

EWMA control charts for monitoring three parameter regions

Yukyung Kim^a, Jaeheon Lee^{1,b}

^aDepartment of Statistics, Korea University; ^bDepartment of Applied Statistics, Chung-Ang University

Abstract

In the standard assumption of statistical process monitoring (SPM) under consideration, the in-control region of the control parameter of quality characteristic consists of a single point. However, if small deviations from the ideal situation may not be of practical importance, the parametric space can consist of three regions: In-control, indifference, and out-of-control. In this paper, we propose two exponentially weighted moving average (EWMA) charting procedures applicable to the situation with three parameter regions, and compare the efficiency of the proposed procedures with the Shewhart chart and the cumulative sum (CUSUM) chart.

Keywords: average run length, exponentially weighted moving average chart, indifference region, statistical process monitoring

1. 서론

통계적 공정 모니터링(statistical process monitoring; SPM)에서 관리도(control chart)는 공정 변동의 원인이 되는 공정 모수의 변화를 탐지하는 도구로서 널리 사용되어 왔다. 일반적으로 사용하는 Shewhart 관리도는 공정 모수의 큰 변화의 탐지에 효율적이고, CUSUM (cumulative sum) 관리도와 EWMA (exponentially weighted moving average) 관리도는 공정 모수의 작은 변화의 탐지에 효율적이라는 사실이 잘 알려져 있다. 관리도의 사용 목적은 공정의 상태를 판단하고, 이상 상태를 빠르게 탐지하여 이상 원인을 파악함으로써 공정을 효율적으로 관리하는 데 있다. 관리도의 성능을 비교하는 경우, 일반적으로 관리 상태일 때 평균 런길이(average run length; ARL)가 동일한 값을 갖도록 설정하고 일정 수준의 변화가 발생하는 이상 상태일 때 ARL값이 작을수록 성능이 우수하다고 평가한다. 이때 런길이는 관리 통계량이 처음으로 관리한계를 벗어나서 이상 신호를 줄 때까지 추출한 표본의 수를 나타낸다.

관리도를 설계할 때, 관리 상태와 이상 상태 영역은 공정 모수의 하나의 값에 기초하여 설정되고 이에 기초하여 설계하는 것이 일반적이다. 예를 들어 품질 특성치의 평균을 모니터링하는 경우, Shewhart 관리도에서는 관리 상태에서의 공정 평균 μ_0 , CUSUM 관리도에서는 μ_0 와 이상 상태에서의 공정 평균 $\mu_1 (\neq \mu_0)$, 그리고 EWMA 관리도에서는 μ_0 와 탐지하고자 하는 μ_1 에 기초한 가중치(weight)를 결정함으로써 관리도를 설계하고 있다. 관리도를 사용하는 중요한 목적은 공정 평균이 μ_0 로 유지되는 관리 상태인 경우에는 이상 신호, 즉 오경보(false alarm)를 발생시키지 않고, 공정 평균이 μ_0 에서 벗어난 이상 상태인 경우 이를 빨리 탐지하여 이상 신호를 발생시키는 것이다.

This research was supported by the Chung-Ang University Research Scholarship Grants in 2021.

¹ Corresponding author: Department of Applied Statistics, Chung-Ang University, 84 Heukseok-ro, Dongjak-gu, Seoul 06974, Korea. E-mail: jaecheon@cau.ac.kr

Table 1: Notations

μ_{wa}^+	the upper worst acceptable mean
μ_{wa}^-	the lower worst acceptable mean
μ_{bu}^+	the upper best unacceptable mean
μ_{bu}^-	the lower best unacceptable mean
M_0	the in-control region, (μ_{wa}^-, μ_{wa}^+)
I	the indifference region, $(\mu_{bu}^-, \mu_{wa}^-) \cup (\mu_{wa}^+, \mu_{bu}^+)$
M_1	the out-of-control region, $(-\infty, \mu_{bu}^-) \cup (\mu_{bu}^+, \infty)$

그러나 실제 공정에서는 공정 모수의 어떤 영역으로의 변화에 대해서는 관심이 없고, 그 영역을 벗어난 변화에 대해서만 탐지하기를 원하는 경우가 있다. 특히 현재의 공정 능력이 아주 좋은 경우 이러한 상황이 발생할 수 있으며, 오정보를 포함한 너무 많은 이상 신호는 공정을 관리하는 데 도리어 문제점을 야기시킬 수도 있기 때문이다. 따라서 이런 경우에는 상대적으로 작은 변화에 민감하게 반응하지 않도록 관리도를 설계할 필요성이 있으며, 이를 위하여 품질 특성치의 모수 영역을 관리 상태와 이상 상태의 2개 영역으로 구성하는 것이 아니라 무관심 영역(indifference region)을 포함시킨 3개의 영역으로 구성하는 것이 필요하다. 즉, 모수 영역을 관리 상태, 무관심, 이상 상태의 영역으로 구성하는 것이다. 3개의 영역에 대한 관리도 절차로서 Hill (1956)이 제안한 수정된 관리도(modified control chart)와 Freud (1957)이 제안한 채택 관리도(acceptance control chart)가 있다. 그러나 이 절차들은 불량률이 사전에 지정한 값을 벗어나는 것을 탐지할 확률 또는 특정한 불량률을 탐지할 확률이 설정된 상황에서 사용할 수 있다. 우리가 이 논문에서 고려하는 3개 영역에 대한 관리도 절차에 대해서 Woodall (1985)과 Woodall과 Faltin (2019)은 CUSUM 관리도 절차의 사용을 제안하였다. 특히 최근 논문인 Woodall과 Faltin (2019)은 이와 같은 상황에서 사용할 수 있는 EWMA 관리도 절차에 대해서는 아직 제안되지 않았다고 언급하고 있다.

이 논문에서는 공정 평균이 3개의 영역으로 구성된 경우 적용할 수 있는 두 가지 EWMA 관리도 절차를 제안하고 있다. 제안하는 절차는 Crowder과 Hamilton (1992)이 제안한 REWMA 관리도와 Shu 등 (2007)이 제안한 IEWMA 관리도를 3개의 모수영역에 적용할 수 있도록 수정한 것이다. 제안한 EWMA 관리도 절차의 성능은 모의 실험을 통하여 Shewhart 관리도 및 CUSUM 관리도와 비교하고 그 효율을 고찰하고자 한다.

이 논문의 구성은 다음과 같다. 2절에서는 Woodall과 Faltin (2019)이 제안한 3개의 모수 영역을 모니터링하는 CUSUM 관리도 절차 및 그들의 연구 결과에 대해 소개한다. 3절에서는 3개의 모수 영역에 적용할 수 있는 EWMA 관리도 절차, 즉 수정된 REWMA 관리도와 수정된 IEWMA 관리도 절차를 제안하고, 4절에서는 모의 실험을 통하여 제안된 절차의 성능에 대해 평가한다. 5절에서는 실제 상황을 가정하여 생성된 표본에 대해 제안된 절차의 성능을 살펴보고, 마지막으로 6절에서는 이 논문의 연구 결과를 요약하였다.

