

## DMD기반 Kirchhoff-Love 판의 모드 분석과 수치해 예측

신성윤<sup>1</sup> · 조광현<sup>2\*</sup> · 배석찬<sup>1\*</sup>

### DMD based modal analysis and prediction of Kirchhoff-Love plate

Seong-Yoon Shin<sup>1</sup> · Gwanghyun Jo<sup>2\*</sup> · Seok-Chan Bae<sup>1\*</sup>

<sup>1\*</sup>Professor, School of Computer Information & Communication Engineering, Kunsan National University, Gunsan, 54150 Korea

<sup>2\*</sup>Associate Professor, Department of Mathematics, Kunsan National University, Gunsan, 54150 Korea

#### 요약

Kirchhoff-Love 판 (KLP) 방정식은 특정 외력이 얇은 막에 끼치는 변형을 기술하는 잘 알려진 이론이다. 한편, frequency 도메인에서 진동하는 판을 해석하는 것은 주요 진동 주파수와 고유함수들을 구하는 것과 판의 진동을 예측하는데 중요하다. 다양한 모드 분석 방법들 중 dynamic mode decomposition (DMD)는 효율적인 data 기반 방법이다. 이 논문에서 우리는 DMD를 기반으로 sine 유형 외력의 영향력 안에 있는 KLP의 모드 분석을 수행한다. 우리는 먼저 유한차분법을 사용하여 이산적으로 표현된 시계열 형식의 KLP 해를 구한다. 720,00개의 FDM으로 생성된 해 중에서, 오직 500개의 해만을 DMD의 구현을 위해 선택한다. 우리는 결과적으로 얻어진 DMD-mode를 보고한다. 또한, DMD를 통하여 KLP의 해를 예측하는 효율적인 방법을 소개한다.

#### ABSTRACT

Kirchhoff-Love plate (KLP) equation is a well established theory for a description of a deformation of a thin plate under certain outer source. Meanwhile, analysis of a vibrating plate in a frequency domain is important in terms of obtaining the main frequency/eigenfunctions and predicting the vibration of plate. Among various modal analysis methods, dynamic mode decomposition (DMD) is one of the efficient data-driven methods. In this work, we carry out DMD based modal analysis for KLP where thin plate is under effects of sine-type outer force. We first construct discrete time series of KLP solutions based on a finite difference method (FDM). Over 720,000 number of FDM-generated solutions, we select only 500 number of solutions for the DMD implementation. We report the resulting DMD-modes for KLP. Also, we show how DMD can be used to predict KLP solutions in an efficient way.

**키워드** : 역학 모드 분해, Kirchhoff-Love 판, 모드 분석, 데이터 기반 모사

**Keywords** : Dynamic mode decomposition, Kirchhoff-Love plate, Modal analysis, Data-driven simulation

Received 30 September 2022, Revised 6 October 2022, Accepted 12 October 2022

\* Corresponding Author Gwanghyun Jo (E-mail: gwanghyun@kunsan.ac.kr, Tel: +82-63-469-4542)

Associate Professor, Department of Mathematics, Kunsan National University, Gunsan, 54150 Korea

Seok-Chan Bae (E-mail: scabe@kunsan.ac.kr, Tel:+82-63-469-4556)

Professor, School of Computer Information & Communication Engineering, Kunsan National University, Gunsan, 54150 Korea

Open Access <http://doi.org/10.6109/jkiice.2022.26.11.1586>

print ISSN: 2234-4772 online ISSN: 2288-4165

© This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.  
Copyright © The Korea Institute of Information and Communication Engineering.

## I. 서론

Kirchhoff-love plate (KLP) 방정식은 판 구조물 해석에 이용되는 고전적인 방정식으로 외력에 의한 얇은 판의 변형을 묘사하고 있다 [1,2]. KLP는 다양한 응용 분야에서 사용되고 있는데, 예를 들어 haptic 분야에서 판에 작용하는 sine 함수 타입의 외력에 판이 어떻게 진동하는지를 해석하는데 KLP가 사용될 수 있다 [3]. 따라서 KLP를 수치적으로 묘사하는 다양한 방법이 알려져 있는데, 예를 들어 finite difference method를 통한 방법과 [2], finite element method를 통한 방법이 알려져 있다 [4,5].

