韓國數學敎育學會誌 시리즈 C <初等數學敎育>
https://doi.org/10.7468/jksmec.2022.25.2.143
2022. 4. 제 25권, 제 2호, 143-160

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
April. 2022, Vol. 25, No. 2, 143-160

# 5, 6학년 수학 교사용 지도서의 도전 수학에 나타난 수학적 사고의 유형

임영빈(인천삼산초등학교, 교사)

본 연구는 5, 6학년 수학 교사용 지도서의 도전 수학에 나타난 수학적 사고의 유형을 분석하여 교육적 시사점을 논하기 위하여 수행되었다. 이를 위하여 교수·학습 내용을 바탕으로 평가 및 육성이 가능한 수학적 사고의 유형을 정리하고, 수학적 사고를 분석하기 위한 틀을 구상한 뒤, 초등학교 5, 6학년 수학 교사용 지도서의 '도전 수학'에 나타나는 수학적 사고를 분석하였다. 분석 결과, 첫째, 우리나라 초등학교 5, 6학년 수학 교사용 지도서의 '도전 수학'은 계획 수립, 실행의 단계에서는 다양한 수학적 사고를 지도할 수 있는 여러 가지 유형의 문제로 구성이 되어있다. 다만 자세한 보조문항으로 인하여 의도된 수학적 사고만이 발현될 것이 우려되며, 스스로 수학적 사고를 유발할 수 있는지는 불분명한 경우가 많았다. 둘째, 교사용 지도서의 문제 이해 단계와 반성 단계의 발문이 매우 전형적으로 제시됨으로써 해당 단계에서는 다양한 수학적 사고를 유발하기 어렵다. 셋째, 교사용 지도서에는 수학적 사고에 대한 명시적 설명이 부족하며 추후 개발될 교사용 지도서에서는 수학적 사고에 대한 명시적 설명을 보완해 주는 것이 필요할 것이다.

## I. 서론

수학적으로 사고하는 것을 가르치는 것은 수학교육의 중요한 목표 중 하나이다. 그리고 수학적으로 사고한다는 것은 그것이 아무리 하찮은 것이더라도 수학적인 발견을 하는 것이며 문제를 해결하는 것이다(우정호, 2009). 즉, 수학적 사고에 대한 교육은 문제해결 방법에 대한 교육으로써 수학 수업에 관한 연구에서 다루어져야 하는 중요한 요소이다(임영빈, 2018).

이러한 수학적 사고는 우리나라 교육과정의 시작에서부터 현재까지 변하지 않는 수학교육의 기본 목표로 제시되고 있다. NCTM(2000)에서도 '수학적 사고'와 관련하여 교사는 진지하게 수학적으로 사고하는 지적인 환경을 조성할 책임이 있고, 수학적 사고의 조직과 통합을 위하여 반성과 의사소통의 과정을 중요시하고 있다(이환철 외, 2009). 비록 우리나라의 제1차 교육과정에서의 산수과는 해당 과목의 목표가 제시하고 있는 것과 다르게, 수학적으로 사고하고 처리하는 태도를 배양하기보다는, 일상생활에서 요구하는 계산 자체에 치중하고 있었지만 교육과정이 개정되면서 점차 수학적 사고와 태도의 육성을 수학과의 기본 방향에 포함시키는 경향이 나타나게 되었다. 2007 개정 교육과정 시기에는 지식과 기능의 습득 이외에도 의사소통 능력, 합리적 문제해결 능력, 수학에 대한 긍정적인 태도를 강조하였다. 그리고 2009 개정 교육과정에서는 합리적인 문제해결 능력과 함께 창의적 사고능력, 정보처리 능력, 의사소통 능력 등의 신장을 추구하고, 이를 위한 수학적 추론, 수학적 문제해결, 수학적 의사소통과 같은 '수학적 과정'의 교수·학습을 강조하였다(김수미 외, 2020).

2015 개정 교육과정의 주목할 만한 특징은 핵심역량에 대한 강조이다. 교육과정 총론에서의 핵심역량은 '자기관리 역량', '지식정보 처리 역량', '창의적 사고 역량', '심미적 감성 역량'에 더불어 '의사소통 역량'과 '공동체 역량'이다. 수학과에서는 이러한 핵심역량을 교과의 관점에서 특화하여 '문제해결', '추론', '창의·융합', '의사소통', '정보처리', '태도 및 실천'의 교과역량으로 규정(교육부, 2015; 2020)하고 있는데 이러한 방향을 통하여 교과 지식의 습득과 더불어 문제를 해결하기 위한 과정에서 학생들이 가져야 할 수학적 사고와 태도를 함께 강조함을 알 수 있다. 다만 이러한 시대적, 정책적 필요성에 의해서 문제해결 역량이 지속적으로 강조되어 왔지만, 실제로 현장에서는 이를 지도하는데 어려움을 겪고 있다(여승현 외, 2021).

2015 개정 교육과정에 따른 국정 교과서에서 수학적 사고의 육성을 가장 직접적으로 살펴볼 수 있는 곳은 각 단원의 후반부에 제시되는 '도전 수학'이다. '도

* 접수일(2022년 2월 14일), 심사(수정)일(2022년 2월 22일), 게재확정일(2022년 3월 2일)
* MSC2000분류 : 97U30
* 주제어 : 수학적 사고, 수학적 태도, 교사용 지도서

전 수학'은 각 단원에서 배운 지식을 적용하여 학생의 문제해결 능력을 키우는 차시이다. 이때 이러한 문제해결의 과정을 통해 추론, 의사소통, 태도 및 실천 능력 등의 여러 교과 역량을 함께 신장할 수 있도록 의도하였기 때문에 다른 차시들에 비하여 자연스럽게 수학적 사고를 발현시킬 수 있다.

이러한 문제해결 과정의 지도에는 교사의 역할이 매우 중요하다. 학생의 능력에 따라서 발현되는 수학적 사고의 정도가 다르지만 학생들이 문제를 해결하는 과정은 공통된 단계를 거칠 수도 있다. 이 과정에서 수학적 사고가 정체되는 원인에 대한 분석과 고찰을 통해 수업을 준비한 교사는 학생들의 사고 과정에 도움을 줄 수 있는 발문을 할 수 있을 것이다. 학생들의 문제해결 교육을 성공적으로 수행하기 위해서는 학교수학을 잘 알고 수학적 안목으로 현상을 볼 줄 알며 문제해결 경험이 풍부한 교사의 질문과 권고가 필요하다(우정호, 1998; 임영빈, 2020). 그러나 초등학교에서 수학을 가르치는 교사들은 전공과 경력이 매우 다양하며 수학 이외의 다른 과목을 함께 가르쳐야 하는 경우가 많다. 이로 인해 초등교사가 문제해결 수업을 위해 필요한 질문과 권고를 충분히 숙지하지 못하는 경우도 생길 수 있다. 따라서 문제해결 수업을 준비하는 교사들을 위해 교사용 지도서에는 다양한 수학적 사고를 발현시킬 수 있는 양질의 발문과 권고가 제시되는 것이 필요하다.

이에 본 연구에서는 초등학교 5, 6학년 수학 교과서의 도전 수학을 지도하는 과정에서 육성할 수 있는 수학적 사고의 유형을 분석하여 교육적 시사점을 논하고자 한다. 본 연구의 목적을 달성하기 위하여 다음과 같은 연구 내용을 설정하였다.

첫째, 교수·학습 내용을 바탕으로 평가 및 육성이 가능한 수학적 사고의 유형을 정리한다.

둘째, 수학적 사고를 분석하기 위한 틀을 구안한다.

셋째, 교사용 지도서를 분석하여 '도전 수학'을 지도하는 과정에 나타나는 수학적 사고를 분석하고 교육적 시사점을 제안한다.

## Ⅱ. 육성이 가능한 수학적 사고

수학적 사고를 육성하는 것은 수학과의 중요한 목표이다. 수학적 사고는 수학을 이해하는 것, 이해한 것을 이용하는 것으로 나누어 생각할 수 있는데, 여기에서 수학을 이해한다는 것은 수학적 용어 및 절차를 암기하고 재연하는 것이 아니며 수학적 개념들 사이에 연결성을 만드는 것을 뜻한다(이선영, 한선영, 2021). 片桐重男(카타기리 시게오)는 '진정한 학력은 수학적 사고'라고 주장하며 수학적 사고의 육성을 통한 학력의 신장을 강조하였다. 이 장에서는 수학적 사고에 대한 片桐重男(1992; 2004)와 김수미 외(2020)의 연구를 고찰하여 육성이 가능한 수학적 사고를 유형별로 정리해보고자 한다.

### 1. 수학의 방법에 관련된 수학적 사고

#### 가. 귀납적 사고

몇 개의 데이터를 모으기 위해 노력하고, 그 데이터들 사이에 공통으로 볼 수 있는 규칙이나 성질을 찾아내려고 노력한다. 그리고 찾아낸 규칙이나 성질이 그 데이터를 포함하는 집합에서 성립할 것이라고 추측하고, 추측했던 일반성이 참이라는 것을 더 확실히 하기 위해 새로운 데이터로 확인하는 사고방식이다.

#### 나. 유추적 사고

어떤 사상 $A$ 에 대한 성질이나 법칙 또는 해결 방법을 알고자 해도 도저히 이것의 해결 방법을 떠올릴 수 없을 때, $A$ 와 구조적으로 유사하면서 이미 알고 있는 사상 $A'$과 그 해결방안 $P'$ 을 생각해 내어, $A$ 에 대해서도 $P'$ 과 유사한 해결 방법이 성립하지 않을까 하고 생각하는 사고 방법이다.

#### 다. 연역적 사고

항상 성립한다는 것을 보이기 위하여 이미 알고 있는 사실을 바탕으로 하여 옳은 것이라는 것을 설명하려는 생각이다.

#### 라. 통합적 사고

많은 사상을 각각 별개의 것으로 보지 않고 더 넓은 관점에서 본질적인 공통성을 추상하고, 그 공통성에 따라 같은 것으로 묶어나가려는 생각이다.

마. 발전적 사고

한 가지의 방법을 알았더라도 다시 더 나은 방법을 추구하거나, 이를 바탕으로 하여 더 일반적인 것이나 더 새로운 것을 발견하려는 생각이다.

바. 단순화의 사고

주어진 조건을 전부 반영시키기 어려운 경우, 그 가운데 몇 가지 조건은 일단 무시를 하고, 간단한 기본적인 경우로 고쳐서 문제의 해결 방법을 알아보려는 생각이다.

사. 추상화의 사고

전체로서의 사물의 표상에 포함되는 여러 가지 특징들 중에서 한 가지 이상을 분리·독립시켜 사고의 대상으로 삼으려는 생각이다. 즉, 어떤 개념의 외연을 고정시키고 내포를 명확히 하려고 할 때 작용하는 사고 방법이다. 여기에는 사상하려는 생각, 이상화하려는 생각, 구체화하려는 생각 및 조건을 명확히 하려는 생각이 포함된다. 이와 같은 추상화 및 일반화에 의하여 개념이 형성될 수 있다.

아. 일반화의 사고

어떤 개념의 외연을 넓혀 나가려는 생각이다. 그리고 문제의 해결에서 일반적인 성질을 찾아내어, 이 문제를 포함하는 집합 전체에 관한 해법의 일반성을 추구하려는 생각이다.