2. 기호 및 이전 연구

관리 상태일 때 시점 t 에서 추출한 표본 $X_{t1}, X_{t2}, \dots, X_{tm}$ ($t = 1, 2, \dots$)은 서로 독립이고 평균은 μ_0 , 분산은 σ^2 인 정규 분포 $N(\mu_0, \sigma^2)$ 을 따른다고 가정하고, \bar{X}_t 는 시점 t 에서의 표본 평균으로 정의한다.

이 논문에서 사용할 기호에 대한 정의를 Table 1에 정리하였다. 기호에 대해 좀 더 부연해서 설명하면, μ_{wa}^+ 는 관리 상태 영역에서 가장 큰 공정 평균, μ_{wa}^- 는 관리 상태 영역에서 가장 작은 공정 평균, μ_{bu}^+ 는 관리 상태보다 큰 쪽의 이상 상태 영역에서 가장 작은 공정 평균, 그리고 μ_{bu}^- 는 관리 상태보다 작은 쪽의 이상 상태 영역에서 가장 큰 공정 평균을 나타낸다. 또한 M_0 , I , M_1 는 각각 3가지 모수 영역인 관리 상태 영역, 무관심 영역, 이상 상태 영역을 나타낸다. 이 논문에서는 이상 상태가 관리 상태의 양쪽으로 설정되어 있는 일반적인 경우를 고려했다. 다음으로 선행 연구인 Woodall (1985)과 Woodall과 Faltin (2019)이 제안한 3개의 모수영역을 모니터링하는 CUSUM 관리도 절차와 이에 대한 성능을 소개한다. 이 절차는 Woodall (1985)이 먼저

제안했고, Woodall과 Faltin (2019)이 다시 소개하고 그 성능을 평가하였다. Woodall과 Faltin (2019)은 시점 t 에서의 CUSUM 관리 통계량, 즉 양의 변화를 탐지하는 통계량 U_t 와 음의 변화를 탐지하는 통계량 L_t 를 각각 다음과 같이 정의하였다.

$$U_t = \max \left[0, U_{t-1} + \bar{X}_t - k_U \right], \quad L_t = \min \left[0, L_{t-1} + \bar{X}_t + k_L \right]. \quad (2.1)$$

이때 초깃값은 $U_0 = L_0 = 0$ 이다. 일반적으로 참고값(reference-value) k_U 와 k_L 은 관리 상태에서의 공정 평균 μ_0 와 탐지하고자 하는 이상 상태의 공정 평균 μ_1 의 평균값으로 설정하는데, Woodall과 Faltin (2019)은 다음과 같이 참고값 k_U 와 k_L 을 설정할 것을 제안하였다.

$$k_U = \frac{\mu_{wa}^+ + \mu_{bu}^+}{2}, \quad k_L = \frac{\mu_{wa}^- + \mu_{bu}^-}{2}.$$

그들이 제안한 CUSUM 관리도 절차는 관리 한계 h 에 대하여, $U_t > h$ 또는 $L_t < -h$ 인 경우 이상 신호를 주는 것이다.

Woodall과 Faltin (2019)은 그들이 제안한 CUSUM 관리도의 성능이 3개의 모수 영역을 고려하지 않은 전통적인 Shewhart 관리도의 성능을 압도하며, 특히 CUSUM 관리도는 오경보율이 매우 작다는 것을 보였다. 3개의 모수 영역을 고려한 상황에서 관리도의 성능이 좋다는 것은 관리 상태 영역에서의 ARL값은 크면서, 즉 오경보율은 작으면서, 이상 상태 영역에서의 ARL값은 작다는 것을 의미한다. 또한 그들은 CUSUM 관리도가 3개의 모수 영역을 모니터링하는 데 유용하게 적용할 수 있지만, 기존의 EWMA 관리도는 이와 같은 상황에 적용하기 쉽지 않다고 언급하였다.

3. EWMA 관리도 절차

이 절에서는 3개의 모수 영역에 적용할 수 있는 두 가지 EWMA 관리도를 제안하고자 한다. 서론에서 언급한 바와 같이 제안하는 두 가지 절차는 Crowder과 Hamilton (1992)이 제안한 REWMA 관리도와 Shu 등 (2007)이 제안한 IEWMA 관리도를 3개의 모수 영역에 적용할 수 있도록 수정한 것이다.

3.1. REWMA 관리도와 수정된 REWMA 관리도

먼저 Crowder과 Hamilton (1992)이 제안한 REWMA (resetting EWMA) 관리도 절차를 소개한다. 이 관리도 절차는 공정의 산포 증가를 탐지하기 위해 제안된 절차이지만, 평균 변화에도 그 아이디어를 적용시킬 수 있다. 시점 t 에서 공정 평균의 증가와 감소를 탐지하기 위한 한쪽(one-sided) REWMA 관리도의 통계량은 각각 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$S_t^+ = \max \left[\mu_0, \lambda \bar{X}_t + (1 - \lambda) S_{t-1}^+ \right], \quad S_t^- = \min \left[\mu_0, \lambda \bar{X}_t + (1 - \lambda) S_{t-1}^- \right].$$

이때 가중치 λ 는 $0 < \lambda \leq 1$ 인 상수이고, 초깃값은 $S_0^+ = S_0^- = \mu_0$ 이다. 이 관리도 절차는 시점 t 에서 $S_t^+ > h_R^+$ 또는 $S_t^- < h_R^-$ 인 경우 이상 신호를 주게 된다. 여기서 관리 한계 h_R^+ 와 h_R^- 는 각각

$$h_R^+ = \mu_0 + L_R \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad h_R^- = \mu_0 - L_R \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (3.1)$$

이다. 만일 공정 평균의 한쪽 변화만 탐지하는 경우에는 S_t^+ 또는 S_t^- 만을 사용하면 된다.

다음으로 3개의 모수 영역을 모니터링하기 위해, 이 논문에서는 수정된 REWMA 관리도의 통계량을 다음과 같이 정의할 것을 제안한다.

$$R_t^+ = \max \left[\mu_{wa}^+, \lambda \bar{X}_t + (1 - \lambda) R_{t-1}^+ \right], \quad R_t^- = \min \left[\mu_{wa}^-, \lambda \bar{X}_t + (1 - \lambda) R_{t-1}^- \right].$$

이때 초깃값은 $R_0^+ = \mu_{wa}^+$ 와 $R_0^- = \mu_{wa}^-$ 이고, 시점 t 에서 $R_t^+ > h_R^+$ 또는 $R_t^- < h_R^-$ 인 경우 이상 신호를 주게 된다. 식 (3.1)에서 L_R 은 달성하기를 원하는 관리 상태의 ARL인 ARL_0 값을 갖도록 설정할 수 있다.

