

Power transformation in quasi-likelihood innovations for GARCH volatility

Sunah Chung^a, Sun Young Hwang^a, Sung Duck Lee^{1,b}

^aDepartment of Statistics, Sookmyung Women's University;

^bDepartment of Statistics, Chungbuk National University

Abstract

This paper is concerned with power transformations in estimating GARCH volatility. To handle a semi-parametric case for which the exact likelihood is not known, quasi-likelihood (QL) rather than maximum-likelihood method is investigated to best estimate GARCH via maximizing the information criteria. A power transformation is introduced in the innovation generating QL estimating functions and then optimum power is selected by maximizing the profile information. A combination of two different power transformations is also studied in order to increase the parameter estimation efficiency. Nine domestic stock prices data are analyzed to order to illustrate the main idea of the paper. The data span includes Covid-19 pandemic period in which financial time series are really volatile.

Keywords: GARCH, information matrix, power transformation, quasi-likelihood

1. 서론

금융 시계열 자료는 시간(t)의 흐름에 따라 관심 있는 자산 가격(asset price)이 관측되는 확률 과정의 수열이다. 일반적으로, t 시점에서 충격(shock)이 발생했을 때 자산 가격(혹은 자산 수익률)에 대한 효과(effect)는 일시적이기보다는 어느 기간 동안 지속하는 특성을 보이게 된다. 금융 위기와 같은 강한 충격은 시계열의 변동성(volatility)이 높게 지속되는 기간을 만들면서 동시에 일정 시간이 지난 후에는 충격의 영향이 점차 사라지게 되면서 변동성이 낮은 기간 역시 상당 기간 계속된다. 즉, 변동성은 시간의 흐름에 따라 높게 지속되는 시기와 낮게 지속되는 시기가 클러스터를 구성하면서 반복되는 특징을 보인다. 이 변동성은 직접 관찰되지 않으므로 변동성을 측정하기 위해서 변동성을 자료의 점화식 형태로 모델링하는 것은 금융 시계열에서 매우 중요하게 된다. 변동성이 크다는 것은 시장에서 불확실성이 커진다는 것이므로 변동성을 모델링하는 것은 예상 위험을 산정하는 것이기도 하다. 변동성(volatility)은 수익률(return)의 조건부 분산 또는 조건부 표준 편차이다. $t - 1$ 시점까지의 정보에 조건부(conditional)인 t 시점의 분산, 즉, 변동성을 σ_t^2 로 표현하자. 변동성은 시간에 따라 변하는 관측 불가능(unobservable) 확률 과정이다. 관측 시계열 $\{y_t\}$ 는 조건부 이분산(변동성) σ_t^2 을 포함하는 시계열로 다음과 같은 곱셈형태의 모형(multiplicative model)으로 표현한다.

$$y_t = \sqrt{\sigma_t^2}(\theta)e_t. \quad (1.1)$$

This research was partially supported by a grant from the National Research Foundation of Korea (NRF-2021R1F1A1047952).

¹ Corresponding author: Department of Information Statistics, Chungbuk National University, Chungdae-ro 1, Seowon-Gu, Cheongju, Chungcheongbuk-do 28644, Korea. E-mail: sdlee@chungbuk.ac.kr

$\sigma_t^2(\theta)$ 는 관심 모수 θ 와 $t-1$ 시점까지의 정보 $y_{t-1}^2, y_{t-2}^2, \dots$ 로 이루어진다. $\{e_t\}$ 는 평균이 0이고 분산이 1인 표준화된 iid 확률 변수열이고 $\{y_u, u \leq t-1\}$ 와는 독립이다. 대표적인 모형은 자기회귀 조건부 이분산(autoregressive conditional heteroskedasticity; ARCH) 모형과 이를 확장한 Bollerslev (1986)의 일반화 자기회귀 조건부 이분산(Generalized ARCH; GARCH) 모형이다. 이 모형들은 변동성을 설명하기 위해서 조건부 분산에 대한 오차가 없는 함수식을 사용한다. 예를 들어, GARCH (p, q) 모형은 다음과 같은 확률적 점화수식이다.

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2. \quad (1.2)$$

여기서 $\omega > 0$ 이고 $\alpha_i \geq 0, \beta_j \geq 0$ 이다. GARCH 모형에서 가장 널리 사용되는 모형은 GARCH $(1, 1)$ 수식 $\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$ 이다.

GARCH 모형에서 모수에 대한 추정에는 자료의 우도(가능도, likelihood)를 아는 경우 사용하는 ML (maximum likelihood) 방법이 대표적이며 우도가 참이라는 가정하에서는 최적(optimal)으로 알려져 있다. 우도를 모른다고 가정하는 경우에는 QML (quasi maximum likelihood) 방법 및 QL (quasi likelihood) 방법 등이 있다. 실제 분포를 안다는 것은 현실적이지 않다. QML 추정법은 가정한 분포를 사용해서 얻은 우도를 최대화 해서 추정량 QMLE (quasi maximum likelihood estimator)을 얻게 되는데 (모르는) 실제 분포와 가정한 분포가 멀어질수록 QMLE 효율성이 점점 감소하게 된다. 식 (1.1) 모형에서 우도를 안다는 것은 e_t 분포를 안다는 것과 동치(equivalent)이다. 추정 방정식(estimating equation; EE)으로 알려져있는 QL (quasi likelihood) 방법은 분포에 대한 가정을 하지 않고 관심 모수에만 초점을 맞추어 이에 대한 추정 함수를 선택하고 방정식을 영(zero)으로 놓고 풀어서 추정치를 얻는다. 실제 우도(분포)를 모르더라도 1차와 2차 모멘트에 대한 가정만으로도 추정 방정식을 만들 수 있으므로 특정 모멘트 조건을 만족하는 넓은 범위의 모형에 적용된다는 장점이 있다. GARCH 분야에서 모수 추정 방법에 대한 광범위한 review는 Hwang (2016)을 참고하기 바란다.

