나 개별 활동이었기에 단계별 수행 속도의 개인차를 허용하였다.

### 3. 자료 수집

자료는 교수실험과 면담을 통해 수집하였다. 교수실험에서 수집한 자료는 총 4가지로 교수실험 영상, 학생 맵 사진, 학생 활동지, 연구자 현장 노트이다. 본 교수실험의 구성([표 3])을 살펴보면 사용된 학습자료는 총 3가지로 활동지, 교구, 맵이다. 교수실험 영상은 학생의 맵과 맵을 작성하는 손이 잘 보이도록 촬영된 것으로 수학학습단계 전반의 교구 조작과 맵 기록을 담고 있다. 학생 맵 사진은 기호화·형식화 단계까지 마

친 뒤 촬영한 완성된 맵 사진이다. [표 3]을 보면 세 학습자료 중 대부분 기록은 맵 위에 이뤄지지만, 기호화·형식화 단계 일부 기록은 활동지에 이뤄져서 학생 활동지 6번을 수집하였다. 연구자 현장 노트는 연구자가 교수실험 진행 중 관찰하고, 추측한 기록으로 학생 면담에 활용되었다.

학생 면담은 교수실험을 모두 마친 2일 차에 학생 개별 10분 이내로 하였다. 면담의 목적은 학생이 맵에 기록한 내용을 연구자가 분명히 이해하기 위함이다. 면담에서는 학생이 맵에 기록한 내용 중 연구자가 그 의미를 이해하기 어려운 것을 골라 학생에게 설명을 요청하였다. 면담에서 얻은 자료는 면담녹음자료이다.

### 4. 자료 분석

Watson과 Mason(2015)에 따르면 예 공간은 서로 관계있는 예들이 복합적으로 연결되어 수학적 구조를 이루는 체계이다. 따라서 예 공간을 분석한다는 것은 예 공간을 이루는 예들이 무엇이며 예들이 어떻게 얼마만큼 생성되고 연결되는지 탐색하는 것이다. 그러므로 예의 종류, 예의 생성, 예의 비중, 예의 관련성을 분석하였다. 그리고 분석 결과를 맵으로 나타내어 학생들의 예 공간을 시각화하였다. 이는 예 공간의 구조를 시각화하기 위한 연구자의 시도이다. 예 공간의 구조를 시각화하는 방법으로 맵 형식을 선택한 이유는 맵이 위치를 기반으로 대상이 이루는 구조를 표현하는 도구이기 때문이다. 맵을 통해 예 공간을 이루는 예의 종류, 생성, 비중, 관련성을 한눈에 보이고자 하였다.

[표 4] 수학학습단계별 예 공간과 생성기반

| 단계 | 단계별 예 공간 | 생성기반 |
|---|---|---|
| 놀이 | 사다리꼴 변형 예 공간 | 사다리꼴 변형 예 공간 |
| 비교·표현 | 공통점 표현 예 공간 | 사다리꼴 변형 예 공간 |
| 기호화·형식화 | 사다리꼴 넓이 식 예 공간 | 공통점 표현 예 공간 |

예 공간은 수학학습단계가 진전됨에 따라 그 공간이 점차 확장될 것이므로 학생들이 구성한 예 공간을 사다리꼴의 넓이 학습 단계별로 나누어 분석하였다. [표 4]는 수학학습단계별 예 공간과 예 공간별 생성기반을 요약한 것으로, 생성기반이란 학생들이 단계별 예 공간을 생성할 때 직접적으로 참고한 예 공간을 의미한다.

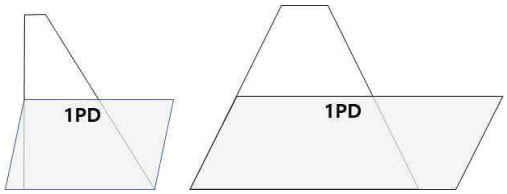
[표 4]를 살펴보면, 놀이 단계의 예 공간은 사다리꼴 변형 예 공간이다. 사다리꼴 변형 놀이 결과 만들어진 모든 예가 이 공간에 속한다. 사다리꼴 변형 예 공간은 사다리꼴의 넓이 학습을 시작하는 단계의 예 공간이기 때문에 생성기반이 그 자체에 있다. 예를 들어, 학생들은 사다리꼴을 평행사변형으로 배적변형한 예를 만든 다음 그 예를 참고하여 비슷한 예 또는 아예 다른 예를 만든다.

비교·표현 단계의 예 공간은 공통점 표현 예 공간이다. 그리고 기호화·형식화 단계의 예 공간은 사다리꼴 넓이 식 예 공간이다. [표 4]를 보면, 공통점 표현 예 공간과 사다리꼴 넓이 식 예 공간은 생성기반이 이전 단계의 예 공간이라는 공통점이 있다. 학생들은 사다리꼴 변형 예 공간을 관찰하여 공통점을 표현하고, 공통점 표현 예 공간을 관찰하여 사다리꼴의 넓이 식을 쓰기 때문이다.

놀이 단계의 사다리꼴 변형 예 공간을 이루는 예들의 종류는 그 예가 생성되는 과정을 바탕으로 코드가 붙었다. 예의 생성과정을 변형 후 넓이 변화, 변형 후 모양, 교구를 움직인 방향으로 구분하였는데 상세한 기준은 교과서 다각형의 넓이 학습 활동 분석 결과를 바탕으로 도출되고 교수실험을 통해 보완되었다. 예의 생성과정에 따라 그 예와 연결 가능한 넓이 식이 달라지므로 이러한 분석 기준은 유의미하다. 사다리꼴 변형 예에 코드를 붙인 방법을 요약하면 [표 5]와 같다. 사다리꼴의 변형 예는 [표 5]와 같이 3가지의 코드를 부여받는다. 예를 들어, [그림 5]와 같이 변형 후의 넓이 변화가 없으면 코드 1, 2, 4중 1, 변형 후 모양이 직사각형이 아닌 평행사변형이면 코드 R, P 중 P, 교구를 움직인 방향이 아래쪽이면 코드 D를 부여하여 1PD 변형 예라고 하였다. [표 5]의 변형 후 넓이 변화 코드 1, 2와 변형 후 모양 코드 R, P는 교과서 분석 결과 도출하고 [그림 2]의 맵에 안내된 경우이다. 그런데 넓이 변화 코드 4는 맵에 안내되지 않았으나 교수실험에서 학생들이 구성한 경우이다. 교구를 움직인 방향 코드 중 S, D는 교과서 분석 결과 도출한 것이고, U, Us, Ud는 교수실험에서 학생들이 구성한 경우이다.

