

한국과 미국 예비 초등교사는 자연수 덧셈과 뺄셈 연산에 대한 학생의 수학적 전략과 오류를 어떻게 분석하는가?1)

조형미²⁾ · Hea-jin Lee³⁾ · 이기마⁴⁾ · 김희정⁵⁾

본 연구는 덧셈 뺄셈 연산에서 보이는 수학적 전략을 한국과 미국의 예비 초등교사가 어떻게 분석하는지 비교 분석한다. 한국의 예비교사 26명과 미국의 예비교사 20명이 본 연구에 참여하였으며, 제시된 덧셈 뺄셈 연산에서 어떠한 수학적 오류가 있는지 서술하게 하였다. 수합된 46명의 예비교사의 기록은 연구의 주요 데이터로 근거 이론에 기반을 두어 오픈 코딩과 귀납 코딩하고, 통계 처리하여 혼합 연구를 진행하였다. 그 결과, 덧셈 연산에 대한 오류와 전략 분석에서 양국의 예비교사의 응답 양상은 유사하였으나, 뺄셈 연산에서는 차이가 있음을 확인하였다. 또한, 학생의 풀이 전략이 다단계로 구성되어 있거나 전형적이지 않을 때, 양국의 예비교사가 이를 분석하는데 어려워함을 확인하였다. 국제 비교 연구 결과를 바탕으로 양국의 예비교사 교육에 공통적인 시사점을 제공하고, 각국의 예비교사 교육에 새로운 방향을 논하였다.

주요용어 : 국제 비교 연구, 덧셈, 뺄셈, 수학적 사고, 예비교사교육

I. 서론

수는 수학에서 다루는 가장 기본적인 개념으로 실생활뿐만 아니라 타 교과나 수학의 다른 영역을 학습하는데 필수적이며, 사칙연산은 수학 학습에서 습득해야 할 가장 기본적인 기능이자 후속 학습을 위한 기초가 된다(교육부, 2015; 우정한 외, 2007). 이는 학령기에 접어든 학생이 사칙연산에 대한 개념적 이해와 절차적 숙달을 바탕으로 후속 학습을 위한 안정적 학습 토대를 마련해야 함을 의미한다. 특히, 자연수에 대한 덧셈과 뺄셈은 학생이 학교수학에서 처음으로 접하게 되는 수체계인 자연수 체계에서 가장 기본적인 연산으로 사칙연산 중 가장 먼저 도입되기 때문에 학습 토대 형성 측면에서 그 중요성이 더욱 부각된다. 그러나 상당수의 학생이 기초 연산인 덧셈과 뺄셈에서 많은 오류를 범하고 있으며(최진숙 & 유현주, 2006), 이러한 오류는 다른 영역의 학습에도 부정적인 영향을 미치고 있다(우정한 외, 2007).

한편, 이러한 학생의 수학적 오류는 지속성과 체계성을 특징으로 갖는다(김수미, 2003; 장수연 & 안병곤, 2010; 최진숙 & 유현주, 2006). 오류는 인지적으로 한번 형성된 후에는 쉽게 다른 것으로 대체

* MSC2010분류 : 97C70, 97D60

- 1) 이 연구는 2022학년도 고려대학교 사범대학 특별연구비 지원을 받아 수행되었음.
- 2) 전주교육대학교 강사 (hyungmi41@gmail.com)
- 3) The Ohio State University at Lima 교수 (lee.1129@osu.edu)
- 4) 고려대학교 대학원생 (lovejesus153@korea.ac.kr)
- 5) 고려대학교 교수 (heejeongkim@korea.ac.kr), 교신저자

되지 않을 수 있기 때문에(김수미, 2003) 학습 과정에서 지속적으로 나타나지만, 우연적이거나 임의적이지 않고 규칙성과 일관성, 일정한 형태 및 패턴을 보인다는 특성을 갖는다. 이는 오류는 지속적으로 후속 학습에서의 어려움이나 또 다른 연쇄적 오류를 유발하기도 하지만, 귀납적인 조사를 통해 체계적으로 유형화함으로써 예방 및 교정할 수 있음을 의미한다(예. 김희정 외, 2020; 2022). 그러므로 학생의 수학 학습을 지원하기 위해 수학학습 과정에서 나타날 수 있는 오류를 체계적으로 유형화하고, 이를 위한 함의점을 찾는 것은 중요하다. 이러한 관점에서 초등학교 저학년의 기본 수학 개념 및 연산에 해당하는 덧셈과 뺄셈에 대한 오류를 체계적으로 정리하여 유형화한 연구가 국내외적으로 다수 수행되었다(김희정 외, 2020; 장수연 & 안병곤, 2010; 최진숙 & 유현주, 2006; Brown & VanLehn, 1980; Young & O'Shea, 1981; Vermeulen et al., 2020). 이러한 선행연구는 학생의 오류를 체계적으로 유형화하고 각 오류에 대한 지도 방안을 제안하는 등 수학교사가 학생의 오류를 진단하고 적절한 반응적 교수를 보이는데 필요한 전문 내용 지식(Specialized Content Knowledge, SCK)을 마련하였다. 특히, 김희정 외(2020)는 수학 개념 이해와 오류 및 오개념에 대한 국내외 문헌검토를 통해 오류와 연계한 가정적 학습궤도(hypothetical learning trajectory)를 개발하였고, 이를 통해 초등학교 수학학습 전 과정에서 발생할 수 있는 오류를 체계적으로 제시하였다. 이는 일부 영역이나 주제별로 수행된 다른 오류 연구와 달리, 초등학교 수학학습 전 과정에서 발생할 수 있는 오류를 제시함으로써, 교사로 하여 학생의 학습 발자취에 따라 과거와 현재의 연쇄적 오류 및 학습 결손을 추적하고 진단하여 적절한 반응적 교수에 이를 수 있게 한다는 점에서 다른 연구와 차별적인 가치를 지닌다. 이와 같이, 국내외 선행연구는 덧셈과 뺄셈에 대한 오류를 유형화하고 각 유형에 따른 지도 방안을 제안하는 등 덧셈과 뺄셈 오류와 관련한 교사의 전문 내용 지식(SCK)을 마련한 측면에서 국내외적으로 상당한 진전을 보여 왔다. 그러나 한편으로는 교사가 오류를 분석하는 과정에서 보이는 교사의 전문 내용 지식(SCK) 자체를 집중적으로 살펴보는 않았다는 면에서 제한점을 갖는다.

본 연구는 이러한 선행연구의 진전과 제한점을 성찰하고, 교사가 교수과정에서 학생의 오류를 신속하고 정확하게 주목하고 대처해야 한다는 결과(Ball et al, 2008; Brown & Burton, 1978; Ding, 2008; Ma, 1999)를 전제로 하여 한국과 미국의 초등학교 예비교사가 학생의 덧셈과 뺄셈 관련 전략과 오류를 분석하는 과정에서 보이는 예비교사의 전문 내용 지식(SCK)을 살펴보고 그 특징을 비교 분석하여 예비교사 교육과정에서의 시사점을 얻는 것을 목적으로 한다. 특히, 예비교사를 연구대상으로 설정한 이유는 예비교사의 전문 내용 지식의 상황과 특징을 파악하고, 이를 통해 전문 내용지식을 기를 수 있는 예비교사의 교육과정의 방향과 시사점을 찾을 수 있기 때문이다.

한편, 본 연구가 국가 간 비교를 수행하는 이유는 다른 나라의 교육실천을 살펴보는 것을 통해 교육적 성찰에 이를 수 있으며(정영근, 2010), 자국을 대상으로 하는 연구에서는 발견하기 어려운 새로운 시사점을 얻을 수 있기 때문이다(이승국, 2011; Clarke et al., 2016). 본 연구는 이러한 관점에서 사회·문화적 배경이 다른 한국과 미국 예비교사가 학생의 수학적 사고 및 오류 분석에서 보여주는 특징을 비교함으로써 예비교사 교육과정에 대한 상호 성찰, 새로운 시사점을 얻을 수 있을 것으로 기대한다.

II. 이론적 배경

1. 학생들의 수학적 사고 분석하기

학생의 오개념과 오류, 사고과정 등을 포함한 수학적 이해를 분석하는 것은 학생의 학습의 성취를 촉진하는데 도움이 되는 정보를 제공하기에(Ashlock, 2006; Bailey & Drummond, 2006; Fyfe &

한국과 미국 예비 초등교사는 자연수 덧셈과 뺄셈 연산에 대한 학생의 수학적 전략과 오류를 어떻게 분석하는가

Rittle-Jonshon, 2017), 교사는 수업 전과 후에도 학생이 무엇을 잘 이해하고 있는지, 혹은 잘 이해하고 있지 못한지와 같은 정보와 더불어, 학생들이 수학적 개념을 이해할 때 오개념이나 오류가 나타나고 있는지는 않은지와 같은, 학생의 학습에 대한 정보를 잘 분석하고 이해하고 있어야 한다.

그러나 기존의 연구에서도 지적하듯이, 학습자의 수학적 사고의 이해나 오개념과 같은 정보를 분석하고 해석하는 것은 쉬운 일은 아니며, 모든 교사가 이러한 정보를 올바르게 해석할 수 있는 것은 아니다(Ruiz-Primo et al., 2010). 이러한 형성적 평가와 반응적 교수를 성공적으로 구현하기 위해서는, 교사는 학생의 사고를 분석하고, 오개념이나 오류가 보인다면 그 원인을 찾고, 이를 지원하기 위한 다양한 방식의 피드백을 줄 수 있는 역량이 필요하다. 이러한 역량은 학생의 다양한 수학적 사고에 대한 이해와 추론이 뒷받침되는 복잡한 능력이며, 학생의 답변이나 풀이의 오류를 판단하고 해석하는 과정에서는 교과내용지식, 특히 이 중, 전문내용지식(Specialized Content Knowledge, SCK)이 중요하게 작용한다(Ball, et al., 2008; Shalem et al., 2014). 전문내용지식(SCK)이란 학생들의 오류에서 패턴을 찾거나, 학생들의 비정형적인 전략이 일반적으로 적용 가능한지 등을 판단하는 지식으로, 가르치는 상황에서 학생들의 오류와 오개념을 수학적으로 해석하고 추론하여 오류의 원인을 식별할 수 있게 한다(Bartell et al., 2013; Son, 2013; 2016). 즉, 형성적 평가를 통한 학생들의 수학적 오류와 오개념을 분석하고 수학적으로 판단함과 동시에 교수학적인 판단을 통해 학생의 학습을 위한 다양한 방식의 피드백이나 교수학적인 처치 또는 반응적 교수법을 수행할 수 있다. 따라서 교사는 가르치고자 하는 각 수학 세부 영역에서 학생들의 수학적 사고, 오개념과 오류를 분석하고 추론하는 역량을 기르는 것이 필요하며, 이와 관련한 국내외 연구가 뒷받침될 필요가 있다.

2. 미국과 한국의 교육과정에서의 자연수의 덧셈과 뺄셈 교수 학습

1) 한국의 2015 개정 교육과정에서의 자연수의 덧셈과 뺄셈 학습 및 교수법

한국의 2015 개정 수학과 교육과정에서는 초등학교에서 다루어야 할 수의 체계로는 사물의 개수와 양을 나타내기 위해 자연수, 분수, 소수를 다루는 것으로 명시하고 있다. 이러한 각각의 수 체계에서 적용되는 사칙연산을 제시하고 있는데, 그 중, 본 연구의 중점사항인 자연수의 덧셈과 뺄셈과 관련해서는 ‘학생들이 해당 영역에서 알아야 할 보편적인 지식(즉, 일반화된 지식)’으로 ‘자연수에 대한 사칙계산이 정의되고, 이는 분수와 소수의 사칙계산으로 확장된다’로 제시하고 있다. 또한, 학년군별 내용 요소는 1~2학년 군에서는 ‘두 자리 수 범위의 덧셈과 뺄셈’, 3~4학년 군에서는 ‘세 자리 수의 덧셈과 뺄셈’, 5~6학년 군에서는 ‘자연수의 혼합계산’이 제시되어 있다.

2015 개정 수학과 교육과정에서 제시하고 있는 초등 1~2학년군의 자연수의 덧셈과 뺄셈과 관련한 성취기준은 다음과 같다(교육부, 2015, p.9).

<두 자리 수 범위의 덧셈과 뺄셈>

- [2수01-05] 덧셈과 뺄셈이 이루어지는 실생활 상황을 통하여 덧셈과 뺄셈의 의미를 이해한다.
- [2수01-06] 두 자리 수의 범위에서 덧셈과 뺄셈의 계산 원리를 이해하고 그 계산을 할 수 있다.
- [2수01-07] 덧셈과 뺄셈의 관계를 이해한다.
- [2수01-08] 두 자리 수의 범위에서 세 수의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있다.
- [2수01-09] □가 사용된 덧셈식과 뺄셈식을 만들고, □의 값을 구할 수 있다.