본 논문에서는 오차항 e_t 의 분포를 지정(specify)하지 않은 준모수(semi-parametric) GARCH 모형을 연구하고 있다. 효율적인 준-우도(QL) 추정 방정식을 구성하기 위한 이노베이션에 멱변환(power transformation)을 도입하여 준-정보(quasi-information)를 최대화 하는 멱변환을 사용하고자 한다. 예시를 위해 코로나 펜데믹 기간 변동성이 높은 국내 주가 수익률 자료를 분석하였다.

2. 준-우도(QL) 방법에서 최적 멱변환 선택

준-우도(QL) 방법은 조건부 이분산 시계열에서 오차항의 우도를 모를 때에도 연관 모수를 추정할 수 있는 방법이다. 자료의 우도를 명시하지 않고 몇 개의 조건부 적률을 이용하여 추정 함수 구성하고 추정 함수 = 0인 추정 방정식을 풀어서 모수를 추정하는 준-모수적 방법이다. 준-우도 방법의 일반화 연구를 수행한 Godambe (1985)에 의하면 선형(linear) 추정 함수 클래스 내에서 정보(information)를 최대화 하는 최적(optimum) 추정 함수를 구할 수 있으며 이를 최소 조건하에서 수식으로 표현하였다. 정보를 최대화한다는 것은 해당 준-우도 추정량 (극한)분산을 최소화하는 것과 동치이다. 일반적인 최적 준-우도 (QL) 추정 함수 방법론에 대해서 Hwang과 Basawa (2011) 중심으로 정리해 보았다.

2.1. 최적 준-우도(QL) 추정 함수

확률 공간 (Ω, F, P_θ) 에서 정의된 시계열 $\{y_t\}$ 를 고려한다. $\{y_t\}$ 와 관련하여 $(v \times 1)$ 벡터 관심 모수 θ 로 인덱싱되는 확률 측도 P_θ 를 고려한다. 우도가 알려지지 않은 크기 n 의 관측치 y_1, y_2, \dots, y_n 이 주어졌을 때 관심 모수 θ 의 준-우도 추정 함수는 다음의 단계를 거쳐 얻을 수 있다. Godambe (1985)는 선형 추정 함수 클래스 내에서 소위 (Godambe) information 기준을 최대화한다는 의미에서 최적의 추정 함수에 대한 개념을 소개하였다. 기호 F_t 는 y_t, y_{t-1}, \dots, y_1 에 의해 만들어지는 σ -필드이며 $(v \times 1)$ 추정 함수(estimating function; EF) $G_n(\theta)$ 를 다음과

같이 정의한다.

$$G = \left\{ G_n(\theta); G_n(\theta) = \sum_{t=1}^n w_{t-1}(\theta) g_t(\theta) \right\}. \quad (2.1)$$

여기서 고정된 이노베이션(innovation) $\{g_t(\theta)\}$ 는 마팅계일 차(martingale difference)의 확률 변수열이고, $w_{t-1}(\theta)$ 는 $(\nu \times 1)$ 가중 벡터이며 F_{t-1} measurable이다. 추정 함수 $G_n(\theta)$ 의 '선형' 클래스 G 는 이노베이션 $g_t(\theta)$ 를 고정하고 가중 'coefficients' $w_{t-1}(\theta)$ 를 변화시켜서 다양하게 얻을 수 있다. 본 논문에서, 조건부 기호로서, E_{t-1} 와 Var_{t-1} 은 F_{t-1} 하에서 조건부 기댓값과 조건부 분산을 각각 의미한다. 즉, $E_{t-1}(\cdot) = E(\cdot|F_{t-1})$ 이고 $\text{Var}_{t-1}(\cdot) = \text{Var}(\cdot|F_{t-1})$ 이다. 추정 함수 $G_n(\theta)$ 의 정보(행렬) $I_{G_n}(\theta)$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$I_{G_n}(\theta) = \left[E \left(\frac{\partial G_n(\theta)}{\partial \theta^T} \right) \right]^T [\text{Var}(G_n(\theta))]^{-1} E \left(\frac{\partial G_n(\theta)}{\partial \theta^T} \right) : (\nu \times \nu). \quad (2.2)$$

여기서 'T'는 'transpose'를 나타내고, $\text{Var}(G_n(\theta)) = E(G_n(\theta)G_n^T(\theta)) : (\nu \times \nu)$ 이다. 선형 추정 함수 집합 식 (2.1)의 G 내에서 최적 준-우도 추정 함수 $G_n^O(\theta)$ 는 다음과 같다.

$$G_n^O(\theta) = - \sum_{t=1}^n \left(E_{t-1} \left[\frac{\partial g_t(\theta)}{\partial \theta} \right] / E_{t-1} [g_t^2(\theta)] \right) g_t(\theta) : (\nu \times 1). \quad (2.3)$$

