Journal of Korean Society of Industrial and Systems Engineering
https://doi.org/10.11627/jksie.2022.45.4.053

Vol. 45, No. 4 : 53-60, December 2022
ISSN : 2005-0461 / EISSN : 2287-7975

# Analysis of a Queueing Model with a Two-stage Group-testing Policy

Won Seok Yang†

Department of Business Administration, Hannam University

# 이단계 그룹검사를 갖는 대기행렬모형의 분석

양 원 석†

한남대학교 경영학과

In a group-testing method, instead of testing a sample, for example, blood individually, a batch of samples are pooled and tested simultaneously. If the pooled test is positive (or defective), each sample is tested individually. However, if negative (or good), the test is terminated at one pooled test because all samples in the batch are negative. This paper considers a queueing system with a two-stage group-testing policy. Samples arrive at the system according to a Poisson process. The system has a single server which starts a two-stage group test in a batch whenever the number of samples in the system reaches exactly a predetermined size. In the first stage, samples are pooled and tested simultaneously. If the pooled test is negative, the test is terminated. However, if positive, the samples are divided into two equally sized subgroups and each subgroup is applied to a group test in the second stage, respectively. The server performs pooled tests and individual tests sequentially. The testing time of a sample and a batch follow general distributions, respectively. In this paper, we derive the steady-state probability generating function of the system size at an arbitrary time, applying a bulk queuing model. In addition, we present queuing performance metrics such as the offered load, output rate, allowable input rate, and mean waiting time. In numerical examples with various prevalence rates, we show that the second-stage group-testing system can be more efficient than a one-stage group-testing system or an individual-testing system in terms of the allowable input rates and the waiting time. The two-stage group-testing system considered in this paper is very simple, so it is expected to be applicable in the field of COVID-19.

Keywords : Group Testing, Queueing Model, Bulk Service, Waiting Time, COVID-19

## 1. 서 론

검사를 통해 질병의 양성 및 음성을 판단하는 경우, 예를 들어, 혈액 검사의 경우, 혈액 샘플을 하나씩 검사하는 개별검사 대신 여러 개의 샘플을 하나의 집단으로 묶어서 검사하는 그룹검사(group test)를 적용할 수 있다. 그룹검사에서는 우선 일정 개수의 샘플을 섞거나 묶어 취합검사(pooled test)를 수행한다. 취합검사 결과가 음성이면 전체 샘플이 모두 음성이므로 검사가 종료된다. 반면, 취합검사가 양성이면 취합된 샘플 중에서 한 개 이상이 양성이므로 해당 샘플들을 모두 다시 개별적으로 검사한다.

취합검사가 음성이면 검사 1회로 해당 그룹의 샘플을 모두 음성으로 판정할 수 있기 때문에 유병률이 낮은 경우 그룹검사를 적용하면 검사횟수가 획기적으로 감소한다. 의료분야에서는 Dorfman[6]이 매독검사를 위한 혈액검사에 처음으로 그룹검사를 제안한 이후, HIV, 간염, 박테리아, 바이러스 검사를 위한 혈액 및 소변 샘플 검사에 그룹

Received 23 September 2022; Finally Revised 22 November 2022; Accepted 23 November 2022
† Corresponding Author : wonsyang@hnu.kr

검사가 적용되고 있다[3]. 그룹검사는 질병 검사 이외에도 화학 및 전기 검사, 오염 제어, 통신시스템의 다중접속에 적용되었다[4, 7]. 아울러, 무게를 기준으로 불량품 검사가 가능한 제품의 불량품 검사에도 그룹검사를 적용할 수 있다[17]. 최근 희소 신호 복원 방법을 적용하거나 측정 잡음을 고려하여 그룹검사 성능을 개선하는 연구도 있다[13, 14]. 그룹검사의 다양한 방법은 Du et al.[7]에 잘 정리되어 있다.

최근 코로나19 검사에 주로 이용되는 RT-PCR(real-time reverse transcriptase polymerase chain reaction) 검사에서도 검사의 효율을 높이기 위해 그룹검사를 적용하는 연구가 이루어지고 있다[1, 8]. 한편, 코로나19의 사례와 같이 검사량이 급증하면 검사 요청에서 검사 및 결과 통보까지의 검사결과 대기시간(waiting time)이 급속도로 증가하여 오랜 시간 검사결과를 초초하게 기다리며 많은 불편을 겪게 된다. 따라서 기존의 그룹검사 연구는 검사횟수의 효율성에 초점을 맞췄으나, Kim[10]의 지적과 같이, 코로나19의 경우에는 검사횟수 뿐만 아니라 검사결과 대기시간도 중요한 성능척도로 고려해야 한다.

코로나19 환자의 발생 과정이 확률적이므로 코로나19의 검사결과 대기시간을 분석하기 위해서는 대기행렬모형을 이용한 시스템 성능 분석이 필요하다. 최근 Kim[10]은 그룹검사를 갖는 대기행렬모형을 이용하여 코로나19 취합검사 시스템의 성능을 분석하였다.

그룹검사를 적용하는 대기행렬모형의 최근 연구로는 대표적으로 Abolnikov and Dukhovny[2], Bar-Lev et al.[3], Kim[10] 등이 있다. 대기행렬모형 관점에서 보면, 그룹검사는 일정 수의 고객을 한꺼번에 서비스하는 배치서비스(batch service) 또는 집단서비스(bulk service)에 해당된다. 따라서 그룹검사를 갖는 대기행렬모형은 집단서비스 대기행렬모형을 이용하여 고객수 및 대기시간과 같은 시스템 성능척도를 분석한다. 그룹검사를 갖는 대기행렬모형 및 이와 관련된 집단서비스 대기행렬모형에 대한 기존 연구는 Kim[10]에 잘 정리되어 있다.