3.2. IEWMA 관리도와 수정된 IEWMA 관리도

다음으로 Shu 등 (2007)이 제안한 IEWMA (improved EWMA) 관리도 절차를 소개한다. 공정 평균의 증가를 탐지하기 위한 위쪽 방향(upper-sided) IEWMA 관리도 절차는 먼저 시점 t 에서의 \bar{X}_t 를

$$Z_t^+ = \max [\mu_0, \bar{X}_t]$$

로 변환하고, 이를 사용하여 위쪽 방향 IEWMA 관리도의 통계량을 다음과 같이 정의한다.

$$V_t^+ = \lambda Z_t^+ + (1 - \lambda) V_{t-1}^+.$$

이와 유사하게 공정 평균의 감소를 탐지하기 위한 아래쪽 방향(lower-sided) IEWMA 관리도 절차는 변환된 변수 Z_t^- 와 관리 통계량 V_t^- 를 각각 다음과 같이 정의한다.

$$Z_t^- = \min [\mu_0, \bar{X}_t], \quad V_t^- = \lambda Z_t^- + (1 - \lambda) V_{t-1}^-.$$

이때 초깃값은 $V_0^+ = E_0(Z_t^+)$ 와 $V_0^- = E_0(Z_t^-)$ 이고, 시점 t 에서 $V_t^+ > h_t^+$ 또는 $V_t^- < h_t^-$ 인 경우 이상 신호를 주게 된다. 여기서 h_t^+ 와 h_t^- 는 각각

$$h_t^+ = E_0(Z_t^+) + L_I \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} \sqrt{\text{Var}_0(Z_t^+)}, \quad h_t^- = E_0(Z_t^-) - L_I \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} \sqrt{\text{Var}_0(Z_t^-)} \quad (3.2)$$

가 된다. 식 (3.2)에서 $E_0(Z_t^+)$ 와 $E_0(Z_t^-)$ 는 각각 관리 상태에서 Z_t^+ 와 Z_t^- 의 평균이고, $\text{Var}_0(Z_t^+)$ 와 $\text{Var}_0(Z_t^-)$ 는 관리 상태에서 분산을 나타내는데, Shu 등 (2007)이 유도한 결과는 다음과 같다.

$$E_0(Z_t^+) = \mu_0 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad E_0(Z_t^-) = \mu_0 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \text{Var}_0(Z_t^+) = \text{Var}_0(Z_t^-) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi}\right) \frac{\sigma^2}{n}.$$

이제 3개의 모수 영역을 모니터링하기 위해, 수정된 IEWMA 관리도 절차를 다음과 같이 제안한다. 먼저 공정 평균의 증가를 탐지하는 위쪽 방향의 수정된 IEWMA 관리도에서 변환된 변수 Y_t^+ 와 관리 통계량 W_t^+ 는 각각

$$Y_t^+ = \max [\mu_{wa}^+, \bar{X}_t], \quad W_t^+ = \lambda Y_t^+ + (1 - \lambda) W_{t-1}^+ \quad (3.3)$$

로 정의하고, 공정 평균의 감소를 탐지하는 아래쪽 방향의 수정된 IEWMA 관리도에서 변환된 변수 Y_t^- 와 관리 통계량 W_t^- 는 각각

$$Y_t^- = \min [\mu_{wa}^-, \bar{X}_t], \quad W_t^- = \lambda Y_t^- + (1 - \lambda) W_{t-1}^- \quad (3.4)$$

로 정의한다. 이때 초깃값은 $W_0^+ = E_0(Y_t^+)$ 와 $W_0^- = E_0(Y_t^-)$ 이고, 시점 t 에서 $W_t^+ > h_t^+$ 또는 $W_t^- < h_t^-$ 인 경우 이상 신호를 주게 된다. 여기서 h_t^+ 와 h_t^- 는 각각

$$h_t^+ = E_0(Y_t^+) + L_I \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} \sqrt{\text{Var}_0(Y_t^+)}, \quad h_t^- = E_0(Y_t^-) - L_I \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} \sqrt{\text{Var}_0(Y_t^-)} \quad (3.5)$$

가 되고, L_I 는 달성하기를 원하는 ARL_0 값을 갖도록 설정할 수 있다.

Table 2: Values and regions for Case 1, 2, and 3

Case	μ_{wa}^+	μ_{bu}^+	M_0	I	M_1
1	0.5	1.0	(-0.5, 0.5)	(-1.0, -0.5) \cup (0.5, 1.0)	($-\infty$, -1.0) \cup (1.0, ∞)
2	0.7	1.3	(-0.7, 0.7)	(-1.3, -0.7) \cup (0.7, 1.3)	($-\infty$, -1.3) \cup (1.3, ∞)
3	1.0	1.4	(-1.0, 1.0)	(-1.4, -1.0) \cup (1.0, 1.4)	($-\infty$, -1.4) \cup (1.4, ∞)

식 (3.3)과 (3.4)에 정의된 Y_t^+ 와 Y_t^- 에 대하여, 관리 상태에서의 평균과 분산을 유도하여 각각 다음의 결과를 얻었다. 상세한 유도 과정은 Appendix에 그 내용을 수록하였다.

$$E_0(Y_t^+) = \mu_{wa}^+ \Phi\left(\frac{\mu_{wa}^+ - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) + \mu_0 \left[1 - \Phi\left(\frac{\mu_{wa}^+ - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\right] + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \phi\left(\frac{\mu_{wa}^+ - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right), \quad (3.6)$$

$$E_0(Y_t^-) = \mu_{wa}^- \left[1 - \Phi\left(\frac{\mu_{wa}^- - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\right] + \mu_0 \Phi\left(\frac{\mu_{wa}^- - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \phi\left(\frac{\mu_{wa}^- - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right). \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}_0(Y_t^+) &= \left[\frac{\sigma^2}{n} + (\mu_{wa}^+ - \mu_0)^2 \Phi\left(\frac{\mu_{wa}^+ - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\right] \left[1 - \Phi\left(\frac{\mu_{wa}^+ - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\right] \\ &\quad + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} (\mu_{wa}^+ - \mu_0) \left[1 - 2\Phi\left(\frac{\mu_{wa}^+ - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\right] \phi\left(\frac{\mu_{wa}^+ - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - \frac{\sigma^2}{n} \left\{\phi\left(\frac{\mu_{wa}^+ - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\right\}^2, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}_0(Y_t^-) &= \left[\frac{\sigma^2}{n} + (\mu_{wa}^- - \mu_0)^2 \left\{1 - \Phi\left(\frac{\mu_{wa}^- - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\right\}\right] \Phi\left(\frac{\mu_{wa}^- - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\ &\quad + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} (\mu_{wa}^- - \mu_0) \left[1 - 2\Phi\left(\frac{\mu_{wa}^- - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\right] \phi\left(\frac{\mu_{wa}^- - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - \frac{\sigma^2}{n} \left\{\phi\left(\frac{\mu_{wa}^- - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\right\}^2. \end{aligned} \quad (3.9)$$

여기서 $\phi(\cdot)$ 은 $N(0, 1)$ 의 확률 밀도 함수(probability density function; PDF)이고 $\Phi(\cdot)$ 은 $N(0, 1)$ 의 누적 분포 함수(cumulative distribution function; CDF)를 나타낸다. 따라서 위의 평균과 분산식을 이용하면, 식 (3.5)의 관리 한계를 계산할 수 있다.