[표 5] 사다리꼴 변형 예 코딩

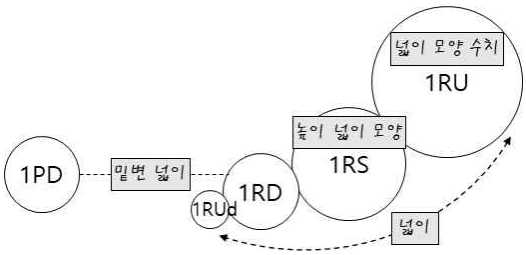
| 변형 후 넓이 변화 | 변형 후 모양 | 교구를 움직인 방향 |
|---|---|---|
| 1 (1배) | R (Rectangle, 직사각형) | U (Up, 위) |
| | | S (Side, 옆) |
| 2 (2배) | | D (Down, 아래) |
| | P (Parallelogram, 평행사변형) | Us (Up-side, 위-옆) |
| 4 (4배) | | Ud (Up-down, 위-아래) |




[그림 5] 사다리꼴 변형 예

예 공간을 이루는 예의 비중과 관련성을 분석하고 [그림 6]과 같이 나타내었다. 먼저, 예의 비중을 분석한 방법은 다음과 같다. 사다리꼴 변형 예의 비중은 원의 크기로 나타내었으며 원의 크기가 클수록 많은 학생이 구성한 예를 뜻한다. [그림 6]에서 1RU 변형 예의 원 크기가 1RUd 변형 예의 원 크기보다 크기 때문에 1RU 변형 예가 더 많음을 의미한다. 그리고 서로 관련 있는 예들을 인접하여 위치시켰다. [그림 6]에서 1RU, 1RS, 1RD, 1RUd 변형 예는 직사각형으로 등적 변형한 점이 유사하므로 가까이 붙어있다.

비교·표현 단계의 공통점 표현 예 공간을 이루는 예들의 종류는 밑변, 높이, 넓이, 모양에 관한 공통점이다. 공통점 표현 예의 비중은 맵에 나타난 개수로 짐작할 수 있다. 그리고 [표 4]에서 밝혔듯이 공통점 표현 예 공간은 사다리꼴 변형 예 공간에 기반을 두기 때문에 공통점 표현 예의 관련성을 나타내기 위해 사다리꼴 변형 예 위에 공통점 표현 예를 중첩시켰다. [그림 6]에서 1RS 변형 예 위에 중첩한 '높이, 넓이 모양'은 학생들이 1RS 변형 예들을 관찰 후 높이변화, 넓이변화, 모양변화 면에서 공통점을 찾아 표현했음을 의미한다. 이런 경우 [그림 6]에서 높이에 관한 공통점 예가 발생한 곳은 1RS 변형 예들 내부라고 말할 수 있다. [그림 6]에서 1PD 변형 예와 1RD 변형 예 사이의 점선 위에 중첩한 '밑변, 넓이'는 학생들이 1PD와 1RD 변형 예들을 관찰한 후 밑변변화, 넓이변화 면에서 공통점을 찾아 표현했음을 의미한다. 이런 경우 [그림 6]에서 밑변에 관한 공통점 예가 발생한 지점은 1PD와 1RD 변형 예들 사이라고 할 수 있다.




[그림 6] 예의 비중과 관련성 분석 예시

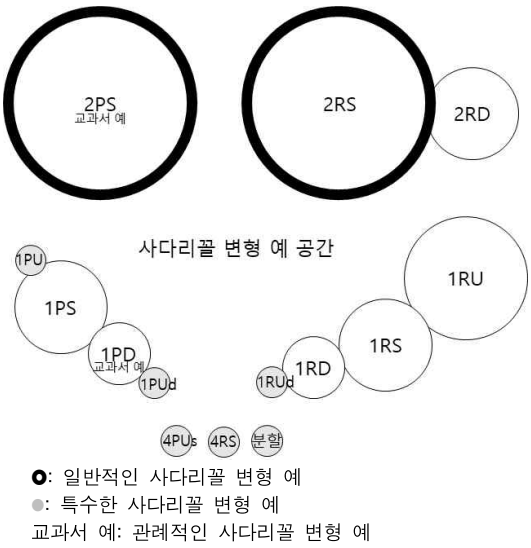
이처럼 수학학습단계별 예 공간을 예의 종류, 생성, 비중, 관련성 측면에서 분석하고 예 공간의 구조를 맵 형식으로 나타냈다. 그리고 예 공간을 다시 살펴보며 일반적인 예, 특수한 예, 관례적인 예로 구분하였다. 일반적인 예란 예들을 구조적으로 연결하는 데 중심적인 역할을 하며 포괄성이 높은 예로 대게 다수의 학생이 구성한 예이다. 특수한 예는 구조적으로 연결하는 데 이차적인 역할을 하며 포괄성이 비교적 낮은 예로 특정한 상황만을 대표하기 때문에 대게 소수의 학생만이 구성한 예이다. 관례적인 예는 2015 개정 교육과정에 따른 수학 교과서에 제시된 예이다.

## Ⅳ. 사다리꼴 학습 과정에서 학생들이 구성한 예 공간

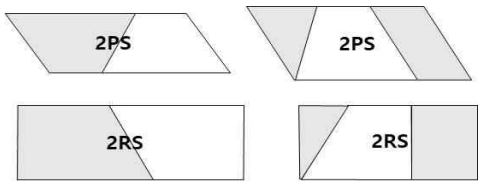
본 연구의 내용은 수학학습이론에 따른 사다리꼴의 넓이 학습에서 학생들이 구성한 예 공간을 분석하는 것이다. 수학학습단계별 학생들이 구성한 예 공간에서 예의 종류, 생성, 비중, 관련성, 그리고 예의 특징을 분석한 결과는 다음과 같다.

### 1. 사다리꼴 변형에 대한 예 공간

사다리꼴 변형 예 공간은 [그림 7]과 같고, 사다리꼴 변형 예 공간에서 큰 비중을 차지하는 예는 2PS, 2RS 변형 예였다. 2PS 변형 예란 [그림 8]처럼 사다리꼴을 측면으로 확장하여 평행사변형으로 변형한 예이고, 2RS 변형 예란 [그림 8]과 같이 사다리꼴을 측면으로 확장하여 직사각형으로 변형한 예이다. 2PS, 2RS 변형 예는 학생 6명이 모두 구성하였고, 공통점 표현 예 공간, 사다리꼴 넓이 식 예 공간과도 잘 연결되어 학생들이 일반적인 사다리꼴 넓이 식을 이해하는 데 주로 활용했던 예이다. 따라서 사다리꼴 변형 예 공간의 일반적인 예는 2PS, 2RS 변형 예였다.