$G_n^O(\theta)$ 로 부터 계산되는 정보(행렬) $I_{G_n^O}(\theta)$ 는 Hwang과 Basawa (2011)에서 설명되었듯이 pseudo-Fisher information (Godambe, 1985)으로도 알려져 있다.

$$I_{G_n^O}(\theta) = E \left[\sum_{t=1}^n \frac{(E_{t-1} [\partial g_t(\theta) / \partial \theta]) (E_{t-1} [\partial g_t(\theta) / \partial \theta])^T}{E_{t-1} [g_t^2(\theta)]} \right] : (\nu \times \nu). \quad (2.4)$$

여기서 $I_{G_n^O}(\theta) - I_{G_n}(\theta)$ 는 G 안의 $G_n(\theta)$ 에 대해 비음 정치(non-negative definite) 행렬이다. 따라서, 고정된 이노베이션 $\{g_t(\theta)\}$ 의 선형 클래스 G 내에서 정보 $I_{G_n^O}(\theta)$ 이 '최대'가 된다는 의미이며 해당 추정 함수인 $G_n^O(\theta)$ 를 최적 준-우도(QL) 추정 함수로 부르며 방정식 $G_n^O(\theta) = 0$ 을 준-우도 추정 방정식이라 명명한다. 예를 들어, 이노베이션 $g_t(\theta) = y_t^2 - \sigma_t^2(\theta)$ 을 사용하는 경우, 최적 준-우도 추정 함수 (2.3)은

$$G_n^O(\theta) = \sum_{t=1}^n \frac{\partial \sigma_t^2(\theta)}{\partial \theta} \left[(\zeta - 1) \sigma_t^4(\theta) \right]^{-1} [y_t^2 - \sigma_t^2(\theta)] \quad (2.5)$$

이다. 여기서 $\zeta = E(e_t^4)$ 이며, 준-우도 추정량은 준-우도 추정 방정식 $G_n^O(\theta) = 0$ 을 풀어서 얻는다. 자세한 내용은 Hwang과 Basawa (2011)를 참고하기 바란다.

2.2. 준-우도(QL) 이노베이션에서 멱변환 도입

차수 m 의 멱변환 이노베이션 $g_t(\theta; m)$ 을 다음과 같이 정의한다.

$$g_t(\theta; m) = |y_t|^m - E(|y_t|^m | F_{t-1}) = |y_t|^m - \left[\sigma_t^2(\theta) \right]^{\frac{m}{2}} E(|e_t|^m). \quad (2.6)$$

여기서, $m > 0$ 이며, 예를 들어, $m = 2$ 인 이노베이션 $g_t(\theta; 2) = y_t^2 - \sigma_t^2(\theta)$ 이고 이는 y_t^2 예측 오차이며, $m = 1$ 이라면 $g_t(\theta; 1)$ 는 절대값 $|y_t|$ 의 예측 오차이다. 따라서 차수 m 의 멱변환 이노베이션 $g_t(\theta; m)$ 을 사용하는 경우, 식 (2.1)에 비추어 보면 $|y_t|^m$ 의 최적 예측 문제와 밀접한 연관이 있다(cf., Francq 등, 2011; Francq과 Zakoian, 2013; Chung과 Hwang, 2017). 최적(optimum) $m > 0$ 을 추정하는 방법은 프로파일-정보(profile information)를 최대화하여 얻는다. 이에 대한 절차를 Chung과 Hwang (2017)을 중심으로 정리하였다. 식 (2.6)에서 정의된

역변환 이노베이션을 고려하자. 보통, 이노베이션은 $g_i(\theta) = y_i^2 - \sigma_i^2(\theta)$ 와 같이 $m = 2$ 를 많이 사용한다. 이제 이노베이션 $g_i(\theta; m)$ 에서 역변환 차수 m 을 고정하고 최적 QL-추정 함수의 정보 행렬(식 (2.4) 참조)을 구하면 이는 고정된 m 의 함수이며 이를 프로파일-정보(profile information)이라 한다. ‘최적’의 역변환 m 은 프로파일-정보를 비교해서 제일 큰 프로파일-정보를 제공하는 m 으로 찾는다. Chung과 Hwang (2017)에 의하면 고정된 m 에 대한 프로파일-정보는 다음과 같다.

$$I_{G_n^o}(\theta; m) = c_m \sum_{i=1}^n E \left[\sigma_i^{-4} \left(\frac{\partial \sigma_i^2}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial \sigma_i^2}{\partial \theta} \right)^T \right]. \quad (2.7)$$

여기서 상수 c_m 은 다음과 같다.

$$c_m = \frac{(E|e_i|^m)^2}{\left[E|e_i|^{2m} - (E|e_i|^m)^2 \right]} \frac{m^2}{4}. \quad (2.8)$$

즉, c_m 은 $\{e_i\}$ 의 실제 분포 적률로 구성되며, 따라서 실제 c_m 은 분포가 참이라는 가정하에서만 계산할 수 있다. 우리가 주로 사용하는 정규 분포, t -분포, GED (generalized error distribution)에서의 c_m 은 다음과 같다.