그룹검사에서 취합검사가 양성인 경우, 그룹에 속한 각 샘플을 개별검사 하는 대신, 해당 샘플들을 몇 개의 소그룹으로 나누고, 각 소그룹에 다시 그룹검사를 적용할 수 있다. 이와 같이 여러 단계에 걸쳐 그룹검사를 적용하는 방법을 계층적 도프만 절차라고 부른다. 유병률이 충분히 낮은 경우에는 2단계 이상의 계층적 도프만 절차를 적용하여 검사회수를 줄일 수 있다[17].

그룹검사를 적용한 대기행렬모형의 기존 연구[2, 3, 10]에서는 1단계의 그룹검사를 적용하였다. 본 논문에서는 기존의 1단계 그룹검사를 2단계 그룹검사로 확장한 대기행렬모형을 다루고, Kim[10]과 같이, 코로나19 취합검사 시스템의 성능 분석에 활용한다. 본 논문에서는 현장에서 적용 가능한 간단한 2단계 그룹검사 방안을 제안하고 유병률이 낮은 경우 검사결과 대기시간 측면에서 2단계 그룹검사 시스템이 개별검사 및 1단계 그룹검사 시스템에 비해 효율적임을 보인다.

본 논문에서는 2단계 그룹검사를 갖는 대기행렬모형에 대해 안정상태에서 임의시점 고객수의 PGF(probability generating function)를 유도하고, 처리로드(offered load), 출력률, 허용가능 입력률, 임의시점의 평균 고객수 및 평균 대기시간을 도출한다. 아울러, 수치 예를 통해 본 논문에서 제시한 2단계 그룹검사 시스템과 개별검사 및 1단계 그룹검사 시스템의 성능을 비교 분석한다. 본 논문에서 제시하는 2단계 그룹검사 방법은 시스템 운영 절차가 매우 간단하여 코로나19 취합검사 시스템에 적용가능하리라 기대한다. 코로나19의 발생 초기처럼 유병률이 낮고 검사량이 폭증하여 검사결과 대기시간이 급증하는 경우 본 연구가 현실적이고 실행 가능한 대안이 되리라 기대한다.

이후 본 논문의 구성은 다음과 같다. 제2장에서는 본 논문에서 고려하는 2단계 그룹검사 대기행렬모형을 기술한다. 제3장에서는 고객수 PGF를 유도하고 성능척도를 도출한다. 제4장에서는 수치 예를 다룬다. 마지막으로 제5장에서는 결론 및 향후 연구 방안을 다룬다.

## 2. 가정 및 모형

본 논문에서 고려하는 2단계 그룹검사를 갖는 대기행렬모형은 구체적으로 다음과 같다.

검사대상 샘플은 도착률이 $\lambda$인 포아송 과정에 따라 시스템에 도착한다. 시스템에 대기 중인 샘플이 $g$개가 되면, $g$개 샘플을 모아 취합검사를 시행한다. $g$개의 샘플의 취합검사 결과가 음성이면 $g$개 샘플이 모두 음성이므로 검사를 종료한다. 반면, $g$개 샘플의 취합검사 결과가 양성이면 $g$개 샘플을 $g/2$개씩 두 개의 소그룹으로 나누고 각 소그룹에 그룹검사를 적용한다. 각 소그룹의 취합검사 결과가 음성이면 해당 소그룹의 검사를 종료한다. 취합검사 결과가 양성인 소그룹에 대해서는 해당 소그룹에 속한 샘플을 모두 개별적으로 검사한다. 시스템에 검사장비는 1개이다. 즉, 대기행렬모형의 서버가 1개이다. 서버는 $g$개 샘플의 취합검사, 소그룹의 취합검사 및 개별검사를 순차적으로 진행한다. 개별검사와 취합검사 시간은 각각 독립이며 일반분포를 따른다.

취합검사 및 개별검사에 오류는 없다고 가정한다. 각 샘플이 양성일 확률인 유병률은 알려져 있다고 가정한다. 마지막으로 검사의 편의성을 고려하여 편의상 $g$가 2의 배수라고 가정한다. 2단계 그룹검사를 고려하면 $g$는 4 이상의 2의 배수이다.

본 논문에서는 개별검사, 1단계 및 2단계 그룹검사를 갖는 대기행렬모형을 적용하는 그룹검사 시스템을 각각 개별검사 시스템, 1단계 그룹검사 시스템, 2단계 그룹검사 시스템이라 부른다.

## 3. 대기행렬모형 분석

대기행렬모형 분석에 필요한 기호를 다음과 같이 표기한다.

- $p$: 유병률. 각 샘플이 양성일 확률. $q=1-p$.
- $\lambda$: 샘플의 도착률.
- $g$: 그룹크기. 그룹검사를 적용하는 샘플의 개수.
- $U$, $U^*(s)$: 개별검사 시간 (샘플 1개 검사시간) 및 LST(Laplace Stieltjes transform).
- $G$, $G^*(s)$: 샘플 $g$개의 취합검사 시간 및 LST.
- $T_{(i,g)}$, $T^*_{(i,g)}(s)$: $i$단계 그룹검사 시스템에서 $g$개 샘플의 그룹검사 시간 및 LST, $i=1,2$.
- $N_i^+$, $P_i^+(z)$: $i$단계 그룹검사 시스템에서 집단 이탈시점의 고객수 및 PGF, $i=1,2$.
- $N_i$, $P_i(z)$: $i$단계 그룹검사 시스템에서 임의시점의 고객수 및 PGF, $i=1,2$.
- $\rho_i$: $i$단계 그룹검사 시스템의 처리로드, $i=1,2$.
- $W_i$: $i$단계 그룹검사 시스템에서 임의시점의 검사결과 대기시간, $i=1,2$.