한편 진동하는 판의 frequency domain에서의 해석은 주요 frequency 및 eigenfunction을 얻는 것과 판의 진동 예측 측면에서 중요하다. 예를 들어 판의 주요 frequency와 그에 해당하는 모드(mode)를 안다면, 판의 진동을 적은 수의 주요 mode들을 통하여 묘사할 수 있다는 장점이 있다. 이렇게 지배 방정식의 eigenfunction을 의미하는 mode들을 구하는 것은 Koopman operator를 통하여 이루어지거나, dynamic mode decomposition (DMD)을 통하여 이루어질 수 있다 [6,7,8].

최근 DMD는 유체 역학 분야를 포함한 다양한 역학 분야에서 장점이 부각되고 있다 [6,7,8]. 몇 가지 장점을 열거하자면 먼저 DMD는 n-개의 이산적으로 관측되거나 혹은 수치적으로 묘사된 해를 이용하여, 지배 방정식의 특성을 연속적인 관점에서 일반화 할 수 있다. 또한 DMD는 비선형 문제에도 적용이 될 수 있다. 그리고, 작은 수의 mode를 구하는 것이 DMD의 목표임으로 Koopman을 통한 mode 분석에 비해 계산 시간이 작다는 장점이 있다. 마지막으로 강조하고자 하는 점은 DMD는 지배 방정식 없이 구현될 수 있는 data-driven method라는 점이다.

본 논문의 주요 목표는 sine 타입 함수의 외력에 의해 진동하는 판에 대한 mode 분석을 DMD를 통하여 수행하는 것이다. 먼저 data를 얻기 위해서 FDM을 사용한다. n개의 시간에서 판의 변형으로 이루어진 data가 일단 구해지면, DMD를 통하여 mode 분석을 수행한다. 주요 진동 주파수에 따른 DMD-mode를 통하여 KLP의 연산기를 분석할 수 있다. 또한 이를 통하여, 측정된 시간 이후의 KLP 해를 추측하려 한다.

본문의 구성은 다음과 같다. 2.1에서 KLP 방정식과

이를 수치적으로 풀기 위한 FDM 방법을 소개한다. 2.2에서는 DMD 알고리즘과, 이를 통한 해의 예측 알고리즘을 제안한다. 3장에서 이러한 DMD 기반 알고리즘의 결과를 보고한다. 이어서 4장에서 결론을 기술한다.

## II. 방법

본 장에서 DMD를 통한 KLP 방정식의 모드 분석 방법을 소개한다. 먼저 DMD는 data-driven 방법이기 때문에 KLP의 n-개의 시간에서 측정된 해가 필요하다. 본 논문에서는 편의상 FDM을 통하여 생성된 KLP의 해를 사용한다. 2.1장에서는 KLP 방정식과 FDM을 통한 수치 해석 방법을 소개한다. 2.2에서는 DMD를 통한 모드 분석 알고리즘을 소개하고 DMD를 활용한 KLP 예측 방법을 소개한다.

### 2.1. KLP 방정식과 FDM을 통한 해석 방법

2차원 domain  $\Omega$ 에서 Kirchhoff-love plate 방정식은 다음과 같이 기술된다.

$$\rho H \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \nabla^2 u - D \nabla^4 u + f \text{ on } \Omega. \quad (1)$$

여기서  $u(x,y,t)$ 는  $(x,y,t)$ 에서의 판의 z방향으로 변형을 의미하며,  $f(x,y,t)$ 는 판에 작용하는 외력을 의미한다. 또한  $\rho$ 은 밀도,  $H$ 는 판의 두께,  $T$ 는 tension 상수, 그리고,  $D = EH^3/(12(1-\nu^2))$ 는 Poisson 상수  $E$ 와 Young's modulus  $\nu$ 에 의해 결정되는 flexural rigidity를 의미한다. 또한 보통 초기 조건과 경계 조건에 의해서 방정식이 정의가 되는데, 본 논문에서는 다음의 clamped 경계 조건을 부여한다.

$$\begin{cases} u(x,y,0) = u_0(x,y), \text{ on } \Omega \\ u = 0, \text{ on } \partial\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \text{ on } \partial\Omega \end{cases} \quad (2)$$