- (i) e_i 가 $N(0, 1)$ 을 따를때, $E|e_i|^m = 1/\sqrt{\pi} 2^{m/2} \Gamma(m+1/2)$ 이므로(Hwang과 Basawa, 2004) 다음을 얻는다. 여기서 $\Gamma(\cdot)$ 는 감마 함수이다.

$$c_m = \frac{(\Gamma((m+1)/2))^2}{\left[\sqrt{\pi} \Gamma((2m+1)/2) - (\Gamma((m+1)/2))^2 \right]} \frac{m^2}{4}. \quad (2.9)$$

- (ii) e_i 가 자유도 ν 의 표준화된 Student t -분포를 따를 때는(자유도 ν 의 표준화된 Student t -분포에 대한 확률 밀도함수는 Tsay (2010, p.121)를 참조), $\nu - m > 0$ 조건하에서 다음이 성립한다.

$$E|e_i|^m = \frac{(\nu-2)^{\frac{m}{2}} \Gamma((m+1)/2) \Gamma((\nu-m)/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu/2)},$$

$$c_m = \frac{(\Gamma((m+1)/2) \Gamma((\nu-m)/2))^2}{\left[\sqrt{\pi} \Gamma(\nu/2) \Gamma((2m+1)/2) \Gamma((\nu-2m)/2) - (\Gamma((m+1)/2) \Gamma((\nu-m)/2))^2 \right]} \frac{m^2}{4}. \quad (2.10)$$

- (iii) $\{e_i\}$ 가 일반화 오차 분포(generalized error distribution), 즉, GED(r)을 따를 때 다음이 성립한다(표준화된 GED(r)에 대한 확률 밀도 함수는 Tsay (2010, p.122)를 참조하고 $E|e_i|^m$ 는 Vasudevay와 Kumari (2013, p.91)을 참조).

$$E|e_i|^m = \frac{\Gamma((m+1)/r)}{\Gamma(1/r)} \left[\frac{\Gamma(1/r)}{\Gamma(3/r)} \right]^{\frac{m}{r}},$$

$$c_m = \frac{\Gamma^2((m+1)/r)}{\Gamma((2m+1)/r) \Gamma(1/r) - \Gamma^2((m+1)/r)} \frac{m^2}{4}. \quad (2.11)$$

식 (2.7)의 프로파일-정보 $I_{G_n^o}(\theta; m)$ 에서 특이한 사항은, $I_{G_n^o}(\theta; m)$ 는 c_m 을 통해서만 역변환 차수 m 에 의존하게 된다. 즉, 프로파일-정보를 최대화 하는 작업은 c_m 의 최대화와 동치이다. 따라서, 변환 차수 m 을 변화시키면서 c_m 을 최대화하는 m 을 찾고 이를 최적 (추정) 차수로 선택할 수 있다.

3. 두 개의 이노베이션 결합을 통한 최적 역변환 선택

GARCH 모형 $y_t = \sigma_t e_t$ 에서 추정량의 효율성을 더 증가시키는 방법으로, 두 개의 역변환 이노베이션 결합(combination)을 고려한다. 즉, 다음과 같이 두 개의 역변환 차수 k 와 m 을 동시에 고려한다.

$$g_t(\theta) = \begin{pmatrix} |y_t|^k - \sigma_t^k \\ |y_t|^m - \sigma_t^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{kt} \\ g_{mt} \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

다차원(multi-dimensional) 벡터의 준-우도 이노베이션과 관련된 최적 준-우도(QL) 추정 함수에 대해서는 Yoon과 Hwang (2021)을 참고하기 바라며 결과된 최적 준-우도(QL) 추정 함수는 다음과 같다.

$$QL(\theta) = - \sum_{t=1}^n \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \theta} \left(\frac{k}{2} \sigma_t^{k-2}, \frac{m}{2} \sigma_t^{m-2} \right) V_{t-1}^{-1}(\theta) \begin{pmatrix} g_{kt}(\theta) \\ g_{mt}(\theta) \end{pmatrix}; (\nu \times 1). \quad (3.2)$$

여기서,

$$V_{t-1}(\theta) = E_{t-1} [g_t(\theta) g_t^T(\theta)] = \begin{pmatrix} \sigma_t^{2k} (E|e_t|^{2k} - 1) & \sigma_t^{m+k} (E|e_t|^{k+m} - 1) \\ \sigma_t^{m+k} (E|e_t|^{k+m} - 1) & \sigma_t^{2m} (E|e_t|^{2m} - 1) \end{pmatrix}; (2 \times 1)$$

이다. 고정된 k 와 m 에 대해서 최대 정보는 식 (2.4)를 통해서 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} I(\theta) &= E \sum_{t=1}^n \left(\frac{k}{2} \sigma_t^{k-2}, \frac{m}{2} \sigma_t^{m-2} \right) V_{t-1}^{-1}(\theta) \begin{pmatrix} \frac{k}{2} \sigma_t^{k-2} \\ \frac{m}{2} \sigma_t^{m-2} \end{pmatrix} \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \theta} \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \theta^T}; (\nu \times \nu) \\ &= c_{k,m} \left\{ E \sum_{t=1}^n \frac{1}{\sigma_t^4} \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \theta} \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \theta^T} \right\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

여기서 $c_{k,m}$ 은 다음과 같다.

$$c_{k,m} = \frac{1}{4} \frac{k^2 \text{Var}(|e_t|^m) - 2km \text{Cov}(|e_t|^k, |e_t|^m) + m^2 \text{Var}(|e_t|^k)}{(\text{Var}(|e_t|^k) \text{Var}(|e_t|^m) - \text{Cov}^2(|e_t|^k, |e_t|^m))} \quad (3.4)$$