2단계 그룹검사를 갖는 대기행렬모형을 분석하기 위해 우선 $T^*_{(i,g)}(s)$를 유도한다. 1단계 그룹검사 시스템에서 $g$개 샘플의 취합검사가 음성이면 $T_{(1,g)}$는 $G$와 같다. 반면, 취합검사가 양성이면 $T_{(1,g)}$는 $G$와 $g$개의 $U$로 구성된다. 따라서 $T^*_{(1,g)}(s)$는 다음과 같다.

$$T^*_{(1,g)}(s)=q^gG^*(s)+\left[1-q^g\right]G^*(s)\left[U^*(s)\right]^g.$$

$T_{(2,g)}$는 $g$개 샘플의 취합검사와 취합검사가 양성인 경우 $g/2$개로 구성된 2개 소그룹의 그룹검사로 구성되므로 다음을 얻는다.

$$T^*_{(2,g)}(s)=q^gG^*(s)+\left[1-q^g\right]G^*(s)\left[T^*_{(1,g/2)}(s)\right]^2.$$

$T^*_{(i,g)}(s)$의 1차 및 2차 미분을 활용하면 다음과 같이 $T_{(i,g)}$의 1차 및 2차 모멘트를 얻는다.

$$E[T_{(1,g)}]=E[G]+g(1-q^g)E[U].$$

$$E[T^2_{(1,g)}]=E[G^2]+ g(1-q^g)\{2E[G]E[U]+(g-1)E[U]^2+E[U^2]\}$$

$$E[T_{(2,g)}]=E[G]+2(1-q^g)E[T_{(1,g/2)}].$$

$$E[T^2_{(2,g)}]=E[G^2]+ 2(1-q^g)\left\{2E[G]E[T_{(1,g/2)}]+E[T_{(1,g/2)}]^2+E[T^2_{(1,g/2)}]\right\}$$

### 3.1 2단계 그룹검사 시스템

2단계 그룹검사 시스템에서는 $g$개 샘플을 그룹으로 묶어서 $g$개 샘플을 집단 단위로 검사한다. 따라서 대기행렬모형 관점에서 보면, 2단계 그룹검사 시스템은 $g$개 샘플의 그룹검사 시간인 $T_{(2,g)}$가 집단서비스 시간인 M/G/1 고정수 집단서비스 대기행렬모형에 해당된다.

집단 이탈시점, 즉, $g$개 샘플의 그룹검사 종료시점의 고객수 PGF는 다음과 같다[5, 12].

$$P_2^+(z)=\frac{g(1-\rho_2)(z-1)\,T^*_{(2,g)}(\lambda-\lambda z)}{z^g-T^*_{(2,g)}(\lambda-\lambda z)}\prod_{j=1}^{g-1}\frac{(z-z_j)}{(1-z_j)}.$$

여기에서 처리로드 $\rho_2$는 다음과 같다.

$$\rho_2=\lambda E[T_{(2,g)}]/g.$$

$P_2^+(z)$의 $z_1,\cdots,z_{g-1}$는 다음의 비선형 방정식에서 1을 제외한 단위원 내의 복소수 근이다.

$$z^g=T^*_{(2,g)}(\lambda-\lambda z).$$

$P_2^+(z)$를 활용하면, 임의시점의 고객수 PGF인 $P_2(z)$는 다음과 같이 표현된다[11].

$$P_2(z)=\frac{1-z^g}{g(1-z)}P_2^+(z).$$

$P_2(z)$를 $z$에 대해 미분하고 $z$에 1을 대입하면 임의시점의 평균 고객수인 $E[N_2]$를 얻는다.

$$E[N_2]=\frac{g-1}{2}+g\rho_2+\frac{\lambda^2E[T^2_{(2,g)}]}{2g(1-\rho_2)}- \frac{(g-1)}{2(1-\rho_2)}+\sum_{j=1}^{g-1}\frac{1}{(1-z_j)}.$$

마지막으로 리틀의 법칙[16]을 적용하면 임의시점의 평균 대기시간, 즉, 검사결과 평균 대기시간을 얻는다.

$$E[W_2]=\frac{g-1}{2\lambda}+E[T_{(2,g)}]+\frac{\lambda E[T_{(2,g)}^2]}{2g(1-\rho_2)}.$$
$$-\frac{(g-1)}{2\lambda(1-\rho_2)}+\sum_{j=1}^{g-1}\frac{1}{(1-z_j)\lambda}$$

### 3.2 1단계 그룹검사 시스템

1단계 그룹검사 시스템은 집단서비스 시간이 $T_{(1,g)}$인 M/G/1 고정수 집단서비스 대기행렬모형에 해당된다. 따라서 3.1절의 2단계 그룹검사 대기행렬모형의 분석 결과를 활용하면, 1단계 그룹검사 시스템의 처리로드와 검사결과 평균 대기시간은 다음과 같다.