4. 모의실험

이 절에서는 3절에서 제안한 수정된 REWMA 관리도와 수정된 IEWMA 관리도의 성능을 평가하기 위한 모의실험의 과정과 결과를 소개한다. μ_{wa}^+ , μ_{wa}^- 와 μ_{bu}^+ , μ_{bu}^- 의 설정에 따라 제안된 관리도 절차의 효율을 Shewhart 관리도 및 CUSUM 관리도와 비교하였다. 성능의 주된 비교는 Woodall과 Faltin (2019)이 제안한 CUSUM 관리도와 할 것이고, 일반적인 상황에 적용하는 전통적인 Shewhart 관리도는 참고를 위해 그 결과를 제시하였다.

이 논문에서는 3개의 모수 영역에 대해 Table 2와 같이 세 가지 경우를 고려하였다. 이때, 3개의 모수 영역은 0을 기준으로 대칭적이라고 가정하였다. 즉, $\mu_{wa}^+ = |\mu_{wa}^-|$ 이고 $\mu_{bu}^+ = |\mu_{bu}^-|$ 이다. 모수 영역이 대칭적인 것은 일반적인 가정이고, 모든 경우에 표준화를 통해 0을 대칭으로 구성할 수 있다.

비교를 위해 관리 상태 영역의 경계값인 μ_{wa}^+ (또는 μ_{wa}^-)에서 ARL이 200을 갖도록 모든 관리도의 관리 한계를 설정한 후 관리 상태와 이상 상태의 성능을 살펴보았다. 모수 영역이 0에 대해 대칭적이기 때문에 공정 평균의 양의 변화에 대해서만 성능을 평가하고자 한다. 또한 CUSUM 관리도와 EWMA 관리도는 표본 크기가 $n = 1$ 인 경우 성능이 우수하고 많이 사용되기 때문에, 모의실험에서 $n = 1$ 을 사용하였다. 이전 연구들의 결과를 살펴볼 때, $n > 1$ 인 경우에도 각 절차의 성능 또는 효율은 크게 변하지 않을 것으로 판단된다. 구체적인 모의실험 절차는 다음과 같다.

- (1) 서로 독립이고 $N(\theta, 1)$ 을 따르는 표본을 생성하여 각 관리도의 통계량을 계산한다.
- (2) 계산된 각 관리도의 통계량이 관리 한계를 벗어날 때의 런길이를 기록한다.

Table 3: ARL values for Case 1

θ	Modified REWMA				Modified IEWMA				Shewhart $L = 3.008$	CUSUM $k_U = k_L = 0.75$ $h = 5.597$
	$\lambda = 0.05$ $L_R = 2.137$	0.08	0.1	0.2	$\lambda = 0.05$ $L_I = 5.670$	0.1	0.13	0.2		
0.0	20847.57	10286.55	7395.88	2913.03	97295.49	14435.42	8401.96	3685.03	496.26	10854.68
0.2	3734.46	2636.16	2184.47	1303.07	5976.54	2805.17	2193.90	1431.59	409.33	2701.90
0.4	469.32	428.83	412.02	364.09	475.13	425.73	404.31	364.85	260.59	436.71
0.5	199.85	200.12	200.63	199.80	200.67	200.85	199.96	200.16	200.27	199.13
0.6	99.26	102.8	106.13	116.11	103.96	107.11	110.11	113.67	152.99	101.39
0.7	57.02	59.61	62.45	71.39	63.91	64.16	66.17	71.28	117.01	57.97
0.8	37.30	38.85	39.91	46.61	44.02	42.30	43.59	46.90	89.93	36.94
1.0	20.88	20.44	20.93	23.42	25.74	22.77	22.32	23.60	54.29	19.35
1.2	14.30	13.73	13.67	14.20	17.68	14.63	14.16	14.11	33.87	12.61
1.3	12.42	11.85	11.59	11.69	15.14	12.27	11.81	11.40	27.10	10.69
1.4	11.01	10.37	10.14	9.93	13.15	10.56	9.96	9.52	21.88	9.28
1.6	9.01	8.37	8.14	7.62	10.39	8.13	7.61	7.04	14.62	7.34
1.8	7.69	7.14	6.84	6.23	8.54	6.57	6.10	5.52	10.11	6.08
2.0	6.75	6.21	5.98	5.30	7.23	5.50	5.06	4.54	7.23	5.19
2.2	6.05	5.57	5.34	4.64	6.24	4.73	4.34	3.86	5.34	4.54
2.4	5.52	5.07	4.86	4.16	5.50	4.14	3.78	3.33	4.07	4.05
2.6	5.08	4.66	4.47	3.76	4.92	3.70	3.37	2.97	3.20	3.66
2.8	4.75	4.35	4.17	3.46	4.45	3.34	3.04	2.66	2.59	3.34
3.0	4.46	4.09	3.91	3.20	4.07	3.05	2.79	2.43	2.15	3.08

(3) 절차 (1)-(2)를 10,000번 반복하여 $\theta = \mu_{wa}^+$ (또는 $\theta = \mu_{wa}^-$)일 때 ARL이 200이 되도록 이분법(bisection method)을 사용하여 각 관리도의 관리 한계를 설정한다.

(4) 절차 (3)에서 설정된 관리 한계를 사용하여 (1)-(2)를 10,000번 반복하여 ARL을 계산한다.