이다. 따라서 $c_{k,m}$ 을 최대화 시키는 (k, m) 을 이차원 최적 역변환으로 명명할 수 있다. 두 개 역변환 이노베이션 각각의 주변(marginal) 기여(contribution)를 알아보기 위해 $c_{k,m}$ 을 다음과 같이 분해해 보자. 결합(최적)정보 식 (3.3)의 $I(\theta)$ 에 대한 g_{kt} 만의 주변 기여를 c_{k^*} , 그리고 g_{mt} 만의 주변 기여를 c_{m^*} 로 표현하면 다음이 성립한다.

$$c_{k^*} = c_{k,m} - c_m, \quad c_{m^*} = c_{k,m} - c_k. \quad (3.5)$$

각각의 주변 기여 c_{k^*} 와 c_{m^*} 은 다음과 같은 식으로 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} c_{k^*} &= \frac{1}{4} \frac{k^2 \text{Var}(|e_t|^m) - 2km \text{Cov}(|e_t|^k, |e_t|^m) + m^2 \text{Var}(|e_t|^k)}{\text{Var}(|e_t|^k) \text{Var}(|e_t|^m) - \text{Cov}^2(|e_t|^k, |e_t|^m)} - \frac{k^2}{4} \frac{1}{\text{Var}(|e_t|^k)} \\ &= \frac{1}{4} \frac{(k \text{Cov}(|e_t|^k, |e_t|^m) - m \text{Var}(|e_t|^k))^2}{\text{Var}(|e_t|^k) (\text{Var}(|e_t|^k) \text{Var}(|e_t|^m) - \text{Cov}^2(|e_t|^k, |e_t|^m))}, \\ c_{m^*} &= \frac{1}{4} \frac{m^2 \text{Var}(|e_t|^k) - 2km \text{Cov}(|e_t|^k, |e_t|^m) + k^2 \text{Var}(|e_t|^m)}{(\text{Var}(|e_t|^k) \text{Var}(|e_t|^m) - \text{Cov}^2(|e_t|^k, |e_t|^m))} - \frac{m^2}{4} \frac{1}{\text{Var}(|e_t|^m)} \\ &= \frac{1}{4} \frac{(m \text{Cov}(|e_t|^k, |e_t|^m) - k \text{Var}(|e_t|^m))^2}{\text{Var}(|e_t|^m) (\text{Var}(|e_t|^k) \text{Var}(|e_t|^m) - \text{Cov}^2(|e_t|^k, |e_t|^m))}. \end{aligned}$$

$k = 1$ 이고 $m = 2$ 인 경우에 즉, 선형과 이차 멱변환을 결합한 경우, 다음이 성립한다.

$$c_{1'} = \frac{1}{4} \frac{(\text{Cov}(|e_{i,t}|, |e_{i,t}|^2) - 2\text{Var}(|e_{i,t}|))^2}{\text{Var}(|e_{i,t}|)(\text{Var}|e_{i,t}| \text{Var}|e_{i,t}|^2 - \text{Cov}^2(|e_{i,t}|, |e_{i,t}|^2))},$$

$$c_{2'} = \frac{1}{4} \frac{(2\text{Cov}(|e_{i,t}|, |e_{i,t}|^2) - \text{Var}(|e_{i,t}|^2))^2}{\text{Var}(|e_{i,t}|^2)(\text{Var}|e_{i,t}| \text{Var}|e_{i,t}|^2 - \text{Cov}^2(|e_{i,t}|, |e_{i,t}|^2))}.$$

4. 자료분석: 코로나 팬데믹 기간의 국내 주식 수익률 자료

사례 분석을 예시하기 위해 국내 시가총액 상위 종목 중에서 9개 종목을 선택하였다. 자료는 2019년 1월 1일부터 2021년 12월 31일까지 3년간 742개의 일별 종가 데이터 $\{P_t\}$ 이다. 이 시기는 코비드 팬데믹으로 인하여 경제가 큰 충격을 받아 주가가 급락한 이후에 다시 주가가 급격하게 회복되는 과정을 거치면서 변동성이 큰 특징이 있다. 일별 수익률(단위: %), 즉, $r_t = (\ln P_t - \ln P_{t-1}) \times 100$ 로 부터 평균을 영으로 만든(mean corrected) 시계열을 $\{y_t\}$ 라 하자. 즉, $y_t = r_t - \bar{r}$ 이다. 예비 분석을 통해 개별 종목에 대한 조건부 이분산성을 확인하였다. 금융 시계열 자료를 분석할 때 복잡한 모형을 사용하지 않고 일차 모형인 GARCH (1, 1)만을 고려해도 금융 시계열의 변동성을 설명하는데 무리가 없으므로(Hansen과 Lunde, 2005) 변동성 모형으로 GARCH (1, 1)을 적용하여 분석하였다.

$$y_t = \sigma_t e_t, \quad \sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2.$$