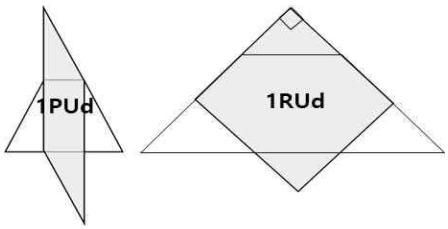

[그림 7] 사다리꼴 변형 예 공간




[그림 8] 일반적인 사다리꼴 변형 예

2015 개정 수학 교과서에 제시된 관례적인 예는 2PS, 1PD 변형 예였다. 2PS 변형 예는 학생 6명이 모두 구성한 데 비해, [그림 7]을 보면 1PD 변형 예는 학생 6명 중 2명만 구성하여 원의 크기가 상대적으로 작다. 2PS 변형 예는 2007, 2009, 2015 개정 교과서에 제시됐던 예이지만, 1PD 변형 예는 2015 개정 교과서에 처음 제시됐던 예이다. 사다리꼴 변형 예 공간의 일반적인 예는 2PS, 2RS 변형 예인 반면, 관례적인 예는 2PS, 1PD 변형 예이다. 따라서 사다리꼴 변형 예 공간의 일반적인 예와 관례적인 예는 부분적으로 일치한다고 볼 수 있다.

사다리꼴 변형 예 공간의 특수한 예는 학생 1명만 구성한 예로 6종이 있었다. D 학생이 1PUd 와 1RUd 변형 예를 구성하였다. 1PUd 변형 예는 [그림 9]처럼 등변사다리꼴을 이룬 교구 일부를 위, 아래로 동시에 옮겨 평행사변형으로 등적변형한 예이다. 1RUd 변형 예는 [그림 9]에서 보이듯이 1PUd 변형 예와 변형 후 넓이 변화와 교구를 움직인 방향이 같지만, 변형 후 모양이 직사각형으로 다르다. 1PUd 변형 예와 1RUd 변형 예의 독특한 특징은 변형 전 사다리꼴의 밑변과 변형 후 사다리꼴의 밑변이 전혀 겹치지 않는다는 점이다. 이러한 예의 독특한 특징은 비교·표현 단계에서 D 학생이 사다리꼴 변형 전후의 밑변을 비교하고자 할 때 인지적 혼란을 불러일으켰다.

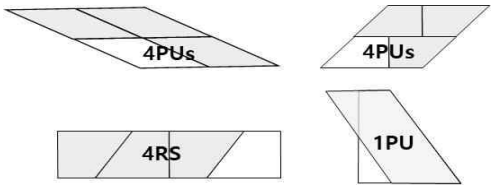



[그림 9] 특수한 사다리꼴 변형 예1

다른 특수한 예로는 B 학생이 구성한 4PUs 와 4RS 그리고 1PU 변형 예가 있다. 4PUs 변형 예는 [그림 10]처럼 사다리꼴을 위쪽과 옆쪽으로 모두 확장하여 넓이가 4배인 평행사변형으로 변형한 예이다. 4RS 변형 예는 [그림 10]과 같이 사다리꼴을 측면으로만 확장하여 넓이가 4배인 직사각형으로 변형한 예이다. 1PU 변형 예는 [그림 10]처럼 직각 사다리꼴을 이루는 교구 일부를 위쪽으로 올려 등적변형한 예다.

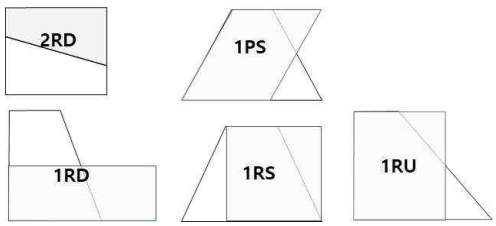
C 학생은 분할 변형 예를 구성하였다. 2015 개정 수

학 교과서에 나오는 분할 변형은 사다리꼴에 대각선을 그어 두 개의 삼각형으로 분할 하는 것이다. 그런데 C 학생이 구성한 예는 관례적인 예와 달리 사다리꼴의 밑변에 수직인 선분을 그어 직사각형과 직각삼각형으로 분할 하는 예였다.




[그림 10] 특수한 사다리꼴 변형 예2

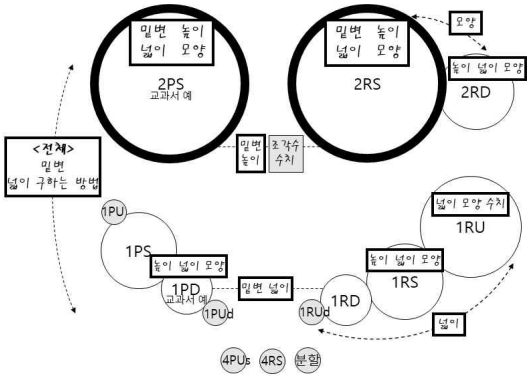
사다리꼴 변형 예 공간을 이루는 그 밖의 예들은 [그림 11]과 같이 학생 6명 중 2~4명이 구성한 2RD, 1PS, 1RD, 1RS, 1RU 변형 예로 5종이 있었다. 2RD 변형 예는 [그림 11]에서 볼 수 있듯이 직각 사다리꼴을 아래로 확장하여 직사각형으로 배적변형한 예이다. 2RD 변형 예의 독특한 특징은 밑변이 항상 가로로 놓여 있지 않다는 점을 인식하게 한다는 것이다. 연구자는 사다리꼴에 외접하는 직사각형을 만드는 변형 예도 예상했으나, 이러한 변형 예를 구성한 학생은 없었다.