Case 1, 2, 3에 대해 수정된 REWMA 관리도, 수정된 IEWMA 관리도, Shewhart 관리도, 그리고 CUSUM 관리도의 ARL값을 각각 Table 3-5에 제시하였다. 이때 EWMA 관리도에서 가중치 λ 는 0.05, 0.1, 0.2를 사용하였고, 최적의 경우를 추가하였다. 최적의 가중치는 $\theta = \mu_{wa}^+$ 에서 ARL은 200을 만족하면서 $\theta = \mu_{bu}^+$ 에서의 ARL이 가장 작은 경우에 사용한 값을 의미한다. 즉, Table 3에서는 수정된 REWMA 관리도의 경우 $\lambda = 0.08$, 수정된 IEWMA 관리도의 경우 $\lambda = 0.13$ 이 $\theta = 1.0$ 인 경우 최적의 가중치이다. 유사하게 Table 4와 Table 5에서는 수정된 REWMA 관리도의 경우 $\lambda = 0.11$ 과 $\lambda = 0.06$, 수정된 IEWMA 관리도의 경우 $\lambda = 0.15$ 와 $\lambda = 0.13$ 이 각각 $\theta = 1.3$ 와 $\theta = 1.4$ 인 경우 최적의 가중치가 된다. Table 3-5에서 $\theta = \mu_{wa}^+$ 와 $\theta = \mu_{bu}^+$ 인 경우는 볼드체로 표기하였다.

이 논문에서 제안한 수정된 REWMA 관리도와 수정된 IEWMA 관리도의 성능은 Shewhart 관리도에 비해 아주 큰 변화가 아닌 이상 상태 영역에서 더 빠르게 이상 신호를 주고, 관리 상태 영역에서는 오경보율이 크게 감소함을 알 수 있다. Woodall과 Faltin (2019)이 제안한 CUSUM 관리도와 비교해 보면, $\theta = \mu_{bu}^+$ 에서 비슷하거나 조금 더 큰 ARL값을 갖지만 θ 가 μ_{bu}^+ 보다 어느 정도 큰 이상 상태 영역에서는 $\lambda = 0.2$ 를 사용한 수정된 IEWMA 관리도의 ARL이 CUSUM 관리도에 비해 더 작음을 알 수 있다. 제안된 절차의 큰 장점은 작은 λ 값을 사용할 경우 관리 상태 영역에서의 ARL값이 매우 크다는 것이다. 즉, 오경보율이 매우 작아진다는 것이다. 생산 공정에서 오경보는 그 원인을 찾기 위해 많은 비용을 유발시킬 뿐 아니라 절차의 신뢰성을 떨어뜨리는 요소이기 때문에, 작은 λ 값을 사용한 수정된 REWMA 또는 수정된 IEWMA 관리도 절차는 오경보 문제를 많이 해소시킬 수 있다.

Table 4: ARL values for Case 2

θ	Modified REWMA				Modified IEWMA				Shewhart $L = 3.278$	CUSUM $k_U = k_L = 1.0$ $h = 5.015$
	$\lambda = 0.05$ $L_R = 2.138$	0.1 2.364	0.11 2.389	0.2 2.528	$\lambda = 0.05$ $L_I = 7.673$	0.1 7.191	0.15 7.048	0.2 7.005		
0.0	279352.09	56239.65	45598.35	13351.77	6077900.50	204816.55	48904.46	21269.09	956.52	54341.29
0.2	42025.95	14618.78	12586.73	5491.07	183300.00	28222.54	11892.03	7165.53	772.46	14514.33
0.4	3769.94	2243.62	2073.63	1355.54	5734.80	2756.22	1888.89	1484.18	472.02	2249.24
0.5	1264.46	926.96	889.87	691.21	1439.69	1012.33	824.63	717.39	355.39	938.37
0.6	469.81	415.82	405.76	363.64	470.14	421.35	379.63	369.09	266.25	416.22
0.7	200.32	200.45	199.90	200.50	199.81	199.13	199.57	200.54	199.86	199.28
0.8	99.30	106.79	107.44	116.33	106.02	107.46	112.10	116.99	150.86	104.36
1.0	37.28	39.94	40.34	46.39	46.16	42.96	45.21	47.23	87.93	38.17
1.2	20.85	20.93	21.20	23.27	27.51	23.45	23.36	23.89	53.03	19.48
1.3	16.97	16.58	16.41	17.88	22.58	18.65	17.79	18.34	41.72	15.21
1.4	14.33	13.64	13.62	14.20	19.07	15.33	14.42	14.45	33.12	12.38
1.6	10.98	10.14	10.10	9.97	14.37	11.11	10.12	9.84	21.43	8.96
1.8	9.02	8.14	8.06	7.69	11.40	8.60	7.72	7.32	14.35	7.01
2.0	7.70	6.86	6.74	6.29	9.39	6.97	6.19	5.76	9.94	5.76
2.2	6.75	5.98	5.88	5.38	7.97	5.86	5.09	4.72	7.12	4.90
2.4	6.05	5.34	5.25	4.74	6.90	5.06	4.35	4.01	5.26	4.27
2.6	5.52	4.86	4.77	4.27	6.09	4.43	3.79	3.49	4.02	3.80
2.8	5.10	4.47	4.39	3.91	5.45	3.96	3.38	3.09	3.16	3.42
3.0	4.75	4.17	4.09	3.61	4.93	3.57	3.05	2.78	2.56	3.12

Table 5: ARL values for Case 3

θ	Modified REWMA				Modified IEWMA				Shewhart $L = 3.576$	CUSUM $k_U = k_L = 1.2$ $h = 6.325$
	$\lambda = 0.05$ $L_R = 2.144$	0.06 2.207	0.1 2.362	0.2 2.523	$\lambda = 0.05$ $L_I = 11.61$	0.1 10.564	0.13 10.316	0.2 10.024		
0.0	16720333.34	8552718.49	1331282.95	142181.46	3061041816.13	17398148.18	3306977.36	366596.40	2866.22	9713406.92
0.2	2173969.01	1317222.01	313895.38	55725.76	110590351.50	1708482.12	515952.70	104037.12	2235.02	1456306.37
0.4	154234.06	108370.94	39866.59	11903.32	1289417.00	102376.20	48763.43	17875.49	1279.35	118316.03
0.5	44360.00	32559.1	14728.48	5701.42	173255.60	28142.60	16258.08	7370.35	932.92	35001.67
0.6	12756.92	10096.59	5555.05	2684.91	27497.8	8345.16	5669.66	3284.81	677.96	10758.82
0.7	3854.75	3392.31	2195.68	1319.08	5490.48	2694.65	2116.68	1496.87	494.25	3482.79
0.8	1293.66	1186.81	925.33	674.91	1384.37	993.79	902.04	718.75	362.63	1209.79
1.0	200.94	199.98	199.95	200.22	200.02	200.02	200.00	199.99	200.00	198.94
1.2	56.57	58.18	62.58	70.46	68.84	66.64	66.64	67.37	114.26	56.03
1.3	37.47	37.74	40.00	46.06	48.49	44.36	44.36	44.24	87.54	36.08
1.4	27.00	26.87	27.78	31.51	36.50	31.87	31.87	31.75	67.67	25.59
1.6	17.03	16.68	16.55	18.06	24.16	19.35	19.35	18.53	41.53	15.65
1.8	12.54	12.25	11.65	11.72	17.65	13.42	13.42	12.80	26.41	11.15
2.0	9.94	9.63	8.98	8.66	13.86	10.33	10.33	9.42	17.39	8.65
2.2	8.31	8.04	7.44	6.94	11.25	8.17	8.17	7.48	11.85	7.07
2.4	7.20	6.95	6.39	5.86	9.47	6.80	6.80	6.14	8.35	5.99
2.6	6.41	6.18	5.64	5.07	8.13	5.79	5.79	5.19	6.08	5.21
2.8	5.77	5.60	5.07	4.52	7.13	5.04	5.04	4.52	4.57	4.62
3.0	5.32	5.12	4.64	4.11	6.33	4.48	4.48	4.00	3.54	4.15