오차항 e_t 의 분포를 지정하지 않으면서 모수 추정을 위해 준-우도(QL) 방법을 적용하였다. 첫째, 이노베이션 멱변환 차수로 표준적인 $m = 2$ 를 적용하였고, 둘째로는 m 을 0.1에서 3까지 범위에서 0.1 간격으로 변화시키면서 각 m 에서의 프로파일-정보(profile information)와 상수 c_m 을 계산한 후, 최댓값을 제공하는 m 을 찾고 이를 최적 멱변환(optimum power)으로 선정하였다. 식 (2.8) c_m 은 알지 못하는(unknown) 실제 오차항 적률로 구성되어 있다. 현실적인 계산 방식으로는 일단 표준 정규 분포를 가정하고 모수를 추정된 준-최대 우도 추정량(quasi-MLE; QMLE)으로부터 얻은 가우시안-QMLE-잔차 $\hat{e}_t = y_t/\hat{\sigma}_t$ 를 이용해서 $E|e_t|^m$ 대신에 일치 추정량 $(1/n) \sum_{t=1}^n |\hat{e}_t|^m$ 을, $E|e_t|^{2m}$ 대신에 $(1/n) \sum_{t=1}^n |\hat{e}_t|^{2m}$ 을 사용하였다. 즉,

$$c_m = \frac{((1/n) \sum_{t=1}^n |\hat{e}_t|^m)^2}{((1/n) \sum_{t=1}^n |\hat{e}_t|^{2m}) - ((1/n) \sum_{t=1}^n |\hat{e}_t|^m)^2} \frac{m^2}{4}. \quad (4.1)$$

을 비교하여 최대일 때의 m 을 찾은 후, 최적 멱변환(optimum power)하에서 모수를 추정하였다. 가우시안-QMLE는 실제 오차항의 분포가 표준 정규 분포가 아닌 경우에도 일치성(consistency) 있음이 알려졌다므로(Francq와 Zakoian, 2013) 계산식 (4.1)은 타당성을 가진다. 세 번째로는 이차원 멱변환 이노베이션을 고려하였다. k 를 0.1에서 3까지 범위에서 0.1 간격으로 변화시키고 m 도 0.1에서 3까지 범위에서 0.1 간격으로 변화시키면서 각 (k, m) 의 조합에서 프로파일-정보 행렬의 상수 $c_{k,m}$ 을 비교하여 최대일 때의 k 와 m 을 동시에 찾아보았다. $c_{k,m}$ 의 계산에서도 가우시안 QMLE-잔차 $\hat{e}_t = y_t/\hat{\sigma}_t$ 를 사용하였으며 선정된 최적 멱변환 k 와 m 에 해당하는 두 개의 이노베이션을 결합하여 준-우도(QL) 방법으로 모수를 추정하였다.

삼성전자의 경우를 설명하도록 하자. Figure 1에서 두 차례의 큰 변동성이 나타난다. 이는 Figure 2에서 삼성전자의 추정된 변동성에서도 확인할 수 있다. 2020년 3월 코로나19 팬데믹의 충격으로 주가 하락에 의한 변동성과 2021년 1월 팬데믹 이후 1년도 안 되는 기간의 급격한 상승으로 인한 큰 변동성이다. 이 기간에 종합 주가 지수는 팬데믹으로 1,500 아래까지 폭락하기도 했지만 얼마 지나지 않아 반등을 시작하여 2021년 1월에는 종합 주가 지수가 3,000을 넘어서면서 사상 최고가를 기록하는 등 매우 큰 변동성이 나타난 시기이다.

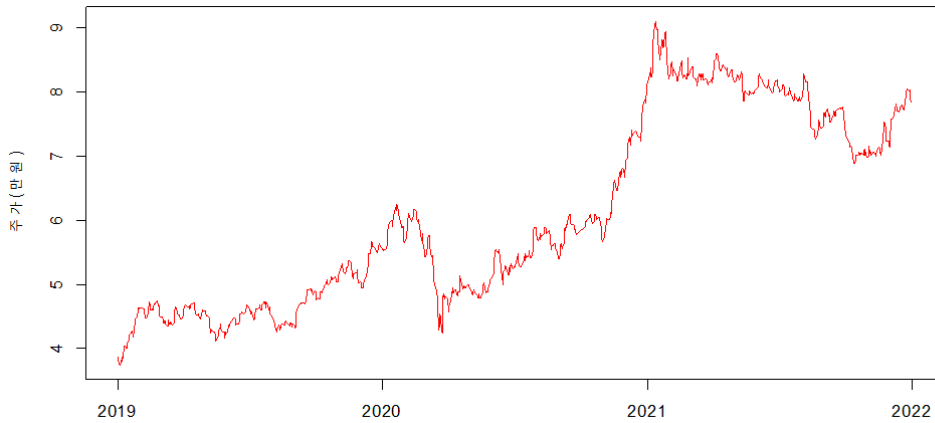


Figure 1: Daily closing price for Samsung Electronics.

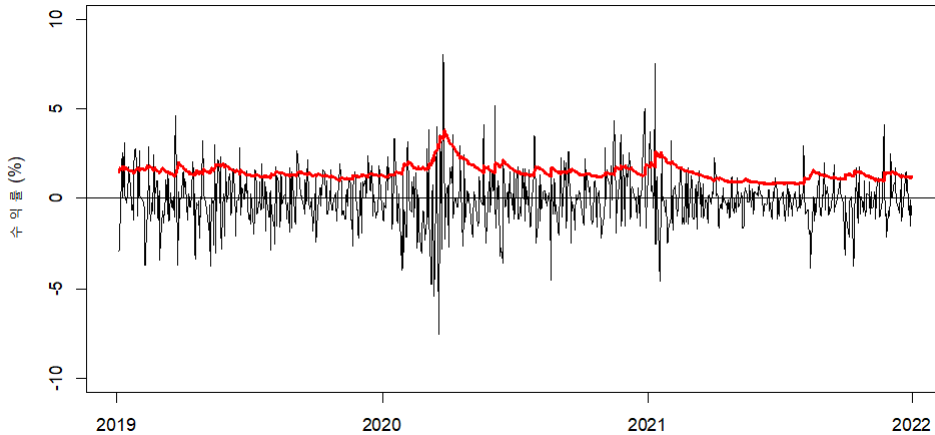


Figure 2: Daily return (—) and estimated volatility (σ_t , —) for Samsung.