[그림 11] 그 밖의 사다리꼴 변형 예2

## 2. 공통점 표현에 대한 예 공간

공통점 표현 예 공간은 연구자의 예상대로 [그림 12]와 같이 밑변, 높이, 넓이, 모양에 관한 공통점이 대부분이었다. 밑변, 높이, 넓이, 모양에 관한 공통점 예는 사다리꼴의 넓이 식 구성과 직결된 예들로서 공통점 표현 예 공간의 일반적인 예들로 볼 수 있다. 밑변, 높이에 관한 공통점은 사다리꼴의 넓이 공식 요소인 윗변, 아랫변, 높이를 찾는 것과 관련 있다. 넓이, 모양에 관한 공통점은 사다리꼴의 넓이 공식에 필요한 덧셈, 곱셈, 나눗셈과 같은 연산을 판단하는 데 필요하다. 몇몇 학생들은 교구 조각의 수, 특정 수치 등에 관한 공통점을 표현하기도 했다. 예를 들어, '아랫변의 길이가 15cm이다.', '교구를 2조각 사용했다.'가 있다. 이 예들은 그 학생이 놓인 특정 상황에서만 타당하고, 특히 사다리꼴 넓이 식 예 공간을 구성하는 데 기여 하는 바가 없는 예들이었다. 공통점 표현 예 공간에 관례적인 예가 없는 이유는 수학 교과서에 비교·표현 단계에 대응하는 활동이 없기 때문이다.



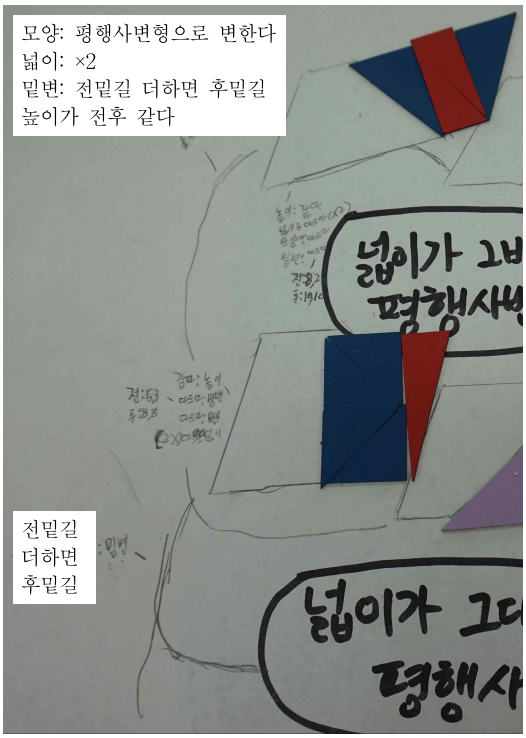

●: 일반적인 사다리꼴 변형 예
●: 특수한 사다리꼴 변형 예
교과서 예: 관례적인 사다리꼴 변형 예
□: 일반적인 공통점 표현 예
■: 특수한 공통점 표현 예

[그림 12] 공통점 표현 예 공간

밑변에 관한 공통점은 다음과 같다. [그림 12]에서 밑변에 관한 공통점 예가 발생한 곳을 살펴보면, 총 5곳으로, 2PS 변형 예들 내부, 2RS 변형 예들 내부, 2PS와 2RS 변형 예들 사이, 1PD와 1RD 변형 예들 사이, 사다리꼴 변형 예 공간 전체가 그곳이다. 밑변에 관한 공통점을 표현하는 방식은 학생마다 다르나 그 의미는 같았다. 밑변에 관한 다양한 공통점 표현 예들은 결국, 변형 전 사다리꼴의 두 밑변의 길이를 합하면 변형 후 도형의 한 밑변의 길이가 된다는 뜻이었다.

[그림 13]은 학생 A가 비교·표현 단계에서 작성한 맵 일부이다. [그림 13]을 보면 학생 A는 공통점을 찾은 지점을 선으로 이어 표시해두었다. 학생 A는 2PS 변형 예들 내부에서 모양, 넓이, 밑변, 높이에 관한 공

통점을 찾았다. 특히 밑변에 관한 공통점을 '전밑길 더하면 후밑길'로 표현하였는데, 학생 면담 결과 알게 된 표현의 의미는 '변형 전의 두 밑변의 길이를 더하면 변형 후의 한 밑변의 길이가 된다'였다. 학생 A는 사다리꼴 변형 예 공간 전체에서 밑변에 관한 공통점을 찾았고 이 또한 '전밑길 더하면 후밑길'로 표현하였다.




[그림 13] 학생 A의 맵 일부(비교·표현 단계)

다음은 높이에 관한 공통점이다. [그림 12]에서 높이에 관한 공통점 예가 구성된 지점을 살펴보면, 총 6곳이며, 2PS 변형 예들 내부, 2RS 변형 예들 내부, 2RD 변형 예들 내부, 1PD 변형 예들 내부, 1RS 변형 예들 내부, 마지막으로, 2PS와 2RS 변형 예들 사이가 그 6곳이었다. 밑변에 관한 공통점 예들은 의미하는 바가 서로 같았지만, 높이에 관한 공통점 예들은 각각 의미하는 바가 달랐다. 예를 들어, 2P과 2R 범주의 경우, 공통점은 변형 전후에 높이가 변하지 않는다는 것이었다. 이와 달리, 1P, 1R 범주의 경우, 공통점은 변형 전후 높이가 2배 혹은 1/2배 차이 난다는 것이었다.

학생들이 구성한 넓이, 모양에 관한 공통점 예는 다음과 같다. 먼저 넓이의 관점에서, 2P, 2R 범주의 경우, 넓이가 2배로 증가한다는 공통점이 있었고, 1P, 1R 범주의 경우, 넓이가 변하지 않는다는 공통점이 있었다. 다음으로 모양의 관점에서, 2P, 1P 범주에는 변형 후 모양이 평행사변형이라는 공통점이 있었고, 2R, 1R 범주에는 변형 후 모양이 직사각형이라는 공통점이 있었다. 학생들은 넓이나 모양에 관한 공통점 예를 밑변이나 높이에 관한 공통점 예보다 양적으로 약간 더 많이 표현하였다.