$$\rho_1=\lambda E[T_{(1,g)}]/g.$$
$$E[W_1]=\frac{g-1}{2\lambda}+E[T_{(1,g)}]+\frac{\lambda E[T_{(1,g)}^2]}{2g(1-\rho_1)}.$$
$$-\frac{(g-1)}{2\lambda(1-\rho_1)}+\sum_{j=1}^{g-1}\frac{1}{(1-z_j)\lambda}$$

여기에서 $z_1,\cdots,z_{g-1}$는 다음의 비선형 방정식에서 1을 제외한 단위원 내의 복소수 근이다.

$$z^g=T_{(1,g)}^*(\lambda-\lambda z).$$

### 3.3 개별검사 시스템

샘플을 1개씩 개별적으로 검사하는 개별검사 시스템은 서비스 시간이 $U$인 M/G/1 대기행렬모형에 해당된다. 개별검사 시스템의 처리로드와 검사결과 대기시간을 각각 $\rho_I$와 $W_I$로 표기하자. M/G/1 대기행렬모형의 분석결과를 활용하면, 개별검사 시스템의 처리로드와 검사결과 평균 대기시간은 다음과 같다[12].

$$\rho_I=\lambda E[U].$$
$$E[W_I]=E[U]+\frac{\lambda E[U^2]}{2(1-\rho_I)}.$$

### 3.4 출력률 및 허용가능 입력률

본 논문에서 출력률(output rate)은 대기행렬모형의 서비스율(service rate)로 단위시간당 검사 가능한 샘플수를 의미한다. 개별검사 시스템의 출력률을 $r_I$로 그리고 유병률 $p$와 그룹크기 $g$에 따른 $i$단계 그룹검사 시스템의 출력률을 $r_i(p,g)$로 나타낸다. 각 시스템의 출력률은 다음과 같다.

$$r_I=1/E[U],$$
$$r_i(p,g)=g/E[T_{(i,g)}],\ i=1,2.$$

그룹검사 시스템은 유병률이 동일해도 그룹크기에 따라 출력률이 변화한다. 유병률이 $p$로 주어진 경우, $i$단계 그룹검사 시스템의 최대출력률을 다음과 같이 정의한다.

$$r_i^*(p)=\max\{r_i(p,g)\},\ i=1,2.$$

대기행렬모형은 처리로드가 1보다 작아야 시스템이 안정적(stable)이다[12]. 즉, 입력률인 샘플의 도착률이 출력률보다 작을 때 시스템이 안정적이다. 개별검사 및 $i$단계 그룹검사 시스템이 안정적인 입력률을 허용가능 입력률(allowable input rate)이라 정의하고 $\lambda_I$와 $\lambda_i(p)$로 표기하자. 각 시스템의 허용가능 입력률은 다음의 범위를 갖는다.

$$\lambda_I<r_I,\ \lambda_i(p)<r_i^*(p),\ i=1,2.$$

시스템이 안정적이라야 평균 고객수 및 대기시간이 발산하지 않고 유한한 값을 갖는다. 시스템이 안정적이라야 고객들은 유한시간 내에 검사를 받을 수 있다. 최대출력률이 증가할수록 허용가능 입력률이 증가하여 시스템은 보다 많은 검사 요구를 수용할 수 있다. 따라서 코로나19 발생 초기와 같이 검사결과 대기시간이 중요한 경우, 허용가능 입력률은 대기시간 관점에서 시스템의 성능을 비교할 수 있는 중요한 성능척도이다.

## 4. 수치 분석

수치 예에서는 개별검사와 취합검사 시간이 상수인 확정적분포(deterministic distribution)를 갖는 경우를 다룬다. 본 수치 예에서는 개별검사와 취합검사 시간을 각각 $U=1$과 $G=2$이라 가정하였다.

유병률 $p$와 그룹크기 $g$에 따라 고객수 PGF와 성능척도인 처리로드, 출력률, 허용가능 입력률, 평균 고객수 및 평균 대기시간을 얻기 위한 수치분석 과정을 간략하게 설명하면 다음과 같다. 첫째, $E[U]=1$, $E[U^2]=1$, $E[G]=2$, $E[G^2]=4$이고, 이를 통해 $T_{(i,g)}$의 1차 및 2차 모멘트, 처리로드, 출력률 및 허용가능 입력률을 얻는다. 둘째, 확정적분포를 따르는 $U$와 $G$의 LST는 다음과 같이 델타함수의 라플라스 변환으로 주어진다[9]: $U^*(s)=e^{-s}$, $G^*(s)=e^{-2s}$. 셋째, $U^*(s)$와 $G^*(s)$를 이용하여 $T_{(i,g)}^*(s)$를 구한다. 넷째, 비선형 방정식인 $z^g=T_{(i,g)}^*(\lambda-\lambda z)$의 복소수 근의 수치 해를 구한다. 마지막으로 평균 대기시간 $E[W_i]$를 계산한다.

확정적 분포를 따르는 검사시간의 라플라스 변환은 지수함수이며 테일러급수로 전개하면 무한개의 항을 갖는다. 검사시간이 지수 분포 및 와이블 분포를 따르는 경우에는 검사시간의 라플라스 변환이 유한개의 항을 갖는 다항식이 된다. 따라서 수치 분석 측면에서는 확정적 분포가 지수분포 및 와이블 분포에 비해 분석이 복잡하며 보다 일반적이라 간주할 수 있다. 한편, 검사시간이 정규분포를 따르는 경우에는 검사시간의 라플라스 변환이 매우 복잡하여 복소수 근의 수치 해가 안정적이지 않아 본 연구에서는 다루지 않았다.