이것은 과거 1997년 IMF와 2008년 글로벌 금융위기를 겪은 후에 주식 시장의 상승을 경험한 학습 효과 때문에 위기를 기회로 생각하는 투자 열풍과 더불어 풍부한 유동성이 주식 시장의 활황을 이끌었기 때문이다. Table 1에서 보면, $m = 2$ 일 때 c_m 은 0.276이며, $m = 1.1$ 일 때 c_m 은 0.320으로 최대가 된다. 그러므로, 멱변환이 1.1인 이노베이션을 사용한 모수 추정이 2를 사용하는 경우보다 프로파일-정보가 더 커서(추정에서의 정보량과 분산은 일반적으로 반비례 관계이므로) 결과적으로 추정 오차의 분산이 줄어드는 것으로 나타났다. 최적 멱변환 $m = 1.1$ 의 준-우도(QL) 방법에 의해 추정된 변동성은 다음과 같다.

$$\sigma_t^2 = 0.183 + 0.114 y_{t-1}^2 + 0.809 \sigma_{t-1}^2.$$

또한 Table 2에서 $k = 0.7$ 이고 $m = 0.5$ 일 때 $c_{k,m}$ 은 0.322로 한 개의 멱변환 이노베이션인 c_m 보다 커지면서 추정 오차의 분산은 더 줄어드는 것을 의미하며 추정된 변동성은 다음과 같다.

$$\sigma_t^2 = 0.163 + 0.113 y_{t-1}^2 + 0.818 \sigma_{t-1}^2.$$

다른 종목에 대한 결과 해석은 유사하므로 생략하기로 한다.

Table 1: Profile informations and parameter estimates

종목	m	c_m	$\hat{\omega}$		$\hat{\alpha}_1$		$\hat{\beta}_1$	
삼성전자	2	0.276	0.304	(0.128)	0.120	(0.044)	0.750	(0.084)
	1.1	0.320	0.183	(0.076)	0.114	(0.036)	0.809	(0.056)
Naver	2	0.200	1.063	(0.548)	0.146	(0.069)	0.570	(0.185)
	0.9	0.290	0.865	(0.349)	0.166	(0.058)	0.611	(0.124)
현대차	2	0.219	0.260	(0.112)	0.157	(0.050)	0.785	(0.059)
	0.9	0.300	0.250	(0.092)	0.164	(0.043)	0.782	(0.050)
삼성SDI	2	0.210	1.267	(0.510)	0.199	(0.074)	0.562	(0.138)
	0.9	0.268	0.849	(0.324)	0.163	(0.054)	0.675	(0.094)
기아	2	0.218	0.321	(0.147)	0.172	(0.054)	0.775	(0.063)
	0.9	0.307	0.334	(0.129)	0.135	(0.040)	0.797	(0.053)
POSCO	2	0.337	0.484	(0.237)	0.086	(0.036)	0.772	(0.093)
	1.3	0.363	0.397	(0.192)	0.089	(0.034)	0.794	(0.079)
KB금융	2	0.287	0.387	(0.160)	0.138	(0.047)	0.733	(0.083)
	1.2	0.309	0.324	(0.131)	0.126	(0.041)	0.767	(0.070)
삼성물산	2	0.099	0.470	(0.303)	0.129	(0.080)	0.724	(0.145)
	0.8	0.262	0.350	(0.134)	0.146	(0.049)	0.754	(0.070)
셀트리온	2	0.191	1.402	(0.588)	0.195	(0.077)	0.588	(0.133)
	0.9	0.296	1.438	(0.498)	0.180	(0.059)	0.593	(0.111)

(): 표준오차

Table 2: Selected two powers in QL-innovations : Profile informations and parameter estimates

종목	m	k	$c_{k,m}$	$\hat{\omega}$		$\hat{\alpha}_1$		$\hat{\beta}_1$	
삼성전자	0.5	0.7	0.322	0.163	(0.068)	0.113	(0.035)	0.818	(0.052)
Naver	1.7	1.8	0.299	0.872	(0.344)	0.169	(0.058)	0.607	(0.122)
현대차	1.6	1.4	0.304	0.246	(0.090)	0.161	(0.043)	0.785	(0.049)
삼성SDI	0.8	3.0	0.270	0.859	(0.325)	0.166	(0.054)	0.670	(0.094)
기아	1.6	1.5	0.312	0.326	(0.126)	0.130	(0.038)	0.803	(0.052)
POSCO	1	3.0	0.366	0.385	(0.184)	0.089	(0.034)	0.798	(0.076)
KB금융	0.7	3.0	0.317	0.316	(0.126)	0.126	(0.040)	0.770	(0.068)
삼성물산	1.5	1.7	0.285	0.310	(0.115)	0.145	(0.045)	0.768	(0.062)
셀트리온	0.4	0.3	0.307	1.426	(0.477)	0.188	(0.059)	0.588	(0.107)