수정된 REWMA와 수정된 IEWMA 관리도의 성능을 비교하면, Case 1과 Case 2에서 $\theta = \mu_{bu}^+$ 일 때의 성능은 수정된 REWMA 관리도가 더 좋지만 θ 가 μ_{bu}^+ 보다 어느 정도 큰 이상 상태 영역에서는 수정된 IEWMA

Table 6: An example of the CUSUM chart and the modified EWMA charts

t	$(X_{t1}, X_{t2}, X_{t3}, X_{t4})$	\bar{Z}_t	CUSUM		Modified REWMA		Modified IEWMA	
			$k_U = k_L = 0.9$ $h = 5.015$		$h_R^+ = h_R^- = 1.142$		$h_I^+ = h_I^- = 1.318$	
			U_t	L_t	R_t^+	R_t^-	W_t^+	W_t^-
0	-	-	0	0	0.6	-0.6	0.769	-0.769
1	(90.78, 102.76, 100.10, 94.66, 97.08)	-0.731	0	0	0.6	-0.613	0.752	-0.765
2	(90.60, 92.19, 92.19, 86.78, 90.44)	-2.390	0	-1.490	0.6	-0.791	0.737	-0.927
3	(100.56, 97.16, 95.73, 101.60, 98.76)	-0.310	0	-0.900	0.6	-0.743	0.723	-0.895
4	(105.37, 104.13, 110.99, 94.81, 103.83)	0.956	0.056	0	0.636	-0.6	0.746	-0.865
5	(88.46, 111.23, 102.57, 105.19, 101.86)	0.466	0	0	0.619	-0.6	0.732	-0.839
6	(92.11, 107.96, 98.63, 96.16, 98.72)	-0.321	0	0	0.6	-0.6	0.719	-0.815
7	(95.55, 87.36, 104.23, 96.09, 95.81)	-1.049	0	-0.149	0.6	-0.645	0.707	-0.838
8	(99.74, 99.80, 90.94, 93.23, 95.93)	-1.018	0	-0.267	0.6	-0.682	0.696	-0.856
9	(95.21, 101.83, 118.64, 104.89, 105.14)	1.286	0.386	0	0.669	-0.6	0.755	-0.831
10	(90.51, 108.09, 93.47, 104.77, 99.21)	-0.198	0	0	0.6	-0.6	0.739	-0.808
11	(95.71, 91.34, 114.34, 108.07, 102.37)	0.591	0	0	0.6	-0.6	0.726	-0.787
12	(112.82, 100.91, 92.16, 97.97, 100.96)	0.241	0	0	0.6	-0.6	0.713	-0.768
13	(92.96, 95.47, 92.92, 87.30, 92.16)	-1.959	0	-1.059	0.6	-0.736	0.702	-0.887
14	(109.79, 98.63, 105.17, 99.16, 103.19)	0.797	0	0	0.620	-0.6	0.711	-0.859
15	(102.61, 108.09, 92.22, 94.30, 99.30)	-0.174	0	0	0.6	-0.6	0.700	-0.833
16	(90.24, 97.74, 88.50, 98.51, 93.74)	-1.564	0	-0.664	0.6	-0.696	0.690	-0.906
17	(92.26, 89.11, 107.48, 101.54, 97.60)	-0.601	0	-0.365	0.6	-0.687	0.681	-0.875
18	(96.78, 100.98, 107.23, 106.12, 102.78)	0.695	0	0	0.609	-0.6	0.682	-0.848
19	(95.69, 87.28, 99.12, 90.02, 93.03)	-1.743	0	-0.843	0.6	-0.714	0.674	-0.937
20	(101.94, 95.90, 98.09, 81.56, 94.37)	-1.407	0	-1.350	0.6	-0.784	0.667	-0.984
21	(117.89, 104.28, 105.67, 101.83, 107.42)	1.854	0.954	0	0.725	-0.6	0.786	-0.946
22	(104.58, 110.63, 118.32, 113.82, 111.84)	2.960	3.014	0	0.949	-0.6	1.003	-0.911
23	(112.65, 100.90, 108.07, 115.92, 109.39)	2.347	4.460	0	1.089	-0.6	1.137	-0.880
24	(117.10, 115.44, 118.97, 104.16, 113.92)	3.480	7.040	0	1.328	-0.6	1.372	-0.852
25	(107.41, 102.46, 113.29, 104.57, 106.94)	1.734	7.874	0	1.368	-0.6	1.408	-0.827
26	(110.80, 112.15, 105.17, 116.96, 111.27)	2.818	9.792	0	1.513	-0.6	1.549	-0.804
27	(96.97, 106.26, 99.35, 111.12, 103.43)	0.856	9.749	0	1.448	-0.6	1.480	-0.784
28	(105.93, 112.91, 101.88, 118.70, 109.86)	2.464	11.312	0	1.549	-0.6	1.578	-0.765
29	(109.02, 102.70, 109.22, 117.43, 109.59)	2.398	12.811	0	1.634	-0.6	1.660	-0.749
30	(105.97, 124.44, 106.08, 127.40, 115.97)	3.993	15.904	0	1.870	-0.6	1.893	-0.734

관리도의 성능이 전반적으로 더 좋음을 알 수 있다. 그러나 Case 3에서는 수정된 REWMA 관리도의 성능이 이상 상태 영역에서 전반적으로 우수함을 알 수 있다. 관리 상태 영역에서의 오경보율 측면에서는 모든 Case에 대해 수정된 IEWMA 관리도의 성능이 더 우수한 것으로 나타났다. 따라서 이상 상태 영역의 경계에서 빠른 신호가 중요한 경우에는 수정된 REWMA 관리도, 관리 상태 영역에서 작은 오경보율이 중요한 경우에는 수정된 IEWMA 관리도의 사용을 권장한다.