자. 특수화의 사고

어떤 사상의 집합을 고찰하기 위하여 여기에 포함되는 좀 더 작은 집합 또는 그 가운데 한 가지 사상에 관해서 고찰하려는 생각이다.

차. 기호화의 사고

기호로 나타내려는 생각과 기호로 나타낸 것을 읽으려는 생각을 모두 뜻한다. 그리고 이 밖에 수학적 용어를 이용하여 간결하고 명확하게 나타내려고 하거나, 이를 읽으려는 생각도 포함시킬 수 있다. 이는 말하자면 형식적으로 표현하고, 이것을 바탕으로 하여 사고를 전개해 나가려는 생각이다.

카. 수량화의 사고

질적인 사상 등을 양적인 성질로 이해하려고 하여, 장면이나 목적에 따라 적절한 양을 선택하려는 생각이 '양화의 사고'이다. 또 양의 크기를 수를 이용하여 나타내려는 생각이 '수화의 사고'이다. 이와 같은 생각을 종합하여 수량화의 사고라고 한다.

타. 도형화의 사고

수적인 사상이나 관계를 도형이나 도형의 관계로 대체하려는 생각, 그리고 장면이나 사상 또는 관계 등을 그림으로 나타내어 파악하려는 생각이다.

## 2. 수학의 내용에 관련된 수학적 사고

가. 단위의 사고

수의 크기를 이해하거나 계산 등을 수행할 때, 단위에 주목하려는 생각이다. 아울러 양의 크기나 측정을 생각 할 때에도 단위에 주목을 하려고 하며, 도형을 파악할 때 점, 선, 면 등의 구성 요소나 단위의 크기 또는 그 개수나 그들 사이의 관계에 주목하려는 생각이다.

나. 표현의 사고

표현의 기본 원리나 법칙에 따라 합당하게 나타내어 보려는 생각이다. 어떤 문제를 직접 처리하지 않고 수의 조작으로 처리하거나, 수의 고찰을 점의 위치나 도형의 크기에 대한 고찰로 대체하고 이의 역을 이용하거나, 수량 또는 그 사이의 관계와 법칙을 간결하게 일반적으로 표현한 것이 식임을 알고 이를 이용하거나, 집단에 대한 관찰 자료를 적당히 분류하거나 적절한 그래프로 나타내어 사상에 대한 특징이나 관계를 개괄적으로 파악하려는 생각을 포함한다.

다. 조작의 사고

사상 또는 조작의 의미를 명확히 하거나 그것을 확장하거나, 그것을 바탕으로 사고하는 것을 조작의 사고라 한다. 공리적인 생각이나 연역적인 생각을 하게 되는 경우에는 이런 생각도 함께 해야 한다.

라. 알고리즘의 사고

일정한 절차에 따라 기계적으로 실행할 수 있도록 실행 과정을 격식화 하려는 생각이 알고리즘의 사고이

다. 이러한 사고 과정에서는 이해의 바탕 위에서 절차를 알고리즘화 하려는 생각이 중요하다.

마. 개괄적 파악의 사고

해결 방법 또는 결과에 관한 전망을 세우거나 결과를 확인하거나 할 때는, 결과를 개괄적으로 포착해두는 것이 효과적인 경우가 있다. 그래서 대강의 수, 양, 모양을 파악하거나, 대체적인 계산, 측정을 하여 결과나 방법에 관한 전망을 세우거나 결과를 확인하려는 생각을 묶어서 개괄적 파악의 사고라 한다.

바. 기본 성질의 사고

기본적인 법칙이나 성질에 착안하려는 사고를 기본성질의 사고라 한다. 복잡한 계산에서 교환법칙, 결합법칙 등의 기본 성질을 이용하려는 생각, 식을 형식적으로 변형할 때 인수분해식 등을 이용하려는 생각, 도형의 개념을 심화하면서 다른 개념과의 관계를 알아보거나, 개념을 확장하면서 증명 문제를 해결하거나, 이동 또는 전개에 관한 성질을 파악할 때 기본적인 성질을 이용하려는 생각 등을 포함한다.

사. 함수적 사고

무엇을 정하면 무엇이 따라서 정해지는가에 주목하는 생각, 변수 사이의 대응규칙을 발견 또는 이용하는 생각, 관계의 표현 방법을 알아보는 생각, 표현 방법에서의 관계를 읽어내려는 생각을 함수적 사고라 한다.

아. 식에 대한 사고

사상 또는 관계를 식으로 나타내거나, 반대로 제시된 식을 읽어내려는 생각이다. 여기에는 식을 형식적으로 처리하려는 생각, 식의 형태에 착안하여 그 식이 나타내는 사실이나 관계를 통합·발전시키거나 다시 이를 일반적인 형태로 나타내려는 생각, 증명의 과정을 약속에 따라 바르게 표현하려는 생각 등이 포함된다.

자. 집합의 사고

고찰의 대상이 어떤 범위의 것인지를 결정하고 이를 명확히 파악하려는 생각이다. 이때 고찰 대상이 어떤 집합에 속하는지 여부를 알아보거나, 그 집합에 속하지 않는 것을 알아봄으로써 처음의 집합을 더욱 명확하게 파악할 수 있다.

### 3. 수학적 사고의 원동력인 수학적 태도

많은 선행 연구에서 수학교과에서의 태도를 바라보는 관점은 ‘수학 과목 자체를 바라보는 태도, 수학에 대한 자신감, 의지’ 등 심리적 경향으로 규정되는 경우가 많다(Hannula, 2012; 박선화, 상경아, 2011; 허도하, 오영열, 2011; 최혜진, 김상룡, 2011; 백명숙, 신항균, 2007). 이러한 심리적 경향으로서의 수학적 태도는 교수·학습에 의한 육성의 정도나 평가 가능성이 불분명하다. 심리적 경향으로서의 수학적 태도는 설문에 의해서 검사하는 경우가 많은데, 설문에 의한 심리적 경향의 수학적 태도는 분석 및 평가를 할 때, 피검사자의 주관이 매우 강하게 개입된다. 따라서 학생이 어떤 상황에 처해 있을 때 태도를 검사하느냐에 따라 검사 결과가 매우 달라질 수 있으며 영역이나 난이도에 따라 학생의 마음가짐이 크게 달라질 수 있기 때문에 수학적 태도가 단순하게 ‘좋아졌다’, ‘나빠졌다’로 이야기하기 어렵다는 것이다. 그리고 이러한 평가에서의 문제는 ‘육성 가능성’에도 영향을 주게 된다(임영빈, 2019).

片桐重男(2004)는 ‘수학적 태도’라는 용어를 ‘수학적 사고를 유발하는 태도’의 의미로 사용한다. ‘태도’라는 것은 눈에 보이지도 않고, 어떤 행동을 했을 때 그에 관한 태도를 해석하는 방법이 사람마다 다를 수 있다. 그래서 수학적 태도를 ‘…하려고 한다’라는 준비태세(set)가 되어 있는지에 주목하여 규정하려고 생각했다. 그리고 수학적 태도는 문제를 대할 때의 자세라고 할 수 있으며, 수학적인 사고를 이끄는 힘, 원동력(Guiding Forces)으로서 생각하여 수학적 사고의 한 종류라고 생각하였다. 아울러 문제해결 과정에서 수학적 태도에 의해 발동되는 수학적 사고를 [표 1]과 같이 구조화하고 있다. [표1]과 같은 구조화를 통해 문제해결 과정에서 수학적 사고가 어떤 수학적 태도에 의하여 유발되는지 확인할 수가 있다. 즉, 수학적 태도는 문제해결 과정의 각 단계에서 발현될 수 있는 수학적 사고를 유목화 해줄 수 있다. 따라서 수학적 사고를 더욱 정확하게 분석, 평가하기 위해서는 평가자가 어떤 수학적 태도에 의해 발현된 수학적 사고인지 파악하는 것이 중요할 것이다.

[표 1] 문제해결 과정에서의 수학적 사고・태도(片桐重男, 1992; 2004)

| 문제해결과정 | 수학적 태도 | 주로 관찰되는 수학적 사고 | |
|---|---|---|---|
| | | 방법에 관련된 사고 | 내용에 관련된 사고 |
| 문제 형성・파악 | ・스스로 자신의 문제나 목적, 내용을 명확히 파악하려는 태도<br>・내용을 간결 명확히 나타내려는 태도 | 추상화<br>단순화<br>수량화<br>기호화<br>도형화 | 함수 |
| 해결 방안 구상 | ・이치에 닿으며 조리 있는 행위를 하려는 태도 | 유추<br>특수화<br>수량화<br>도형화 | 단위<br>집합<br>개괄 |
| 해결 실행 | ・이치에 닿으며 조리 있는 행위를 하려는 태도<br>・내용을 간결 명확히 나타내려는 태도 | 귀납<br>연역<br>유추 단순화<br>특수화<br>기호화<br>구체(추상)화 | 단위<br>집합<br>표현<br>조작<br>개괄<br>함수<br>식 |
| 논리적 검증 및 발전 | ・이치에 닿으며 조리 있는 행위를 하려는 태도<br>・내용을 간결 명확히 나타내려는 태도<br>・보다 나는 것을 구하려는 태도 | 일반화<br>연역<br>귀납<br>통합<br>발전 | 단위<br>표현<br>조작<br>알고리즘<br>기본성질<br>함수<br>식 |

### 4. 교과 역량과 수학적 사고

교육부(2015; 2020)는 수학과의 교과역량을 ‘문제해결’, ‘추론’, ‘창의·융합’, ‘의사소통’, ‘정보처리’, ‘태도 및 실천’으로 규정하고 있다. 박경미 외(2015)에 따르면 교과 역량은 각각의 의미와 하위 요소를 가지고 있고, 그 내용은 다음과 같다.

문제해결 능력은 ‘해결 방법을 알고 있지 않은 문제 상황에서 수학의 지식과 기능을 활용하여 해결 전략을 탐색하고 최적의 해결 방안을 선택하여 주어진 문제를 해결하는 능력’을 의미한다. 문제해결 능력의 하위 요소는 문제 이해 및 전략 탐색, 계획 실행 및 반성, 협력적 문제해결, 수학적 모델링, 문제 만들기이다. 이는 Polya의 문제해결 4단계를 포함하고 있으며 [표 1]과 같이 각각의 요소는 수학적 사고의 발현과 밀접하게 관련이 된다. 특히, 다전략 문제해결 지도를 통한 수학 학습은 초등학생들의 수학적 태도에 긍정적인 영향을 미칠 수 있다(김서령, 박만구, 2021).

추론 능력은 ‘수학적 사실을 추측하고 논리적으로 분석하고 정당화하며 그 과정을 반성하는 능력’을 의미한다. 추론 능력의 하위 요소는 관찰과 추측, 논리적 절차 수행, 수학적 사실 분석, 정당화, 추론 과정의 반성이다. 관찰과 추측에는 규칙 찾기, 일반화하기, 특수화하기, 유추하기 등의 수학적 사고 기능이 있으며 논리적 절차 수행에는 단순화, 함수 구하기 등의 수학적 사고 기능이 있다. 수학적 사실 분석에는 조건 정보를 파악하기 위한 추상화, 어림을 위한 개괄적 사고, 분해를 위한 단위의 사고, 합성을 위한 통합적 사고 등이 포함된다. 정당화의 사고에는 증거를 제시하고 이유를 설명하기 위한 귀납, 연역적 사고 및 반례를 찾기 위한 특수화의 사고 등이 있으며 추론 과정의 반성에는 검토, 판별 등을 위한 연역적 사고 등이 포함될 수 있다.