<Figure 1>은 유병률이 $p=0.01$일 때, 그룹크기에 따른 각 시스템의 출력률 분석 결과이다. <Figure 1>에서 실선, 원 및 네모로 표시된 그래프는 각각 개별검사, 1단계 및 2단계 그룹검사 시스템의 출력률이다. 점선은 $\lambda=3.0$인 샘플의 도착률을 예로 나타내었다. <Figure 1>에서 개별검사 시스템의 출력률은 $r_I=1.0$이다. 1단계 및 2단계 그룹검사 시스템은 각각 그룹크기가 16과 32일 때 출력률이 3.65와 7.26으로 최대화된다. $p=0.01$일 때, $r_1^*(0.01)=3.65$ 이고 $r_2^*(0.01)=7.26$ 이므로 허용가능 입력률은 다음과 같다.

$$\lambda_I<1,\ \lambda_1(0.01)<3.65,\ \lambda_2(0.01)<7.26.$$

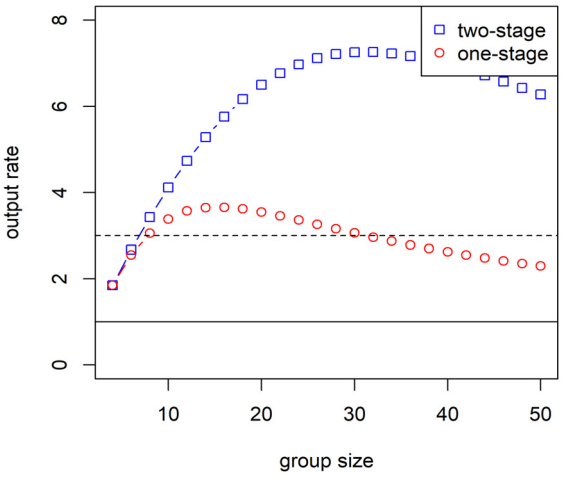
샘플의 도착률이 허용가능 입력률 범위 안에 있어야 시스템이 안정적이고 대기시간이 유한하다. 예를 들어, <Figure 1>에서 $\lambda=3.0$이면, 샘플의 도착률이 개별검사 시스템의 허용가능 입력률의 범위를 벗어나므로 개별검사 시스템은 불안정하고 대기시간이 발산한다.

<Figure 1>의 분석결과를 종합하면 다음과 같다. 유병률이 0.01일 때, 샘플 도착률이 1.0 이상이면 개별검사 시스템이 불안정해지고, 3.65 이상으로 증가하면 1단계 그룹검사 시스템도 불안정해진다. 한편, 2단계 그룹검사 시스템은 최대 7.26까지의 샘플 도착률을 수용하며 유한시간 내에 검사결과를 도출할 수 있다. 따라서 2단계 그룹검사 시스템은 개별검사 및 1단계 그룹검사 시스템에 비해 검사량 수용 능력이 크므로 코로나19와 같이 검사 요청이 급증할 때 대기시간 측면에서 효과적이다.

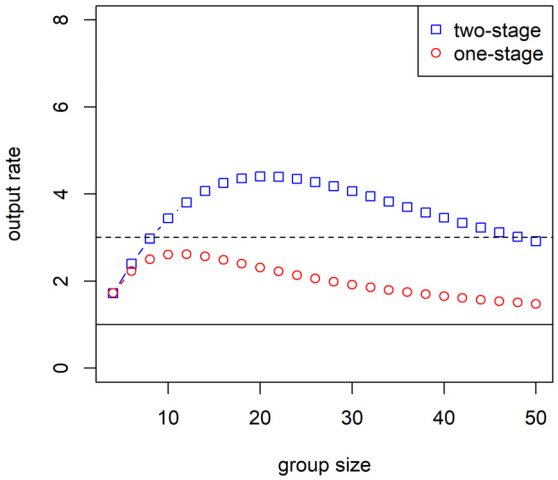
<Figure 2>는 유병률이 $p=0.02$일 때, 그룹크기에 따른 각 시스템의 출력률 분석 결과이다. 최대출력률 분석 결과, 각 시스템별 허용가능 입력률은 다음과 같다.

$$\lambda_1(0.02)<2.61,\ \lambda_2(0.02)<4.39.$$

유병률이 $p=0.02$인 경우, 샘플 도착률이 2.61 이상으로 증가하면 1단계 그룹검사 시스템이 불안정해진다. 2단계 그룹검사 시스템은 샘플 도착률이 4.39까지 안정적이다. 유병률이 $p=0.02$일 때도 2단계 그룹검사 시스템이 개별검사 및 1단계 그룹검사 시스템에 비해 검사량 수용 능력이 크고 대기시간 측면에서 효과적이다.




<Figure 1> Output Rates when $p=0.01$




<Figure 2> Output Rates when $p=0.02$

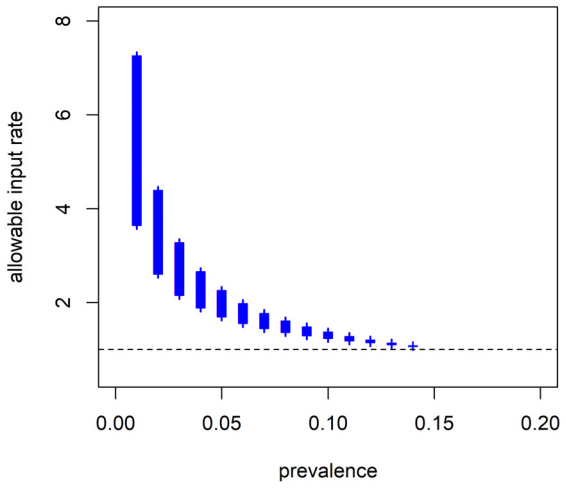
<Table 1>은 유병률을 0.01에서 0.18까지 0.01 단위로 변화해가며 1단계 및 2단계 그룹검사 시스템의 최대출력률을 분석한 결과이다. 아울러, 최대출력률 분석 결과를 토대로 유병률에 따라 2단계 그룹검사 시스템만이 안정적인 허용가능 입력률을 그림으로 나타내면 <Figure 3>과 같다. <Figure 3>에 점선은 개별검사의 출력률을 의미한다.