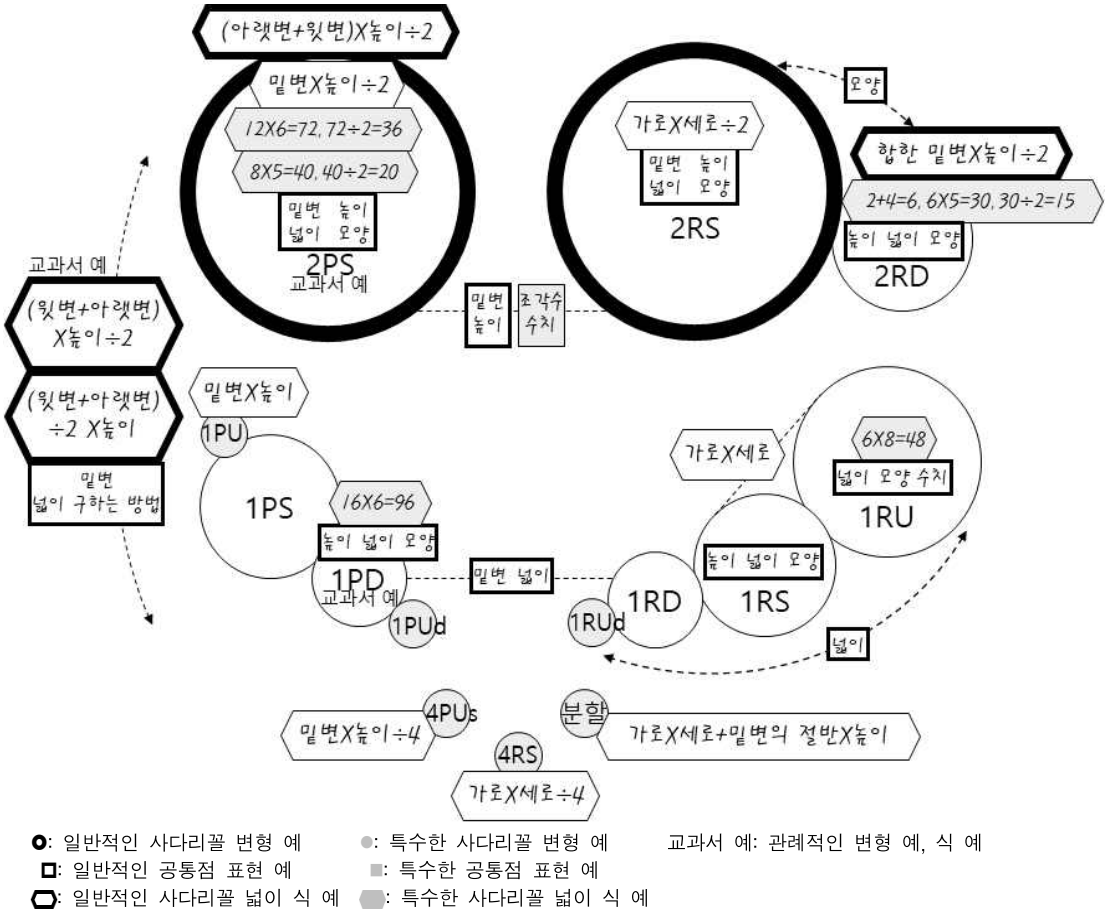
### 3. 사다리꼴 넓이 식에 대한 예 공간

사다리꼴 넓이 식 예 공간은 [그림 14]와 같다. 이 예 공간을 이루는 예에는 수치를 사용한 식, 직사각형의 구성요소를 사용한 식, 평행사변형의 구성요소를 사용한 식, 사다리꼴의 구성요소를 사용한 식이 있다.

수치를 사용한 사다리꼴 넓이 식은 수치를 가져온 그 사다리꼴 변형 예 하나만 설명할 수 있기 때문에 특수한 예이다. 다만, 수치를 사용한 사다리꼴 넓이 식을 계속해서 구성할 때 학생들은 다음 두 가지를 발견했다. 예를 들어, [그림 14]의 2PS 변형 예에서 출발한 넓이 식 중 '12×6=72, 72÷2=36'과 '8×5=40, 40÷2=20'을 연속하여 구성한 경우, 학생은 수치 '6'과 '5'가 모두 높이에서 얻은 것임을 인지하였다. 이어서 자신이 공통으로 나눗셈을 하였음을 인지하였다. 이처럼 수치를 사용한 사다리꼴 넓이 식을 계속해서 구성한 경우, 귀납적으로 사다리꼴의 구성요소를 사용한 넓이 식을 도출해냈다.

학생들은 비교·표현 단계에서 넓이에 관한 공통점 예로 1R, 2R, 4R 범주의 경우, 변형 후에 넓이가 각각 1배, 2배, 4배 된다는 점을 표현했다. 이러한 공통점 예를 토대로 기호화·형식화 단계에서는 [그림 14]에서 볼 수 있듯이, '가로×세로', '가로×세로÷2', '가로×세로÷4'처럼 직사각형의 구성요소를 사용한 사다리꼴 넓이 식 예들이 구성되었다. 이와 비슷하게 1P, 2P, 4P 범주도 '밑변×높이', '밑변×높이÷2', '밑변×높이÷4'와 같이 평행사변형의 구성요소를 사용한 사다리꼴 넓이 식 예가 구성되었고, 이 역시 공통점 표현 예 공간의 영향이었다.

사다리꼴의 구성요소를 사용한 사다리꼴 넓이 식은




[그림 14] 사다리꼴 넓이 식 예 공간

'(윗변+아랫변)×높이÷2', '합한 밑변×높이÷2', '(윗변+아랫변)÷2×높이'였다. 기호화·형식화 단계 초반에는 이러한 넓이 식 예들이 예 공간 전체를 대표한다고 생각하는 학생도 있었고, 이 예들이 예 공간 일부만을 대표한다고 생각하는 학생도 있었다. 그런데 기호화·형식화 단계 후반에 여러 가지 넓이 식 간 연결하기 활동을 한 후에는 사다리꼴의 구성요소를 사용한 넓이 식이 예 공간 전체를 대표하며 일반적인 넓이 식 예라는 점을 이해하였다.

예를 들어, [그림 14]를 보면 A 학생은 2PS 변형 예에 해당하는 넓이 식으로 '(아랫변+윗변)×높이÷2'를 구성한 다음 2RS 변형 예에 해당하는 넓이 식으로 '가로×세로÷2'를 구성하였다. 이 과정까지 A 학생은 두 넓이 식을 각각 2PS, 2RS 변형 예를 대표하는 별개의 식으로 보았다. 그러나 A 학생은 [그림 15]와 같이 활동지 6번을 해결한 후 두 사다리꼴의 넓이 식이 같다는 결론을 내렸다. 교수실험 중 학생이 보인 반응과 교수실험 후 학생 면담을 통해 확인한 결과 이 시점에서 학생은 넓이 식 '(윗변+아랫변)×높이÷2'가 2PS, 2RS 변형 예를 넘어 예 전체를 대표한다고 이해했다.