방정식 (1)-(2)를 풀기 위한 FDM 방법을 [2]의 방식에 따라 간략히 소개하고자 한다. FDM은 domain을  $N \times N$ 개의 격자로 나눈 후, 격자의 node 위에서의 함수의 값을 이용하여, 함수의 미분값을 구하는 방식이다. 함수  $u$ 의 값을  $u_{ij} = u(x = x^i, y = y^j)$ 와 같이 표기 할

때,  $u$ 의 4차 미분들은 다음과 같이 구한다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} &= \frac{u_{i-2,j} - 4u_{i-1,j} + 6u_{i,j} - 4u_{i+1,j} + u_{i+2,j}}{h^4} \quad (3) \\ \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} &= \frac{u_{i,j-2} - 4u_{i,j-1} + 6u_{i,j} - 4u_{i,j+1} + u_{i,j+2}}{h^4} \end{aligned}$$

본 논문의 목표는 FDM을 통한 KLP의 해석에 대한 것이 아님으로, 그 외의 자세한 구현 과정은 생략하고자 한다. DMD알고리즘에 적용하기 위한 data를 생성하기 위해서, FDM을 통하여 먼저 KLP를 해석하여 n-개의 고정된 시간에서의 해를 얻는다. 그 후, DMD를 통한 모드 분석이 수행된다.

## 2.2. DMD 알고리즘과 KLP의 적용

2.1에서 다음의 형태의 KLP의 해로 이루어진 이산-시계열 데이터가 얻어졌다고 하자.

$$T = \{u_0, u_1, \dots, u_n\}.$$

각각의  $u_s$ 들은  $u_s = u(t = s\Delta t)$  형식으로 동일한 시간 간격에 의해 나열된 KLP의 해이며, 편의상 벡터 형태로 표현한다. 즉 2.1에서 격자의 개수가  $N \times N$ 이면, 각각의  $u_s$  ( $s = 0, 1, \dots, n$ )는 크기가  $N^2$ 인 벡터이다. DMD의 목표는

$$u_{k+1} = Au_k \quad (4)$$

풀인 연산기  $A \in C^m \times C^m$ 을 소수의 eigenvalue들과 DMD mode들을 통하여 대략적으로 근사하는 것이다. 연산기  $A$ 를 근사하게 되면 1) 역학 시스템에서 주요 모드를 알 수 있으며, 2)  $t = n\Delta t$  이후의 KLP 해에 대해서도 추측이 가능해진다.

DMD 알고리즘을 구현하기 위해서는 먼저 다음과 같은 matrix들을 정의해야 한다.

$$X = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ u_0 & u_1 & \dots & u_{n-1} \\ | & | & & | \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \quad (5)$$

방정식 (3)을 만족하는 연산기  $A$ 는  $XA = Y$ 를 만족함으로,  $XA = Y$ 를 만족하는 연산기를 구하면 충분하다. 이 때, data의 숫자인  $n$ 이 커질수록, DMD 알고리즘을 통한 연산기에 대한 예측이 더욱 정확해진다.

DMD 알고리즘은 다음과 같다 [6,7,8].

---



---

### Algorithm 1. DMD

1) Obtain (reduced) SVD of  $X$ , i.e.,

$$X = U\Sigma V^*$$

where  $U \in C^{N^2 \times r}$ ,  $\Sigma \in C^{r \times r}$ ,  $V \in C^{r \times n}$ .

2) Construct matrix

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= U^*AU \\ &= U^*YX^*U \\ &= U^*YV\Sigma^{-1}U^*U \\ &= U^*YV\Sigma^{-1} \end{aligned}$$

3) Find eigenvalues and eigenvectors of  $\tilde{A}$ , i.e.,

$$\tilde{A}w = \lambda w$$

4) Compute DMD mode by

$$\tilde{A}\phi = \frac{1}{\lambda} YV\Sigma^{-1}w.$$


---



---

Algorithm 1. DMD에서 단계 1)에서  $X$ 의 SVD를 찾는다. 이 때,  $r$ 은 큰 숫자일 필요가 없고 보통 1에서 20 정도의 숫자로 결정하여도 충분하다. 단계 2)에서는 연산기  $A$ 를 basis  $U$ 를 사용하여 나타낸 것이다. 또한, 3)에서 구한  $\tilde{A}$ 들의 eigenvalue들은  $A$ 의 eigenvalue들과 일치한다는 것이 알려져 있다 [6,7,8].