한국의 2015 개정 교육과정에서는 각 영역에 해당하는 유의미한 학습 경험 제공을 유도할 수 있도록 교수·학습 방법의 예시와 유의 사항을 제시하고 있는데, 자연수의 덧셈과 뺄셈과 관련한 1~2학년군의 교수·학습 방법 및 유의 사항은 다음과 같다(교육부, 2015, p.9-10).

<1~2학년군의 교수·학습 방법 및 유의 사항>

- 수를 분해하고 합성하는 활동은 20 이하의 수의 범위에서 한다.
- ‘더한다’, ‘합한다’, ‘~보다 ~ 큰 수’, ‘~보다 ~ 작은 수’, ‘뺀다’, ‘떨어낸다’, ‘합’, ‘차’ 등의 일상용어를 사용하여 덧셈과 뺄셈의 의미에 친숙하게 한다.
- 덧셈은 두 자리 수의 범위에서 다루되, 합이 세 자리 수인 경우도 포함한다.
- 덧셈과 뺄셈을 여러 가지 방법으로 계산하는 활동을 통하여 연산 감각을 기르게 한다.
- 한 가지 상황을 덧셈식과 뺄셈식으로 나타내는 활동을 통하여 덧셈과 뺄셈의 관계를 이해하게 한다.
- □가 사용된 덧셈식과 뺄셈식은 □의 값을 직관적으로 구할 수 있는 수준으로 다룬다.
- 학생들에게 친근한 실생활 상황을 이용하여 덧셈과 뺄셈에 관련된 문제를 만들고 해결하게 한다.

성취기준 [2수01-05]와 교수·학습 방법 및 유의 사항에서 알 수 있듯이 한국의 교육과정에서 덧셈과 뺄셈의 지도에서 강조하고 있는 점은 단순한 계산 알고리즘이 아닌, 학생들이 여러 문제 상황 속에서 스스로 계산전략을 구성하고 추론하여 계산 원리를 이해하여 적용할 수 있도록 지향하고 있다. 따라서, 연산을 하는데 한 가지 방법만이 아닌 여러 가지 전략에 대해 생각하고, 여러 가지 방법으로 연산을 수행할 수 있도록 장려하고 있다. 또한 덧셈과 뺄셈은 서로 역연산의 관계로, 성취기준 [2수01-07]과 교수·학습 방법 및 유의 사항에서 알 수 있듯이 역연산의 원리에 대한 수 감각을 기를 수 있도록 장려하고 있다. 역연산의 원리를 직접적으로 가르치는 것이 아니라, 한 부분과 다른 부분을 합쳐(덧셈) 전체를 만들 수 있는데, 이때 전체의 한 부분으로서 뺄셈을 인식할 수 있으며, 덧셈과 뺄셈은 서로 역연산임을 암묵적으로 느낄 수 있다. 이는 성취기준 [2수01-09]와도 연계되어, 미지의 자연수 □를 이용한 덧셈식과 뺄셈식을 만들고 역연산 관계를 이용하여 미지수 □의 값을 구할 수 있도록 하고 있다.

2) 미국 오하이오 주(Ohio state)의 교육과정에서의 자연수의 덧셈과 뺄셈 학습 및 교수법

한국과 달리 미국은 하나의 교육과정을 나라 전체에 적용하는 방식이 아닌 각 주 별로 교육과정을 개발하여 사용하고 있다. 2010년에 40개 이상의 주가 참여하여 개발한 공통 핵심 기준(Common Core State Standards for Mathematics; CCSSM)은 현재 거의 대부분의 주에서 수학교육 교육과정의 기준으로 삼고 있다. 이 연구가 이루어진 오하이오 주는 이 공통 핵심 기준(CCSSM)을 참고로 한 수학 교육과정인 “오하이오 주 수학 학습 기준(Ohio’s Learning Standards for Mathematics)⁶⁾”을 2010년 개발했고, 현재는 2017년 수정본을 사용하고 있다. 이 수학학습 기준이 교사들에게 어떤 수학 내용을 언제 가르쳐야 할지에 대한 내용학적 기준이 되고 있다면, 오하이오 주 교육부(Ohio Department of Education)에서 제공하고 있는 교수학적 지원을 포함한 교육과정 모형(Ohio’s Model Curriculum with Instructional Support) 문서는 교수법에 초점을 맞춰 학년별 교육과정 모형(Model Curriculum)을 제

6) Ohio Department of Education (ODE) (2018). Ohio’s Learning Standards Extended.

<https://education.ohio.gov/Topics/Special-Education/Ohios-Learning-Standards-Extended>

한국과 미국 예비 초등교사는 자연수 덧셈과 뺄셈 연산에 대한 학생의 수학적 전략과 오류를 어떻게 분석하는가

시하고 있다. 교육과정 모형은 영역별 학년별로 학습자가 도달할 학습 기대치 또는 학습 목표(Expectations for Learning)와 수학 내용이 기술되어 있다. 학습 목표에는 수학 학습의 핵심이해(Essential understandings), 수학적 사고(Mathematical thinking), 교수학적 초점(Instructional Focus)으로 세분화하여 제시하고 있으며, 교수학적 초점에서는 교수법의 예시를 제시하면서 교사들에게 구체적인 지침을 제공하고 있다.

오하이오 주의 교육과정과 한국의 2015 개정 교육과정의 자연수의 덧셈과 뺄셈과 관련하여 문서상으로는 다음과 같은 차이점을 보이고 있다. 한국의 교육과정의 1~2학년군의 덧셈과 뺄셈의 실생활 상황에서의 그 의미를 이해하는 것과 연산 원리의 이해와 계산 기능을 강조하고 있다. 미국 오하이오 주의 교육과정의 경우 유치원에서 덧셈과 뺄셈의 기본 의미를 지도하기 시작하고, 1학년에서는 문장제 문제일 경우에는 20 미만의 수로 덧셈과 뺄셈의 상황이 있는 문제를 제시하고, 100 미만의 수로 덧셈과 뺄셈을 하는 것을 기준으로 한다. 한편, 권장하고 있는 전략으로는 구체물을 이용하거나 그림 표상 이용하기, 또는 자릿값(place value)의 이해가 강조되고 있으며 자릿값을 적용하는 전략 또한 강조되고 있다. 연산의 특징이나 관계도 1학년에서 배우게 되므로, 덧셈과 뺄셈의 특징을 사용하거나, 두 연산의 관계를 이용해 덧셈과 뺄셈을 하는 것을 강조하고 있다. 2학년의 경우도 1학년과 크게 다르지 않지만, 수의 범위를 확장하여 원활하고 신속한 연산을 하기를 기대한다. 2학년에서는 20 이내의 수의 경우 덧셈과 뺄셈의 연산 문제를 암산 전략 또는 머릿셈 전략(mental strategies)⁷⁾을 개발하는 것을 강조하고 있다. 여기서, 머릿셈 전략은 ‘교수학적 초점(Instructional focus)’에서 그 예시로 ‘피가수인 앞 수에서 가수인 뒷 수만큼 하나씩 더해가기(counting on)’, ‘보수를 이용하여 10 만들기(making 10)’, ‘수를 분해하기(decomposing a number)’, ‘덧셈과 뺄셈 사이의 관계 이용하기’, ‘더 쉬운 덧셈으로 변형해서 계산하기’를 제시하고 있다. 100 미만의 수의 덧셈과 뺄셈의 상황이 있는 문장제 문제를 풀거나, 100 미만의 연산에서 자릿값을 이용하거나 두 연산의 특징을 이용한 전략을 원활하게 사용하는 것을 강조하고 있으며, 4개 항의 두 자리 수 덧셈과 뺄셈을 할 것을 기대하고 있다. 1,000 미만의 수의 경우 구체물을 사용하거나 그림으로 표현하는 전략, 또는 자릿값(place value), 각 연산의 특징, 두 연산의 관계를 이용한 전략을 이용해 덧셈과 뺄셈을 하는 것을 강조하고 있다.

3. 자연수의 덧셈과 뺄셈에 대한 학생들의 오류에 대한 선행연구

자연수의 덧셈과 뺄셈은 학교수학에서 처음으로 접하게 되는 수 체계인 자연수 체계에서의 가장 기본적인 연산으로 미국이나 한국에서 모두 초등학교 저학년에서 다루고 있다. 자연수의 덧셈은 수 세기에서 시작하여, 점차 효율적인 수 세기 전략으로서의 덧셈, 그리고 자연수의 연산자로서의 덧셈으로, 사칙연산 중에 가장 처음 다루게 되는 개념이다. 뺄셈이나 분수의 연산과는 달리 자연수 덧셈에서의 오류에 대한 국내외 연구는 많지는 않으나 최진숙과 유현주(2006)의 초등학교 3학년 학생들의 덧셈과 뺄셈의 오류 유형을 조사한 연구와 김희정 외(2020, 2022)의 초등학교 3~6학년 수학 전 영역에 걸쳐 학생들의 오개념에 대한 연구들이 있다. 두 연구의 결과, 본 연구와 관련이 있는 초등학교 1~2학년군에 해당하는 내용만 정리하면 다음과 같이 덧셈의 오류 유형에는 ‘받아 올림’과 관련한 오류와 ‘자릿값의 오개념’에서 오는 오류로 정리할 수 있다.

① ‘받아 올림을 하지 않는 오류’로 일의 자리수의 합이 10이 넘을 경우 십의 자리로 받아 올림을

7) ‘암산’으로도 번역하지만 전통적인 의미에서의 암산은 빠르게 계산하는 것에 초점이 맞추어진 낱양스가 있어, 최근 미국에서 초등 수학교육에서 지향하고 있는 전략을 강조하기 위해 ‘머릿셈 전략’으로 번역하는 경우가 많아지고 있기에, 본고에서도 머릿셈 전략으로 번역하였다.

해야 하는데 하지 않는 경우 (예. $48 + 9 = 47$)

- ② ‘무조건 받아 올림을 하는 오류’로 받아올림을 하지 않아야 하는 경우에도 무조건 받아 올림을 하는 경우 (예. $35 + 3 = 48$)
- ③ ‘자릿값의 오개념에서 오는 오류’로 두 자리 이상의 수를 이루는 숫자를 각각의 수로 보고 각 숫자를 더하는 오류(예. $35 + 7 = 3 + 5 + 7 = 15$)나 숫자를 붙이는 경우(예. $35 + 7 = 357$)로 연구 결과 받아 올림과 관련한 오류(68%)에 비해 상대적으로 흔치 않은 오류(6.4%)로 나타난다.

자연수의 뺄셈과 관련한 초등학생들의 오류에 대한 연구는 초등학생들이 덧셈에 비해 어려워하는 경향이 있어 국외 연구에서는 상대적으로 많이 진행이 되었으며, 크게 ‘빌려오기 개념을 이용한 받아 내림과 관련한 오류’, ‘무조건 큰 수에서 작은 수 빼기 오류(또는 ‘거꾸로 빼기 오류’), ‘0을 처리하는 데서 오는 오류’로 분류할 수 있다. 선행연구(예. 김희정 외, 2020; 최진숙 & 유현주, 2006; Brown & VanLehn, 1980; Young & O’Shea, 1981; Vermeulen et al., 2020)에서 제시하고 있는 초등학교 1~2학년군의 자연수의 뺄셈에서의 학생들의 오류는 다음과 같이 정리할 수 있다.