직사각형 가로 = 사다리꼴의 ( 윗변 + 아랫변 )
직사각형 세로 = 사다리꼴의 ( 높이의 절반 )

[그림 15] A 학생의 활동지 6번

## V. 결론 및 논의

본 연구에서는 사다리꼴의 넓이 교수학습에 관한 시사점을 얻고자 Dienes의 수학학습이론에 따른 사다리꼴의 넓이 학습에서 학생들이 구성한 예 공간을 분석하였다. 분석 결과를 토대로 Dienes의 이론에 따른 사다리꼴이 넓이 학습수행의 유의미함을 논의하고자 한다. 그리고 분석 결과와 Watson과 Mason(2015)의 이론을 토대로 수학 교수학습에서 예와 예 공간을 활용하는 방안에 대해 논의하고자 한다.

### 1. 요약

본 연구의 사다리꼴의 넓이 학습 단계를 요약하면 다음과 같다. 놀이 단계에서 학생들은 사다리꼴 변형 놀이를 통해 다양한 사다리꼴 변형 예를 구성하였다. Dienes가 학습의 목적이 다양성 자체에 있지 않다고 밝혔듯이 사다리꼴 변형 예들은 서로 관련성이 있어야 한다. 본 연구에서 사용한 학습자료 중 맵은 학생들이 서로 간 관련 있는 예를 생산하도록 도왔다. 비교·표현 단계에서 학생들은 사다리꼴 변형 예들을 비교하고 공통점을 찾았다. 본 연구에서 비교 항목을 주었기 때문에 사다리꼴의 넓이 식을 구성하는 데 필요한 공통점 예들이 다양하게 도출되었다. 기호화·형식화 단계에서 학생들은 사다리꼴의 넓이 식을 다양하게 구성하고 식을 연결하였다. 본 연구에서는 2009 개정 교육과정에 따른 교과서에서 사다리꼴의 넓이 식을 수치로도 표현하게 한 점을 참고하여 사다리꼴의 넓이 식을 표현할 때, 수치, 직사각형의 구성요소, 평행사변형의 구성요소도 사용할 수 있도록 하였다.

학생들이 구성한 단계별 예 공간을 요약하면 다음과 같다. 학생들이 구성한 사다리꼴 넓이 학습의 예 공간은 학습 단계에 따라 3가지 분석됐으며 사다리꼴 변형 예 공간, 공통점 표현 예 공간, 사다리꼴 넓이 식 예 공간이 그것이다.

첫째, 사다리꼴 변형에 대한 예 공간을 분석한 결과 학생들이 많이 구성하는 예와 많이 구성하지 않은 예를 확인할 수 있었다. 먼저, 배적변형 예가 등적변형 예보다 많이 구성되었다. 직사각형으로 변형한 예가 직사각형이 아닌 평행사변형으로 변형한 예보다 많이 구성되었다. 현재 교과서에 제시된 관례적인 예는 평행사변형으로 배적변형한 예와 평행사변형으로 등적변형한 예이다. 교수실험에서 학생 스스로 구성한 예 공간을 차지하는 예가 대부분 배적변형 예 또는 직사각형으로 변형한 예라는 점을 고려할 때 교과서에 어떤 예를 제시하는 것이 적절한지에 관한 연구가 필요하다. 사다리꼴 변형 예 공간을 이루는 예 중 일반적인 예는 배적변형 예였다. 배적변형 예는 연구 참여자 전원이 구성한 예였고, 공통점 표현 예 공간, 사다리꼴 넓이 식 예 공간과도 연결이 잘되는 예였다. 사다리꼴 변형 예 공간의 특수한 예는 연구 참여자 중 소수만 구성한 예였다. 이때 교구를 한 방향이 아닌 여러 방향으로 움직여서 사다리꼴을 변형하거나 넓이를 4배로 늘인 변형방법이 사용되었다. 특수한 예는 교수실험에서 안내되지 않은 예였고 특수한 예 중 일부는 다음 학습 단계를 수행하는 데 어려움을 불러일으키기도 했다.

둘째, 공통점 표현에 대한 예 공간을 분석한 결과 밑변, 높이, 넓이, 모양에 관한 공통점이 다수였다. 교수실험에서 제시한 비교 목록이 유목적적인 예 공간 구성에 큰 영향을 미쳤던 것으로 보인다. 넓이, 모양에 관한 공통점 예가 밑변, 높이에 관한 공통점 예보다 예 공간을 약간 더 차지했다. 공통점 표현 예 공간을 이루는 일반적인 예는 밑변, 높이, 넓이, 모양에 관한 공통점 예였다. 일반적인 예는 사다리꼴의 넓이 식 예 공간과 연결이 잘 되는 예였다. 그리고 표현은 다양하더라도 그 의미는 일관성이 있었다. 공통점 표현 예 공간의 특수한 예는 특정 수치, 교구의 수에 관한 공통점 예가 있었다. 특수한 예는 사다리꼴의 넓이 식 예 공간과 잘 연결되지 않았다.

셋째, 사다리꼴 넓이 식에 대한 예 공간은 수치를 사용한 식, 직사각형의 구성요소인 가로, 세로를 사용한 식, 평행사변형의 구성요소인 밑변, 높이를 사용한 식, 마지막으로, 사다리꼴의 구성요소인 밑변, 윗변, 아랫변, 높이를 사용한 식이었다. 사다리꼴의 넓이 식 예 공간은 공통점 표현 예 공간을 기반으로 구성되었다. 수치를 사용한 넓이 식은 특수한 예이지만, 수치를 사용한 넓이 식을 계속해서 구성한 학생은 귀납적으로 사다리꼴의 구성요소를 사용한 넓이 식을 도출하였다. 사다리꼴의 구성요소를 사용한 넓이 식이 예 공간 전체를 대표하는 일반적인 넓이 식 예였다.

## 2. Dienes의 수학학습이론과 사다리꼴의 넓이 학습

사각형의 넓이 학습은 수학적 사고와 역량을 두루 기를 수 있는 유의미한 과정이지만 사각형의 넓이 공식을 도구적으로 이해하는 현상은 문제가 있다. 특히 사다리꼴의 넓이 식은 복잡하여 학생들이 사다리꼴의 넓이 식을 관계적으로 이해하는 데 어려움이 있다고 보고된다. 수학 교과서의 사다리꼴의 넓이 학습 차시를 살펴보면, 하나의 전형적인 예를 통해 사다리꼴의 넓이 공식을 도출하게 한다. Mason과 Pimm(1984)에 따르면 학생들은 교사와 달리 하나의 예에 담긴 일반성을 포착하기 어렵다. 오히려 대표성이나 일반성은 하나의 전형적인 예 외에 다양한 예가 있을 때 잘 드러날 수 있다.