<Table 1>과 <Figure 3>을 보면, 유병률이 0.14 이하인 경우에는 2단계 그룹검사 시스템의 최대출력률이 개별검사 및 1단계 그룹검사 시스템보다 높다. 즉, 2단계 그룹검사 시스템만이 안정적인 허용가능 입력률이 존재한다. 특히 유병률이 낮을수록 2단계 그룹검사 시스템의 허용가능

입력률이 증가한다. 따라서 유병률이 낮은 경우에는 2단계 그룹검사 시스템이 개별검사 및 1단계 그룹검사 시스템보다 검사량 수용 능력이 크고 대기시간 측면에서 효과적임을 확인할 수 있다.

<Table 1> Maximum Output Rates

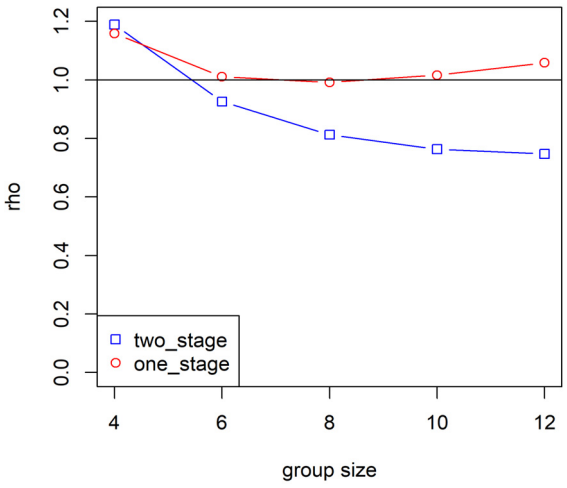
| 유병률 | 1단계 그룹검사 | 2단계 그룹검사 |
|---|---|---|
| 0.01 | 3.65 | 7.26 |
| 0.02 | 2.61 | 4.39 |
| 0.03 | 2.16 | 3.28 |
| 0.04 | 1.89 | 2.66 |
| 0.05 | 1.7 | 2.26 |
| 0.06 | 1.56 | 1.98 |
| 0.07 | 1.45 | 1.77 |
| 0.08 | 1.37 | 1.61 |
| 0.09 | 1.3 | 1.48 |
| 0.1 | 1.24 | 1.37 |
| 0.11 | 1.19 | 1.28 |
| 0.12 | 1.15 | 1.2 |
| 0.13 | 1.11 | 1.14 |
| 0.14 | 1.07 | 1.08 |
| 0.15 | 1.04 | 1.04 |
| 0.16 | 1.01 | 0.99 |
| 0.17 | 0.99 | 0.95 |
| 0.18 | 0.97 | 0.92 |



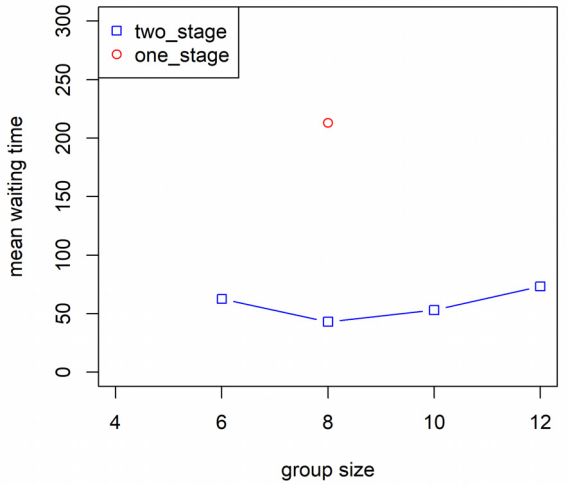

<Figure 3> Allowable Input Rates when the Two-Stage Group-Testing System is Only Stable

<Figure 4>와 <Figure 5>는 $p=0.05$이고 $\lambda=1.69$인 경우, 그룹크기를 4, 6, 8, 10, 12로 변화해가며 1단계 및 2단계 그룹검사 시스템의 처리로드와 평균 대기시간을 분석한 결과이다.

<Figure 4>를 보면, 1단계 그룹검사 시스템은 그룹크기가 8인 경우에만 처리로드가 1보다 작으며 시스템이 안정적이다. 따라서 <Figure 5>에서 1단계 그룹검사 시스템은 그룹크기가 8인 경우에만 대기시간이 유한한 값을 갖는다. 한편, 2단계 그룹검사 시스템은 그룹크기가 6, 8, 10, 12인 경우 처리로드가 1보다 작으며 시스템이 안정적이고 대기시간이 유한한 값을 갖는다. 아울러, <Figure 5>에서 두 시스템의 대기시간을 비교하면 2단계 그룹검사 시스템의 대기시간이 작다. 따라서 1단계 및 2단계 그룹검사 시스템이 모두 안정적인 경우에도 2단계 그룹검사 시스템의 대기시간이 작은 사례가 존재한다.