결론적으로 이 논문에서 제안된 EWMA 관리도 절차는 3개의 모수 영역으로 구성된 생산 공정을 모니터링하는 경우 CUSUM 관리도의 좋은 대안으로 사용할 수 있다고 판단된다.

5. 예제

공정 평균이 3개의 영역으로 구성된 공정에 대해, Woodall (1985)과 Woodall과 Faltin (2019)에서 예를 든 상황은 다음과 같다.

관리 상태일 때 공정 평균과 표준 편차는 각각 $\mu_0 = 100$, $\sigma = 8$ 이고 각 시점마다 $n = 4$ 의 표본을 측정한다. 이때 공정 평균이 (97.6, 102.4)의 영역으로 변화하는 것은 탐지하기를 원하지 않지만, 104.8을 초과하거나 95.2 미만으로 변화하는 경우 이를 빠르게 탐지하기를 원한다고 가정하였다. 이에 대해 표준화 절차를 수행하면 공정 평균에 대한 값들은 각각 $\mu_{wa}^+ = 0.6$, $\mu_{wa}^- = -0.6$, $\mu_{bu}^+ = 1.2$, $\mu_{bu}^- = -1.2$ 가 된다. 따라서 관리 상태 영역, 무관심 영역, 이상 상태 영역은 각각 $M_0 = (-0.6, 0.6)$, $I = (-1.2, -0.6) \cup (0.6, 1.2)$, $M_1 = (-\infty, -1.2) \cup (1.2, \infty)$ 가 된다.

먼저 2절에서 소개된 CUSUM 관리도 절차를 적용하면, 참고값은

$$k_U = \frac{0.6 + 1.2}{2} = 0.9, \quad k_L = \frac{-0.6 - 1.2}{2} = -0.9$$

가 되고, 식 (2.1)에 정의된 U_i 와 L_i 를 관리 통계량으로 사용하여 공정을 모니터링하게 된다. 이때 관리 한계 h 는 $ARL_0 = 200$ 을 만족하도록 $h = 5.015$ 로 설정하였다. 3절에 제안된 수정된 REWMA 관리도와 IEWMA 관리도 절차에서 가중치는 $\lambda = 0.1$ 을 사용하였고, $ARL_0 = 200$ 을 만족하도록 관리 한계는 각각 $h_k^+ = |h_k^-| = 1.142$ ($L_R = 2.362$)와 $h_j^+ = |h_j^-| = 1.318$ ($L_I = 6.299$)을 사용하였다.

가정한 상황에 대해 다음과 같이 표본을 생성하였다. 즉, 시점 $t = 1$ 에서 20까지는 관리 상태를 가정하여 $N(100, 8^2)$ 에서 $n = 4$ 인 표본을 생성하였고, $t = 21$ 에서 30까지는 이상 상태로 가정하여 $N(107, 8^2)$ 에서 표본을 생성하였다. 생성된 표본과 각 관리도에서 계산된 통계량을 Table 6에 수록하였다. 이때 \bar{Z}_t 는 표준화된 표본에 대한 표본 평균을 나타낸다. CUSUM 관리도, 수정된 REWMA 관리도, 수정된 IEWMA 관리도 절차 모두 $t = 20$ 까지 오경보가 발생하지 않았고, 이상 원인이 발생한 후 네 번째 시점인 $t = 24$ 에서 이상 상태 신호가 발생하였다. 따라서 제안된 수정된 REWMA 관리도와 IEWMA 관리도 절차가 주어진 상황을 잘 모니터링함을 알 수 있다. 작성된 세 가지 관리도를 각각 Figure A.1, A.2, A.3에 나타내었다.

6. 결론

이 논문에서는 3개의 모수 영역에 적용할 수 있는 두 가지 EWMA 관리도 절차를 제안하였다. 수정된 REWMA 관리도는 계산된 EWMA 통계량이 관리 상태 영역 내에 있는 경우에는 관리 통계량을 μ_{wa}^+ 또는 μ_{wa}^- 로 대체하고 관리 상태 영역을 벗어난 경우에만 EWMA 통계량을 관리 통계량으로 사용한다. 수정된 IEWMA 관리도는 표본 통계량이 관리 상태 영역 내에 있는 경우에는 μ_{wa}^+ 또는 μ_{wa}^- 로 대체하고 관리 상태 영역을 벗어난 경우에만 관리 통계량을 계산할 때 사용한다.

모수 영역의 세 가지 경우에 대해 모의실험을 수행한 결과, 제안된 EWMA 관리도 절차는 CUSUM 관리도에 비해 이상 상태 영역에서의 성능은 전반적으로 유사하거나 조금 나뉘지만, 관리 상태 영역에서의 오경보율 측면에서는 더 좋은 성능을 보임을 알 수 있었다.

향후 공정 모수의 영역이 좀 더 복잡하게 구성되어 있는 상황을 모니터링할 수 있는 관리도 절차와 이에 대한 성능에 대해 연구를 진행할 예정이다.

Appendix:

Appendix에서는 식 (3.6), (3.7), (3.8), (3.9)의 결과를 유도하고자 한다. 먼저 $E_0(Y_t^+)$ 는

$$E_0(Y_t^+) = \int_{-\infty}^{\mu_{wa}^+} \mu_{wa}^+ f_{\bar{X}}(x) dx + \int_{\mu_{wa}^+}^{\infty} x f_{\bar{X}}(x) dx$$

가 되고, 이때 첫 번째 항과 두 번째 항은 각각

$$\mu_{wa}^+ \Phi(z^+), \quad \mu_0 [1 - \Phi(z^+)] + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \phi(z^+)$$

로 계산되어, 식 (3.6)의 결과를 얻을 수 있다. 여기서 $f_{\bar{X}}(x)$ 는 \bar{X}_t 의 분포인 $N(\mu_0, \sigma^2/n)$ 의 PDF를 나타내고,

$$z^+ = \frac{\mu_{wa}^+ - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

이다. 유사하게, $E_0(Y_t^-)$ 는

$$E_0(Y_t^-) = \int_{-\infty}^{\mu_{wa}^-} x f_{\bar{X}}(x) dx + \int_{\mu_{wa}^-}^{\infty} \mu_{wa}^- f_{\bar{X}}(x) dx$$

가 되고, 첫 번째 항과 두 번째 항은 각각

$$\mu_0 \Phi(z^-) - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \phi(z^-), \quad \mu_{wa}^- [1 - \Phi(z^-)]$$

로 계산되어, 식 (3.7)의 결과를 얻을 수 있다. 여기서

$$z^- = \frac{\mu_{wa}^- - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

이다.