창의·융합 능력은 ‘수학의 지식과 기능을 토대로 새롭고 의미 있는 아이디어를 다양하고 풍부하게 산출하고 정교화하며, 여러 수학적 지식, 기능, 경험을 연결하거나 수학과 타 교과나 실생활의 지식, 기능, 경험을 연결·융합하여 새로운 지식, 기능, 경험을 생성하고 문제를 해결하는 능력’을 의미한다. 이 능력의 하위요소는 독창성, 유창성, 융통성, 정교성, 수학 내적 연결, 수학 외적 연결 및 융합이다. 독창성은 문제 상황에서 새로운 아이디어나 해결 전략을 찾아내는 능력인데 이는 수학적 태도의 ‘스스로 자신의 문제나 목적, 내용을 명확히 파악하려는 태도’가 필요한 능력이다. 유창성은 문제 상황에서 많은 아이디어나 해결 방법을 산출하기 위한 능력으로 발전적 사고와 관련이 있다. 융통성은 다양한 관점에서 해결책을 찾고 문제를 제기하는 능력으로 유창성과 마찬가지로 발전적 사고와 관련이 있다. 정교성은 기존의 수학적 아이디어를 변형하여 더욱 가치 있는 것으로 발전시키는 능력으로 구체화의 사고, 식에 대한 사고, 도형화의 사고 등으로 생각해 볼 수 있다. 수학 내적·외적 연결 및 융합은 여러 영역의 통합과 재구성을 요구하는 능력이므로 통합적 사고가 특히 필요하다.

의사소통 능력은 ‘수학 지식이나 아이디어, 수학적 활동의 결과, 문제해결 과정, 신념과 태도 등을 말이나 글, 그림, 기호로 표현하고 다른 사람의 아이디어를 이해하는 능력’을 의미한다. 의사소통 능력의 하위 요소는 수학적 표현의 이해, 수학적 표현의 개발 및 변환, 자신의 생각 표현, 타인의 생각 이해이다. 이러한 하위 요소는 수학적 표현의 의미를 이해하고 사용하며 자신

의 아이디어를 나타내는 표현들을 만들 수 있어야하기 때문에 표현의 사고, 기호화의 사고, 식에 대한 사고, 도형화·수량화의 사고 등이 필요하다.

정보 처리 능력은 '다양한 자료와 정보를 수집·정리·분석·활용하고 적절한 공학적 도구나 교구를 선택·이용하여 자료와 정보를 효과적으로 처리하는 능력'을 의미한다. 정보 처리 능력의 하위 요소는 자료와 정보 수집, 자료와 정보 정리 및 분석, 정보 해석 및 활용, 공학적 도구 및 교구 활용이다. 우선 정보 처리를 위해서 실생활 등의 문제 상황에서 적절한 수학적 자료를 생성하기 위한 추상화의 사고가 필요하다. 아울러 자료와 정보를 수집하여 해석하기 위한 귀납적 사고가 필요하며 흩어진 자료들을 종합하여 해석하기 위한 통합적 사고가 필요하다.

태도 및 실천 능력은 '수학의 가치를 인식하고 자주적 수학 학습 태도와 민주 시민의식을 갖추어 실천하는 능력'을 의미한다. 태도 및 실천 능력의 하위 요소는 가치 인식, 자주적 학습 태도, 시민의식이다. 임영빈(2019)에 따르면 가치 인식이나 자주적 학습 태도는 심리적 경향으로써의 수학적 태도이다. 즉, 가치인식은 수학이라는 학문 자체에 대해서 얼마나 긍정적으로 생각하는지에 초점을 맞추고 있으며, 자주적 학습 태도는 학습에 대한 의지와 자신감 등에 초점을 맞추고 있다. 한편 시민의식에는 片桐重男(2004)가 학력으로써 강조한 수학적 태도의 요소를 포함하고 있다. 시민의식에는 정직, 공정, 책임감 등의 민주적 태도 이외에, 논리적 근거를 토대로 의견을 제시하고 합리적으로 의사를 결정하는 기능이 필요하다. 이러한 합리적 의사결정의 기능은 '이치에 닿으며 조리 있는 행위를 하려는 태도'로써 문제해결 과정의 전반에서 다양한 수학적 사고를 발현할 수 있게 한다.

## Ⅲ. 연구방법

### 1. 수학적 사고 분석을 위한 검토진 구성

본 연구는 선행연구의 이론적 고찰을 통하여 학력으로써 지도 가능한 수학적 사고를 고찰하고, 초등학교 5, 6학년 수학 교사용 지도서의 '도전 수학'에 나타나는 수학적 사고의 유형을 분석하였다. 이때 교사용 지도서의 문제해결 과정에서 예상되는 학생들의 행동을 토대로 수학적 사고의 유형을 분석하기 위한 분석틀을 구안하였다. 아울러, 보다 명확한 분석을 위하여 [표 2]와 같이 수학교육 전문가 검토진을 구성하였다. 두 명의 검토자가 각각 한 학년씩의 교과서 및 교사용 지도서를 분석하고, 교차분석을 통해 분석의 타당도를 높였다.

[표 2] 전문가 검토진 구성

| 전문가 | 직위 | 교육경력 | 학력 |
|---|---|---|---|
| A | 교수 | 31년 | 수학교육학 박사 |
| B | 교사 | 18년 | 수학교육학 박사 |

### 2. 수학적 사고의 분석틀

초등학교 5, 6학년 교사용 지도서에서는 도전 수학 차시의 문제해결 단계를 <문제 이해 단계→해결 계획의 수립 단계→계획의 실행 단계→반성 단계> 또는 <문제 이해 단계→해결 계획 수립 및 실행 단계→반성 단계→유사 문제해결>과 같이 제시하고 있다. 후자에 나타난 단계에는 전자에 나타난 단계에 비하여 유사 문제해결의 단계가 추가된 것으로 보이지만 전자의 경우에도 대부분 유사문제를 해결하고 있기 때문에 실제로는 후자의 단계를 따르고 있다(교육부, 2019a; 2019b; 2019c; 2019d). 다만 유사문제를 해결하는 과정에서는 기본 문제의 해결에서 나타난 수학적 사고가 반복하여 관찰되는 경우가 많기 때문에 본 연구에서는 [표 3]과 같이 기본 문제를 분석의 대상으로 삼았으며 유사문제의 경우 반성 단계에 포함시켜서 분석하였다. 아울러 '학습 과정의 서술'은 교사용 지도서에 제시된 교수·학습 예시문을 참고하여 정리하였다.

수학적 사고는 눈으로 직접 관찰할 수 없으며 명확한 준거가 없다면 객관적으로 분석이 어려울 수 있다. 따라서 각각의 학습과정에서 관찰할 수 있는 수학적 사고는 片桐重男(2004)가 제시한 '수학적인 사고에 관한 발문 일람'을 참고하여 분석하였다. 예를 들어, '대략 얼마 정도 될 것 같은지 예상해 보자.'라는 발문이나 활동은 '개괄적 파악의 사고'이며, '예를 들어서 이야기해보자.'라는 발문이나 활동은 '구체화를 포함하는 추상화의 사고'로 연결해 볼 수 있다. 한편, 교사용 지도서의 예시 발문 중에서 단계가 불분명하거나 다른

단계에 포함되어야 할 경우들이 종종 발견이 되었다. 이런 경우 본 연구의 분석 관점에 따라 단계를 재설정하여 분석하였다.

[표 3]수학적 사고의 분석틀

| 문제 해결 단계 | 교사용 지도서에 제시된 학습과정 | 관찰 가능한 수학적 사고 | |
|---|---|---|---|
| | | 방법 | 내용 |
| 문제 이해 | 학습 과정의 서술 | | |
| 계획 수립 | 학습 과정의 서술 | | |
| 계획 실행 | 학습 과정의 서술 | | |
| 반성 | 학습 과정의 서술<br>(유사문제해결 포함) | | |

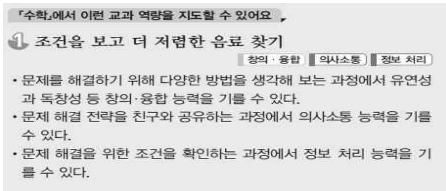
## Ⅳ. 연구 결과

초등학교 5, 6학년 교사용 지도서의 도전 수학에서 찾아볼 수 있는 수학적 사고는 [표 4]~[표 27]과 같다. 공통적으로 대부분의 단원에서 문제를 이해하기 위하여 구하려는 것이 무엇인지를 파악하는 과정과 조건을 파악하는 과정에서 추상화의 사고를 유도하고 있음을 확인할 수 있었다. 한편, 추상화의 사고는 문제의 이해 단계에서 문제의 수학 외적인 비본질적 요소들을 사상시켜 조건을 추상시키는 활동에 국한되는 경우가 많았는데, 片桐重男(2004)의 연구에 따르면 문장의 뜻을 명확하게 이해하지 못할 때 추상적이고 일반적인 것을 구체적으로 나타내는 구체화의 과정도 추상화의 사고라고 볼 수 있다. 그런데 이러한 종류의 추상화의 사고는 교사용 지도서에 제시되지 않고 있었다.

‘반성 및 유사문제의 해결’ 단계에서는 공통적으로 해결 과정이 바르게 수행 되었는지를 확인하면서 ‘연역적 사고’에 의한 검증을 유도하고 있으며, 기본 문제의 해결이 완료된 후에는 유사문제를 제시하거나 만들어 봄으로써 발전적 사고를 경험할 수 있도록 유도하고 있다.

언급한 바와 같이 교사용 지도서에서 도전수학의 수업 흐름은 대부분 문제 이해 단계와 반성 단계가 매우 유사한 방향으로 진술되어있었다. 이러한 구성으로 인하여 문제를 이해하기 위한 추상화와 해결 과정의 검증을 위한 연역적 사고 및 유사문제 해결을 위한 발전적 사고, 유추적 사고는 충분히 유도할 수 있다. 그러나 해당 단계에서 다양한 수학적 사고의 지도가 이루어지지 않을 우려가 있다.

한편, 교사용 지도서는 [그림 1]과 같이 도전 수학의 해당 활동을 통해서 어떤 교과 역량을 지도할 수 있는지 설명하고 있다. 그런데 대부분의 단원은 [그림 1]과 같이 수학적 사고의 명시적인 설명을 하지 않고 있다.


「수학」에서 이런 교과 역량을 지도할 수 있어요

1 조건을 보고 더 저렴한 음료 찾기

창의·융합 | 의사소통 | 정보 처리

- 문제를 해결하기 위해 다양한 방법을 생각해 보는 과정에서 유연성과 독창성 등 창의·융합 능력을 기를 수 있다.
- 문제 해결 전략을 친구와 공유하는 과정에서 의사소통 능력을 기를 수 있다.
- 문제 해결을 위한 조건을 확인하는 과정에서 정보 처리 능력을 기를 수 있다.