- ① 뺄셈의 의미를 무시한 ‘무조건 큰 수에서 작은 수 빼기(또는 ‘거꾸로 빼기’) 오류’: 뺄셈의 의미를 이해하지 못해 뺄셈의 순서를 고려하지 않고, 감수나 피감수의 각 자릿수에서 큰 수에서 작은 수를 빼는 오류 (예. $46 - 27$ 을 계산할 때, $40 - 20 = 20$; $7 - 6 = 1$ 로 순서를 무시하고 무조건 큰 수에서 작은 수를 빼어, $46 - 27$ 의 답을 21로 생각함)
- ② ‘변형 큰 수에서 작은 수 빼기 오류’: 뺄셈의 순서를 고려하지 않고, 각 자릿수에서 큰 수에서 작은 수를 빼되, 감수의 일의 자리 수가 더 크므로, 십의 자리 뺄셈을 수행한 후, 10을 감하는 오류 (예. $46 - 27$ 을 계산할 때, $40 - 20 = 20$ 이고 $7 - 6 = 1$ 인데, 일의 자리는 감수에서 피감수를 빼었기 때문에 10을 빌려주었다 생각하고, $40 - 20 = 20$ 에서 10을 제하여, $46 - 27$ 의 답을 $10 + 1 = 11$ 로 생각함)
- ③ ‘받아 내림을 하지 않는 오류’: 뺄셈의 순서를 고려하되, 받아 내림을 하지 않는 오류(예. $46 - 27$ 을 계산할 때, $40 - 20 = 20$ 이고, $6 - 7 = 9$ 로 계산하여, $46 - 27 = 29$ 로 생각함)
- ④ ‘무조건 빌려주기를 하는 오류’: 감수의 어떤 자릿값의 수가 피감수의 해당 자릿값의 수보다 크기에 빌려주기를 하지 않아도 되는데 무조건 빌려주기를 하여 받아 내림을 습관적으로 하는 경우(예. $47 - 25$ 의 경우 감수의 40을 일의 자리에 10을 빌려주었다 생각하고 계산 결과를 12로 생각함)
- ⑤ ‘자릿값을 무시하고 받아 내림을 하는 오류’: 받아 내림을 할 때 자릿값을 무시하고, 수를 구성하는 숫자가 모두 똑같은 자릿값을 가지고 있다고 생각하는 오류(예. $46 - 27$ 의 경우 40에서 일의 자리에 10을 빌려주어야 하는데, 1을 빌려주었다 생각하고 $46 - 27 = (30 + 7) - (20 + 7) = 10$ 로 계산함)
- ⑥ ‘0을 처리하는 데서 오는 오류’: 0이 없는 뺄셈은 바르게 수행할 수 있는데, 0이 있을 때 0에서 받아 내림을 할 수 없다고 생각하거나 0이 가진 자릿값을 무시하거나 0에서 못 뺀다고 생각하여 생기는 오류로 위의 다섯 가지 오류가 0으로 기인하여 생기는 오류라 볼 수 있다.

선행연구에서 보고된 자연수의 덧셈 및 뺄셈과 관련된 오류들은 그 오류 유형에서 국가 간 큰 차이가 없이 비슷하게 나타나고 있다. 본 연구에서는 자연수의 덧셈과 뺄셈의 오류 중 가장 많은 비율의 오류를 나타내고 있는 오류와 학생의 비전형적인 계산전략을 포함한 오류를 분석 대상으로 선택하였다. 이는 미국과 한국의 예비교사들이 전형적인 자연수 덧셈과 뺄셈에 대한 학생들의 전형적인 수학

한국과 미국 예비 초등교사는 자연수 덧셈과 뺄셈 연산에 대한 학생의 수학적 전략과 오류를 어떻게 분석하는가

적 오류를 잘 분석하고 문화적인 차이는 없는지, 또한 비전형적인 계산전략에서는 어떻게 학생의 수학적 사고를 분석하고 있는지를 중점으로 분석하고 있다는 점에서 선행연구와 차별성을 갖는다.

학생 수학적 사고 및 오류의 예들은 수학 평가 프로젝트(Mathematics Assessment Project)에서 개발된 형성 평가 레슨(Formative Assessment Lesson; FAL)에서 제시하고 있는 예시를 선택하였다. 구체적인 연구 절차와 방법은 다음 절에서 제시하고 있다.

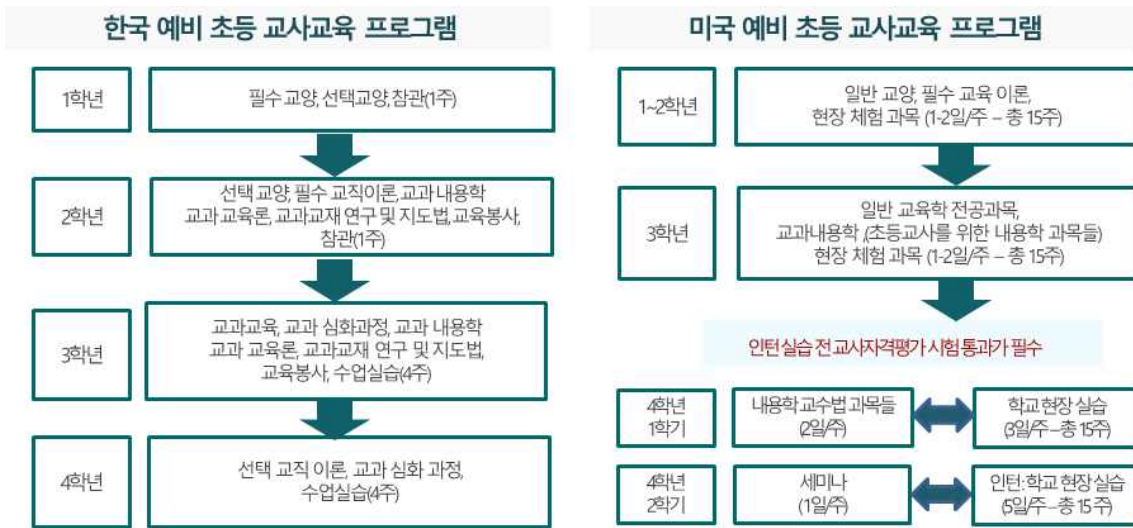
Ⅲ. 연구방법

1. 연구 참여자

연구에 참여한 한국의 예비교사는 약 70만 명이 사는 지방 소도시에서 있는 교육대학에 재학 중인 3학년 학생 26명(남 9명, 여 17명)이다. 이 예비교사들은 1학년에 재학 중일 때, 수학의 역사 및 실용적 가치를 이해하는 필수 교양강좌(2학점)를 수강하였고, 2학년 때 수학교육을 위한 심리학 및 수학교육 이론을 학습하는 필수 교과교육강좌 ‘수학교과교육론(2학점)’을 수강하였다. 1~2학년 때 1주씩 수업 참관하며 수업을 평가하고 토론하는 활동을 하였으나 수업실습에 직접 참여한 경험은 없었다. 연구가 진행된 당시, 참여자들은 교육대학교 3학년으로서 ‘수학교과교육연구 및 지도법(3학점)’ 강좌를 수강하는 중이었다. 이 강좌에서 예비교사들은 수학과 교육과정의 특징과 함께 초등수학의 영역인 수와 연산, 도형, 측정, 규칙성, 자료와 가능성에서 해당 수학 내용을 가르치는 방법을 학습한다. 수업은 주 1회 3시간 연강으로 진행되었으며 예비교사들은 해당 수업에서 자연수와 자연수 연산의 지도 방안을 약 3주에 걸쳐 학습하게 되는데, 2주는 이론적인 강의를 중심으로 자연수의 의미와 여러 가지 기수법, 수 개념 발달 과정, 자릿값의 개념과 의미, 사칙연산이 일어나는 상황, 연산의 지도모델과 교구활용, 자연수 지도를 위한 교수학습 전략들에 대해서 학습하였다. 그 뒤 1주는 자연수 연산과 관련된 수업 지도안을 작성하고 수업을 시연하여 전체 토론을 통해 시연한 수업을 비평하는 활동을 진행하였다. 본 연구를 위해 덧셈과 뺄셈에 대한 학생들의 오류를 분석하는 예비교사들의 자료는 2주간에 걸친 이론 수업의 끝에 진행이 되었다.

미국의 예비교사는 미국 중서부 소도시에서 있는 대학교 초등교육학과에 재학 중인 4학년 20명(남 1명, 여 19명) 학생들이다. 본 연구가 한국의 예비교사 3학년과 미국의 예비교사 4학년을 대상을 한 것은 덧셈과 뺄셈에 관련된 수학 교수법을 교육받고 있는 예비교사를 대상으로 했기 때문이다. 이 예비교사들은 1~2학년에 재학 중일 때 일반교양과목들, 교육학을 전공하기 위한 교육학 선행 필수 과목들, 현장 체험 과목들을 수강하였다. 3학년에 재학 중 일 때 교육학 전공과목과 내용학을 수강하고 현장 체험 과목을 수강하였다. 4학년이 시작하기 전에 수학, 과학, 사회, 언어교육(language art) 관련 내용학 과목을 모두 이수하여야 하고, 주 정부에서 실시하는 교사 자격증 평가 시험을 통과하여야 한다. 주 정부 교사 자격증 평가 시험을 통과하지 못한 학생은 4학년 2학기에 실시하는 인턴 과목을 수강할 수 없게 되어 있고, 결과적으로 4년 이내에 졸업할 수 없다. 연구에 참여한 미국의 예비교사의 경우 “예비교사를 위한 수학”이라는 2 과목의 수학 내용학(대수학과 기하학)을 4학년이 되기 전에 이수했다. 4학년 1학기에는 일주일에 이들은 내용학의 교수법(4과목, 각 3학점)을 대학에서 수강하고, 2~3일은 학교 현장 실습을 한다. 연구가 진행된 당시, 참여자들은 4학년 1학기 ‘수학 교수법(3학점)’ 강좌를 수강하고 있었으며, 이 수업에서 예비교사들은 교재와 연구출판물을 읽고 논의하기, 디지털 교수·학습 자료 평가와 활용법 논의하기, 본인들이 개발한 문제 기반 수업을 동료 학생들을 대상으로 가르치고 피드백 받기, 학생들의 오류를 분석해 보고 대응 방법 논의하기, 현장 교사의 비디오를 보고 분석 논

의하기, 본인의 수업을 녹화한 비디오를 보고 분석하기 등의 활동을 진행하였다. ‘수학 교수법’에 다루는 내용은 수학 교수법의 기반으로 교육과정, 21세기의 교육 접근법, 문제 중심 교수법, 평가와 학습의 연계성, 형평성을 위한(equitable) 교수법 등을 다룬다. 또한 초등학교 교육과정에서 다루고 있는 수학개념을 어떻게 학생위주의 교수법으로 가르칠 것인지에 대한 것에 중점을 두고 있다. 방대한 정보를 한 과목의 수학교수법에서 다루고 있으며, 미국의 교사 교육의 특성상 수학교육뿐만 아니라 전반적으로 교사교육 프로그램에서 다루고 있는 내용을 내용학 보다는 교수법에 중점을 두고 있다. 본 연구에 사용된 데이터는 자연수의 사칙연산 학습 및 교수법에 대한 논의를 위주로 한 수업 후에 수집되었다. 다음 [그림Ⅲ-1]은 양국의 예비교사 교육 프로그램을 비교한 것이다.



[그림 Ⅲ-1] 한국과 미국 예비 초등교사 교육 프로그램

2. 자료수집 절차

한국과 미국의 예비 초등교사가 덧셈과 뺄셈에 관한 학생들의 오류를 어떻게 이해하고 분석하는지 조사하기 위해서 각 강의의 자연수의 연산과 관련한 이론 학습이 종료되는 시점에, 연구의 과제를 위한 자료 수집을 시행하였다.

3. 검사 도구 및 분석

본 연구에 사용된 학생들의 덧셈과 뺄셈의 연산 전략의 예들은 수학 평가 프로젝트(Mathematics Assessment Project)⁸⁾(MAP; 2015)에서 개발한 과제를 활용하였다. 이 수학 평가 프로젝트(MAP)에서는 교사가 학생들을 개선된 방향으로 안내하고 학습 상황을 모니터링 할 수 있도록 형성평가 및 종합평가를 위해 도구를 설계 개발하였다. 이 프로젝트에서 개발된 과제는 형성평가 레슨(FAL)으로 각 주 제별로 학생들이 주로 갖는 오개념이나 흔히 하는 실수를 공통 오개념으로 제시하고 있으며, 교사들이 수업 전, 수업 중, 수업 후에 개별 학생들의 이해 정도와 오개념, 오류를 진단하고 적절한 반응적 교수법을 적용할 수 있도록 개발되었다. 본 연구에서는 초등학교 수와 연산의 기본 개념인 자연수의

8) <http://map.mathshell.org> © 2015 MARS, Shell Center, University of Nottingham)

한국과 미국 예비 초등교사는 자연수 덧셈과 뺄셈 연산에 대한 학생의 수학적 전략과 오류를 어떻게 분석하는가

덧셈과 뺄셈의 주제에 대해 연구하고 있기에, 형성평가 레슨(FAL)의 “Using Standards Algorithms for Number Operations” 레슨 패키지에서 제공하고 있는 학생들의 공통 오개념 및 풀이 전략의 오류를 적용하였다.