<Figure 4> Offered Loads when $p=0.05$ and $\lambda=1.69$




<Figure 5> Mean Waiting Times when $p=0.05$ and $\lambda=1.69$

## 5. 결 론

본 논문에서는 2단계 그룹검사 시스템을 제안하고 집단

서비스 대기행렬모형을 이용하여, 고객수의 PGF를 유도하고, 성능척도인 처리로드, 출력률, 허용가능 입력률, 평균 고객수 및 평균 대기시간을 도출하였다. 수치 분석을 통해, 유병률에 따라 2단계 그룹검사 시스템만이 안정적이고 유한 시간 내에 검사 요청을 처리할 수 있는 허용가능 입력률을 분석하였다. 유병률이 낮은 경우, 2단계 그룹검사 시스템은 개별검사 및 1단계 그룹검사 시스템에 비해 보다 많은 검사량을 수용할 수 있으므로 코로나19와 같이 검사 요청이 급증할 때 매우 효과적임을 보였다. 아울러, 1단계 및 2단계 그룹검사 시스템이 모두 안정적인 경우에도 2단계 그룹검사 시스템의 대기시간이 1단계에 비해 작은 사례도 제시하였다.

마지막으로 본 논문에서 제안한 2단계 그룹검사 시스템의 한계, 쟁점 및 향후 연구 방안을 다룬다.

첫째, 본 논문에서는 그룹크기가 고정적이라 가정하였으나, 그룹검사 종료 후 시스템에 샘플이 $g$개 이하로 대기 중인 경우 $\alpha(\alpha \le g)$개로 그룹검사를 수행할 수 있다[3, 10]. 이 경우 $g$개 샘플 도착까지 그룹검사를 지연하지 않아도 되므로 고정크기 그룹검사 보다 대기시간이 작을 수도 있다. 따라서 이론적인 측면에서는 시스템 상태에 따라 그룹크기가 유연한 2단계 그룹검사 대기행렬모형으로 본 연구를 확장할 수 있다. 한편, 그룹검사 대기행렬모형의 평균 대기시간을 계산하기 위해서는 비선형 방정식인 $z^g = T^*_{(2,g)}(\lambda - \lambda z)$의 복소수 해를 수치적으로 구해야한다. 개별검사와 그룹검사 시간의 LST가 복잡한 비선형 함수일수록 복소수 해의 수치 탐색이 매우 불안정해지고 수치적으로 해를 구하기 어렵다. 따라서 그룹크기가 유연한 2단계 그룹검사 대기행렬모형은 수치 분석 측면에서는 매우 어렵고 도전적인 연구라고 여겨진다. 아울러, 유병률에 따라 $\alpha$와 $g$를 변경하며 그룹검사를 수행하는 방안이 이론적으로는 최적이나 검사 절차가 복잡하여 현실적으로 현장에서 적용하기 어려울 수 있다. 따라서 코로나19 발생 초기와 같이 상황이 급박하고 검사 요청이 폭증하여 검사를 대기하는 샘플이 매우 많은 경우에는 본 논문에서 제시한 고정크기 2단계 그룹검사가 현실적인 대안이라 여겨진다.

둘째, 본 논문에서는 1단계에서 그룹의 취합검사가 양성일 때 2단계에서 같은 크기의 2개 소그룹으로 그룹을 분할하는 가장 간단한 소그룹 분할 방법을 적용하였다. 따라서 소그룹의 크기와 개수에 대한 제약을 풀고 다양한 소그룹 분할 방법을 적용하여 2단계 그룹검사 시스템을 분석하고 최적의 검사 절차를 도출하는 연구가 향후 이론적으로 매우 중요하다. 반면, 소그룹의 크기와 개수에 대한 제약을 풀면 고려해야하는 검사 방법이 기하급수적으로 증가한다. 아울러, 그룹검사를 갖는 대기행렬모형의 수치 해 탐색이 불안정한 경우가 많다. 따라서 소그룹의 크기와 개수에 대한 제약을 풀고 대기시간 관점에서 수치적으로 최적의 그룹크기를 탐색하는 것은 매우 도전적이고 어려운 연구이다.

셋째, <Figure 1>에서 최대출력률에 도달하기 전까지는 그룹크기가 증가할수록 출력률이 증가하고 처리로드가 감소한다. 처리로드가 감소하면 대기시간이 감소한다. 반면, $g$개 샘플로 그룹검사를 수행하므로 그룹검사 종료 후 $g$개 미만의 샘플이 시스템에 대기 중인 경우에는 $g$번째 샘플의 도착까지 그룹검사를 지연하므로 그룹크기가 증가할수록 대기시간이 증가한다. 그룹크기에 따라 대기시간 항목 간에 상충관계가 발생하기 때문에 <Figure 4>에서 그룹크기가 6, 8, 10, 12로 증가할수록 2단계 그룹검사 시스템의 처리로드는 감소하지만 평균 대기시간은 크룹크기가 8일 때 최소화된다. 동일한 이유로 2단계 그룹검사 시스템의 처리로드가 1단계 그룹검사 시스템보다 작아도 대기시간은 클 수 있다. 그룹크기에 따른 대기시간 항목 사이의 상충관계 때문에 그룹검사를 갖는 대기행렬모형에서 평균 대기시간을 최소화하는 최적의 그룹크기를 찾는 문제는 이론적 및 수치적으로 매우 도전적인 과제이다.