[그림 1] 도전 수학에서 교과 역량에 대한 설명1(교육부, 2019d)

아울러, 교사용 지도서의 발문과 별개로 교과서에 제시되는 문제에는 계획을 수립하기 위한 보조문항을 제시하는 경우가 많았다. 6학년 2학기의 도전수학은 대체로 계획 단계에서 교과서에 보조문항이 자세하지 않고 ‘어떤 방법으로 문제를 해결할지 생각해 보세요.’라는 질문만 제시함으로써 학생들의 유추적 사고가 자발적으로 일어날 수 있는 여지를 주고 있지만 다른 학기의 도전수학은 계획 단계에서 상세하게 보조문항을 제시하는 경우가 대부분이었다. 임영빈(2020)에 따르면 문장제에 자세한 보조문항을 제공하는 것은 다인수 학급에서 상대적으로 균일한 수학적 사고를 발현 시킬 수 있다는 장점을 가지고 있으나, 수학적 사고를 스스로 떠올리기 어렵게 하는 단점을 가지고 있다. 특히 유추적 사고의 경우에는 보조문항으로 인하여 기계적으로 문제해결을 시작한 것인지, 학생이 스스로 해당 사고를 발현 했는지 불분명하다는 점을 지적하였다.

5-1-1의 도전수학은 문제 카드에 알맞은 식 카드를 찾아 연결하고 혼합 계산식을 계산한 뒤, 문제를 만들어 보는 활동이다. 문제의 이해 단계에서는 문제에 제시된 카드의 정보에서 필요한 요소만을 추상화하여 구하려는 것을 정확하게 파악하는 과정을 거치게 된다. 계획 단계에서는 연산기호에 활용되는 괄호의 유무를 통하여 문제해결의 실마리를 잡으면서 식에 대한 사고와 표현의 사고를 기대할 수 있다. 계획의 실행 단계에서는 주어진 식에 적합한 문장제를 만들고 구체적인

예를 찾으며 특수화의 사고를 경험할 수 있다. 반성 단계에서는 해결 과정을 확인하기 위한 연역적 사고와 유사문제 해결을 위한 발전적 사고, 유추적 사고를 경험할 수 있다.

[표 4] 5-1-1 도전 수학에서의 수학적 사고

| 문제 해결 단계 | 교사용 지도서에 제시된 학습과정 | 관찰 가능한 수학적 사고 | |
|---|---|---|---|
| | | 방법 | 내용 |
| 문제 이해 | 구하려는 것 알아보기 | 추상 | |
| | 알아야 할 것 파악하기 | | 함수 |
| 계획 수립 | 해결 계획 이야기하기 | 유추 | 식<br>표현 |
| 계획 실행 | 식 카드 찾아 이어보기 | | 식 |
| | 식 카드에 알맞은 문제 만들기 | 특수화 | 식 |
| | 계산해보기 | | 알고리즘 |
| 반성 | 해결 과정 확인 | 연역 | 기본성질 |
| | 유사문제해결-문제 만들기 | 발전<br>유추 | |

[표 5] 5-1-2 도전 수학에서의 수학적 사고

| 문제 해결 단계 | 교사용 지도서에 제시된 학습과정 | 관찰 가능한 수학적 사고 | |
|---|---|---|---|
| | | 방법 | 내용 |
| 문제 이해 | 구하려는 것 알아보기 | 추상 | |
| | 알아야 할 것 파악하기 | | |
| 계획 수립 | 문제의 조건 파악하기 | 연역 | |
| | 문제해결 방법 생각하기 | 유추 | 단위 |
| 계획 실행 | 필요한 말뚝의 수 구하기 | 일반화 | 알고리즘<br>식 |
| 반성 | 바르게 구했는지 확인하기 | 연역 | |
| | 다른 해결 방법 찾기 | 발전<br>도형화 | 식 |
| | 유사문제해결-문제 만들기 | 발전<br>유추 | |

5-1-2의 도전 수학은 울타리를 설치하기 위해 필요한 말뚝의 수를 구하는 문제를 해결하는 것이다. 이때, 최대공약수와 관련된 문제를 해결하고 어떻게 해결하였는지 설명하도록 지도하고 있다. 문제에서 구하고자 하는 것과 알아야 할 것을 추상화하여 문제를 이해한 뒤, 계획 수립 단계에서는 필요한 말뚝의 수를 구하기 위한 방법에 공약수의 사용을 유추하게 되는데 두 수의 최대공약수라는 '단위'를 사용함으로써 문제를 해결하게 된다. 실행단계에서는 식을 세워서 문제를 해결하게 되는데 말뚝의 수가 바뀌더라도 문제를 쉽게 해결할 수 있도록 일반화, 알고리즘화할 수 있다. 아울러 반성의 단계에서 문제를 해결하는 다른 방법을 구상하면서 그림그리기 전략을 활용하는 도형화의 사고가 발현되기를 기대하고 있다.

[표 6] 5-1-3 도전 수학에서의 수학적 사고

| 문제 해결 단계 | 교사용 지도서에 제시된 학습과정 | 관찰 가능한 수학적 사고 | |
|---|---|---|---|
| | | 방법 | 내용 |
| 문제 이해 | 문제의 조건 파악하기 | 추상 | 표현 |
| | 모양 속의 조각 수 파악하기 | 수량화 | 단위 |
| 계획 수립 | 모양조각의 변화 파악하기 | 귀납 | |
| 계획 실행 | 열째 모양의 조각 수 구하기 | 연역 | 식 |
| | 쉰째 모양의 조각 수 구하기 | | 알고리즘 |
| 반성 | 대응 관계를 식으로 나타내기 | 일반화 | 식<br>알고리즘 |
| | 서로의 식 비교하기 | 발전 | |
| | 유사문제해결-문제 만들기 | 발전<br>유추 | |

5-1-3의 도전 수학에서는 규칙적인 배열에서 대응관계에 있는 두 양을 살펴보고 식으로 나타내는 활동을 하게 된다. 문제의 이해 단계에서 도형으로 주어진 모양 속의 조각 수를 수량화하여 파악함으로써 대응관계 속의 규칙을 파악하기 위한 실마리를 잡을 수 있다. 그리고 계획의 수립 단계에서 모양 조각의 방향과 수량의 변화를 귀납적으로 생각하면서 규칙을 발견할 수 있다. 실행 단계에서는 발견한 규칙을 연역적으로 파악하여 식으로 나타내고 알고리즘화 시킬 수 있으며 반성 단계에서 더욱 일반화된 식으로 나타낼 수 있다.

[표 7] 5-1-4 도전 수학에서의 수학적 사고

| 문제 해결 단계 | 교사용 지도서에 제시된 학습과정 | 관찰 가능한 수학적 사고 | |
|---|---|---|---|
| | | 방법 | 내용 |
| 문제 이해 | 주어진 조건을 확인하기 | 추상 | |
| 계획 수립 | 분수의 크기를 예상하는 방법 생각하기 | 유추 | 개괄<br>단위<br>기본성질 |
| 계획 실행 | 조건에 맞는 분수 찾기 | 연역 | 기본성질 |
| 반성 | 바르게 구했는지 확인하기 | 연역 | |
| | 유사문제해결-문제 만들기 | 발전<br>유추 | |

5-1-4의 도전 수학은 분모가 다른 분수를 통분하여 크기를 비교하면서 조건을 만족하는 분수를 찾는 활동이다. 주어진 조건을 추상하여 문제를 이해하고, 계획

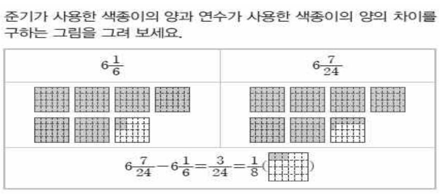
을 수립할 때 조건을 개괄적으로 파악하여 분수의 크기를 비교하기 위한 방법을 파악할 수 있으며 단위분수의 분모가 분자의 몇 배인지를 생각하여 조건을 만족하는 분수를 찾아보는 과정을 통해 단위의 사고를 경험할 수 있다. 해당 단원을 통하여 학습한 통분이라는 기본적인 법칙을 유추하여 문제를 해결하기 위한 계획을 수립할 수 있으며 통분이라는 기본적인 법칙과 연역적인 사고를 통하여 계획을 실행할 수 있다.

[표 8] 5-1-5 도전 수학에서의 수학적 사고

| 문제 해결 단계 | 교사용 지도서에 제시된 학습과정 | 관찰 가능한 수학적 사고 | |
|---|---|---|---|
| | | 방법 | 내용 |
| 문제 이해 | 구하려고 하는 것 확인하기 | 추상 | |
| | 문제의 조건을 확인하기 | | |
| 계획 수립 | 해결 방법의 구상 | | 기본성질 |
| 계획 실행 | 그림을 그려서 문제를 해결 | 도형화 | |
| | 식을 세워 문제를 해결 | | 알고리즘 식 |
| 반성 | 다른 방법으로 문제해결하기 | 발전 | |

5-1-5의 도전 수학은 분수의 덧셈과 뺄셈을 활용하여 과자 상자를 꾸미는데 필요한 색종이의 양을 구하는 활동이다. 문제를 이하하고, 계획을 수립하면서 각각의 친구가 사용한 색종이의 양을 어떻게 계산할 것인지 기본 법칙에 착안하여 생각하고 있다. 교사용 지도서에서는 '문제의 이해' 단계에서 문제를 해결하기 위한 방법을 구상하고 있지만 본 연구에서는 해당 내용을 '계획의 수립'에 포함시켜 분석하였다.

아울러 이 문제의 해결 방법을 두 가지 제시하고 있는데, 하나는 [그림 2]와 같이 그림그리기 전략을 활용하여 문제를 해결하는 방법으로 '도형화의 사고'를 기대할 수 있으며, 다른 방법은 식 만들기 전략을 활용하는 것이다. 마지막으로 두 가지 방법으로 문제를 해결한 이후에는 또 다른 방법으로 문제를 해결할 것을 제시하며 발전적 사고를 기대하고 있다.




[그림 2] 도형화의 사고 사례(교육부, 2019a)

[표 9] 5-1-6 도전 수학에서의 수학적 사고

| 문제 해결 단계 | 교사용 지도서에 제시된 학습과정 | 관찰 가능한 수학적 사고 | |
|---|---|---|---|
| | | 방법 | 내용 |
| 문제 이해 | 문제의 조건 파악하기 | 추상 | |
| 계획 수립 | 도형을 변형하거나 나누기 | 유추 | 단위 |
| 계획 실행 | 도형의 넓이 구하기 | 연역 | 식 |
| 반성 | 바르게 구했는지 확인하기 | 연역 | |
| | 나와 다른 방법 확인하기 | 발전 | |
| | 다른 도형에 적용이 가능한지 확인하기 | 일반화 통합 | |

5-1-6의 도전 수학은 주어진 오각형이 넓이를 구하는 활동이다. 문제를 제시할 때 모눈종이 위에 오각형을 제시하기 때문에 이러한 조건을 파악하는 것으로 문제해결을 시작하게 된다. 문제를 파악한 이후에는 오각형의 구성요소를 세부적으로 파악하는 단위의 사고를 유도하고 있다. 그리고 이전에 학습하였던 삼각형, 사각형의 넓이 구하는 방법을 유추하여 주어진 도형의 넓이를 구하기 위한 분할 방법을 생각하게 된다. 계획의 실행 단계에서는 삼각형의 넓이와 사각형의 넓이를 구하는 식을 사용하여 주어진 오각형의 넓이를 구하게 된다. 반성 단계에서는 해결한 방법을 되돌아보면서 풀이과정에 문제가 없는지 연역적으로 생각해보고, 다르게 해결한 친구들의 방법을 자신의 방법과 비교해보면서 발전적 사고를 기대하게 된다.