예비교사에게 제공한 학생의 풀이 예시는 아래 <표Ⅲ-1>⁹⁾과 같고, 한국의 예비교사들에게 제공된 학생의 풀이 예시는 동일하되, 학생들의 이름을 Jacob, Mia, Ava를 한국 이름인 재석, 미아, 아라로 바꾸어 제공하였다. 전체 연구는 학생들의 연산 전략과 오류를 분석하고 어떻게 피드백을 제공할 것인지에 대한 계획도 함께 조사되었으나, 본 논문에서는 예비교사들이 학생들의 수학적 사고를 어떻게 분석하는지에 초점을 맞추어 분석하였다. 구체적으로, 예비교사들은 각 학생의 풀이를 분석하면서 다음과 같은 질문에 대해 답하였고, 본 연구에서는 첫 번째, 두 번째 문항에 대한 예비교사의 응답을 중심으로 분석하였다.

1. 학생의 응답을 보고, 어떤 계산이 맞고 틀렸는지 체크 하세요.
2. 학생들은 각 문제에서 같은 연산의 전략을 사용하고 있습니다. 학생들이 사용한 전략을 분석하고 어떤 오개념이나 오류가 발생하고 있는지 분석하여 작성하세요.
3. 자신이 한 연산 방법에 어떤 오류가 발생하였는지 이해할 수 있도록 학생에게 제공할 수 있는 적절한 피드백과 질문을 작성해 보세요.

<표Ⅲ-1> 예비교사에게 제시된 덧셈과 뺄셈 관련 과제 및 학생별 풀이에 나타난 수학적 사고 전략과 오류

학생	수학적 사고(전략과 오류)
<p>재석</p> $\begin{array}{r} 58-35 \\ -35 \\ \hline 23 \end{array}$ $\begin{array}{r} 46-27 \\ -27 \\ \hline 21 \end{array}$ $\begin{array}{r} 874-321 \\ -321 \\ \hline 553 \end{array}$ $\begin{array}{r} 687-508 \\ -508 \\ \hline 181 \end{array}$	<p><무조건 큰 수에서 작은 수를 빼는 오류> 재석은 뺄셈 계산을 할 때 항상 큰 수에서 작은 수를 빼려고 한다. 이러한 전략은 첫 번째 과제 58-35와 같이 피감수의 각 자리의 수가 감수의 각 자리의 수보다 클 때만 옳다.</p>
<p>미아</p> $\begin{array}{r} 754-28 \\ -28 \\ \hline 734 = 730-4 \\ = 726 \end{array}$ $\begin{array}{r} 625-37 \\ -37 \\ \hline 612 = 600-3 \\ = 597 \end{array}$ $\begin{array}{r} 5392-685 \\ -685 \\ \hline 5313 \\ = 5000+1-6 \\ = 4995 \end{array}$	<p><뺄셈 관련 대안(alternative) 전략과 자릿값 무시 오류> 미아는 뺄셈 계산을 할 때 각 자리에 대한 뺄셈을 수행하여 얻은 값을 부호를 고려하여 다시 한번 총합하는 독특한 대안 전략을 사용하였다. 그 과정에서 가장 큰 자릿값을 제외한 나머지 자릿값을 무시하고 모두 일의 자리의 수로 보는 오류를 보이고 있다. 예를 들어, 두 번째 과제에서 600에서 10과 2를 빼야 하지만 1과 2를 빼고 있다.</p>
<p>아라</p> $\begin{array}{r} 48+96 \\ +96 \\ \hline 34 \end{array}$ $\begin{array}{r} 35+42 \\ +42 \\ \hline 77 \end{array}$ $\begin{array}{r} 68+36 \\ +36 \\ \hline 94 \end{array}$ $\begin{array}{r} 521+398 \\ +398 \\ \hline 819 \end{array}$	<p><받아 올림 하지 않는 오류> 아라는 덧셈 계산을 할 때 받아 올림을 하지 않는다. 예를 들어, 첫 번째 과제 48+96에서 일의 자리의 합이 14이지만 받아 올림을 하지 않고 4로 계산하고 있다.</p>

9) 출처: Source: The Assessment Project (<http://map.mathshell.org>), © 2015 MARS, Shell Center, University of Nottingham

연구에서 수집된 46명의 응답은 아래 <표 III-2>의 분석틀을 이용해 분석하였다. 분석틀은 학생들의 사고 및 연산 전략을 분석함에 있어서 수학적으로 얼마나 정확하게 파악하였는지, 그 과정에서 예비교사가 주목한 수학 개념이 무엇인지를 근거로 개발되었다. 구체적으로 살펴보면, 첫째, 예비교사가 학생의 사고와 관련 학생의 사고와 관련이 없이 분석하거나 불충분한 정보나 잘못된 표현을 이용하여 오류를 잘못 분석하는 등 오류를 잘못 분석한 경우에는 E1으로 코딩하였다. 둘째, 여러 단계에서 나타난 오류들 중 한 단계에서 나타난 오류에만 주목하거나 나타난 오류에 대한 직접적인 언급 없이 해당 오류와 직간접적으로 관련 혹은 원인이 될 수 있는 수학 개념만을 주목하여 분석한 경우에는 E2로 코딩하였다. 셋째, 학생의 오류를 정확히 주목하고 분석한 경우에는 E3로 코딩하였다. 마지막으로 학생의 오류를 정확히 주목할 뿐만 아니라 해당 오류와 직간접적으로 관련 혹은 원인이 될 수 있는 수학 개념도 더불어 주목하여 분석한 경우에는 E4로 코딩하였다. 이는 수학 평가 프로젝트(MAP)에서 제공한 학생의 오류를 파악했을 뿐만 아니라 그 외의 추가적인 해석이 포함된 경우이다. 정확한 분석의 기준은 수학 평가 프로젝트(MAP)에서 제공한 학생의 오류에 대한 해석을 기준으로 하였으며, 선행연구에서 보고한 학생의 오류 및 학생의 독창적 풀이에 대한 연구자들의 수학적 해석을 추가하여 보완하였으며, 근거 이론에 입각하여 자료의 오픈 코딩과 병합하여 수정 및 보완을 거쳐 완성하였다.

<표III-2> 학생의 수학적 전략과 오류를 분석한 예비교사의 응답 분석을 위한 분석틀

범주	설명
E1	학생의 사고와 관련이 없이 분석하거나 불충분한 정보나 잘못된 표현을 이용하여 오류를 잘못 분석하는 등 오류를 잘못 분석한 경우
E2	여러 단계에서 나타난 오류들 중 한 단계에서 나타난 오류에만 주목하거나 나타난 오류에 대한 직접적인 언급 없이 해당 오류와 직간접적으로 관련 혹은 원인이 될 수 있는 수학 개념만을 주목하여 분석한 경우
E3	학생의 오류를 정확히 주목하고 분석한 경우
E4	학생의 오류를 정확히 주목할 뿐만 아니라 해당 오류와 관련 혹은 원인이 될 수 있는 수학 개념도 더불어 주목하여 분석한 경우

예비교사의 응답지를 한국 예비교사의 경우 K1~K26으로 미국 예비교사의 경우 U1~U20으로 코드화 한 후 각 문항을 위의 기준에 따라 코딩하였다. 채점자 간 코딩 일치도 확인은 총 18세트의 데이터를 가지고 이루어졌다. 각 연산별 데이터 중에서 미국과 한국 각 3명씩 총 6명의 예비교사의 응답을 샘플로 세 명의 연구자가 개별적으로 코딩하여 채점자 간 일치도를 확인하였고 모든 경우에서 85%이상의 높은 일치도를 확인할 수 있었다. 또한 해당 범주에 대한 채점자간 신뢰도를 Kappa계수로 확인한 결과 0.92, 0.76, 0.72임을 확인할 수 있었다. 일반적으로 Kappa 계수가 0.75이상일 때 신뢰롭다 할 수 있다. 그 후 나머지 자료를 각각 코딩하고 세 연구자가 다수의 회의에서 논의를 통해 모두 합의에 이르기까지 코딩을 하였다. 엑셀 스프레드시트를 이용하여 각 문항에 대해 기술 통계를 실시하여 코드별로 빈도를 확인하였고 문항별 풀이의 오류분석에 따라 응답의 분포가 다른지, 문항별 응답에서 한국과 미국의 예비교사의 응답의 분포가 다른지 확인하기 위하여 카이제곱, 혹은 피셔의 정확 검정 분석을 실시하였다. 또한 한국과 미국 예비초등교사의 오류분석의 특징을 비교하기 위해 제석, 미아, 아라에 대한 응답별로 한국과 미국 예비교사의 응답에 대한 특징을 분석하였다.

IV. 연구결과

1. 재석의 뺄셈에 대한 수학적 사고 전략과 오류에 대한 한국과 미국 예비 초등교사의 특징 비교

예비교사에게 주어진 재석이의 수학적 사고와 오류는 위의 <표 III-1>에서 알 수 있듯이, 뺄셈의 의미를 무시한, ‘무조건 큰 수에서 작은 수 빼기’ 오류를 보이고 있다. 즉, 뺄셈의 의미를 충실히 이해하지 못하고 뺄셈의 부분적 이해(partial understanding)를 보여, 뺄셈의 순서를 고려하지 않고, 감수나 피감수의 각 자릿수에서 무조건 큰 수에서 작은 수를 빼는 전형적인 오류이다. 이러한 재석이의 뺄셈에 대한 부분적 이해와 오류를 미국과 한국의 예비교사들이 분석한 자료에 대한 연구자들의 코딩 결과는 다음 <표 IV-1>과 같으며, E2~E4에 해당하는 양국 예비교사들의 오류 분석 과정을 구체적인 예를 중심으로 살펴보면 다음과 같다.

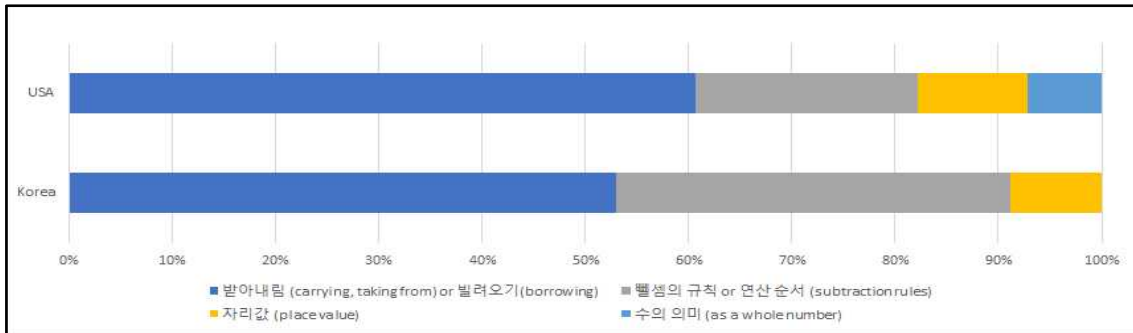
<표 IV-1> 재석의 풀이에 대한 양국 예비교사의 오류 분석 분포

범주	한국	미국
E1	2 (7.7%)	1 (5.0%)
E2	7 (26.9%)	13 (65.0%)
E3	6 (23.1%)	1 (5.0%)
E4	11 (42.3%)	5 (25.0%)

양국 예비교사에게서 관찰된 E2는 재석이 보이는 전형적인 오류인 ‘무조건 큰 수에서 작은 수 빼기’ 오류에 주목하기보다는, 이 오류와 직간접적으로 관련 혹은 원인이 될 수 있는 ‘받아내림(carrying, taking from)’ 또는 ‘빌려오기(borrowing)’와 같은 수학 개념을 중심으로 재석의 오류를 분석한 경우이다. 아래 K9와 U2, U13, U12 같은 예비교사의 대표적인 응답을 중심으로 구체적으로 살펴보면, E2에 해당하는 예비교사들은 ‘받아내림’ 또는 ‘빌려오기’에 대한 이해가 부족하다는 것에 주목할 뿐 큰 수에서 작은 수를 빼려고 했던 학생의 전형적인 오류를 직접적으로 기술하지는 못하고 있음을 알 수 있다. 이와 같이 재석의 오류를 분석하는 과정에서 E2를 보여준 한국과 미국의 예비교사의 비율은 각각 26.9%, 65%이다

- K9: “46-27 연산과 687-508 연산이 잘못되었습니다. 윗자리 수에서 빌려오기 개념을 적용하지 못하고 있습니다.”
- U2: “Subtracting without taking from the tens”
- U13: “He is not carrying from the ones place to the tens place”
- U12: “He is not borrowing from the 10’s for the ones and regrouping.”

한편, [그림 IV-1]은 양국 예비교사들이 주목한 재석의 오류와 직간접적으로 관련 혹은 원인이 될 수 있는 수학 개념인 ‘받아내림(빌려오기)’, ‘뺄셈의 규칙(연산 순서)’, ‘자릿값’, ‘수의 의미’에 대한 국가별 사용 비율이며, 피셔의 정확 검정 결과 $p=.288(>.05)$ 로 통계적으로 유의하지 않은 것으로 나타나 예비교사가 주목한 관련될 수 있는 수학 개념은 양국 간에 차이가 없는 것으로 나타났다.