마지막으로 단계 4)에서 DMD mode들을 구하는데, 다른 방법으로는  $\phi = Uw$ 을 통하여 DMD mode를 구할 수도 있다.

Algorithm 1. DMD의 정확도는  $r$ 이 큰 숫자일수록 정확해지지만, 비교적 단순한 역학 시스템에서는  $r=1$ 일 때도  $u$ 에 대한 예측이 어느 정도 가능할 수 있다. 또한 DMD와 기존의 SVD와 다른 점을 기술 하면 1) DMD를 통하여 얻게 된 eigenvalue와 DMD mode들은 복소수로 표현되며, 2) 모든 DMD mode들은 지배적인 (dominant) mode로 간주 된다는 점이 다르다.

DMD mode를 구하면 그 자체로 역학 시스템을 분석한 것이라는 의미가 있지만, 그 외에도 여러 가지 적용이 가능하다. 예를 들어  $u(s\Delta t)$ ,  $s = 1, \dots, n$ 으로 표현된 이산 데이터 사이의 값들은 interpolation할 수 있는데 수식은 다음과 같다.

$$A^{k-\ell}u_\ell = \sum_i \alpha_i(\ell) \lambda_i^{k-\ell} \quad (6)$$

where  $\alpha(\ell) = \arg \min_\mu \|u_\ell - \Phi\mu\|$ .

이때,  $\Phi$ 는 DMD-mode들을 통하여 구성된 행렬이다.

DMD의 또 다른 응용은 마지막으로 측정된 data 이후의 KLP의 해를 예측하는 것이다. 이러한 예측은 위의 수식과 비슷하게 이루어진다. 이때, 정확한 예측을 위해서, 마지막으로 측정된 data 즉,  $u_n$ 을 사용한다.

$$u_{n+\tau} = A^\tau u_n = \sum_i \alpha_i \lambda_i^\tau \quad (7)$$

where  $\alpha = \arg \min_\mu \| u_n - \Phi \mu \|$ .

즉, (7)식에서  $\tau=1$  을 대입한다면,  $u$ 의  $t=(n+1)\Delta T$ 에서의 값을 DMD를 통하여 예측할 수 있다. (6), (7) 식에서  $\alpha$ 를 구하는 과정은, minimization 문제를 푸는 것으로 정의되었다. 구현은 Matlab의 Pinv를 통하여 쉽게 구할 수 있다.

### III. 결과

먼저 KLP의 모사에서 사용한 파라미터는 다음과 같다. Domain은  $\Omega = [0,1]^2$ 로 설정하였으며, 무차원 문제로 (1)을 바꾸기 위해서  $\rho = H = T = D = 1$ 로 파라미터를 설정하였다. 또한 외력은  $f = 100$ 인 주기함수 타입으로 다음과 같이 정의하였다.

$$f = \begin{cases} \cos(2\pi ft), & \text{if } x \in [0.1, 0.2]^2, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (8)$$

FDM을 통한 수치 방법에서는  $N = 241$ 로 설정하였다. 또한 stability 조건을 만족하기 위해서 목표 시간  $T=2.5$ 초까지의 결과를 예측하기 위해서 timestep을 720,000번 나누어서 해석을 진행하였다.

구현은 Matlab을 통하여 이루어 졌으며, 컴퓨터 환경은 Intel(R) Core(TM) i9-10940X CPU에서 이루어졌다. FDM을 통한 해석에는 총 29,243초의 CPU-time이 소요되었다.

수식 (5) 형식으로 행렬들을 만들기 위해서, 500개의 FDM에서 생성된 solution을 추출하였다. 즉, 0.005초의 간격을 갖고 있는 시계열 data 형식의 FDM solution이 행렬 X, Y를 구성하기 위해 사용되었다. FDM에서 720,000번의 timestep을 사용한 것에 비해서 500개의 data만 DMD의 분석에서 사용됨으로, 성기계 (sparse) X와 Y를 구성하였다 할 수 있다. 마지막으로 X, Y의 column의 크기는 격자의 총 node 수에 해당하는  $N^2 = 58081$ 가 된다.