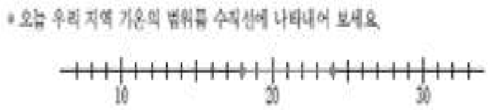
이 단원은 유사 문제나 문제 만들기 활동을 제시하지는 않고 하나의 문제에 대한 여러 가지 풀이 방법에 중점을 두고 있다. 교사용 지도서에서 이 문제의 해결을 위해 제시하는 세 가지 풀이 방법은 오각형을 삼각형으로 나누는 방법, 모눈종이 위에서 오각형을 사각형으로 변형하는 방법, 오각형 주위에 직사각형의 넓이를 먼저 구한 뒤, 나머지 부분의 넓이를 빼는 방법이다. 이외의 여러 가지 문제해결 전략을 적용하여 문제를 해결해 본 뒤, 가장 좋은 전략을 선정하게 하고, 찾아낸 전략을 다른 도형에도 적용이 가능한지 이야기하면서 일반화의 사고와 통합적 사고를 유도하고 있다.

5-2-1의 도전 수학은 날씨 정보와 관련하여 수의 범위를 알아보는 활동이다. 문제를 이해하기 위한 추상화의 사고를 거친 뒤, 이전에 배웠던 수직선과 어림 관련 용어를 떠올리게 하여 유추적 사고를 통해 문제

의 해결 계획을 떠올리게 한다. 문제해결에서 계획을 수립할 때에는 유추적 사고가 매우 중요한 역할을 하는 경우가 많다. 그런데 이 문제는 [그림 3]과 같이 보조문항을 제시하여 학생들이 유추적으로 해결 방법을 떠올릴 수 있었는지 명확하게 파악할 수는 없다. 이미 언급한 바와 같이 많은 단원의 도전수학에서 이와 같이 보조문항을 상세하게 제시하고 있다.

[표 10] 5-2-1 도전 수학에서의 수학적 사고

| 문제해결단계 | 교사용 지도서에 제시된 학습과정 | 관찰 가능한 수학적 사고 | |
|---|---|---|---|
| | | 방법 | 내용 |
| 문제이해 | 문제의 정보 확인하기<br>구하려는 것 알아보기 | 추상 | |
| 계획수립 | 수직선의 활용 방법 떠올리기<br>어림관련 용어 떠올리기 | 유추 | |
| 계획실행 | 기온을 수직선에 나타내기 | 도형화 | |
| | 농도의 범위 나타내기 | | 개괄 |
| 반성 | 새롭게 알게 된 점 이야기 | 통합 | |
| | 유사문제해결-문제 만들기 | 발전<br>유추 | |




[그림 3] 보조문항의 사례(교육부, 2019b)

한편, 계획의 실행 단계에서 수직선을 통해 수의 범위를 나타내는 도형화의 사고를 한 뒤, 개괄적 파악의 사고를 통해 어림수로 농도의 범위를 나타낼 수 있다. 반성 과정에서는 새롭게 알게 된 점을 이야기 하면서 통합적 사고를 통하여 기존의 지식과 새로운 지식을 융합할 수 있다.

5-2-2의 도전 수학은 크기가 1인 직사각형을 그려보는 활동을 통하여 단위분수를 1로 만들기 위한 분수의 곱셈을 해보는 활동이다. 단위의 사고를 통하여 직사각형을 몇 배하면 정사각형이 되는지를 확인하여 그림그리기 전략을 활용하는 계획을 수립한다. 조건대로 직사각형을 그리고, 그려진 도형을 수치화 하면서 도형화, 수량화의 사고를 하게 되며 분수의 곱셈의 기본성질을 활용한 생각을 할 수 있다. 반성 단계에서는 다른 크기의 직사각형인 경우에도 항상 통용이 되는지를 파악하며 풀이과정을 일반화 및 알고리즘화 시킨다. 유사문제의 경우, 단위분수가 아닌, 진분수, 가분수의 경우를 해결하면서 통합적 사고를 유발 시킬 수 있다.

[표 11] 5-2-2 도전 수학에서의 수학적 사고

| 문제해결단계 | 교사용 지도서에 제시된 학습과정 | 관찰 가능한 수학적 사고 | |
|---|---|---|---|
| | | 방법 | 내용 |
| 문제이해 | 구하려는 것 알아보기 | 추상 | |
| 계획수립 | 직사각형 그리는 방법 구상 | | 단위 |
| 계획실행 | 조건대로 직사각형 그리기 | 도형화 | |
| | 분수의 곱셈으로 설명하기 | 수량화 | 기본성질<br>단위 |
| 반성 | 다른 크기의 직사각형 문제 | 일반화 | 단위<br>알고리즘 |
| | 유사문제해결 | 발전<br>유추<br>통합 | |

[표 12] 5-2-3 도전 수학에서의 수학적 사고

| 문제해결단계 | 교사용 지도서에 제시된 학습과정 | 관찰 가능한 수학적 사고 | |
|---|---|---|---|
| | | 방법 | 내용 |
| 문제이해 | 구하려는 것 알아보기 | 추상 | |
| | 거울을 대칭축에 대어보는 것의 의미 파악하기 | 유추 | |
| 계획수립 | 거울로 모양을 파악하기 | | 개괄 |
| 계획실행 | 거울에서 본 모양을 그려보기 | 도형화 | 표현 |
| | 대칭축의 위치에 따른 문제 만들고 해결하기 | 발전<br>연역 | 기본성질 |
| | 점대칭 도형 찾아보기 | | 집합 |
| 반성 | 유사문제해결-친구들과 문제 만들고 해결방법 설명하기 | 발전<br>유추 | |

5-2-3의 도전 수학은 거울을 활용하여 선대칭 도형을 만드는 활동이다. 우선 구하려는 것을 알아본 뒤, 이미 알고 있는 거울의 성질을 통하여 거울을 대칭축에 대어보는 것이 어떤 의미를 가지는지 파악하게 된다. 이후 거울을 조작하여 개괄적으로 전체의 모양을 확인하여 문제해결을 위한 계획을 수립하고, 거울에서 관찰한 결과를 도형화하여 나타내기 위한 표현의 사고를 기대할 수 있다. 이후 대칭축의 위치 변화에 따라서 다른 문제를 만들어 해결해 보면서 발전적 사고를 발현하고, 만들어진 글자 중에서 점대칭 도형을 찾고 분류하면서 집합의 사고를 기대할 수 있다. 반성단계에서는 다시 유사한 문제를 만들고 어떻게 해결했는지 친구들에게 설명하면서 발전적으로 대칭의 의미를 다

시 정리할 수 있다.

[표 13] 5-2-4 도전 수학에서의 수학적 사고

| 문제 해결 단계 | 교사용 지도서에 제시된 학습과정 | 관찰 가능한 수학적 사고 | |
|---|---|---|---|
| | | 방법 | 내용 |
| 문제 이해 | 기사에서 구하려는 것 확인 | 추상 | |
| | 기사에서 필요한 정보 고르기 | | |
| 계획 수립 | 비슷한 경험 생각해보기 | 유추 | 식 |
| 계획 실행 | 답을 어림해보기 | | 개괄 |
| | 식을 만들어 해결하기 | | 기본성질 식 |
| 반성 | 구한 방법 발표하기 | | 표현 |
| | 잘못된 점 고쳐주기 | 연역 | |
| | 유사문제해결-문제 만들기 | 발전 유추 | |

5-2-4의 도전 수학은 기사를 읽고 소수의 곱셈을 활용하여 기사 내용에 알맞은 답을 찾는 활동이다. 기사문을 읽고 기사에서 구해야 할 것과 필요한 정보를 고르면서 문제를 이해한다. 그리고 예전에 풀어본 문제에서 비슷한 경험을 떠올리는 유추적 사고를 통하여 계획을 수립하게 한다. 실행 단계에서는 어림하여 답을 예상해보는 개괄적 파악의 사고를 해본 뒤, 기본성질에 따라서 식을 만들어 문제를 해결 할 수 있다. 반성 단계에서는 어떠한 과정에 따라서 문제를 해결했는지 나타내 보는 표현의 사고를 해볼 수 있으며 연역적 사고를 통해서 다른 사람의 잘 못된 풀의 과정을 고쳐줄 수 있다. 마지막으로 유사문제를 해결하면서 발전적 사고와 유추적 사고를 발현해볼 수 있다.

[표 14] 5-2-5 도전 수학에서의 수학적 사고

| 문제 해결 단계 | 교사용 지도서에 제시된 학습과정 | 관찰 가능한 수학적 사고 | |
|---|---|---|---|
| | | 방법 | 내용 |
| 문제 이해 | 구하려는 것 알아보기 | 추상 | |
| | 알아야 할 조건 알아보기 | | |
| 계획 수립 | 비슷한 경험 떠올리기 | 유추 | |
| | 마주보는 면을 찾는 방법 | | 기본성질 |
| 계획 실행 | 마주보는 면 찾아 찾기 | 연역 | 조작 |
| | 알맞은 주사위 눈 그리기 | 기호화 | |
| 반성 | 바르게 해결했는지 살펴보기 | 연역 | |
| | 다른 해결 방법 찾아보기 | 발전 | |
| | 유사문제해결-문제 만들기 | 발전 유추 | |

5-2-5의 도전 수학은 정육면체의 전개도의 빈 곳에 알맞은 주사위 눈을 그려보면서 주사위의 전개도를 완성하는 활동이다. 문제의 이해 과정을 거쳐서 계획을 수립할 때 유추적 사고와 전개도의 기본 성질에 대한 파악 하게 된다. 실행 단계에서는 전개도의 마주보는 면을 찾기 위한 연역적 사고와 조작의 사고가 필요하며 알맞은 주사위의 눈을 그리기 위해 수치를 기호화하게 된다. 반성 단계에서는 연역적 사고를 통해 바르게 해결했는지 살펴보며, 다른 해결 방법이나 유사 문제의 해결을 통하여 발전적 사고와 유추적 사고를 경험하게 된다.

[표 15] 5-2-6 도전 수학에서의 수학적 사고

| 문제 해결 단계 | 교사용 지도서에 제시된 학습과정 | 관찰 가능한 수학적 사고 | |
|---|---|---|---|
| | | 방법 | 내용 |
| 문제 이해 | 구하려는 것 알아보기 | 추상 | |
| | 알아야 할 조건 알아보기 | | |
| 계획 수립 | 다양한 풀이 방법 생각하여 공정한 방법 선택하기 | 유추 | |
| 계획 실행 | 자료를 선택하여 평균을 구하고 문제의 답을 도출하기 | 연역 | 기본성질 식 |
| 반성 | 해결 방법 비교해보기 | 발전 | |

5-2-6의 도전 수학은 평균과 관련된 실생활 문제를 해결하고 해결 과정을 설명하는 활동이다. 문제를 이해하는 과정을 거친 뒤, 계획의 수립을 위하여 유추적 사고를 활용하여 다양한 방법을 떠올려 본다. 이후 모둠 친구들과 함께 가장 공정한 방법을 선택한다. 실행의 단계에서는 다양한 방법으로 자료를 선택하여 평균을 구하는 방법을 활용하게 된다. 이때에는 기본성질의 사고와 식의 사고를 기대할 수 있으며 연역적으로 문제의 답을 도출해낼 수 있다. 반성의 단계에서는 해결 방법을 비교해봄으로써 발전적 사고를 발현시킬 수 있다.