[그림 IV-2] 양국 예비교사가 재석의 풀이에서 주목한 직간접적으로 관련 혹은 원인이 될 수 있는 수학 개념

E3는 재석의 ‘무조건 큰 수에서 작은 수 빼기’ 오류를 정확히 분석한 경우이다. 아래 K7과 U11과 같은 예비교사의 대표적인 응답을 중심으로 구체적으로 살펴보면, E3에 해당하는 예비교사들은 각 자리수의 큰 수에서 작은 수를 빼려고 하는 오류를 정확히 주목하고 있음을 알 수 있다. 이와 같이 재석의 오류를 분석하는 과정에서 E3를 보여준 한국과 미국의 예비교사의 비율은 각각 26.1%, 5%이다.

- K7: “두 번째, 네 번째 계산이 틀렸다. 재석은 각 연산에서 숫자의 연산 순서와 상관없이 큰 수에서 작은 수를 빼고 있다.”
- U11: “Jacob is subtracting the smaller number from the bigger number in each problem. He has a misconception.”

마지막으로 E4는 재석의 ‘무조건 큰 수에서 작은 수 빼기’ 오류와 함께 이 오류와 직간접적으로 관련 혹은 원인이 될 수 있는 ‘자리값’이나 ‘받아내림’과 같은 수학 개념을 포함하여 오류를 분석한 경우이다. 아래 K19와 U5와 같은 예비교사의 대표적인 응답을 중심으로 구체적으로 살펴보면, E4에 해당하는 예비교사들은 ‘무조건 큰 수에서 작은 수 빼기’에 대한 오류와 함께 ‘자리값’이나 ‘받아내림’의 개념 이해의 부족을 오류의 원인으로 주목하고 있음을 알 수 있다. 특히, 이와 같이 오류와 함께 이와 관련 있거나 직간접적으로 원인이 될 수 있는 측면을 주목하는 것은 오류의 원인에 대한 다각적인 접근을 통해 적절한 교수학적 지원과 실행으로 발전하여 학생의 오류의 지속성과 반복성을 차단할 수 있다는 점에서 E3과는 교수 실행과 계획 측면과 관련하여 차별성을 갖는다. 이와 같이 E4를 보여준 한국과 미국의 예비교사의 비율은 각각 42.3%, 25%이다.

- K19: “자리값 개념을 이해하지 못하여 받아 내림을 하지 못하고 있다. 예시 46-27에서 일의 자리 뺄셈을 할 때, 작은 수에서 큰 수를 빼지 못하니 순서를 바꾸어 큰 수인 7에서 작은 수인 6을 빼려 하지만 실제로 일의 자리수에 있는 6은 46의 일부이며 46을 30+16으로 갈라서 뺄셈을 할 수 있다는 사실을 알아차리지 못하고 있다.”
- U5: “On problems 2 and 4, the student failed to go into the tens place and borrow. The student instead wrote down the different of the two numbers in the ones place for their answer resulting in them getting the wrong answer.”

한편, 재석의 오류를 정확히 주목하는 능력(E3, E4에 해당)의 유무와 예비교사의 소속 국가가 서로 관련이 있는지를 조사하기 위하여 <표 IV-1>의 E1과 E2를 묶어 오류를 정확히 주목하지 못하는 그

한국과 미국 예비 초등교사는 자연수 덧셈과 뺄셈 연산에 대한 학생의 수학적 전략과 오류를 어떻게 분석하는가

를 Error Group 1(한국: 9명, 미국 14명)과, E3와 E4를 묶어 오류를 정확히 주목하는 능력이 있는 Error Group 2(한국: 17명, 미국: 6명)을 구성하여 카이제곱 검정을 수행한 결과, 유의확률 $p=0.017(<.05)$ 로 통계적으로 유의한 것으로 나타나 재석의 오류에 한하여 예비교사의 오류를 정확히 주목하는 능력의 유무는 양국의 차이가 있는 것으로 분석되었다. 다시 말해, ‘무조건 큰 수에서 작은 수 빼기’ 오류를 정확히 주목하는 능력은 통계적으로 한국의 예비교사와 미국의 예비교사가 차이가 있는 것으로 나타났다. 특히, 비율을 비교하여 구체적으로 살펴보면 Error Group 1(E1, E2)에 해당하는 한국과 미국 예비교사의 비율은 각각 24.6%, 70%이고, Error Group 2(E3, E4)에 해당하는 한국과 미국 예비교사의 비율은 각각 65.4%, 30%이며, 이를 통해 오류를 정확히 주목하는 능력을 보인 예비교사의 비율이 한국(65.4%)이 미국(30%)보다 높음을 알 수 있다.

2. 미아의 뺄셈에 대한 비전형적인 수학적 사고 전략과 오류에 대한 한국과 미국 예비 초등교사의 특징 비교

미아는 <표 IV-2>에서 알 수 있듯이 뺄셈을 할 때 각 자리에 대한 뺄셈을 수행하여 얻은 값을 부호를 고려하여 다시 한번 총합하는 독특하고 비전형적인(nonstandard) 대안 전략을 사용하고 있으며, 그 과정에서 가장 큰 자릿값을 제외한 나머지 자릿값의 계산 결과가 음수일 경우 자릿값을 무시하고 모두 일의 자리의 수로 보는 ‘자릿값’ 오류를 보이고 있다. 또한 음수와 연산의 뺄셈을 구분하지 않고 모두 일의 자리 수로 보고 연산을 시행하는 것도 볼 수 있다. 즉, 미아의 수학적 사고 과정으로 보이는 뺄셈 대안 전략은 옳지만 연산 과정에서 자릿값에 대한 불완전한 이해로 인해 오류를 범하고 있다. 이러한 미아의 뺄셈 전략과 오류를 분석한 양국의 예비교사의 결과는 Table 4와 같다. 또한, E1~E4에 해당하는 양국 예비교사들의 오류 분석 과정을 구체적인 예를 중심으로 살펴보면 다음과 같다.

<표 IV-2> 미아의 풀이에 대한 양국 예비교사의 오류 분석 분포

범주	한국	미국
E1	8 (30.7%)	7 (35.0%)
E2	14 (54.0%)	8 (40.0%)
E3	3 (11.5%)	3 (15.0%)
E4	1 (3.8%)	2 (10.0%)

양국 예비교사에게서 관찰된 E1은 미아의 뺄셈 대안 전략과 자릿값에 대한 오류를 모두 인식하지 못하는 경우이다. 아래 6명의 예비교사의 대표적인 응답을 중심으로 구체적으로 살펴보면, K25와 U4는 미아가 ‘무조건 큰 수에서 작은 수 빼기’ 오류를 보이고 있다고 언급하면서 미아의 뺄셈 대안 전략과 ‘자릿값’ 오류를 모두 주목하지 못한 채 오류를 잘못 분석하고 있으며, K15와 U9의 오류 분석도 K25와 U4의 오류 분석과 그 맥을 같이 한다. 한편, K5, K24는 미아의 계산 과정에서 ‘-’ 기호를 주목하였지만, 이를 통해 미아가 따르는 뺄셈 대안 전략 자체를 잘못된 방법이라는 관점에서 미아의 사고 과정과 오류를 잘못 분석하고 있다. 이와 같이 미아의 오류를 분석하는 과정에서 E1, 즉 오류를 잘못 분석한 한국과 미국의 예비교사의 비율은 각각 30.7%와 35%이며 전형적인 덧셈과 뺄셈의 오류와 관련된 재석과 아라의 오류를 분석한 결과와 비교했을 때 비교적 큰 편이다.

- K25: “재석이와 동일합니다 어떤 수를 기준으로 뺄셈을 진행해야 하는지를 모릅니다”
- U4: “She is doing the same thing as Jacob, but she is breaking up the answer into groups and subtracting.”
- K15: “큰 수에서 작은 수를 빼지 못합니다.“
- U9: “Suppose to subtract the number together not add them then subtract”
- K5: “뺄셈의 과정에서 뺄 수에서 빼는 수를 각 자리에서 계산을 하고 이를 -로 표기한 것을 가장큰 단위의 자릿값의 수에서 빼는 방법으로 계산을 했다. 모든 계산을 잘못 풀이하였다.”
- K24: “뺄셈의 순서에는 맞지만 받아내림의 개념이 부족하다. 4-8을 보이는 대로 -4로 쓰기에 문제가 있다.”

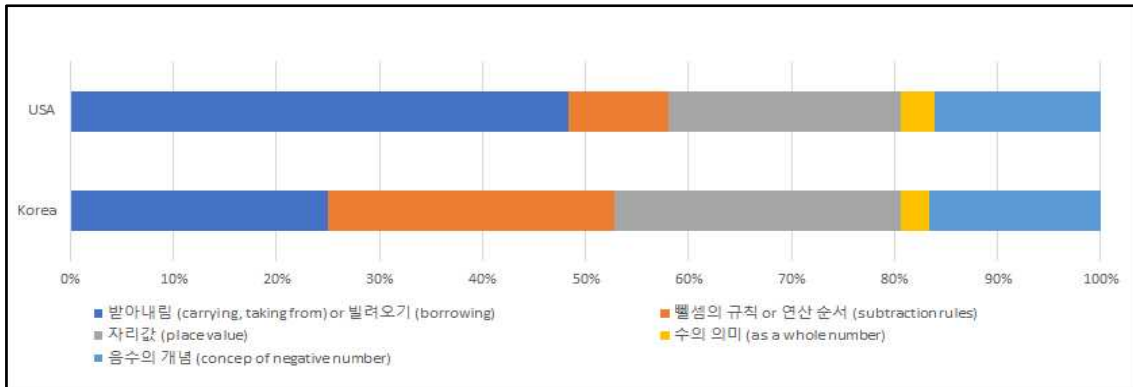
E2는 뺄셈에 대한 대안적인 전략을 사용하고 있음을 인식하지만, 오류의 본질인 자릿값을 무시하는 것에 주목하지 않고 ‘받아내림’과 같은 수학 개념을 중심으로 미아의 오류를 분석한 경우이다. 아래 K1, U7, U14 같은 예비교사의 대표적인 응답을 중심으로 구체적으로 살펴보면, E2에 해당하는 예비교사들은 미아의 뺄셈 대안 전략은 인식하지만, 본질적 오류인 ‘자릿값’이 아니라 ‘받아내림’에 주목하고 있는 것을 알 수 있다. 이와 같이 미아의 오류를 분석하는 과정에서 E2를 보여준 한국과 미국의 예비교사의 비율은 각각 57.7%, 40%로 양국 E1~E4 중 가장 큰 비율을 차지하고 있다.

- K1: 각 자리 계산 결과보다 작을 때 받아내림을 하지 않고 -(마이너스) 값 표시를 한 다음 그것을 결과값에 다시 계산하고 있다.
- U7: The student does not understand the concept of borrowing when subtracting. They put negative numbers instead of carrying the tens place and putting the number above the numbers in the nextcolumn.
- U14: She does not understand borrowing and that we do not get negative numbers if we can borrow.

한편 [그림 IV-2]는 양국 예비교사들이 주목한 미아의 오류와 직간접적으로 관련될 수 있는 수학 개념인 ‘받아내림(빌려오기)’, ‘뺄셈의 규칙(연산 순서)’, ‘자릿값’, ‘수의 의미’, ‘음수의 개념’에 대한 국가별 사용 비율이며, 피셔의 정확 검정 결과 $p=.189(>.05)$ 로 통계적으로 유의하지 않은 것으로 나타나 예비교사가 주목한 관련될 수 있는 수학 개념은 양국의 예비교사 그룹 간에 차이가 없는 것으로 나타났다.

E3는 미아가 뺄셈에 대한 비전형적이고 대안적인 전략을 따르고 있으며, 오류는 이 대안 전략이 아니라 ‘자릿값’을 무시하는 것에서 비롯된다는 것을 주목함으로써 미아의 수학적 사고와 오류를 모두 정확하게 분석한 경우이다. 아래 K4, K23, U15 같은 예비교사의 대표적인 응답을 중심으로 구체적으로 살펴보면, E3에 해당하는 예비교사들은 ‘-’ 또는 ‘음수’를 통해 미아의 비전형적 뺄셈 대안 전략을 인식함과 동시에 오류는 ‘자릿값’에서 보이는 오류를 정확히 주목하고 있다. 특히, 이와 같이 비전형적인 대안 전략이 틀리지 않음을 읽어내는 능력은 이러한 전략을 사용하는 학생의 수학적 사고를 보존하고 확장하는데 도움을 줄 수 있다는 점에서 E2 이하와는 차별성을 갖는다. 이와 같이 미아의 오류를 분석하는 과정에서 E3를 보여준 한국과 미국의 예비교사의 비율은 각각 11.5%, 15%이다.