Algorithm 1을 통하여 DMD mode를 구할 때,  $r = 20$ 로 설정하였다. DMD mode를 Algorithm 1을 통하여 구하는데 걸리는 시간은 0.69초로 매우 효율적으로 구해질 수 있음을 알 수 있다. 이것은 Koopman operator를 구하는 것에 비해 훨씬 쉽고 효율적으로 이루어진 것이다. 총 20개의 DMD mode중 대표적인 4개의 mode를 그림 1에 나타냈다.

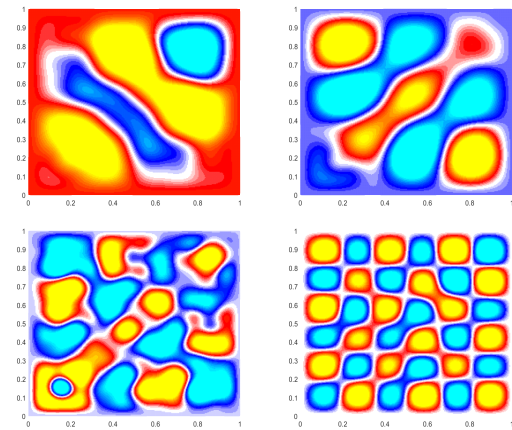


Fig. 1 Graphs of typical four DMD modes of KLP.

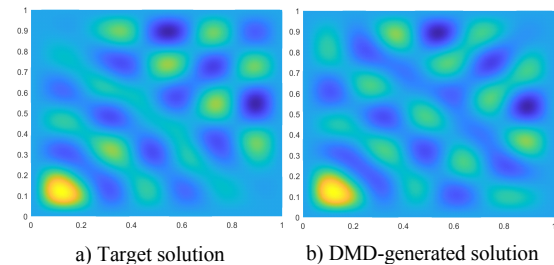


Fig. 2 Comparison of FDM generated solution (top) and DMD - predicted solution (bottom) for KLP at time  $T=2.75$  ( $\tau=100$ ).

또한 DMD의 적용으로 KLP의 해를 예측할 수 있다. FDM으로는 2.5초까지의 해를 예측 한 반면, DMD를 사용하면 2.5초 이후의 KLP의 해를 예측할 수 있다. 이러한 예측은 (7) 수식을 통하여 이루어지는데, 계산에 소요된 시간은 총 1.35초였다. 이것은 FDM 해석에 29,243 초가 소요된 것에 비해 매우 작은 시간이다. 그림 2는 (7) 식에  $\tau=100$ 을 대입하여,  $T=2.75$ 초에서 KLP를 예측한 DMD 기반 해와 FDM 기반 해를 비교한 그래프이다. DMD로 예측한 해의 대략적인 형태가 FDM 해와 거의

비슷한 것을 확인 할 수 있다. 따라서, 매우 작은 시간 비용으로 효율적으로 DMD가 FDM의 해석 결과를 확장 할 수 있음을 알 수 있다.

반면, 표 1은 DMD를 통한 해의 예측과 FDM을 통하여 얻은 해를 비교한 예러 표이다. 수식 (7)에  $\tau$ 를 100, 200, 300을 대입함으로써, 시간 T=2.75, 3, 3.25 초에서의 KLP의 해를 예측하고 이를 FDM으로 생성된 해와 비교하여 상대 L2 에러를 계산하였다. 이 때,  $\tau$ 가 커질 수록 에러가 커짐을 알 수 있다. 에러가 10~20%로 조금 크다고 할 수 있지만, DMD로 예측된 해와 FDM으로 예측된 해의 대략적인 형태가 유사함으로 (그림 1 참고), DMD를 통하여 KLP의 해를 효율적으로 근사했다고 할 수 있다.

**Table. 1** Relative errors between DMD-generated solutions and FDM generated solution.

$\tau, T(s)$	Relative L2-error
100, 2.75	15.16%
200, 3	15.89%
300, 3.25	14.74%

#### IV. 결론

본 논문에서는 DMD를 사용하여 KLP의 연산기를 해석하는 방법을 소개하였다. DMD는 이산적으로 측정된 데이터를 통하여 작동함으로써, KLP의 분석을 위해서 FDM을 사용하여 데이터를 생성하였다. 총 720,000개의 FDM으로 생성된 data중, 500개의 data를 사용하여, DMD-mode 분석을 수행하였다. 그 결과, KLP 역학 연산기(dynamic operator)의 mode들을 효율적으로 찾을 수 있었다.