넷째, 본 논문에서는 1개의 검사 장비로 취합검사와 개별검사를 순차적으로 진행한다고 가정하였으나 여러 개의 장비를 병렬로 이용하여 취합검사와 개별검사를 진행하면 그룹검사 시스템의 성능을 향상시킬 수 있다. 다수의 검사 장비를 이용하는 경우에는 검사 프로세스에 적합한 대기행렬모형을 적용해야 하며 이론적으로 분석하기 어려운 경우에는 시뮬레이션을 활용하는 방안을 고려해야 한다.

다섯째, 소그룹의 크기가 같은 경우 검사횟수가 최소화되는 계층적 도프만 절차의 단계별 그룹크기가 2의 거듭제곱 형태이다[17]. 따라서 본 논문에서 제시한 소그룹 분할 방법을 일종의 효과적인 휴리스틱으로 간주할 수 있다. 그룹검사 시스템에서 검사횟수가 감소할수록 대기시간도 감소할 수 있으므로 대기시간을 최소화하는 그룹검사 방법 연구에 검사횟수 효율화와 관련된 기존 연구를 활용하는 방안이 효과적이리라 기대한다.

마지막으로 코로나19와 같은 신종 감염병은 발생 초기에 유병률이 알려져 있지 않고 감염의 전파 양상에 따라 유병률이 변화한다. 기존의 그룹검사 효율화 연구에서는 유병률이 알려져 있지 않는 경우의 효율적인 검사 절차를 다루었다[15, 18]. 따라서 그룹검사를 갖는 대기행렬모형에서도 유병률을 모르는 경우로 연구를 확장하여 대기시간 관점에서의 효율적인 검사 절차를 탐색하는 연구도 필요하다고 여겨진다.

## References

[1] Abdalhamid, B., Bilder, C.R., McCutchen, E.L., Hinrichs,

S.H., Koepsell, S.A., and Iwen, P.C., Assessment of specimen pooling to conserve SARS CoV-2 testing resources, *American Journal of Clinical Pathology*, 2020, Vol. 153, No. 6, pp. 715-718.

[2] Abolnikov, L. and Dukhovny, A., Optimization in HIV screening problems, *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, 2003, Vol. 16, No. 4, pp. 361-374.

[3] Bar-Lev, S.K., Parlar, M., Perry, D., Stadje, W., and Van der Duyn Schouten, F.A., Applications of bulk queues to group testing models with incomplete identification, *European Journal of Operational Research*, 2007, Vol. 183, No. 1, pp. 226-237.

[4] Berger, T., Mehravari, N., Towsley, D., and Wolf, J., Random multiple-access communication and group testing, *IEEE Transactions on Communications*, 1984, Vol. 32, No. 7, pp. 769-779.

[5] Chaudhry, M.L. and Templeton, J.G., *First Course in Bulk Queues*, John Wiley & Sons, 1983.

[6] Dorfman, R., The Detection of Defective Members of Large Populations, *The Annals of Mathematical Statistics*, 1943, Vol. 14, No. 4, pp. 436-440.

[7] Du, D., Hwang, F.K., and Hwang, F., *Combinatorial Group Testing and Its Applications* (Vol. 12), World Scientific, 2000.

[8] Garg, J., Singh, V., Pandey, P., Verma, A., Sen, M., Das, A., and Agarwal, J., Evaluation of sample pooling for diagnosis of COVID-19 by Real Time-PCR: A Resource-Saving Combat Strategy, *Journal of Medical Virology*, 2021, Vol. 93, No. 3, pp. 1526-1531.

[9] Giffin, W.C., *Transform Techniques for Probability Modeling*, Academic Press, 1975.

[10] Kim, K., The Analysis of COVID-19 Pooled-testing Systems with False Negatives Using a Queueing Model, *Journal of the Society of Korea Industrial and Systems Engineering*, 2021, Vol. 44, No. 4, pp. 154-168.

[11] Lee, H.W., Lee, S.S., and Chae, K.C., A Fixed-size Batch Service Queue with Vacations, *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, 1996, Vol. 9, No. 2, pp. 205-219.

[12] Lee, H.W., *Queueing theory*, third edition, Sigmapress, 2006.

[13] Seong, J.-T., Group testing scheme for effective diagnosis of COVID-19, *The Journal of Korea Institute of Information, Electronics, and Communication Technology*, 2021, Vol. 14, No. 6, pp. 445-451.

[14] Seong, J.-T., Performance Analysis of Noisy Group Testing for Diagnosis of COVID-19 infection, *The Journal of Korea Institute of Information*, 2022, Vol. 15, No. 2, pp. 117-123.

[15] Sobel, M. and Groll, P.A., Binomial Group-testing with an Unknown Proportion of Defectives, *Technometrics*, 1966, Vol. 8, No. 4, pp. 631-656.

[16] Wolff, R.W., *Stochastic Modeling and the Theory of Queues*, New Jersey: Prentice Hall, 1989.

[17] Yang, W.S. and Chae, K.C., An efficient blood testing procedure by using group testing, *The Korean Journal of Applied Statistics*, 1996, Vol. 9, No. 1, pp. 17-29.

[18] Yang, W.S. and Chae, K.C., A Heuristic Approach for Efficient blood testing: The Case of Unknown Prevalence Rate, The *Korean Journal of Applied Statistics*, 1997, Vol. 10, No. 1, pp. 47-60.

**ORCID**

Won Seok Yang |https://orcid.org/0000-0003-1782-2716