한국과 미국 예비 초등교사는 자연수 뺄셈과 뺄셈 연산에 대한 학생의 수학적 전략과 오류를 어떻게 분석하는가



[그림 IV-3] 영국 예비교사가 미아의 풀이에서 주목한 직간접적으로 관련 혹은 원인이 될 수 있는 수학 개념

- K4: “- 의 개념으로 에서 해당 수를 뺐을 경우까지 잘 계산하지만, 자리값에 대한 개념이 부족하다. 100의 자리에서 빌려온 수도 10의 자리에서 빌려온 수도 같이 취급한다.”
- K23: “빌려오기가 아닌 음수 개념을 사용해 뺄셈을 진행하려고 했지만 자리대를 고려하지 못해 잘못된 계산 방식을 사용하고 있다.”
- U15: “Mia is making errors when taking away from the final result. In the second example, she is adding the -1 and -2 and got -3. This is incorrect because the -1 actually is -10”

마지막으로 E4는 미아의 비전형적인 대안 전략과 ‘자리값’을 무시하는 오류에 대한 주목과 함께 이 오류와 간접적으로 관련될 수 있는 ‘받아내림’과 같은 수학 개념을 포함하여 오류를 분석한 경우이다. 아래 K18과 U19 같은 예비교사의 대표적인 응답을 중심으로 구체적으로 살펴보면, E4에 해당하는 예비교사들은 미아의 비전형적인 대안 전략과 오류의 원인인 ‘자리값’ 무시를 정확히 주목하면서 동시에 ‘받아내림’과 같은 수학 개념을 언급하고 있음을 알 수 있다. 특히, 이와 같이 오류와 함께 이와 관련 있거나 직간접적으로 원인이 될 수 있는 측면을 주목하는 것은 오류의 원인에 대한 다각적인 접근을 통해 적절한 교수학적 도움과 실행으로 발전하여 학생의 오류의 지속성과 반복성을 차단할 수 있다는 점에서 E3 이하와는 교수 실행과 계획의 다양성 측면과 관련하여 차별성을 갖는다. 이와 같이 미아의 오류를 분석하는 과정에서 E4를 보여준 한국과 미국의 비율은 각각 3.8%, 10%로 비교적 작은 편이다.

- K18: 미아는 각 자리에서 큰 수에서 작은 수를 빼고 있다. 뒤의 숫자에서 앞의 숫자를 뺄 때에는 “-”기호를 사용하여 계산하고 계산을 다한 다음에는 다시 한번 “-”가 붙은 숫자들을 일의 자리라고 생각하여 나온 결과의 앞 숫자에서 빼고 있다 받아들임의 개념을 제대로 이해하지 못한 경우이다.
- U19: Mia’s error is that she is not using borrowing at all. Instead she is subtracting the one’s place, and writing down a negative number. Her negative numbers are correct, but we cannot have a negative number in the one’s place for a subtraction problem

한편, 미아의 뺄셈에 대한 비전형적 대안 전략과 자리값 오류를 정확히 주목하는 능력(E3, E4에 해당)의 유무가 국가 간 차이가 있는지 조사하기 위하여 <표 IV-2>의 E1과 E2를 묶어 수학적 사고와

오류를 정확히 주목하지 못하는 Error Group 1(한국: 22명, 미국: 15명)과 E3와 E4를 묶어 수학적 사고와 오류를 정확히 주목하는 Error Group 2(한국: 4명, 미국: 5명)를 구성하여 피서의 정확검정을 수행한 결과, 유의확률 $p=0.638(>.05)$ 로 통계적으로 유의하지 않은 것으로 나타나 미아의 수학적 사고와 오류에 한하여 예비교사가 이를 정확히 주목하는 능력의 유무에 국가 간 차이는 없는 것으로 분석되었다. 다시 말해, 비전형적인 수학적 대안 전략과 그 과정에서 나타난 자릿값 오류를 주목하는 능력은 소속 국가와 무관하다. 특히, 비율을 비교하여 구체적으로 살펴보면 Error Group 1에 해당하는 한국과 미국 예비교사의 비율은 각각 84.6%, 75%이고, Error Group 2에 해당하는 한국과 미국 예비교사의 비율은 각각에 15.3%, 25%이며, 이를 통해 비전형적인 대안 전략과 오류 모두를 정확히 주목하는 능력을 보인 예비교사의 비율이 한국(15.3%)과 미국(25%) 모두 재석과 아라의 경우를 분석한 것에 비해 비교적 낮음을 알 수 있다.

3. 아라의 덧셈 전략과 오류에 대한 한국과 미국 예비 초등교사의 분석 비교

아라의 수학적 사고 전략과 오류는 <표 IV-3>에서 알 수 있듯이, 전형적인 덧셈에서의 오류인 ‘받아 올림을 하지 않는 오류’를 보이고 있다. 즉, $48+96=36$ 과 같이 자릿수의 합이 10이 넘을 경우에 한 자리 높은 자리로 받아 올림을 하지 않는 오류를 보이고 있다. 이러한 아라의 덧셈에 대한 오류를 미국과 한국의 예비교사들이 분석한 자료에 대한 연구자들의 코딩 결과는 Table 5와 같으며, E1~E4에 해당하는 양국 예비교사들의 오류 분석 과정을 구체적인 예를 중심으로 살펴보면 다음과 같다.

<표 IV-3> 아라의 풀이에 대한 양국 예비교사의 오류 분석 분포

범주	한국	미국
E1	0 (0%)	1 (5.0%)
E2	1 (3.8%)	0 (0.0%)
E3	24 (92.4%)	19 (95.0%)
E4	1 (3.8%)	0 (0.0%)

양국 예비교사에게서 관찰된 E1은 전형적인 오류인 ‘받아 올림을 하지 않는 오류’를 인식하지 못한 채 오류를 잘못 분석하는 경우이다. 아래 U2 같은 예비교사의 대표적인 응답을 중심으로 구체적으로 살펴보면, U2는 모두 ‘받아올림’을 주목하지 못한 채 뺄셈과 같이 전혀 관련 없는 수학 개념을 언급하면서 오류를 잘못 분석하고 있음을 알 수 있다. 이와 같이 아라의 오류를 분석하는 과정에서 E1을 보여준 한국과 미국의 예비교사의 비율은 각각 0%, 5%로 매우 작은 편이다.

- U2: Subtracted the tens spot instead of adding

E2는 아라의 풀이에서 ‘받아올림’의 오류가 여러 번 나타남에도 불구하고 이 중 일부만 주목함으로써 오류 분석의 정확성이 떨어지거나 ‘받아올림’의 의미를 명확하게 표현하지 않은 경우이다. 아래 K20 같은 예비교사의 대표적인 응답을 중심으로 구체적으로 살펴보면, K20은 십의 자리와 일의 자리에서 ‘받아올림’ 오류가 2번 발생하였지만 십의 자리에서 발생한 ‘받아올림’ 오류만 언급하고 있다. 이와 같이 아라의 오류를 분석하는 과정에서 E2를 보여준 한국과 미국의 예비교사의 비율은 각각 3.8%, 0%로 E1과 마찬가지로 매우 작은 편이다.

한국과 미국 예비 초등교사는 자연수 덧셈과 뺄셈 연산에 대한 학생의 수학적 전략과 오류를 어떻게 분석하는가

- K20: “받아올림이 있는 경우, 백의 자리의 자릿값을 잘 확인하지 못하고 있다.”

E3는 아라가 전형적인 오류인 ‘받아 올림을 하지 않는 오류’를 보이고 있음을 정확히 분석한 경우이다. 아래 K11, U5 같은 예비교사의 대표적인 응답을 중심으로 구체적으로 살펴보면, K1, U5는 모두 일의자리와 십의자리의 계산 결과가 10보다 클 경우에 ‘받아올림’을 하지 않는 오류에 주목하고 있음을 알 수 있다. 이와 같이 아라의 오류를 분석하는 과정에서 E3를 보여준 한국과 미국의 예비교사의 비율은 각각 92.4%, 95%로 E1~E4중 가장 큰 비율을 차지하고 있다.

- K11: 일의 자리에서 더한 값이 두 자리 수일 때 10의 자리수를 생각하지 못함 마찬가지로 십의자리 에서 더한 값이 세 자리 수일 때 100의 자리수를 생각하지 못함.
- U5: The problems 1, 3, and 4 are wrong due to the fact when Ava gets to the tens place she is doing the addition correct but is not adding in the digit that was carried over from the ones place. Then when the tens place is added it is done correctly but when a digit is carried into the hundreds place, the student did not pull it down into the answer.

E4는 아라의 전형적인 오류인 ‘받아 올림을 하지 않는 오류’에 대한 주목과 함께 이 오류와 직간접적으로 관련 혹은 원인이 될 수 있는 ‘자릿값’과 같은 수학 개념을 포함하여 오류를 분석한 경우이다. 아래 K18 같은 예비교사의 대표적인 응답을 중심으로 구체적으로 살펴보면, K18은 아라의 ‘받아 올림을 하지 않는 오류’에 대한 주목과 함께 함께 ‘자릿값’을 언급하고 있음을 알 수 있다. 이와 같이 오류와 함께 이와 관련 있거나 직간접적으로 원인이 될 수 있는 측면을 주목하는 것은 오류의 원인에 대한 다각적인 접근을 통해 적절한 교수학적 도움과 실행으로 발전하여 학생의 오류의 지속성과 반복성을 차단할 수 있다는 점에서 E3 이하와는 교수 실행과 계획의 다양성 측면과 관련하여 차별성을 갖는다.

- K18: “자릿값에 대한 개념을 제대로 이해하지 못하고 있다 받아올림이 있는 덧셈 문제인데도 불구하고 받아올림 없이 각 자리만을 더하고 있다.”

한편, 아라의 오류를 정확히 주목하는 능력(E3, E4에 해당)의 유무가 예비교사가의 소속 국가와 서로 관련이 있는지를 조사하기 위하여 Table 5의 E1과 E2를 묶어 오류를 정확히 주목하지 못하는 Error Group 1(한국: 1명, 미국: 1명)과, E3와 E4를 묶어 오류를 정확히 주목하는 Error Group 2(한국: 25명, 미국: 19명)를 구성하여 피셔의 정확검정을 수행한 결과, $p=.829(>.05)$ 로 통계적으로 유의하지 않은 것으로 나타나 아라의 오류에 한하여 예비교사가 오류를 정확히 주목하는 능력의 유무는 소속 국가와 관련이 없는 것으로 분석되었다. 다시 말해, ‘받아 올림을 하지 않는 오류’를 주목하는 능력은 통계적으로 소속 국가와 관련이 없다. 특히, 비율을 고려하여 구체적으로 살펴보면 Error Group 1에 해당하는 한국과 미국 예비교사의 비율은 각각 3.8%, 5%이고, Error Group 2에 해당하는 한국과 미국 예비교사의 비율은 각각 96.2%, 95%이며, 이를 통해 오류를 모두 정확히 주목하는 능력을 보인 예비교사의 비율이 한국(96.2%)과 미국(95%) 모두 매우 높음을 알 수 있다. 한편 양국 예비교사들이 주목한 미아의 오류와 직간접적으로 관련될 수 있는 수학 개념은 ‘자릿값’이었으며, 그 빈도수가 일치하여 양국 간에 통계적 차이가 없으므로 나타났다.

V. 결론 및 논의

본 연구는 한국과 미국의 예비 초등교사 46명을 대상으로 학생들의 자연수의 덧셈과 뺄셈 연산에 대한 오류를 분석하는 과정에서 나타난 양국 예비교사의 특징을 조사하였다. 이를 위하여 Mathematics Assessment Project에서 개발된 학생의 오류의 예를 활용하여 한국과 미국의 초등학교 예비교사들이 수행한 오류 분석을 분석하였다. 예비교사들이 수행한 오류 분석을 분석한 결과, 연산 전략 및 오류의 특성에 따라 오류를 파악하는 수준이 상이하였고 몇 가지 교수학적으로 주목할 만한 두드러진 특징을 발견하였다. 이러한 특징의 교수학적 의미와 이로부터 얻을 수 있는 교사교육과 교육과정 측면에서의 시사점은 다음과 같다.