Dienes의 수학학습이론은 사다리꼴의 넓이 학습 개선을 위한 시사점을 다수 갖고 있었다. Dienes(1960)는 수학 개념을 추상화하는 과정을 수학학습단계로 구현하였으며 학생의 구성 활동을 강조하고 공식의 성급한 도입을 경계하였다. Dienes(1960)는 지각적·수학적 다양성의 원리를 제안하나 수학학습의 목적이 다양성 그 자체에 있지 않음을 분명히 하였다. Dienes(2000)는 수학적 대상의 다양성은 추상화의 밑거름으로 사용하는데 이때 다양한 예를 효과적으로 다루는 핵심 방안이 비교·표현 단계였다.

본 연구에서는 Dienes(2000)의 수학학습단계를 3단계로 재구성하여 사다리꼴의 넓이 학습 단계를 설계하고 교수 실험하였다. 교수실험에서 학생들은 교사의 직접적인 교수 없이 스스로 활동지의 문항을 읽은 뒤 교구를 조작하고 관찰하였다. 학생들은 교구를 조작하고 관찰한 결과를 맵에 기록하고, 맵을 관찰하였다. 학생들은 학습자료의 도움을 받아 스스로 학습 단계를 이행하였고, 그 결과 사다리꼴의 넓이 식을 이해하는데 필요한 다양한 예를 구성하고, 궁극적으로 사다리꼴의 넓이 식이 갖는 일반적인 성질을 이해하였다.

본 연구의 학습 활동과 수학 교과서 학습 활동 간 큰 차이는 비교·표현 단계를 활용하여 다양한 사다리꼴 변형 예를 적절히 다루었다는 점이다. Dienes의 이론에 따라 교수실험을 설계 및 적용하고, 학생들의 예 공간을 분석한 결과, 학생들은 다양한 사다리꼴 변형 예를 비교하고 공통점을 표현하며 사다리꼴의 넓이 식을 관계적으로 이해할 수 있었다. 따라서 Dienes의 수학학습이론과 그 단계가 사다리꼴의 넓이 학습에 유용하다고 볼 수 있다. 더불어 본 연구내용은 사다리꼴의 넓이 학습의 한 모델로 활용될 수 있을 것이다.

## 3. 수학 교수학습에서 예와 예 공간의 활용

본 연구에서 실행한 Dienes의 수학학습이론에 따른 사다리꼴의 넓이 학습의 교수실험과 예 공간 분석을 통하여 연구자는 사다리꼴 넓이 교수학습의 실행에서 예 공간의 활용에 대한 성찰적 지식을 얻을 수 있었다. 마지막으로, 실제 수학 교수학습에서 어떻게 예와 예 공간을 활용해야 하는지 논의하고자 한다.

Watson과 Mason(2015)은 일반적인 예와 특수한 예를 적절히 사용하여 학생의 예 공간 구성을 촉진할 수 있다고 한다. 본 연구결과에 따르면 사다리꼴의 넓이 학습을 위한 예 공간은 수학학습단계별로 예 공간이 있고, 예 공간별로 일반적인 예와 특수한 예가 있었다. 다시 말해, 사다리꼴의 넓이 학습을 위한 예 공간은 종과 횡으로 확장됨을 알 수 있다. 단계별 일반적인 예들이 종적으로 예 공간의 중심을 이룬다면 단계별 특수한 예들이 횡적으로 예 공간을 풍부하게 한다고 볼 수 있다. 일반적인 예들은 예 공간의 중심을 이루므로 학생들이 반드시 구성하도록 수업을 설계할 필요가 있다. 본 연구결과에 따르면 일반적인 예들은 다수의 학생이 어렵지 않게 구성한 예이기도 했다. 따라서 과제를 시작하는 데 어려움을 겪는 학생을 위한 비계로 활용할 수도 있다.

한편, Watson과 Mason(2015, p.200)은 특수한 예가 수학 교수학습에서 어떤 역할을 할 수 있는지 논의할 필요가 있다고 주장한다. 본 연구결과를 보면 학생들은 이전에 경험하거나 교수실험에서 안내받지 않은 예들을 구성했다. 본 연구에서 특수한 예들은 소수 학생에 의해 구성됐으며 학생들에게 인지적 혼란을 주기도 했고 사다리꼴의 넓이 식을 관계적으로 이해하는 데 일반적인 예 만큼 도움 되진 않았다. 하지만 Watson과 Mason(2015)에 따르면 예 공간은 개인에 따라, 상황에 따라 달라진다. 본 연구에서 구성된 특수한 예들은 연구 참여자의 수준에 맞지 않거나 개별 활동 형태인 까닭에 잘 연결되지 않은 것으로 짐작한다. 연구결과의 특수한 예들은 유의미한 연결이 가능한 것들로 대상학생과 적용맥락이 달라지면 예 공간의 구조를 더

복잡하고 풍성하게 만들 가능성이 잠재한다. Watson과 Mason(2015)은 정리가 성립하는 대상들의 범위를 명확히 하고 추측의 타당성을 검증하기 위해 특수한 예들을 굳이 고려하여 살펴보길 주문한다. 수업에서 교사는 특수한 예와 맞닥뜨렸을 때 학생 요인, 교사 요인, 교실 요인 등을 종합적으로 고려하여 특수한 예를 적재적소에 활용할 수 있어야 한다.

Watson과 Mason(2015, p.205)에 따르면 일반화를 위하여 몇 개의 예가 필요한가에 대해 논의해왔으나 결론적으로 가장 중요한 것은 예의 개수가 아니라 예들을 다루는 방법이다. 본 연구에서 사다리꼴 변형 예는 변형 후의 넓이 변화, 변형 후 모양, 교구를 움직인 방향에 따라 구분됐는데, 넓이, 모양, 교구 조작 방향을 달리하면 본 연구결과 외에도 더 다양한 예를 생성할 수 있다. 따라서 본 연구의 예 분석 기준을 참고하면 다양한 예를 예상할 수 있다. 그런데 Dienes(1960)가 밝히고 Watson과 Mason(2015)도 논의했듯이 다양한 예를 만드는 것보다 중요한 것은 다양한 예를 어떻게 다루는가이다. Watson과 Mason(2015)은 Dienes(2000)의 비교·표현 단계와 유사하게도 학생들에게 공통점과 차이점을 생각해보게 한다. 일반적인 예와 특수한 예를 구성하고 예 공간을 풍성하게 만드는 것도 유의미하지만 예 공간을 이루는 예들이 잘 연결되어 있는지를 점검하는 것이 중요함을 알 수 있다.