다음으로 $E_0((Y_t^+)^2)$ 은

$$E_0((Y_t^+)^2) = \int_{-\infty}^{\mu_{wa}^+} (\mu_{wa}^+)^2 f_{\bar{X}}(x) dx + \int_{\mu_{wa}^+}^{\infty} x^2 f_{\bar{X}}(x) dx$$

가 되고, 이때 첫 번째 항과 두 번째 항은 각각

$$(\mu_{wa}^+)^2 \Phi(z^+), \quad (\mu_0)^2 [1 - \Phi(z^+)] + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \mu_0 \phi(z^+) + \frac{\sigma^2}{n} [z^+ \phi(z^+) + 1 - \Phi(z^+)]$$

가 되어 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$E_0((Y_t^+)^2) = (\mu_{wa}^+)^2 \Phi(z^+) + \left[(\mu_0)^2 + \frac{\sigma^2}{n} \right] [1 - \Phi(z^+)] + \left[\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \mu_0 + \frac{\sigma^2}{n} z^+ \right] \phi(z^+). \quad (\text{A.1})$$

따라서, 식 (A.1)과 (3.6)을 이용하여 $\text{Var}_0(Y_t^+)$ 를 계산한 후 항들을 정리하면, 식 (3.8)을 유도할 수 있다.

유사하게, $E_0((Y_t^-)^2)$ 은

$$E_0((Y_t^-)^2) = \int_{-\infty}^{\mu_{wa}^-} x^2 f_{\bar{X}}(x) dx + \int_{\mu_{wa}^-}^{\infty} (\mu_{wa}^-)^2 f_{\bar{X}}(x) dx$$

가 되고, 이때 첫 번째 항과 두 번째 항은 각각

$$(\mu_0)^2 \Phi(z^-) - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \mu_0 \phi(z^-) + \frac{\sigma^2}{n} [-z^- \phi(z^-) + \Phi(z^-)], \quad (\mu_{wa}^-)^2 [1 - \Phi(z^-)]$$

가 되어 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$E_0((Y_t^-)^2) = (\mu_{wa}^-)^2 [1 - \Phi(z^-)] + \left[(\mu_0)^2 + \frac{\sigma^2}{n} \right] \Phi(z^-) - \left[\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \mu_0 + \frac{\sigma^2}{n} z^- \right] \phi(z^-). \quad (\text{A.2})$$

따라서, 식 (A.2)와 (3.7)을 이용하여 $\text{Var}_0(Y_t^-)$ 를 계산한 후 항들을 정리하면, 식 (3.9)를 유도할 수 있다.

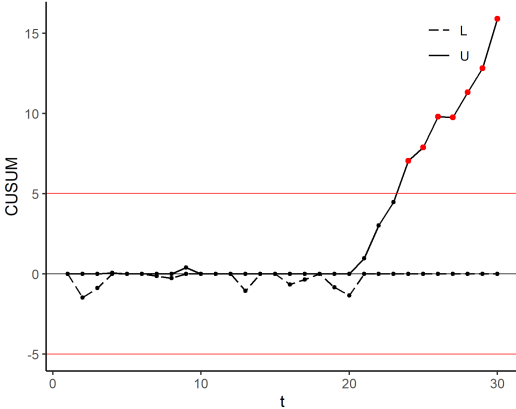


Figure A.1: CUSUM chart.

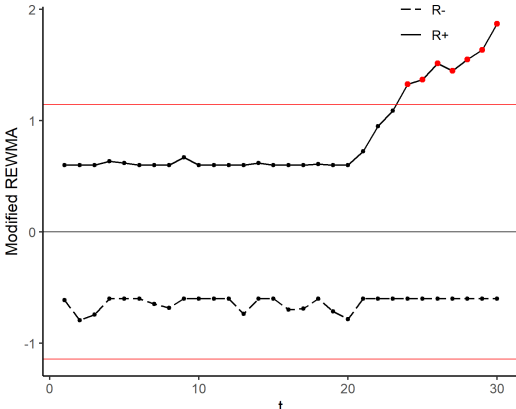


Figure A.2: Modified REWMA chart.

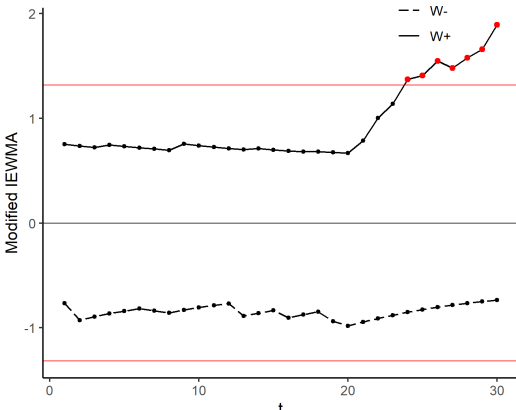


Figure A.3: Modified IEWMA chart.

References

- Crowder SV and Hamilton MD (1992). An EWMA for monitoring a process standard deviation, *Journal of Quality Technology*, **24**, 12–21.
- Freund RA (1957). Acceptance control charts, *Industrial Quality Control*, **14**, 13–23.
- Hill D (1956). Modified control limits, *Applied Statistics*, **5**, 12–19.
- Shu L, Jiang W, and Wu S (2007). A one-sided EWMA control chart for monitoring process means, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **36**, 901–920.
- Woodall WH (1985). The statistical design of quality control charts, *The Statistician*, **34**, 155–160.
- Woodall WH and Faltin FW (2019). Rethinking control chart design and evaluation, *Quality Engineering*, **31**, 596–605.

Received August 19, 2022; Revised October 1, 2022; Accepted October 16, 2022

3개의 모수영역을 모니터링하는 EWMA 관리도

김유경^a, 이재현^{1,b}

^a고려대학교 통계학과, ^b중앙대학교 응용통계학과

요 약

통계적 공정 모니터링에서 관리 상태일 때 품질 특성치의 모수값은 하나의 값으로 지정하는 경우가 대부분이다. 그러나 관리 상태에서 공정 모수의 작은 변화는 실제적으로 크게 중요하지 않은 경우, 품질 특성치의 모수 영역은 관리 상태, 무관심, 그리고 이상 상태의 세 영역으로 구성될 수 있다. 이 논문에서는 3개의 모수 영역이 있는 공정에 적용할 수 있는 두 가지 지수가중 이동평균(exponentially weighted moving average; EWMA) 관리도 절차를 제안하고, 제안된 절차의 성능을 Shewhart 관리도 및 누적합(cumulative sum; CUSUM) 관리도와 비교하여 그 효율을 평가하였다.

주요용어: 평균 런길이, 지수가중 이동평균 관리도, 무관심 영역, 통계적 공정 모니터링

이 논문은 2021년도 중앙대학교 연구장학기금 지원에 의한 것임.

¹교신저자: (06974) 서울시 동작구 흑석로 84, 중앙대학교 응용통계학과. E-mail: jaeheon@cau.ac.kr