1. 양국 예비교사의 학생들의 수학적 전략과 오류 분석의 특징

재석의 뺄셈 풀이에 포함된 ‘무조건 큰 수에서 작은 수 빼기’ 오류를 한국과 미국의 예비교사가 분석할 때 나타난 두드러진 특징은 해당 오류를 정확히 주목하는 능력에 통계적으로 유의미한 차이가 있다는 점이다. 특히, 비율을 통해 살펴보면 해당 오류를 정확히 주목한(E3, E4를 포함한 Error Group 2) 한국 예비교사의 비율은 65.4%로 비교적 높은 반면, 미국 예비교사의 비율은 30%로 비교적 낮음을 알 수 있다. 이러한 점들을 종합하면 뺄셈과 관련된 ‘무조건 큰 수에서 작은 수 빼기’ 오류에 한해서는 비율적으로 한국의 예비교사 집단이 미국의 예비교사 집단보다 비교적 오류를 정확하게 주목하고 분석하는 것으로 보인다.

미아의 뺄셈 풀이에 포함된 수학적 사고로서의 뺄셈에 대한 비전형적인 대안 전략과 그 과정에 포함된 ‘자릿값’ 오류를 양국 예비교사가 분석할 때 나타난 두드러진 특징은 해당 전략과 오류를 정확히 주목하는 능력에는 양국의 예비교사 그룹 간의 통계적으로 유의미한 차이가 관찰되지 않았다는 점이다. 구체적으로, 해당 비전형적인 전략과 오류를 정확히 주목하지 못한 Error Group 1(E1, E2)에서의 한국과 미국의 예비교사의 비율은 각각 84.6%, 75%이다. 특히, E1의 비율이 재석과 아라의 E1의 비율과 비교했을 때 현저히 높다. 이러한 점들을 종합하면 미아의 수학적 전략 및 오류에 관해서는 양국 예비교사 집단 모두가 비율적으로 대안 전략과 그 과정에 포함된 오류 각각을 정확히 주목하고 분석하는데 있어서 비교적 어려워하는 것으로 보인다.

아라의 덧셈 풀이에 포함된 ‘받아 올림 하지 않음’ 오류를 양국 예비교사가 분석할 때 나타난 두드러진 특징은 미아의 경우와 마찬가지로 해당 오류를 정확히 주목하는 능력에는 양국의 예비교사 그룹 간에 유의미한 차이가 관찰되지 않았다. 다시 말해 양국의 예비교사가 ‘받아 올림 하지 않음’ 오류를 정확히 주목하는 능력과 관련해서는 통계적으로 차이가 없다. 구체적으로, 해당 오류를 정확히 주목한 Error Group 2(E3, E4)에서의 한국과 미국의 예비교사의 비율은 각각 96.2%, 95%이다. 이러한 점들을 종합하면 덧셈에 대한 전형적인 오류인 ‘받아 올림 하지 않음’ 오류에 한해서는 양국 예비교사 집단 모두가 비율적으로 해당 오류를 정확히 주목하고 분석하는데 있어서 능숙한 것으로 보인다. 특히, 앞선 두 오류의 맥락과는 달리 ‘받아올림’이라는 덧셈과 관련된 절차적 지식에 대한 오류를 정확히 주목하고 분석한 것으로부터 예비교사들이 절차적 지식과 관련된 맥락에서의 오류에 대해서는 비교적 친숙하며 이에 대한 주목하기 능력은 높은 것으로 해석할 수 있다. 이는 Fuller(1996)와 Ball과 Wilson(1990)의 연구에서 초등학교 예비교사들이 범자연수 연산에 대한 절차적 지식을 소유하고 있다는 결과와 맥을 같이한다고 볼 수 있다.

한편, 뺄셈의 전형적인 오류인 ‘무조건 큰 수에서 작은 수 빼기’ 오류, 덧셈의 전형적 오류인 ‘받아

한국과 미국 예비 초등교사는 자연수 덧셈과 뺄셈 연산에 대한 학생의 수학적 전략과 오류를 어떻게 분석하는가

올림 하지 않음' 오류, 그리고 학생의 뺄셈에 대한 비전형적인 전략과 그 과정에 포함된 오류를 양국의 예비교사가 분석할 때 나타난 공통적인 특징은 두 가지이다. 첫째는 양국 예비교사가 각각의 오류를 분석할 때 해당 오류와 직간접적으로 관련 혹은 원인이 될 수 있는 수학 개념을 주목하기도 한다는 점인데, 이는 오류 대신 이러한 수학 개념만을 주목하는 경우(E2)와 오류와 더불어 이러한 수학 개념도 더불어 주목하는 경우(E4)로 구분된다. 특히, 양국 예비교사들은 학생 풀이에 포함된 오류를 정확히 주목(E3)하기 어려울수록 해당 오류 대신 그 오류와 직간접적으로 관련 혹은 원인이 될 수 있는 수학적 개념만 주목(E2)하려는 경향이 있는 것으로 보인다. 예를 들어, 미국 예비교사 집단은 재석의 풀이에서 오류를 정확히 주목(E3)한 비율이 30%로 비교적 낮을 때, 해당 오류와 직간접적으로 관련 혹은 원인이 될 수 있는 '빌려오기(borrowing)'와 같은 수학 개념만을 주목(E2)한 비율은 65%에 달한다. 같은 맥락에서, 양국 예비교사 집단 모두 비율적으로 오류를 정확히 주목하는데 어려워하였던 미아의 풀이에서도 오류와 직간접적으로 관련 혹은 원인이 될 수 있는 수학 개념만을 주목한 비율이 한국과 미국에서 각각 57.7%, 40%에 달한다. 반면, 양국 예비교사 집단 모두 대부분이 오류를 정확히 주목(E3)하였던 아라의 풀이에서는 해당 오류와 직간접적으로 관련 혹은 원인이 될 수 있는 수학 개념만을 주목(E2)한 비율이 한국과 미국에서 각각 3.8%, 0%밖에 되지 않는다.

둘째는 양국 예비교사가 재석, 미아, 아라의 풀이에서 주목한 오류와 직간접적으로 관련 혹은 원인이 될 수 있는 수학 개념은 통계적으로 차이가 없다는 점이다. 이러한 수학 개념에는 '받아올림, 받아내림(carrying, taking from)', '빌려오기(borrowing)', '뺄셈의 규칙(subtraction rules)', '자릿값(place value)', '수의 의미(as a whole number)' 등이 있으며, 이를 통해 덧셈과 뺄셈 관련한 양국 교육과정에 부분적이지만 사회·문화적 유사성이 있음을 유추할 수 있다.

미국의 예비교사의 경우, 교육과정에서 강조하고 있는 받아올림, 받아내림의 개념이 학생들의 수학적 사고 전략이나 오류를 분석하는데 반영되고 있는 것으로 보인다. 오류 그 자체를 분석하기 보다는 이 오류가 나온 이유가 받아내림이나 받아올림 개념을 적용하지 않기 때문이라 분석하고 있다. 이것은 잘못된 분석이라기보다 유추와 가정이 적용된 분석이라고 볼 수 있다. 또한 미국 초등 수학교육과정에서 가장 중요한 개념이라 강조하고 있는 자릿값의 개념도 미국 예비교사들의 분석에서 더 많이 부각되고 있는 점도 양국 간의 교육과정이 예비교사의 사고에 영향을 미치는 것으로 보인다.

또한 한국교사들의 분석에서 언급된 역연산 개념에 대한 것도 한국의 교육과정이 예비교사들의 사고에 직접적 영향을 미친 것으로 보인다. 또한 앞서서도 언급했듯이, 미국의 교사교육의 초점이 내용학 보다는 교수법에 중점을 두고 있어서 미국 예비교사들의 분석에서도 수학 개념과 과정에 중점을 둔 분석보다는 교수법적 접근에 대한 언급도 한국의 예비교사의 분석에서보다는 더 많이 보인다.

선행연구에서 언급하였듯이 교사가 학생의 수학적 전략과 수학적 오류를 분석하는 것은 해당 학생에게 제공해야 할 피드백의 방향과 방법을 결정하고, 적절한 반응적 교수를 결정하기에 중요한 역할을 한다(김희정 외, 2017; Ball, 1991; Borasi, 1987; McLaren et al., 2012). 따라서 본 연구에서 수행한 예비교사의 초등학생의 수학적 전략과 오류 분석에 관한 연구를 예비교사 교육과정에서 논하면 다음과 같은 시사점을 얻을 수 있다.

2. 학생의 수학적 전략과 오류 분석을 통해 본 예비 교사교육에의 시사점

본 연구의 결과인 뺄셈의 전형적인 오류인 '무조건 큰 수에서 작은 수 빼기' 오류, 덧셈에서 흔히 보이는 '받아 올림 하지 않음' 오류, 그리고 학생의 비전형적인 뺄셈의 대안 전략과 그 과정에 포함된 오류를 예비교사가 분석하는 과정에서 나타난 특징을 교사교육의 측면에서 논의하고자 한다.

첫째, 예비교사의 전문 내용 지식(SCK)과 관련하여 오류와 해당 오류와 직간접적으로 관련 및 원인이 될 수 있는 수학적 개념을 예리하게 구분하여 분석할 수 있는 기회를 제공하는 것이 중요할 것이다. 만약 교사가 오류를 분석할 때 오류를 정확하게 주목하지 못한 채 해당 오류와 관련 가능성이 있는 개념을 유추하여 주목한다면(E2), 적절하고 정교한 반응적 교수에 이르지 못할 수 있다. 예를 들어, ‘무조건 큰 수에서 작은 수 빼기’ 오류를 가진 아라와 같은 학생이 $46-27=21$ 과 같이 풀었을 때 교사가 이러한 오류를 정확하게 주목하지 못한 채 관련 가능성이 있는 수학 개념인 ‘받아내림’에 주목하여 ‘받아내림을 하지 못한다’라고 분석했다면, 같은 학생이 동일한 오류로 인해 $4-7=3$ 이라고 풀었을 때는 ‘받아내림’이 없는 한 자릿수 뺄셈이므로 단순히 ‘틀렸다’ 혹은 ‘뺄셈을 못한다’와 같은 단편적인 해석에 이를 수 있다. 다시 말해 $4-7=3$ 에 내재한 큰 수에서 작은 수를 빼려는 학생의 사고 과정을 정확하게 포착하기 어렵다. 이와 같이 교사가 인식한 오류에 대하여 잘못된 해석을 내리면, 이어지는 반응적 교수는 무의미할 수밖에 없으므로(Ball et al., 2008; Peng & Luo, 2009) 경계할 필요가 있다. 한편, 교사가 오류와 더불어 해당 오류와 직간접적으로 관련 및 원인이 될 수 있는 수학적 개념을 함께 주목한다면, 학생의 오류를 바로잡기 위하여 다각적인 측면에서의 반응적 교수에 이를 수 있다. 이러한 점에서 교사가 오류와 해당 오류와 직간접적으로 관련 및 원인이 될 수 있는 수학적 개념을 예리하게 구분하여 분석할 수 있는 역량을 갖출 필요가 있다. 그러므로 예비교사 교육과정에서 오류와 더불어 해당 오류와 관련 및 원인이 될 수 있는 수학적 개념을 함께 주목하고 분석할 수 있도록 관련 전문 내용 지식(SCK)에 대한 교육과 실제적 경험을 제공할 필요가 있다.

둘째, 학생의 창의적이고 교과서에서 보여주는 일반적 전략이 아닌 대안적(alternative) 접근법에 대한 이해를 양국 교사교육에서 더 강조할 필요가 있다. 미아의 풀이에 나타난 비전형적 대안 연산 전략을 정확히 주목하지 못한 한국과 미국의 예비교사의 비율이 각각 84.6%, 75%에 달하는 것(Error Group 1: E1과 E2를 포함)에서 알 수 있듯이 양국 예비교사 집단 모두가 비율적으로 비전형적인 대안 전략을 정확히 주목하는데 있어서 어려움을 겪는 것을 알 수 있다. 특히, 비전형적인 대안 전략을 주목하였음에도 불구하고 이를 틀린 전략으로서의 오류로 받아들인(E2) 한국과 미국 예비교사의 비율이 각각 57.7%, 40%에 달한다. 교사는 수업시간에 학생의 비전형적인 전략을 마주했을 때, 이를 이해할 수 있어야만 이어서 적절한 반응적 교수를 결정할 수 있다(Ball et al., 2008). 또한 교사가 학생의 비전형적 대안 전략을 읽어낼 수 있다면 학생의 그러한 사고를 보존하고 확장할 수 있을 뿐만 아니라 학생으로 하여 다양한 발산적 사고를 지향하는 태도를 갖게 할 수 있다. 그러나 반대로 교사가 학생의 비전형적 대안 전략을 읽어내지 못한다면 적절한 반응적 교수를 결정하기 어렵고, 학생의 독특한 사고를 제한하기 쉬울 뿐만 아니라 학생으로 하여 교사가 제시하는 방법만을 수용하려는 태도를 갖게 할 수 있다. 이와 같이 교사의 비전형적 대안 전략을 읽어내는 능력은 적절한 반응적 교수, 학생의 사고와 학습 태도에 영향을 미칠 수 있다는 점에서 대단히 중요하다. 그러므로 양국 예비교사에서 다양한 비전형적 대안 전략에 대한 교육을 통해 이를 읽어내는 능력과 태도를 개발할 수 있도록 관련된 교수를 위한 전문 내용 지식(SCK)에 대한 교육과 경험을 제공할 필요가 있다. 특히, 학생의 비전형적인 전략에 주목한 한국 예비교사의 비율(15.3%, Error Group 2)이 미국 예비교사의 비율(25%, Error Group 2)보다 낮다는 점에서, 한국 예비교사 교육과정에서 이러한 전문 내용 지식(SCK)의 교육과 경험의 시급성과 필요성이 비교적 더욱 부각된다.