6-1-1의 도전 수학은 분수의 나눗셈을 이용하여 매듭실의 길이를 구해보는 활동을 하게 된다. 문제를 이해한 뒤에 계획을 수립하는데 이 단원에서는 문제해결 방법에 대한 교과서의 보조문항은 없기 때문에 유추적 사고에 의한 해결 방법의 구상이 자연스럽다. 교사용 지도서에서는 식 만들기와 그림 그리기를 제시하면서 식의 사고와 도형화의 사고를 기대하고 있다. 실행 단계에서는 분수의 나눗셈의 기본성질을 활용하여 식을 세워 문제를 해결하는 것을 제시하고 있다. 반성단계

에서는 사용하지 않은 정보를 찾아보는 활동을 함으로써 함수적 사고를 기대할 수 있다. 아울러 문제해결 방법을 비교해보고, 유사문제를 해결하면서 발전적 사고를 경험할 수 있다.

[표 16] 6-1-1 도전 수학에서의 수학적 사고

| 문제해결 단계 | 교사용 지도서에 제시된 학습과정 | 관찰 가능한 수학적 사고 | |
|---|---|---|---|
| | | 방법 | 내용 |
| 문제 이해 | 구하려는 것 알아보기 | 추상 | |
| | 주어진 정보 파악하기 | | |
| 계획 수립 | 문제해결 방법 생각하기 | 유추 | |
| 계획 실행 | 식을 세워 문제를 해결하기 | | 기본성질 식 |
| 반성 | 문제해결 방법 비교해보기 | 발전 | |
| | 사용하지 않은 정보 찾기 | | 함수 |
| | 유사문제해결 | 발전 유추 | |

이 활동에서는 다른 단원의 도전 수학 활동과는 다르게 보조문항이 구체적인 문제해결 전략이나 수학적 사고를 제한하지 않고 있다. 이와 같은 경우에는 교사의 특정한 지시가 없을 때는 문제를 해결하기 위한 유추적 사고를 자연스럽게 발현할 가능성이 높으며 해결과정에서의 수학적 사고도 보다 더 다양하게 발현될 가능성이 있다. 그러나 교사용 지도서에서는 문제의 실행 단계에 식 만들기에 의한 문제해결 방법만을 제시하고 있는데, 더 다양한 문제해결 전략이나 발문을 제시해 주는 것이 필요할 것이다.

[표 17] 6-1-2 도전 수학에서의 수학적 사고

| 문제해결 단계 | 교사용 지도서에 제시된 학습과정 | 관찰 가능한 수학적 사고 | |
|---|---|---|---|
| | | 방법 | 내용 |
| 문제 이해 | 재료의 파악 | | 단위 |
| | 구하려는 것 알아보기 | 추상 | |
| | 주어진 정보 파악하기 | | |
| 계획 수립 | 밑면의 모양에 따라 입체도형을 조사하기 | 귀납 | 단위 |
| 계획 실행 | 주어진 재료로 만들 수 있는 각기둥과 각뿔 찾기 | 연역 통합 | 단위 |
| 반성 | 주어진 도형을 만들기 위한 재료 구하기 | 연역 | 조작 함수 |
| | 유사문제해결-문제 만들기 | 발전 유추 | |

6-1-2의 도전 수학은 주어진 재료로 만들 수 있는 각기둥과 각뿔을 찾아보는 활동이다. 우선 주어진 정보 중에 각기둥과 각뿔의 구성요소가 될 재료들을 파악함으로써 문제해결에 활용할 기본적인 단위를 생각하게 된다. 이후 구하려는 것과 주어진 정보를 파악하여 문제를 이해할 수 있다. 계획의 수립을 위하여 귀납적으로 밑면의 모양에 따른 입체도형의 구성요소의 수를 정리할 수 있다. 이때에도 입체도형의 구성요소 사이의 관계에 주목하는 단위의 사고를 발현할 수 있다. 계획의 실행 단계에서는 주어진 재료로 만들 수 있는 각기둥과 각뿔을 찾는 과정에서 각각의 구성요소 단위들이 어떤 관계를 가지고 있는지에 초점을 맞추면서 통합적으로 각각의 도형들을 파악할 수 있다. 반성의 단계에서는 반대로 주어진 도형을 만들기 위한 재료를 구하기 위해 연역적으로 생각을 하고 실제 사물이 없이도 알고 있는 정보를 조작하고 함수적으로 문제를 해결해볼 수 있다. 이후 유사문제를 해결하고, 문제를 만들어보면서 발전적 사고와 유추적 사고를 발현할 수 있다.

[표 18] 6-1-3 도전 수학에서의 수학적 사고

| 문제해결 단계 | 교사용 지도서에 제시된 학습과정 | 관찰 가능한 수학적 사고 | |
|---|---|---|---|
| | | 방법 | 내용 |
| 문제 이해 | 구하려는 것 알아보기 | 추상 | |
| | 자료를 활용하여 정보 생성하기 | 귀납 | |
| 계획 수립 | 색종이 한 장의 무게를 구하기 위한 방법 생각하기 | 유추 | 기본성질 |
| 계획 실행 | 계산기를 활용하여 문제해결하기 | | 기본성질 식 |
| 반성 | 바르게 해결했는지 설명하기 | 연역 | |
| | 유사문제해결 | 발전 유추 | |

6-1-3의 도전 수학은 계산기를 사용하여 색종이 한 장의 무게를 구하는 활동이다. 문제의 이해 단계에서 주어진 자료를 활용하여 무게를 재어 보는 등의 귀납적 데이터 수집이 가능하다. 그러나 색종이 한 장의 무게는 매우 가볍기 때문에 계측 장비로 측정이 불가능하며, 이러한 상황에서 이미 배운 소수의 나눗셈이라는 기본 법칙을 유추적으로 활용하여 계획을 수립할 수 있다. 실행과정에서는 계산기를 활용하여 문제를 해결할 것을 권고하고 있다. 계산기를 활용하게 되면 자연스럽게 소수의 나눗셈 식을 세워서 기본 법칙에

의하여 답을 구할 수 있다. 반성단계에서는 문제를 구한 방법을 친구들에게 설명하고 무게가 아닌 두께를 구하는 유사문제를 해결하게 된다.

[표 19] 6-1-4 도전 수학에서의 수학적 사고

| 문제 해결 단계 | 교사용 지도서에 제시된 학습과정 | 관찰 가능한 수학적 사고 | |
|---|---|---|---|
| | | 방법 | 내용 |
| 문제 이해 | 구하려는 것 알아보기 | 추상 | |
| | 주어진 정보 파악하기 | | |
| 계획 수립 | 백분율로 나타내기 위한 방법 상기하기 | 유추 | 기본성질 |
| 계획 실행 | 계산기를 사용하여 문제해결하기 | 연역 | 기본성질 식 |
| 반성 | 다른 친구들과 풀이가 바른지 비교하기 | 연역 | |
| | 유사문제해결-문제 만들기 | 발전 유추 | |

6-1-4의 도전 수학은 환경 보고서를 읽고, 백분율을 이용하여 빈병의 회수량을 비교하는 활동이다. 문제를 이해한 뒤, 이미 배운 백분율이라는 기본 법칙을 유추적으로 활용하여 계획을 수립할 수 있다. 이후 계산기를 활용하여 식을 세워 연역적으로 문제를 해결할 수 있으며 반성 단계에서는 풀이가 바른지 다른 친구들과 비교해보고, 유사문제를 만들어서 해결할 수 있다.

[표 20] 6-1-5 도전 수학에서의 수학적 사고

| 문제 해결 단계 | 교사용 지도서에 제시된 학습과정 | 관찰 가능한 수학적 사고 | |
|---|---|---|---|
| | | 방법 | 내용 |
| 문제 이해 | 주어진 정보 파악하기 | 추상 | |
| | 알수 없는 정보 파악하기 | | 함수 |
| 계획 수립 | 해결 계획 수립하기 | 유추 | 기본성질 식 |
| | 백분율 구하기 | | |
| | 그래프 그리는 방법 떠올리기 | | |
| 계획 실행 | 그래프를 그려 기사문 완성하기 | 연역 도형화 | 표현 |
| 반성 | 바르게 해결했는지 확인하기 | 연역 | |
| | 그래프에서 알 수 있는 것 찾아보기 | 추상 | |
| | 유사문제해결-문제 만들기 | 발전 유추 | |

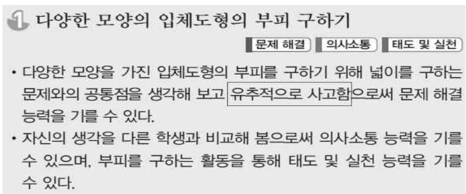
6-1-5의 도전 수학은 알맞은 그래프를 넣어서 기사문을 완성하는 활동이다. 주어진 자료는 찢어진 신문으로써 문제를 이해하는 단계에서 알 수 없는 정보를 함수적으로 파악해야 한다. 계획의 수립 단계에서는 백분율과 그래프 그리는 방법이라는 기본 성질을 활용하여 유추적으로 해결 방법을 생각할 수 있다. 반성단계에서는 그래프에 활용한 각각의 수치를 올바르게 구했는지 연역적으로 검증하고 그래프를 통하여 알 수 있는 내용을 추상화한다. 이후 유사문제를 만들어서 발전적, 유추적 사고를 발현한다.

[표 21] 6-1-6 도전 수학에서의 수학적 사고

| 문제 해결 단계 | 교사용 지도서에 제시된 학습과정 | 관찰 가능한 수학적 사고 | |
|---|---|---|---|
| | | 방법 | 내용 |
| 문제 이해 | 구하려는 것 알아보기 | 추상 | |
| 계획 수립 | 비슷한 문제 떠올리기 | 유추 | |
| 계획 실행 | 입체도형의 부피 구하기 | 연역 | 기본성질 식 조작 |
| | 구한 방법 설명하기 | | |
| 반성 | 다른 방법 떠올리기 | 발전 | |
| | 유사문제해결-문제 만들기 | 발전 유추 | 함수 |

6-1-6의 도전 수학은 비정형 입체도형의 부피를 구하는 활동이다. 문제를 이해하고, 비슷한 문제를 유추적으로 떠올리며 계획을 수립한다. 실행 단계에서 주어진 입체도형을 조작하여 기본적인 직육면체의 부피를 구하는 식을 활용하여 문제를 해결하게 된다. 반성 단계에서는 다른 방법을 떠올리고 유사문제를 스스로 만들어 보면서 발전적 사고와 유추적 사고를 하게 된다.

아울러 6-1-6에서는 [그림 4]와 같이 교과역량에 해당되는 수학적 사고를 명시적으로 제시하여 수업을 지도하는 교사가 수학적 사고의 구체적인 내용을 알 수 있도록 설명하고 있다.


1 다양한 모양의 입체도형의 부피 구하기

문제 해결 | 의사소통 | 태도 및 실천

- 다양한 모양을 가진 입체도형의 부피를 구하기 위해 넓이를 구하는 문제와의 공통점을 생각해 보고 유추적으로 사고함으로써 문제 해결 능력을 기를 수 있다.
- 자신의 생각을 다른 학생과 비교해 봄으로써 의사소통 능력을 기를 수 있으며, 부피를 구하는 활동을 통해 태도 및 실천 능력을 기를 수 있다.