또한 DMD를 사용하여, FDM으로 예측한 결과를 확장 하였다. FDM으로는 2.5초까지만 해석을 진행한 후, DMD를 통하여, 2.75초, 3초, 3.25 초에서의 KLP의 해를 예측하였는데, 이러한 예측은 오직 1.3초밖에 소요 되지 않았다. 이것은 FDM을 통한 해석이 29,243초 걸린 것과 비교해서 매우 작은 시간이다.

본 논문에서는 FDM을 사용하여 얻은 해석 결과를 통하여 DMD 분석을 시행하였다. 하지만, 진동판의 변형을 실험적으로 측정하여 행렬 X,Y를 구성할 경우에

도 동일하게 결과가 확장 될 수 있을 것으로 예상된다. 마지막으로, 본 결과는 haptic 분야에서 두 개 이상의 actuator가 등장할 경우, actuator에 의한 localization factor를 예측하고 최적화 하는 방법에 사용될 수 있을 것으로 기대된다.

#### ACKNOWLEDGEMENT

The second author is supported by the National Research Foundation of Korea (NRF) grant funded by the Korean government (MSIT) (NO. 2020R1C1C1A01005396).

#### REFERENCES

- [ 1 ] D. N. Arnold, A. L. Madureira, and S. Zhang, "On the Range of Applicability of the Reissner - Mindlin and Kirchhoff - Love Plate Bending Models," *Journal of elasticity and the physical science of solids*, vol. 67, no. 3, pp. 171-185, Jun. 2002.
- [ 2 ] D. Kropiowska, L. Mikulski, and P. Szeptyński, "Optimal design of a Kirchhoff-Love plate of variable thickness by application of the minimum principle," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 59, no. 5, pp. 1581-1598, Nov. 2018.
- [ 3 ] E. Enferad, C. Giraud-Audine, F. Giraud, M. Amberg, and B. L. Semail, "Generating controlled localized stimulations on haptic displays by modal superimposition," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 449, pp. 196-213, Jun. 2019.
- [ 4 ] P. Hansbo and M. G. Larson, "A posteriori error estimates for continuous/discontinuous Galerkin approximations of the Kirchhoff - Love plate," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 200, no. 47-48, pp. 3289-3295, Nov. 2011.
- [ 5 ] D. Mora and I. Velásquez, "Virtual element for the buckling problem of Kirchhoff - Love plates," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 360, no. 112687, Mar. 2020.
- [ 6 ] P. J. Schmid, "Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data," *Journal of fluid mechanics*, vol. 656 pp. 5-28, Jul. 2010.
- [ 7 ] P. J. Schmid, L. Li, M. P. Juniper, and O. Pust, "Applications of the dynamic mode decomposition," *Theoretical and*

*Computational Fluid Dynamics*, vol. 25, pp. 249-259, Aug. 2010.

- [ 8 ] G. Jo, Y. -J. Lee, and I. Ojeda-Ruiz, "2D and 3D image reconstruction from slice data based on a constrained bilateral smoothing and dynamic mode decomposition," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 420, no. 126877, May 2022.



**신성윤(Seong-Yoon Shin)**

2003.2: 군산대학교 컴퓨터학과 이학박사  
2006.3~현재: 군산대학교 컴퓨터정보통신공학부 교수  
2018.1~2019.12: 한국정보통신학회 총무부회장  
2020.1~2021.12: 한국정보통신학회 수석부회장  
2022.1~현재: 한국정보통신학회 회장  
2020.3~현재: 군산대학교 정보전산원장  
※ 관심분야: 비디오처리, 가상현실, 멀티미디어



**조광현(Gwanghyun Jo)**

2018. 카이스트 수리과학과 박사  
2018~2019. 카이스트 연구원(포스트닥터)  
2019~2022: 군산대학교 수학과 조교수  
※ 관심분야: 수치해석학, 딥러닝



**배석찬(Seok-Chan Bae)**

1995.2: 전남대학교 대학원 이학박사  
1995~현재: 군산대학교 공과대학 컴퓨터 정보통신공학부 교수  
1983.3~1985.6: 육군 제6997부대 작전장교  
※ 관심분야: 데이터베이스보안, 병원정보시스템, 빅데이터분석, 디지털포렌식