셋째, 뺄셈 관련 오류에 대한 이해와 비전형적인 전략을 분석하고, 그와 관련하여 학생 사고에 적절한 반응적 교수를 양국 예비교사 교육과정에서 더 강조할 필요가 있다. 아라의 풀이에 포함된 덧셈 관련 오류에 대해서는 오류를 정확하게 주목하고 분석한 양국 예비교사의 비율이 매우 높았다. 반면, 재석의 풀이 포함된 뺄셈 관련 오류에 대해서는 오류를 정확하게 주목하고 분석한 양국 예비교사의 비율이 비교적 낮았다. 특히, 미국 예비교사 중에서 재석의 뺄셈 관련 오류를 정확히 주목하고 분석한

한국과 미국 예비 초등교사는 자연수 덧셈과 뺄셈 연산에 대한 학생의 수학적 전략과 오류를 어떻게 분석하는가

비율은 30%밖에 되지 않는다. 다시 말해, 아라와 재석의 풀이가 모두 전형적인 세로셈 계산 알고리즘 따르고 있지만, 재석의 풀이에서 오류를 정확히 주목한 예비교사의 비율이 비교적 낮으므로, 예비교사는 덧셈 관련 오류보다 뺄셈 관련 오류를 분석하는데 있어서 비교적 어려워하는 것으로 보인다. 따라서 뺄셈 관련 오류에 대한 전문 내용 지식(SCK) 교육을 양국 예비교사 교육과정에서 강조하여 교수 학습을 향상할 수 있도록 제언한다.

넷째, 한국 국가 교육과정이나 미국의 주별 기준의 교수·학습 방법에서 학생들의 전형적인 오류나 비전형적인 전략을 분석하고 반응적 교수에 대한 안내를 제안하고자 한다. 현재 양국의 교육과정에서는 교수·학습 방법으로서 오류 분석의 중요성을 강조하거나 학생들의 전형적이거나 비전형적인 오류에 대한 내용을 찾아보기는 어렵다. 한국의 경우, 교사의 수업은 교육과정 개정이나 연수와 같은 범국가적 차원에서의 위로부터의 변화에 상당한 영향을 받고 있기에 교육과정에서 오류 분석을 강조하지 않는다면, 실제 교실수업에서도 오류 분석에 소극적일 수 있다. 그러므로 교육과정에서 교수·학습 과정에서의 오류 분석의 중요성을 강조함과 동시에 학생의 오류와 오개념과 관련한 풍부한 자료와 기회를 제공함으로써 교사들이 교수·학습 방법으로서 학생의 수학적 오류를 분석하고 성찰하여 수학적 사고에 반응적 교수를 수행할 수 있도록 지원할 수 있는 방향을 제안한다.

참고 문헌

- 교육부 (2015). **수학과 교육과정**. 교육부 고시 제2020-236호 [별책 8].
- 김수미 (2003). 수학과 오류의 진단과 처방에 관한 교사용 자료 개발 연구. **학교수학**, 5(2), 209-221.
- 김희정, 고은성, 이동환, 조진우, 조형미, 최지선, 한채린, 황지현 (2020). **수학 학습 어려움 진단을 위한 평가 문항 개발**. 한국과학창의재단 연구보고서.
- 김희정, 조형미, 고은성, 이동환, 조진우, 최지선, 한채린, 황지현 (2022). 초등학교 수학 학습 어려움 진단을 위한 평가 문항 개발 및 적용 연구. **한국학교수학회논문집**, 25(3), 261-278.
- 김희정, 한채린, 배미선, 권오남 (2017). 수학 교사의 주목하기와 반응적 교수의 관계: 모든 학생의 수학적 사고 계발을 지향하는 수업 상황에서. **수학교육**, 56(3), 341-363.
- 우정환, 김영걸, 신재훈 (2007). 수학학습장애 학생의 연산 오류 특성. **특수교육저널 : 이론과 실천**, 8(3), 575-596.
- 이승국 (2011). 한국 교사들과 미국 교사들의 감성지능 비교 연구. **한국초등교육**, 21(3), 119-130.
- 정영근 (2010). 세계화시대 비교교육학 연구의 문제와 과제 - 국제교육정책 비교연구의 문제점을 중심으로-. **교육의 이론과 실천**, 15(1), 123-142.
- 최진숙, 유현주 (2006). 덧셈·뺄셈의 오류유형 분석 및 지도방안에 대한 연구 - 초등학교 3학년을 중심으로-. **교과교육학연구**, 10(2), 303-327.
- 장수연, 안병곤 (2010). 수와 연산영역의 오류유형에 따른 효과적인 지도 방안. **한국초등수학교육학회지**, 14(2), 355-376.
- Ashlock, R. B. (2006). *Error patterns in computation: Using error patterns to improve instruction*. New Jersey: Pearson Merrill Prentice Hall.

- Bailey, A. L., & Drummond, K. V. (2006). Who is at risk and why? Teachers' reasons for concern and their understanding and assessment of early literacy. *Educational Assessment, 11*(3), 149-178.
- Ball, D. L. (1991). Teaching mathematics for understanding: What do teachers need to know matter? In M. Kennedy (Ed.), *Teaching academic subjects to diverse learners* (pp. 63-83). New York: Teachers College Press.
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. *Journal of teacher education, 59*(5), 389-407.
- Ball, D. L., & Wilson, S. M. (1990). *Knowing the subject and learning to teach it: Examining assumptions about becoming a mathematics teacher*. East Lansing, MI: National Center for Research on Teacher Education.
- Black, P., & Wiliam, D. (1998). Assessment and classroom learning. *Assessment in education, 5*(1), 7-74.
- Bartell, T., Bieda, K., Breyfogle, M. L., Crespo, S., Dominguez, H., Drake, C., & Herbel-Eisenmann, B. (2013). Strong is the silence: Challenging systems of privilege and oppression in mathematics teacher education. *Journal of Urban Mathematics Education, 6*(1), 6-18.
- Borasi, R. (1987). Exploring mathematics through the analysis of errors. *For the Learning of Mathematics, 7*(3), 2-8.
- Brown, J. S., & Vanlehn, K. (1980). Repair theory: A generative theory of bugs in procedural skills. *Cognitive Science, 4*(4), 379-426.
- Brown, J. S., & Burton, R. R. (1978). Diagnostic model for procedural bugs in basic mathematical skills. *Cognitive Science, 2*(2), 155-192.
- Clarke, D. J., Keitel, C., & Shimizu, Y. (2006). *Mathematics Classrooms in Twelve countries: The Insider's Perspective*. Rotterdam, Netherlands: Sense publishers.
- Ding, M. (2008). Teacher knowledge necessary to address student errors and difficulties about equivalent fraction. In G. Kulm (Ed.), *Teacher Knowledge and Practice in Middle Grades mathematics* (pp. 147-171). Rotterdam, Netherlands: Sense publishers.
- Fuller, R. A. (1996). *Elementary teachers' pedagogical content knowledge of mathematics*. Mid-western Educational Research Association Conference, Chicago.
- Fyfe, E. R., & Rittle-Johnson, B. (2017). Mathematics practice without feedback: A desirable difficulty in a classroom setting. *Instructional Science, 45*(2), 177-194.
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. New York: Routledge.
- McLaren B. M., Adams, D., Durkin, K., Gogvadze, G., Mayer, R. E., Rittle-Johnson, B., Rittle-Johnson, S., Isotani, S., & Velsen, M. V. (2012). To err is human, to explain and correct is divine: A study of interactive erroneous examples with middle school math students. In A. Ravenscroft, S. Lindstaedt, C. D. Kloos & D. Hernández-Leo (Eds.), *21st Century Learning for 21st Century Skills* (pp. 222-235). New York: Springer.
- Murchan, D., & Oldham, E. (2011). *Exploring diagnostic error analysis methodologies in the context of e-assessment in primary-level mathematics*. Annual meeting of the Association for Educational Assessment, Belfast.

한국과 미국 예비 초등교사는 자연수 덧셈과 뺄셈 연산에 대한 학생의 수학적 전략과 오류를 어떻게 분석하는가

- Peng, A., & Luo, Z. (2009). A framework for examining mathematics teacher knowledge as used in error analysis. *For the Learning of Mathematics*, 29(3), 22-25.
- Ruiz-Primo, M. A., Li, M., Tsai, S., & Schneider, J. (2010). Testing one premise of scientific inquiry in science classrooms: Examining students' scientific explanations and student learning. *Journal of Research in Science Teaching*, 47(5), 583-608.
- Schneider, M. C., & Gowan, P. (2013). Investigating teachers' skills in interpreting evidence of student learning. *Applied Measurement in Education*, 26(3), 191-204.
- Shalem, Y., Sapire, I., & Sorto, M. (2014). Teachers' explanations of learners' errors in standardised mathematics assessments. *Pythagoras*, 33(1), 1-11. doi:<https://doi.org/10.4102/pythagoras.v35i1.254>
- Shepard, L. A. (2000). The role of assessment in a learning culture. *Educational researcher*, 29(7), 4-14.
- Son, J. W. (2013). How preservice teachers interpret and respond to student errors: ratio and proportion in similar rectangles. *Educational Studies in Mathematics*, 84, 49 - 70.
- Son, J. W. (2016). Preservice teachers' response and feedback type to correct and incorrect student-invented strategies for subtracting whole numbers. *The Journal of Mathematical Behavior*, 42, 49-68.
- Young, R. M., & O'shea, T. (1981). Errors in children's subtraction. *Cognitive Science*, 5(2), 153-177.
- Vermeulen, J. A., Beguin, A., Scheltens, F., & Eggen, T. J. M. (2020). Diagnostic assessment in third-grade subtraction: The relation between bridging errors, number of errors and mathematical ability. *Assessment in Education*, 27(6), 687-706.

How Do Korean and U.S. Elementary Preservice Teachers Analyze Students' Addition and Subtraction Computational Strategies and Errors?¹⁾

Hyungmi Cho²⁾ · Hea-jin Lee³⁾ · Gima Lee⁴⁾ · Hee-jeong Kim⁵⁾

Abstract

This study explores and compares Korean and U.S. elementary preservice teachers' analytic approaches of students' addition and subtraction computational strategies. Twenty-six Korean and twenty U.S. elementary preservice teachers participated in the study. Participants were asked to analyze mathematical approaches and errors from students' addition and subtraction operations. Preservice teachers' written documents were analyzed by applying open coding and inductive coding based on the grounded theory. As a result, the pattern of error analysis and interpretation of students' addition computations were similar for both Korean and U.S. preservice teachers whereas there were some differences in the analysis of students' subtraction computations. Both Korean and U.S. preservice teachers had difficulties identifying students' strategies and errors for a complicated and unconventional computational approach. Results also indicated that preservice teachers' noticing and interpretation of students' strategies and errors were influenced by their K-12 mathematics curriculum and teacher education program. This study suggests implications and future directions for teacher education, more contextualized teacher preparation programs and balanced connection to the K-12 curriculum.

Key Words : International comparative study, Addition, Subtraction, Students' computational strategies and errors, Preservice teacher education,

Received November 29, 2022

Revised December 28, 2022

Accepted December 28, 2022

* 2010 Mathematics Subject Classification : 97C70, 97D60

1) This research was supported by the College of Education, Korea University Grant in 2022.

2) Jeonju National University of Education (hyungmi41@gmail.com)

3) The Ohio State University at Lima (lee.1129@osu.edu)

4) Korea University, Graduate School (lovejesus153@korea.ac.kr)

5) Korea University (heejeongkim@korea.ac.kr), Corresponding Author