[그림 4] 도전 수학에서 교과 역량에 대한 설명2(교육부, 2019c)

수학은 사고 방법을 학습하는 수단일 수 있으며, 수학의 문제를 해결하는 데에는 수학적 사고와 태도의

육성이 매우 중요하다. 이때 교사는 수학적 사고와 태도를 막연하게 파악하고 있기만 해서는 실제로 어떤 장면에서 어떻게 지도해야 하는가를 명확히 알 수가 없다. 그러므로 수학적 사고를 지도 대상으로 이해하거나 지도 목표로 설정하게 되면, '귀납적 사고'라든가 '기호화의 사고'와 같이 구체적인 내용을 이해하는 것이 바람직하다(김수미 외, 2020)는 점을 생각해 보았을 때, 해당 단원의 이러한 기술 방법은 교사들의 수학적 사고 지도에 도움이 되는 방법이라고 생각할 수 있다.

[표 22] 6-2-1 도전 수학에서의 수학적 사고

| 문제해결단계 | 교사용 지도서에 제시된 학습과정 | 관찰 가능한 수학적 사고 | |
|---|---|---|---|
| | | 방법 | 내용 |
| 문제이해 | 구하려는 것 알아보기 | 추상 | |
| | 주어진 정보 파악하기 | | |
| 계획수립 | 문제해결 방법 구상하기 | 유추 | |
| 계획실행 | 계획에 따라 문제해결하기 | 연역 | 기본성질식 |
| 반성 | 해결 방법 설명하고 비교하기 | 연역 | |
| | 유사문제해결-문제 만들기 | 발전유추 | |

6-2-1의 도전 수학은 분수의 나눗셈을 이용하여 배터리 충전시간을 구하는 문제이다. 구하려는 것과 주어진 정보를 파악한 뒤, 주어진 조건을 고려하면서 유추적으로 문제해결 전략을 세울 수 있도록 유도한다. 실행 단계에서는 분수의 나눗셈의 기본 성질을 바탕으로 식을 세워서 문제를 해결할 수 있으며 반성단계에서 해결방법을 설명하고 비교하는 연역적 사고와 유사문제를 만들어 해결하는 발전적, 유추적 사고를 유도할 수 있다.

[표 23] 6-2-2 도전 수학에서의 수학적 사고

| 문제해결단계 | 교사용 지도서에 제시된 학습과정 | 관찰 가능한 수학적 사고 | |
|---|---|---|---|
| | | 방법 | 내용 |
| 문제이해 | 주어진 조건 파악하기 | 추상 | |
| | 구하려는 것 알아보기 | | |
| 계획수립 | 문제해결 방법 구상하기 | 유추 | |
| 계획실행 | 계획에 따라 문제해결하기 | 연역 | 기본성질식 |
| 반성 | 해결 방법 설명하고 비교하기 | 연역 | |
| | 유사문제해결 | 발전유추 | |

6-2-2의 도전 수학은 소수의 나눗셈을 활용하여 조건을 보고 더 저렴한 음료를 찾는 활동이다. 문제를 이해하고, 유추적 사고를 통해 해결 방법을 구상 할 수 있으며, 실행 단계에서 이미 학습한 소수의 나눗셈을 활용하여 식을 세워 답을 구할 수 있다. 반성 단계에서는 해결방법을 설명하고 비교하며 유사문제를 해결하면서 발전적사고와 유추적 사고를 지도할 수 있다.

[표 24] 6-2-3 도전 수학에서의 수학적 사고

| 문제해결단계 | 교사용 지도서에 제시된 학습과정 | 관찰 가능한 수학적 사고 | |
|---|---|---|---|
| | | 방법 | 내용 |
| 문제이해 | 구하려는 것 알아보기 | 추상 | |
| | 주어진 정보 파악하기 | | |
| | 사진 두 장을 제시한 이유알기 | | 함수 |
| 계획수립 | 비슷한 경험 떠올리기 | 유추 | |
| | 사진 속 공간의 구성요소 파악하기 | 연역 | 단위 |
| 계획실행 | 사진과 문자를 보고 조건에 맞는 위치 찾기 | | |
| 반성 | 문제해결 방법 설명하기 | 연역 | |
| | 바르게 해결했는지 확인하기 | | |
| | 문제를 해결하면서 알게된 점 이야기하기 | 통합 | |

6-2-3의 도전 수학은 사진을 찍은 모습을 보고 조건에 맞는 위치를 찾는 활동이다. 문제를 이해하는 단계에서 사진 두 장을 제시한 이유를 알아보며 필요한 조건이 무엇인지 알아보는 함수적 사고를 경험할 수 있다. 비슷한 경험을 떠올리는 유추적 사고와 사진 속 공간의 구성요소를 살펴보는 단위의 사고, 연역적 사고를 통하여 해결의 계획을 세울 수 있다. 그리고 사진과 문자의 위치를 연역적으로 파악하여 문제를 해결할 수 있다. 반성단계에서는 문제를 바르게 풀었는지 친구들과 이야기 하면서 연역적으로 검증할 수 있으며, 문제를 해결하면서 새롭게 알게 된 사실을 기존의 지식과 통합하는 과정을 거칠 수 있다. 6-2-3의 경우 다른 단원들과 다르게 전형적인 마무리 단계를 거치지 않고 있다. 이와 같은 수업의 흐름은 학생들이 다양한 유형의 수학적 사고를 경험하는데 도움이 될 것이다.

6-2-4의 도전 수학은 비례배분을 통하여 금액을 공정하게 나누는 활동이다. 주어진 정보를 파악하고 주하려는 것을 알아보기 위하여 문장제의 진술을 추상화하는 과정을 거친 뒤, 계획을 수립하는 단계에서 3가지 제시된 방법을 개괄적으로 비교하여 각각의 방법이

어떻게 실행될 수 있는지 예상해본다. 실행 단계에서는 각각의 방법으로 주어진 금액을 배분해보면서 비례식의 성질과 비례배분에 대한 기본적인 성질을 활용하고 식을 세워 문제를 해결할 수 있다. 반성 단계에서는 공정한 방법에 대해 친구들과 이야기 해보는 과정에서 각각의 방법에 대해 연역적으로 분석하고 통합적으로 비교해볼 수 있다. 마무리 활동으로 유사문제를 스스로 만들어서 해결해 봄으로써 발전적 사고와 유추적 사고를 기대하게 된다.

[표 25] 6-2-4 도전 수학에서의 수학적 사고

| 문제해결단계 | 교사용 지도서에 제시된 학습과정 | 관찰 가능한 수학적 사고 | |
|---|---|---|---|
| | | 방법 | 내용 |
| 문제이해 | 주어진 정보 파악하기 | 추상 | |
| | 구하려는 것 알아보기 | | |
| 계획수립 | 제시된 방법 검토하기 | | 개괄 |
| 계획실행 | 다양한 방법으로 금액을 배분하기 | 연역 | 기본성질 식 |
| 반성 | 공정한 방법에 대해 이야기하기 | 연역 통합 | |
| | 유사문제해결-문제 만들기 | 발전 유추 | |

[표 26] 6-2-5 도전 수학에서의 수학적 사고

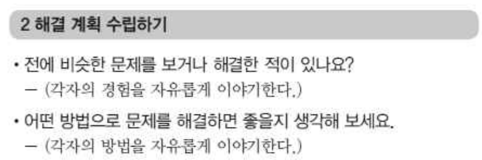
| 문제해결단계 | 교사용 지도서에 제시된 학습과정 | 관찰 가능한 수학적 사고 | |
|---|---|---|---|
| | | 방법 | 내용 |
| 문제이해 | 곡선구간마다 거리가 다른 이유 알아보기 | 연역 | |
| | 구하려는 것 알아보기 | 추상 | |
| | 주어진 조건 파악하기 | | |
| 계획수립 | 문제해결 방법 구상하기 | 유추 | 단위 |
| 계획실행 | 출발선의 위치 정하기 | 연역 | 기본성질 식 |
| 반성 | 달리기가 공정한지 이야기하기 | 연역 | |
| | 유사문제해결-문제 만들기 | 발전 유추 | |

6-2-5의 도전 수학은 원주 구하는 방법을 활용하여 공정한 경기를 위한 출발선을 정하는 활동이다. 곡선구간마다 거리가 다른 이유를 연역적으로 알아보고, 문제에서 구하려는 것과 주어진 조건을 추상화하여 파악할 수 있다. 계획의 수립을 할 때는 기존에 배운 내용을 유추하고 원형 경기장의 구성요소라는 단위에 집중하여 문제해결의 실마리를 잡을 수 있다. 계획을 실행 할 때에는 원주를 구하는 방법을 토대로 식을 세우는 과정을 통하여 출발선의 위치를 잡을 수 있고, 반성의 단계에서 경기를 공정하게 할 수 있을지 연역적으로 설명하고, 새로운 문제를 만들어 해결해볼 수 있다.

[표 27] 6-2-6 도전 수학에서의 수학적 사고

| 문제해결단계 | 교사용 지도서에 제시된 학습과정 | 관찰 가능한 수학적 사고 | |
|---|---|---|---|
| | | 방법 | 내용 |
| 문제이해 | 구하려는 것 알아보기 | 추상 | |
| | 주어진 조건 파악하기 | | |
| 계획수립 | 비슷한 경험 떠올리기 | 유추 | |
| | 문제해결 방법 구상하기 | | |
| 계획실행 | 원기둥의 전개도를 그려서 문제해결하기 | 도형화 | 기본성질 식 |
| | 옆면의 가로와 세로의 길이를 구하는 식 세우기 | | |
| 반성 | 해결 방법 설명하고 비교하기 | 연역 | |
| | 유사문제해결 | 발전 유추 | |

6-2-6의 도전 수학은 주어진 종이에 원기둥의 전개도를 그리고 오려 붙여서 원기둥 모양의 상자를 만들 때, 만들어진 원기둥의 높이를 비교하는 활동이다. 문제를 이해하는 과정에서 구하려는 것을 알아보고 주어진 조건을 파악하는 추상화의 사고를 할 수 있다. 계획의 수립 단계에서는 비슷한 경험을 떠올리고 해당 단원에서 학습한 내용을 연결하는 유추적 사고를 기대할 수 있다. 계획의 실행 단계에서는 원기둥의 전개도를 직접 그려보는 도형화의 사고와 전개도의 옆면의 가로와 세로의 길이를 구하기 위해 전개도의 기본 성질을 활용하고 식을 세우기 위한 수학적 사고를 발현할 수 있다. 반성단계에서는 해결 방법을 설명하고 비교하면서 연역적 사고를 거친 뒤, 유사문제를 해결하면서 발전적 사고와 유추적 사고를 할 수 있다.


2 해결 계획 수립하기

• 전에 비슷한 문제를 보거나 해결한 적이 있나요?
– (각자의 경험을 자유롭게 이야기한다.)
• 어떤 방법으로 문제를 해결하면 좋을지 생각해 보세요.
– (각자의 방법을 자유롭게 이야기한다.)

[그림 5] 6-2-6의 계획 수립 단계(교육부, 2019d)

6학년 2학기의 도전수학은 대체로 계획 수립의 단

계에서 문제해결 방법을 유도하기 위한 보조문항을 최소화하고 있다. 이러한 교과서의 구성은 학생의 수학적 사고를 획일적으로 제한하지 않는다는 장점이 있다. 그런데 교사용 지도서에서 [그림 5]와 같이 계획 수립을 위한 전략이나 수학적 사고를 상세하게 제시하지 않는 경우가 있었다.

수학과를 전공하지 않고, 전 과목을 지도하는 초등학교 교사들이 많다는 점을 고려한다면 교사용 지도서에는 더욱 다양한 학생들의 반응이 제시되는 것이 바람직할 것이다.