(): 표준오차

변동성이 큰 기간이었던 것만큼 9개 종목 모두에서 준-우도 이노베이션에서의 최적 역변환은 2 이하인 것으로 나타났다. 2 아래라는 의미는 그만큼 수익률의 첨도가 크다는 것이므로 추정량의 효율성을 높이기 위해서는 정규 분포와 비교해서 꼬리가 더 두꺼운 분포를 오차항의 분포로 사용해야 한다는 뜻이다. Table 1에서 9개 종목 중에서 삼성물산이 $m = 0.8$ 로 가장 낮았으며 POSCO가 $m = 1.3$ 로 상대적으로 높았으나 모두 1 근처의 값에서 최적 역변환이 선택되었다. 또한, Table 1과 Table 2를 보면, 두 개의 역변환 추정 함수를 결합하여 사용하게 되면 한 개를 사용할 때에 비해서 더 큰 프로파일-정보를 제공함을 알 수 있다. 본 자료 분석의 보다 구체적인 설명과 미래 연구를 위한 제안은 다음과 같다. 첫째, 역변환 차수를 3보다 크게 하는 것은 현실적으로 변환의 의미가 떨어지는 것으로 판단해서 역변환 상한을 3으로 하였는데 Table 2에서 삼성 SDI, POSCO, KB 금융의 값이 경계값 3으로 나타났다. 이 경우에는 3보다 큰 값을 적용해 보는 것도 흥미로운 것이며 경계값이 3을 초과하는 경우는 미래 연구로 남겨두고자 한다. 둘째, Table 1에서 기준이 되는 변환 $m = 2$

보다 프로파일-정보량 기준에서(즉, 모수 추정의 효율성 입장에서) 우수한 변환을 제시하였으나 경쟁이 되는 두 변환 모형을 붓스트랩 등을 통한 예측력 입장에서 비교하는 것도 의미 있을 것이다. 셋째, 역변환 차수를 추정할 때, 최대 프로파일-정보량 기준하에서 최대 상수 c_m 을 추구하고 있으며 실제 미지의 오차항 분포에 따른 영향은 식 (2.8) 상수 c_m 에 나타나는 기댓값 $E(\cdot)$ 을 통해 산정할 수 있다. 정규 분포, t -분포 및 GED 분포의 경우는 (2.9)–(2.11)에 제시하였으나 일반적인 오차 분포에 대해서는 추가 계산이 필요하고 계산 과정이 매우 복잡할 것으로 판단하며, 이는 추후 과제로 남겨 두고자 한다.

References

- Bollerslev T (1986). Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity, *Journal of Econometrics*, **31**, 307–327.
- Chung S and Hwang SY (2017). A profile Godambe information of power transformations for ARCH time series, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **46**, 6899–6908.
- Francq C, Lepage G, and Zakoian JM (2011). Two-stage non Gaussian QML estimation of GARCH models and testing the efficiency of the Gaussian QMLE, *Journal of Econometrics*, **165**, 246–257.
- Francq C and Zakoian JM (2013). Optimal predictions of powers of conditionally heteroscedastic processes, *Journal of the Royal Statistical Society B*, **75**, 345–367.
- Godambe VP (1985). The foundation of finite sample estimation in stochastic processes, *Biometrika*, **72**, 419–428.
- Hansen PR and Lunde A (2005). A forecast comparison of volatility models : Does anything beat a GARCH (1, 1)?, *Journal of Applied Econometrics*, **20**, 873–889.
- Hwang SY and Basawa IV (2004). Stationarity and moment structure for Box-Cox transformed threshold GARCH (1, 1) processes.
- Hwang SY and Basawa IV (2011). Godambe estimating functions and asymptotic optimal inference, *Statistics & Probability Letters*, **81**, 1121–1127.
- Tsay RS (2010). *Analysis of Financial Time Series* (third ed), Wiley, New York.
- Vasudevay R and Kumari JV (2013). On general error distributions, *ProbStat Forum*, **6**, 89–95.
- Yoon JE and Hwang SY (2021). On the threshold innovation in quasi-likelihood for conditionally heteroscedastic time series, *Communications in Statistics : Simulation and Computation*, **50**, 2042–2053.

Received September 9, 2022; Revised September 22, 2022; Accepted September 26, 2022

금융 시계열 변동성 추정을 위한 준-우도 이노베이션의 멱변환

정선아^a, 황선영^a, 이성덕^{1,b}

^a숙명여자대학교 통계학과; ^b충북대학교 정보통계학과

요약

본 논문에서는 금융 시계열 변동성 추정을 위한 준-모수(quasi-likelihood) 방법을 다루고 있다. 모형식에서 오차항의 분포를 미지(unknown)로 하여 준-우도 함수를 통한 모수 추정을 하는 경우 이노베이션의 지정을 멱변환을 통해 구성하였다. 고정된 멱변환에 대한 프로파일-정보 행렬을 비교하여 최대값을 제공하는 멱변환을 제안하였다. 이차원 이노베이션으로의 확장을 다루었으며 코로나 펜데믹 기간의 높은 변동성을 보이는 국내 9개 주가 자료 분석을 통해 방법론을 예시하고 있다.

주요용어: 변동성 분석, 프로파일-정보, 멱변환, 준-우도

이 논문은 2021년도 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임 (NRF-2021R1F1A1047952)

¹교신저자: (28644) 충북 청주시 서원구 충대로 1, 충북대학교 정보통계학과. E-mail: sdlee@chungbuk.ac.kr