본 연구에서는 Dienes의 수학학습이론에 따른 사다리꼴의 넓이 학습에서 학생들의 예 공간을 분석하고 사다리꼴의 넓이 학습에 Dienes의 이론이 유의미함을 논의하였다. 그리고 Watson과 Mason(2015)의 이론과 본 연구결과를 바탕으로 수학 교수학습에서 예와 예 공간을 활용하는 방안에 대해 논의하였다. 본 연구의 결과와 논의가 사다리꼴의 넓이 교수학습에 작지만 유용한 도움이 되길 기대한다.

## 참 고 문 헌


강문봉, 김정하(2015). 평면도형의 넓이 지도 방법에 대한 고찰. 수학교육학연구, 25(3), 461-472.

권민서(2018). 초등 수학 영재 학급 학생의 수학적 내용 위계화의 특성 분석. 석사학위논문. 서울교육대학교.

교육부(2019). 2015 개정 수학 교과서 5-1(초판). 서울: 교육부.

교육부(2015). 2009 개정 수학 교과서 5-1(초판). 서울: 교육부.

교육부(2011). 2007 개정 수학 교과서 5-1(초판). 서울: 교육부.

김상화, 방정숙, 정유경(2013). 평면도형의 넓이 수업에서 학생들의 다양한 해결 방법에 근거한 교사의 형식화 도출 과정 분석. 학교수학, 15(4), 847-866.

김수미(2008). Zoltan Dienes의 수학학습 6단계 이론의 재음미. 학교수학, 10(3), 339-355.

김정하(2000). Dienes의 수학학습 원리와 구체화 방안 연구. 석사학위논문. 인천교육대학교.

김현진(2009). Dienes의 수학교육관에 입각한 놀이학습에 관한 수업 방법 연구. 석사학위논문. 단국대학교.

나귀수(2012). 초등학교 학생들의 넓이 개념 이해도 조사: 초등학교 6학년 학생들을 중심으로. 한국초등수학교육학회지, 16(3), 451-469.

방신영(2013). 스핑크스퍼즐의 삼각형 배열 찾기 과제에서 나타나는 학생들의 수학적 사고 특성 분석. 석사학위논문. 경인교육대학교.

오민영(2020). Dienes의 수학학습이론에 따른 사다리꼴의 넓이 교수학습에 관한 연구: 학생들의 예 공간 구성을 중심으로. 석사학위논문. 청주교육대학교.

오민영, 이미림, 이윤기, 김남균(2019). 다각형 넓이 지도를 위한 삼각형 직소교구의 과제개발 연구. 2019 수학교육관련학회 연합국제학술대회, 2, 369-371.

오민영, 이윤기, 김남균(2020). 삼각형 직소 교구와 과제개발 연구. 한국수학교육학회 2020 국제수학교육학술대회 프로시딩. 294-297.

유상휘, 송상헌(2013). 사다리꼴 넓이 구하기 활동에서 나타나는 수학적 의사소통과 유추적 사고 과정 분석. 수학교육학연구, 23(2), 253-267.

이선영(2006). 초등학생의 평면 도형 넓이 공식 구성 활동 분석. 석사학위논문. 경인교육대학교.

이종욱(2006). 예비초등교사의 사다리꼴 넓이 표상에 대한 교수학적 분석. 수학교육, 45(2), 177-189.

이근범, 이경화(2016). 예 구성 활동을 통한 암묵적 지식의 현시에 관한 연구. 학교수학, 18(3), 571-587.

이승연(2011). Dienes의 수학교육관에 입각한 수학교구 활용방안. 석사학위논문. 한양대학교.

임아름, 박영희(2011). 개방형 교수법에 따른 평면도형의 넓이 지도에 대한 연구: 평행사변형, 삼각형, 사다리꼴, 마름모를 중심으로. 한국초등수학교육학회지, 15(2), 361-383.

정경순, 임재훈(2011). 직사각형, 평행사변형, 삼각형 넓이 공식에 내재된 관계에 대한 초등학생들의 이해 조사. 수학교육학연구, 21(2), 181-199.

정영우(2015). 사다리꼴 넓이 공식의 변환에 관한 연구. 영남수학회, 31(2), 167-188.

정지현(2014). Dienes의 수학학습 6단계 이론을 활용한 교수·학습 방법 연구. 석사학위논문. 숙명여자대학교.

Diens, Z. P.(1960). *Building up mathematics*. London: Hutchinson Educational, 31-48.

Mason, J. Pimm, D. J(1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 277-289.

Dienes, Z. P.(2000). The theory of the six stages of learning with integers. *Mathematics in School*, 29(2), 27-32.

Mason, J., Stephens, M., & Watson, A.(2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal*, 21(2), 10-32.

Watson, A., & Mason, J.(2015). 색다른 학교 수학(이경화, 옮김). 서울: 경문사. (원서출판 2005).

# An Analysis of Example Spaces Constructed by Students in Learning the Area of a Trapezoid based on Dienes' Theory of Learning Mathematics

**Oh, Min Young**†
Yeonseo Elementary School
Sejong, Korea
E-mail : omy8529@gmail.com

**Kim, Nam Gyun**
Cheongju National University of Education
Chungbuk, Korea
E-mail : ngkim@cje.ac.kr

The area of a trapezoid is an important concept to develop mathematical thinking and competency, but many students tend to understand the formula for the area of a trapezoid instrumentally. A clue to solving these problems could be found in Dienes' theory of learning mathematics and Watson and Mason' concept of example spaces. The purpose of this study is to obtain implications for the teaching and learning of the area of the trapezoid. This study analyzed the example spaces constructed by students in learning the area of a trapezoid based on Dienes' theory of learning mathematics. As a result of the analysis, the example spaces for each stage of math learning constructed by the students were a trapezoidal variation example spaces in the play stage, a common representation example spaces in the comparison-representation stage, and a trapezoidal area formula example spaces in the symbolization-formalization stage. The type, generation, extent, and relevance of examples constituting example spaces were analyzed, and the structure of the example spaces was presented as a map. This study also analyzed general examples, special examples, conventional examples of example spaces, and discussed how to utilize examples and example spaces in teaching and learning the area of a trapezoid. Through this study, it was found that it is appropriate to apply Dienes' theory of learning mathematics to learning the are of a trapezoid, and this study can be a model for learning the area of the trapezoid.

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D40
* Key Words : Dienes' theory of learning mathematics, example spaces, learning the area of a trapezoid
† Corresponding Author