## Ⅴ. 결론 및 제언

본 연구는 초등학교 5, 6학년 수학 교사용 지도서의 도전 수학에 나타나는 수학적 사고의 유형을 분석하여 교육적 시사점을 논하기 위하여 수행되었다. 본 연구의 목적을 달성하기 위하여 다음과 같은 연구 내용을 설정하였다. 이를 위하여 교수·학습 내용을 바탕으로 평가 및 육성이 가능한 수학적 사고의 유형을 정리하고, 수학적 사고를 분석하기 위한 틀을 구안하였으며, 교사용 지도서를 분석하여 '도전 수학'을 지도하는 과정에 나타나는 수학적 사고를 분석하였다. 이와 같은 연구 과정을 통하여 다음과 같은 결론 및 시사점을 도출하였다.

첫째, 5, 6학년의 도전 수학은 교과서에서 제시하는 보조문항 및 교사용 지도서에서 제시하는 발문 등을 통하여 문제해결에 필요한 수학적 사고를 경험할 수 있도록 유도하고 있다. 특히 계획의 수립, 실행의 단계에서는 여러 단원에 걸쳐서 다양한 수학적 사고를 경험할 수 있게 여러 가지 유형의 문제들을 제시하고 있다. 다만, 도전 수학에서 제시하고 있는 자세한 보조문항으로 인하여 유도되지 않은 수학적 사고를 경험하기는 어려운 경우가 많았다. 특히, 해결 계획의 수립 단계에서 보조문항으로 인하여 인위적인 계획 수립이 이루어지기 때문에 유추적 사고가 학생 스스로 유발 시킨 것인지가 불분명할 우려가 크다. 그리고 반성단계에서 해결과정의 검토에 대한 보조문항과 문제 만들기 활동이 기본적으로 주어지는 경우가 많기 때문에 발전적 사고도 자발적으로 이루어졌다고 보기 어려운 경우가 많다. 그러나 6학년 2학기의 도전수학은 대체로 계획 단계에서 교과서의 보조문항이 자세하지 않고 '어떤 방법으로 문제를 해결할지 생각해 보세요.'라는 질문만 제시함으로써 학생들의 유추적 사고가 자발적으로 일어날 수 있는 여지를 주고 있었다.

둘째, 교사용 지도서에는 문제의 이해 단계와 반성 단계의 발문이 매우 전형적으로 제시됨으로써 해당 단계에서는 다양한 수학적 사고를 유발하기 어렵다. 교사용 지도서에 제시된 대부분의 발문은 문제의 이해단계에서는 '구해야 할 것, 주어진 조건'을 확인하기 위한 것으로써 주어진 문제에서 조건을 추상화 하는 과정이 대부분이다. 그리고 반성의 단계에서는 문제를 바르게 해결했는지 확인하는 연역적 사고와 유사문제로 연결하기 위한 유추와 발전의 사고를 유도하는 패턴으로 정형화 되어있다. 비록 일부 단원은 반성단계에 통합적 사고와 알고리즘의 사고 등을 포함시켰으나 충분하지 않은 것이 사실이다. 아울러, 추상화의 사고는 문제의 이해 단계에서 문장제의 수학 외적인 비본질적 요소들을 사상시켜 조건을 추상시키는 활동에만 국한되는 경우가 많았고 구체화를 통한 추상적 사고의 발현은 유도하지 않았다.

문제해결 과정에서는 다양한 수학적 사고를 경험할 수 있다. 문제의 이해단계에서는 단순화, 수량화, 기호화, 도형화 등을 통하여 문제를 보다 쉽게 이해할 수 있으며, 반성의 단계에서는 이전에 알고 있던 개념이나 해결 방법과 통합하여 생각해보는 것, 일반적인 방법으로 확장하고 알고리즘화 하는 것도 중요한 과정이므로 추후 교사용 지도서를 개발할 때, 해당 내용을 추가로 제시해 주는 것도 고려해야 할 것이다. 교사용 지도서에 이러한 내용을 제시하지 않더라도 교사가 스스로 교과 교육법이나 교재연구를 통하여 학생들에게 적절한 발문이나 권고를 할 수도 있겠지만, 수학과를 전공하지 않고, 여러 과목을 가르치는 초등학교 교사가 많다는 형편을 고려한다면 교사용 지도서의 내용이 조금 더 충실한 것이 바람직할 것이다.

셋째, 교사용 지도서에는 어떤 수학적 사고나 태도를 형성시킬 수 있는지 명시적인 설명이 부족한 경우가 많다. 추후 개발될 교사용 지도서의 교과 역량에 대한 설명에서는 어떠한 활동을 통하여 '문제해결력을 키울 수 있다.', '태도 및 실천 능력을 기를 수 있다.'라고만 언급하는 것 보다는, Ⅳ장의 [그림 4]와 같이 경우에 따라서 어떤 수학적 사고를 유발시켜서 해당 교

과 역량을 지도할 수 있는지 명시적인 설명을 해주는 것도 필요할 것이다.

마지막으로 본 연구의 제한점 및 후속 연구를 위한 제언은 다음과 같다.

첫째, 학생들의 직접 활동을 토대로 수학적 사고를 분석할 필요가 있다. 교사용 지도서는 수업을 위한 전형적인 흐름을 보여주는 것이다. 따라서 지도서에 제시된 발문에 따라 분석된 수학적 사고는 학급 구성원의 의사소통 상황 등에 따라서 수업 과정에서 발현되는 수학적 사고와 차이가 있을 수 있다.

둘째, 더욱 다양한 교재 또는 차시의 수학적 사고에 대한 비교 연구가 필요할 것이다. 특히, 추후 5, 6학년 수학과 검정교과서가 발행이 되면 '도전 수학'과 유사한 차시들에 나타나는 수학적 사고에 대한 비교 분석도 가능할 것이다.

## 참 고 문 헌


교육부(2015). 초·중등 교육과정 총론, 교육부 고시 제 2015-74호 [별책 1]. 교육부.

교육부(2019a). 초등학교 수학 5-1 교사용 지도서. 교육부.

교육부(2019b). 초등학교 수학 5-2 교사용 지도서. 교육부.

교육부(2019c). 초등학교 수학 6-1 교사용 지도서. 교육부.

교육부(2019d). 초등학교 수학 6-2 교사용 지도서. 교육부.

교육부(2020). 수학과 교육과정, 교육부 고시 제 2020-236호 [별책 8]. 교육부.

김서령, 박만구(2021). 다전략 수학 문제해결 학습이 초등학생의 수학적 창의성과 수학적 태도에 미치는 영향. 초등수학교육, 24(4), 175-187.

김수미, 강흥규, 권석일, 남진영, 박문환, 서동엽, 송상헌, 유현주, 이종영, 임재훈, 정영옥(2020). 초등수학교육의 이해. 서울: 경문사.

박경미, 이환철, 박선화, 강은주, 김선희, 임해미, 김성여, 장혜원, 강태석, 권점례, 김민정, 방정숙, 이화영, 임미인, 이만근, 김화경, 윤상혁, 이광상, 이경은, 조혜정, 권영기, 권오남, 신동관, 강현영, 김재영, 도종훈, 박정숙, 서보억, 안현정, 오택근, 이경진, 이광연, 이문호, 이승훈, 이은정, 이지윤, 전태인, 최지선, 황선미, 박문환, 김환일, 강성권, 여미주(2015). 2015 개정수학과교육과정 시안 개발 연구 II. 한국과학창의재단연구보고서 BD15120005.

박선화, 상경아(2011). 초・중・고등학교 학생의 수학에 대한 태도 특성 및 영향 요인. 학교수학, 13(4), 697-716.

백명숙, 신항균(2007). 메타문제의 적용이 초등학생의 수학 학습에 미치는 효과. 한국초등수학교육학회지, 11(1), 43-59.

여승현, 서희주, 한선영, 김진호(2021). 초등 수학교과서의 문제해결 역량 및 과제 유형 분석: 수와 연산 영역의 도전/생각 수학과 탐구 수학을 중심으로. 수학교육, 60(4), 431-449.

우정호(1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울: 서울대학교출판문화원.

우정호(2009). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울: 서울대학교출판문화원.

임영빈(2018). 삼각부등식 개념형성을 위한 문제해결 과정에 나타나는 초등학생의 수학적 사고와 교사의 역할. 수학교육학연구, 28(2), 203-220.

임영빈(2019). 학력으로서 평가 및 육성 가능한 수학적 태도에 관한 고찰: 片桐重男의 관점을 중심으로. 수학교육철학연구, 1(2), 91-108.

임영빈(2020). 문장제의 보조문항이 초등학생의 문제해결과 수학적 사고에 미치는 영향. 초등수학교육, 23(2), 73-85.

이선영, 한선영(2021). 학생 사고기반 수학 수업의 특징과 그 실제. 수학교육 논문집, 35(1), 37-74.

이환철, 허난, 장미숙(2009). 수학적 사고력 신장 측정 방안 마련을 위한 기초 연구. 수학교육학논총, 36, 89-102.

최혜진, 김상룡(2011). 생활소재를 활용한 수학 문제 만들기 활동. 한국초등수학교육학회지, 15(1), 121-139.

허도하, 오영열(2011). 의사소통 중심의 수학사 기반 수업이 초등학생의 수학적 의사소통과 태도에 미치는 영향. 한국초등수학교육학회지, 15(2), 463-485.

片桐重男(1992). *問題解決過程と發問分析.* 明治図書出版. 이용률 역(1999). 문제해결과정과 발문분석. 서울: 경문사

片桐重男(2004). *數學的な考え方の具体化と指導.* 明治図書出版. 이용률, 정동권 공역(2013). 수학적인 생각의 구체화와 지도-수학의 진정한 학력 향상을 지향하여-. 서울: 경문사.

Hannula M S(2012). *Emotions In Problem Solving.* ICMI-12 Mathematics Teachers' Professional Development Program.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA. NCTM. 류희찬・조완영・이경화, 나귀수, 김남균, 방정숙 공역(2007). 학교수학을 위한 원리와 규준. 서울: 경문사.

# Types of Mathematical Thinking that Appeared in Challenge Math in the 5th and 6th Grade Math Teacher's Guidebooks

**Yim, Youngbin**

Incheon Samsan Elementary School

E-mail: loveace-bin@hanmail.net

This study was conducted to discuss educational implications by analyzing the types of mathematical thinking that appeared in challenge math in 5th and 6th grade math teacher's guidebooks. To this end, mathematical thinking types that can be evaluated and nurtured based on teaching and learning contents were organized, a framework for analyzing mathematical thinking was devised, and mathematical thinking appearing in Challenge Math in the 5th and 6th grade math teachers' guidebooks was analyzed. As a result of the analysis, first, 'challenge mathematics' in the 5th and 6th grades of elementary school in Korea consists of various problems that can guide various mathematical thinking at the stage of planning and implementation. However, it is feared that only the intended mathematical thinking will be expressed due to detailed auxiliary questions, and it is unclear whether it can cause mathematical thinking on its own. Second, it is difficult to induce various mathematical thinking at that stage because the questionnaire of the teacher's guidebooks understanding stage and the questionnaire of the reflection stage are presented very typically. Third, the teacher's guidebooks lacks an explicit explanation of mathematical thinking, and it will be necessary to supplement the explicit explanation of mathematical thinking in the future teacher's guidebooks.

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U30

* Key Words : mathematical thinking, mathematical attitude, teacher's guidebook